5. Zobrazenia metrických (topologických) priestorov

Predpokladáme, že pojem zobrazenia je čitateľovi známy. Nech $f : X \to Y$ a $A \subset X$, tak množinu $\{f(x); x \in A\} \subset Y$ nazývame obrazom množiny A pri zobrazení f a označujeme $f(A)$. Podobne, ak $B \subset Y$, tak množinu $\{x; f(x) \in B\} \subset X$ nazývame vzorom množiny B pri zobrazení f a označujeme $F^{-1}(B)$. Dôležitým pojmom matematickej analýzy je pojem spojitého zobrazenia.

Definícia 5.1. *Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ sú dva topologické priestory. Nech $f : X \to Y$. Hovoríme, že zobrazenie f je spojité, ak pre každú množinu $V \in \mathcal{V}$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Potom $f : X \to Y$ je spojité zobrazenie, ak vzor každej množiny, otvorenej v priestore (Y, d'), je množina otvorená v priestore (X, d).*

Niekedy je vhodné použiť "postupnostnú" charakterizáciu spojitosti:

Veta 5.1. *Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Funkcia $f : X \to Y$ je spojitá v bode $x_0 \in X$ vtedy a len vtedy, ak pre každú postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvkov priestoru X, konvergujúcu k x_0, príslušná postupnosť $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje k $f(x_0)$.*

Poznámka 5.1. Pripomíname, že funkcia je spojitá na množine, ak je spojitá v každom bode tejto množiny.

Definícia 5.2. *Nech X, Y sú topologické (metrické) priestory. Potom $f : X \to Y$ budeme nazývať homeomorfným zobrazením (krátko homeomorfizmom), ak f je spojité a prosté zobrazenie a k nemu inverzné zobrazenie f^{-1} je tiež spojité.*

Definícia 5.3. *Nech $(X, d), (Y, d')$ sú metrické priestory. Nech $f : X \to Y$. Zobrazenie f nazveme izometrickým, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in X$ platí: $d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2))$.*

Definícia 5.4. *Zobrazenie f metrického priestoru (X, d) do metrického priestoru (Y, d') sa nazýva rovnomerne spojité, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé dva body $x_1, x_2 \in X$, pre ktoré $d(x_1, x_2) < \delta$ platí $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.*

Význam a dôležitosť spojitých zobrazení vidno i na nasledujúcich tvrdeniach:

Veta 5.2.

a) Spojitý obraz separabilného (metrického) priestoru je separabilný (metrický) priestor.
b) Spojitý obraz kompaktného (metrického) priestoru je kompaktný priestor.
c) Spojitý obraz súvislého (topologického, metrického) priestoru je súvislý priestor.

Veta 5.3. *Nech (X, d) je kompaktný metrický priestor a f je spojitá reálna funkcia, definovaná na X. Potom f je ohraničená na X a dosahuje na X svoje infimum a supremum (t.j. má na X maximum a minimum).*

Veta 5.4. *Nech (X, d) je kompaktný metrický priestor a (Y, d') je metrický priestor. Potom každá spojitá funkcia $f : X \to Y$ je rovnomerne spojitá na X.*

Definícia 5.5. *Nech (X, d) je metrický priestor. Zobrazenie $f : X \to X$ nazývame kontraktívnym zobrazením, ak existuje také číslo $\alpha : 0 \leq \alpha < 1$, že pre každé dva body $x, x' \in X$ platí*

$$d(f(x), f(x')) \leq \alpha.d(x, x').$$

Veta 5.5. *(Banachova veta.) Nech $\emptyset \neq X$ je úplný metrický priestor a nech $f : X \to X$ je kontraktívne zobrazenie. Potom existuje práve jeden bod $x_0 \in X$ taký, že $f(x_0) = x_0$.*

Poznámka 5.2.

a) Bod x_0, pre ktorý platí $f(x_0) = x_0$ nazývame pevným bodom kontraktívneho zobrazenia f v úplnom metrickom priestore (X, d).
b) Všimnime si, že každé kontraktívne zobrazenie je rovnomerne spojité.

