3. Funkcie určené implicitne

Veta 3.1. *Ak je funkcia $F : U \to R$ definovaná v okolí U bodu $(x_0, y_0) \in R^2$ a je taká, že*
1. $F \in C^{(k)}(U; R)$, *kde* $k \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

potom existuje dvojrozmerný interval $I = I_x \times I_y$, (kde $I_x = \{x \in R :| x - x_0 |< \delta\}$, $I_y = \{y \in R : | y - y_0 |< \eta\}$), ktorý patrí do okolia U bodu x_0, y_0, a jediná funkcia $f \in C^{(k)}(I_x; I_y)$ taká, že pre každý bod $(x, y) \in I$

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x)$$

a pre deriváciu $f'(x)$ funkcie $f(x)$ platí:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\Bigg]_{y=f(x)}.$$

V tomto prípade hovoríme, že funkcia $f(x)$ je implicitne určená rovnicou $F(x, y) = 0$ a podmienkou $y = f(x_0)$.

Poznámka 3.1. Ak $\{(x, y) \in R^2 : F(x, y) = 0\}$ je grafom funkcie $f(x)$, potom hovoríme, že $f(x)$ je určená implicitne rovnicou $F(x, y) = 0$.

Veta 3.2. *Ak je funkcia $F : U \to R$ definovaná v okolí U bodu $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) \in R^{n+1}$ a je taká, že*
1. $F \in C^{(k)}(U; R)$, $k \geq 1$,
2. $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$,
3. $F'_y(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0) \neq 0$,

potom existuje $(n + 1)$ - rozmerný interval $I = I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n} \times I_y$, (kde $I_{x_i} = \{x_i \in R : |x_i - x_i^0| < \delta_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $I_y = \{y \in R : \ |y - y^0| < \eta\}$), ktorý patrí do okolia U bodu $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$ a jediná funkcia $f \in C^{(k)}\,(I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n}; I_y)$ taká, že pre každý bod $(x_1, \ldots, x_n, y)$ z intervalu I

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x_1, \ldots, x_n),$$

pričom parciálne derivácie funkcie $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ v bodoch x n - rozmerného intervalu $I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n}$ možno vypočítať podľa vzorca

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, y)}\Bigg]_{y=f(x_1, \ldots, x_n)}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ak pre funkciu $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ platia podmienky vety 3.2., potom hovoríme, že funkcia $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ je určená implicitne rovnicou $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ a podmienkou $y^0 = f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ alebo bodom $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$.

Funkcie určené imlicitne systémom rovníc

Veta 3.3. *Nech funkcie* $F_i : U \to R,\ i = 1, \dots, m$ *sú definované v okolí* U *bodu* $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) \in R^{n+m}$ *a také, že*

1. $F_i \in C^{(k)}(U; R),\ k \geq 1,\ i = 1, \dots, m,$
2. $F_i(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) = 0,\ i = 1, \dots, m,$
3. *funkcionálny determinant, tzv. jakobián*

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

v bode $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$.

Potom existuje $(n+m)$ *- rozmerný interval* $I = I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n} \times I_{y_1} \times \ldots \times I_{y_m}$, *(kde* $I_{x_k} = \{x_k \in R : \mid x_k - x_k^0 \mid < \delta_k\},\ k = 1, 2, \dots, n,\ I_{y_i} = \{y_i \in R : \mid y_i - y_i^0 \mid < \eta_i\},$ $i = 1, 2, \dots, m)$ *a jediný systém funkcií* $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n),\ i = 1, 2, \dots, m$ *taký, že pre každý bod* $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in I$

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \Longleftrightarrow y_i = f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n),\ i = 1, 2, \dots, m,$$

pričom parciálne derivácie funkcií $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n),\ i = 1, 2, \dots, m$, *podľa premennej* $x_k,\ k = 1, 2, \dots, n$, *v bodoch* n *- rozmerného intervalu* $I_{x_1} \times \ldots \times I_{x_n}$ *možno nájsť zo systému lineárnych algebraických rovníc*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} . \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0,\ i = 1, 2, \dots, m,$$

kde $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),\ i = 1, 2, \dots, m$ *a* $y_j = f_j(x_1, \dots, x_n),\ j = 1, 2, \dots, m.$