Definícia 5.6. *Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, (Y, d') je metrický priestor. Nech $f : X \to Y$ a $x \in X$. Definujeme*

$$\omega_f(x) = \inf_{O(x)} \text{diam f(O(x))}.$$

Funkciu $\omega_f(x)$ nazývame osciláciou funkcie f v bode x. (Infimum vpravo berieme cez všetky okolia $O(x)$ bodu x v priestore X.)

Definícia 5.7. *Hovoríme, že funkcia $f : R \to R$ má Darbouxovu vlastnosť ak pre ľubovoľné $a, b \in R$ a ľubovoľné $x \in R$ také, že $f(a) < x < f(b)$, existuje $c : a < c < b$ tak, že $f(c) = x$. Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na intervale $< a, b >$. Konečný počet bodov $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ nazveme delením intervalu $< a, b >$. Označme $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1} \mid$.*

Definícia 5.8. *Označme*

$$\bigvee_a^b f = \sup \sum_{i=1}^{n} \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid,$$

kde supremum vpravo berieme cez všetky možné delenia intervalu $< a, b >$. "Číslo" $\bigvee_a^b f$ nazývame variáciou funkcie f na intervale $< a, b >$.

Ak $\bigvee_a^b f$ je konečné číslo, hovoríme, že funkcia f má ohraničenú variáciu na intervale $< a, b >$.

Ak $\bigvee_a^b f = +\infty$, hovoríme, že funkcia f má neohraničenú variáciu na intervale $< a, b >$.

Veta 5.6.

a) *Každú funkciu s ohraničenou variáciou možno vyjadriť v tvare rozdielu dvoch rastúcich funkcií.*

b) *Každú spojitú funkciu s ohraničenou variáciou možno vyjadriť v tvare rozdielu dvoch spojitých rastúcich funkcií.*

159. Nech $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{V})$ sú dva topologické priestory. Nech $f : X \to Y, x_0 \in X$. Funkcia f je spojitá v bode x_0 vtedy a len vtedy, ak ku každej množine $B \in \mathcal{V}$, $f(x_0) \in B$ existuje taká množina $A \in \mathcal{T}$, $x_0 \in A$, že $f(A) \subset B$. Dokážte!

160. Nech $f : X \to Y$. Potom f je spojitá v každom izolovanom bode svojho definičného oboru. Dokážte!

161. Ukážte, že ak f je spojité a prosté zobrazenie priestoru X na priestor Y, tak f^{-1} (inverzné zobrazenie) nemusí byť spojité.

162. Nech f je izometrické zobrazenie metrického priestoru (X, d) na metrický priestor (Y, d'). Potom f je homeomorfné zobrazenie. Dokážte!

163. Každé izometrické zobrazenie je rovnomerne spojité. Obrátene však nemusí platiť. Dokážte!

164. Dokážte, že zobrazenie f topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$ do topologického priestoru $(Y, \mathcal{V})$ je spojité na X práve vtedy, ak vzor $f^{-1}(F)$ ľubovoľnej uzavretej množiny $F \subset Y$ je uzavretá množina v X.

165. Nech $A(B)$ je ľubovoľná podmnožina definičného oboru (oboru hodnôt) funkcie f. Overte platnosť nasledujúcich rovností:
a) $f^{-1}(f(A)) = A$.
b) $f(f^{-1}(B)) = B$.

166. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $f, g : X \to R = (-\infty, +\infty)$. Ak f, g sú spojité v bode $x_0 \in X$, tak aj súčet $(f + g)$, súčin $(f.g)$, násobok $(\alpha.f)(\alpha \in R)$ a absolutná hodnota $\mid f \mid$ sú spojitými funkciami v bode x_0. Dokážte! Ako je to s podielom $\frac{f}{g}$?

167. Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva diskrétny, ak každý jeho bod je izolovaný (teda $\mathcal{T} = 2^X$). Dokážte: Topologický priestor je diskrétny vtedy a len vtedy, keď každá reálna funkcia $f : X \to R$ je spojitá na X.

168. Ak f, g sú rovnomerne spojité reálne funkcie, definované na priestore X a $\alpha, \beta \in R$, potom aj $\alpha.f + \beta.g$ je rovnomerne spojitá funkcia. Dokážte! Platí podobné tvrdenie aj o súčine $f.g$?

169. Nech X, Y sú metrické priestory, $f : X \to Y$. Nech $x_0 \in X^d$ (hromadný bod množiny X). Dokážte, že funkcia f je spojitá v x_0 práve vtedy, keď $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Čo vieme povedať o spojitosti funkcie f v bode x_0, keby x_0 bol izolovaným bodom priestoru X?

170. Nech f je spojitá reálna funkcia, definovaná na (topologickom, metrickom) priestore X. Dokážte, že pre každé $a, b \in R$ platí:
a) Každá z množín $\{x \in X; f(x) \leq a\}, \{x \in X; f(x) \geq a\}, \{x \in X; a \leq f(x) \leq b\}$ je uzavretá v X.
b) Každá z množín $\{x \in X; F(x) < a\}, \{x \in X; f(x) > a\}, \{x \in X; a < f(x) < b\}$ je otvorená v X.

171. Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, (Y, d') je metrický priestor. Potom funkcia $f : X \to Y$ je spojitá v bode $x \in X$ vtedy a len vtedy, ak $\omega_f(x) = 0$. Dokážte!

172. Nech funkcia f je definovaná na priestore X. Označíme: $C_f = \{x \in X; f$ - spojitá v $x\}$ a $D_f = \{x \in X; f$ - nespojitá v $x\}$. Ukážte, že pre každú funkciu f platí:
a) D_f je množina typu F_σ.
b) C_f je množina typu G_σ.

173. Dokážte, že funkcia definovaná na celej reálnej priamke nemôže mať za body spojitosti spočitateľnú hustú podmnožinu $E \subset R$ a body nespojitosti $D_f = R \setminus E$.

174. Zostrojte nasledujúce funkcie definované na R:
a) $F(x)$ -ktorá je spojitá v bodoch $x = \pm 1$ a všade inde nespojitá.
b) $f(x)$: spojitá pre $x = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ a všade inde nespojitá.

175. Určte body spojitosti, resp. nespojitosti, nasledujúcej funkcie definovanej na $< 0, 1 >$:

$f(x) = 0$ v bodoch Cantorovej množiny (pozri príklad 30. z textu).

$f(x) = 1$ v stredoch styčných intervalov (ktoré vynechávame pri konštrukcii Cantorovej množiny) a všade inde lineárna.

176. Zostrojte funkciu definovanú na intervale $< 0, 1 >$, ktorá je spojitá v každom iracionálnom bode tohoto intervalu a nespojitá v každom racionálnom bode. (Doporučujeme si uvedomiť, že taká funkcia, ktorá by mala vymenené body spojitosti a nespojitosti, neexistuje. Pozri príklad 173.)

177. Na príkladoch ukážte, že spojitý obraz:
a) uzavretej množiny nemusí byť uzavretá množina,
b) otvorenej množiny nemusí byť otvorená množina.

178. Ak f - spojitá, tak vzor otvorenej množiny je otvorená (definícia 5.1) a vzor uzavretej množiny je uzavretá (príklad 164.). Platí: Ak f je spojitá funkcia, $f : X \to Y$ a $M \subset Y, M$ - kompaktná, tak $f^{-1}(M)$ je kompaktná podmnožina X?

179. Nech $f : R \to R$, potom f je spojitá práve vtedy, ak:
a) $f^{-1}((a, b))$ je otvorená v R, pre každé $a, b \in R$.
alebo
b) $f^{-1}((-\infty, a >)$ a tiež $f^{-1}(< a, +\infty))$ sú uzavreté pre každé $a \in R$.

180. Nech (X, d) je metrický priestor. Dokážte, že funkciu $f(x) = d(x, y_0)$,
(y_0 - ľubovoľný pevný bod z X) je rovnomerne spojitá a teda i spojitá na X.

181. Nech $f : R \to R$, f - je spojitá. Potom f má Darbouxovu vlastnosť.

182. Je vždy funkcia, ktorá má Darbouxovu vlastnosť spojitá?

183. Nech $f : X \to Y$, f - spojitá. Nech $E \subset X$, E - hustá v X. Potom $f(E)$ je hustá v $f(x)$. Dokážte!

184. Nech $f : X \to Y$. Dokážte, že k spojitosti funkcie f stačí, aby vzory všetkých otvorených sfér priestoru Y boli otvorené množiny v priestore X. (Porovnaj s definíciou 5.1, resp. príkladom 159.)

185. Na príklade ukážte, že v podmienke kontraktívnosti (definícia 5.5) nemožno pripustiť $\alpha = 1$, totiž pre takéto zobrazenie by už nasledujúca veta 5.5 nemusela platiť!

186. Nech f je zobrazenie neprázdneho úplného metrického priestoru X do X. Označíme: $f \circ f = f^2, f^2 \circ f = f^3, \ldots$ atď. Nech pre nejaké prirodzené číslo k je zobrazenie $f^k : X \to X$ kontraktívne. Potom zobrazenie f má jediný pevný bod. Dokážte!

187. Význam predošlého cvičenia, okrem iného, spočíva v tom, že od f sme nežiadali spojitosť. Majme napr. $f :< 0,2 > \to R$ nasledovne: $f(x) = 0$, pre $x \in < 0,1 >$ a $f(x) = 1$, pre $x \in (0,2 >$. Čitateľ ľahko nahliadne, že f nie je na $< 0,2 >$ spojité, no má jediný pevný bod. Dokážte!

188. Nech funkcia $f(x)$ má na intervale $< a,b >$ variáciu rovnú A. Akú variáciu na $< a,b >$ má funkcia $(k.f(x) + m)$?

189. Vypočítajte variáciu funkcie $f(x) = \begin{cases} x-1, & x<1 \\ 10, & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$ na intervale $< 0,2 >$.

190. Nech funkcia $f(x)$ má v každom bode intervalu $< a,b >$ deriváciu, ktorá je ohraničená na $< a,b >$. Potom funkcia $f(x)$ je funkciou s ohraničenou variáciou na intervale $< a,b >$. Dokážte!

191. Z matematickej analýzy je známa skutočnosť, že rovnomerne konvergentný funkcionálny rad zachováva spojitosť, deriváciu a integrál. Preto je na mieste otázka:

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je rovnomerne konvergentný funkcionálny rad spojitých funkcií s ohraničenou variáciou. Je i súčet tohoto radu funkcia s ohraničenou variáciou?

192. Nech $f(x)$ a $g(x)$ sú funkcie s ohraničenou variáciou na $< a,b >$. Dokážte, že ich súčet a súčin sú funkcie s ohraničenou variáciou na $< a,b >$ a naviac $\bigvee_a^b (f+g) \le \bigvee_a^b + \bigvee_a^b$; $\bigvee_a^b f.g \le \sup_{x \in <a,b>} |f(x)| \,.\, \bigvee_a^b g(x) + \sup_{x \in <a,b>} |g(x)| \,.\, \bigvee_a^b f(x)$.

193. Nech $f(x)$ je definovaná na $< a,b >$ a $a < c < b$. Potom $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b b$.

194. Nech $f(x)$ má ohraničenú variáciu na intervale $< a,b >$. Potom aj funkcia $| f(x) |$ má ohraničenú variáciu na $< a,b >$. Dokážte! Platí i obrátené tvrdenie?