101. Ukážte, že dané rovnice určujú jedinú funkciu $y(x)$ v okolí bodu (x_0, y_0):

a) $x^2 + yx + y^2 = 3,\ x_0 = y_0 = 1;$ b) $xy + \ln(xy) = 1,\ x_0 = 2,\ y_0 = \frac{1}{2};$

c) $e^{x+y} + y - x = 0,\ x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = -\frac{1}{2}.$

102. Ukážte, že dané rovnice určujú jedinú funkciu $z(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0, z_0):

a) $x + y + z = \sin xyz,\ x_0 = y_0 = z_0 = 0;$

b) $x^2y^3 + y^3z^2 + z^2x^3 = 8,\ x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ z_0 = 2;$

c) $x^y + x^z + z^x = 3,\ x_0 = y_0 = z_0 = 1.$

103. Ukážte, že v bode $(1, 1, 1, 1, 1)$ vzťahy

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-5=0 \\ x_1-x_2+y_1^3-y_2^3+y_3^3-1=0 \\ x_1^3+2x_2^3+y_2y_3-4=0 \end{cases}$$

nevyhovujú predpokladom vety o existencii zobrazenia $\varphi : (y_3, y_2) \to (x_1, x_2, y_1)$, avšak vyhovujú predpokladom existencie zobrazenia φ: $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2, y_3)$.

104. Ukážte, že dané vzťahy určujú jediné zobrazenie $\varphi : X \to Y$ v okolí bodu M_0, ak

a) $\begin{cases} x_1y_1+x_2y_2-y_3y_2-1=0 \\ (x_2-x_1)(y_2-y_1)-y_1y_2y_3-1=0 \\ (x_1^2+x_2^2)(y_3^2-y_1^2)+y_1y_2=0, \end{cases}$

$X=\{(x_1,x_2)\},\ Y=\{(y_1,y_2,y_3)\},\ M_0\equiv(1,2,1,0,1)$

b) $\begin{cases} \sin(\pi x_1y_1)+\sin(\pi x_2y_2)+\sin(\pi x_3y_3)=1 \\ \cos\frac{\pi}{2}(x_1-y_2)+\cos\frac{\pi}{2}(x_2-y_1)+\cos\frac{\pi}{2}(x_3-y_1)-2=0, \end{cases}$

$X=\{(x_1,x_2,x_3)\},\ Y=\{(y_1,y_2)\},\ M_0\equiv(0,1,0,1,0)$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_1y_1}{x_2y_2}-x_1x_2y_1y_2=0 \\ x_2^2y_2^2-x_1^2y_1^2+\dfrac{1}{x_1y_1}-\dfrac{1}{x_2y_2}=0, \end{cases}$

$X=\{(x_1,x_2)\},\ Y=\{(y_1y_2)\},\ M_0\equiv(1,3,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6}).$

105. Nech je daná rovnica

$$x^2=y^2 \tag{1}$$

a

$$y=y(x)\ \ -\infty<x<+\infty \tag{2}$$

je funkcia, spĺňajúca rovnicu (1).

1. Koľko funkcií (2) spĺňa rovnicu (1)?
2. Koľko spojitých funkcií (2) spĺňa rovnicu (1)?
3. Koľko diferencovateľných funkcií (2) spĺňa rovnicu (1)?
4. Koľko spojitých funkcií (2) spĺňa rovnicu (1), ak: a) $y(1)=1$; b) $y(0)=0$?
5. Koľko spojitých funkcií $y=y(x)$ $(1-\delta<x<1+\delta)$ spĺňa rovnicu (1), ak $y(1)=1$ a δ je dostatočne malé?

106. Predpokladajúc, že v nejakom jeho okolí bodu $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ je jednoznačne implicitne určená spojitá dvakrát diferencovateľná funkcia $z(x,y)$, nájdite hodnoty uvedených derivácií v tomto bode:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, ak $x^2+y^2+z^2=R^2$;

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ak $\mathrm{arctg}\,\dfrac{z}{x}=z+x+y$;

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $x + ty + z = \ln xyz,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$;

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $x + y + z = \cos(xyz)$.

107. Dokážte, že pre funkciu $y = f(x)$ určenú implicitne rovnicou

$$1 + xy = k(x - y),$$

kde k je konštanta, platí rovnosť

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{1 + y^2}.$$

108. Dokážte, že pre funkciu $y = f(x)$ určenú implicitne rovnicou

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

pre $xy > 0$ platí rovnosť

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = 0.$$

109. Nech

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \tag{1}$$

a

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

Nájdite:

a) $f'_x(1, 1, 1)$, ak $z = z(x, y)$ je funkcia určená implicitne rovnicou (1);

b) $f'_x(1, 1, 1)$, ak $y = y(x, z)$ je funkcia určená implicitne rovnicou (1).

Vysvetlite, prečo sú tieto derivácie rôzne.

110. Nech $z = z(x, y)$ je tá diferencovateľná funkcia, určená rovnicou $z^3 - xz + y = 0$, ktorá pre $x = 3, y = -2$ nadobúda hodnotu $z = 2$. Nájdite $dz(3, -2)$ a $d^2z(3, -2)$.

111. Nájdite $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, ak $xu - yv = 0,\ yu + xv = 1$.

112. V akej oblasti roviny O_{xy} systém rovníc

$$x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3,$$

kde parametre u a v nadobúdajú všetky možné reálne hodnoty, je určená funkcia $z(x, y)$? Nájdite derivácie $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

113. Nájdite $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ak funkcia $z = z(x, y)$ je určená systémom rovníc:

$$x = \cos\varphi \cos\psi, y = \cos\varphi \sin\psi, z = \sin\varphi.$$

114. Nájdite $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ak funkcia $z = z(x, y)$ je určená systémom rovníc:

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = v.$$

115. Nájdite $\dfrac{dz}{dx}$ a $\dfrac{d^2 z}{dx^2}$, ak

$$z = x^2 + y^2,$$

kde $y = y(x)$ je funkcia určená implicitne rovnicou

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

116. Nech $u = f(z)$, kde z je implicitne určená funkcia premenných x a y rovnicou

$$z = x + x\varphi(z).$$

Dokážte Lagrangeov vzorec. $\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n} = \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ \varphi(z)]^n \dfrac{\partial u}{\partial x} \right\}$, predpokladajúc, že všetky uvažované funkcie sú diferencovateľné toľkokrát, koľkokrát potrebujeme.

117. Ukážte, že funkcia $z = z(x, y)$, určená rovnicou

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \tag{1}$$

kde $\Phi(u, v)$ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia premenných u a v (a, b sú konštanty), vyhovuje rovnici

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

118. Ukážte, že funkcia $z = z(x, y)$, určená systémom rovníc

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha), \end{aligned}$$

kde $\alpha = \alpha(x, y)$ je premenný parameter a $f(\alpha)$ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, spĺňa rovnicu

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

119. Ukážte, že funkcia $z = z(x, y)$, určená systémom rovníc

$$[z - f(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2)$$
$$[z - f(\alpha)]\, f'(\alpha) = \alpha x^2,$$

kde $\alpha = \alpha(x, y)$ je premenný parameter a $f(\alpha)$ je ľubovoľná diferencovateľná funkcia, vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

120. Ukážte, že funkcia $z = z(x, y)$, určená systémom rovníc

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha).$$
$$0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha),$$

kde $\alpha = \alpha(x, y)$ je premenný parameter a $\varphi(\alpha), \psi(\alpha)$ sú ľubovoľné dvakrát diferencovateľné funkcie, vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$