5. Taylorov vzorec. Niektoré geometrické aplikácie diferenciálneho počtu

5.1. Taylorov vzorec

Veta 5.1.1. *Nech je funkcia f definovaná v okolí U bodu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in R^n$ a patrí do triedy $C^{(k)}(U; R)$. Potom pre každý bod $x = (x_1, \dots, x_n)$ platí Taylorov vzorec:*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^i f(x^0) + R_k(x), \qquad (1)$$

kde zvyškový člen $R_k(x)$ Taylorovho vzorca v Lagrangeovom tvare je

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k . \\ .f\left(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), x_n + \theta(x_n - x_n^0) \right),$$

$0 < \theta < 1$.

5.2. Taylorov rad

Ak je funkcia $f(x)$ nekonečne diferencovateľná v bode $x^0 \in R^n$, tak mocninný rad

$$f(x^0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(x^0)$$

sa nazýva Taylorov rad funkcie $f(x)$ v bode x^0.

Veta 5.2.1. *Nech funkcia $f(x)$ je definovaná v oblasti $G \subset R^n$ a nech je nekonečne diferencovateľná v bode $x^0 \in G$. Potom v nejakom okolí bodu $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ funkciu f možno rozvinúť do Taylorovho radu*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(x^0) \qquad (2)$$

práve vtedy, keď zvyšok $R_k(x)$ v Taylorovom vzorci (1) konverguje k 0 pre $k \to \infty$.

Špeciálne prípady vzorcov (1), (2) pre $x_1^0 = 0, \ \ldots, \ x_n^0 = 0$ majú názov Maclaurinov vzorec a Maclaurinov rad.

5.3. Klasifikácia singulárnych bodov rovinných kriviek

Singulárne body (x, y) krivky $F(x, y) = 0$ sú tie, v ktorých platí

$$F(x, y) = 0,\ F'_x(x, y) = 0,\ F'_y(x, y) = 0. \tag{3}$$

Nech bod (x_0, y_0) vyhovuje podmienkam (3) a nech funkcia $F(x, y)$ je dvakrát diferencovateľná. Zavedieme označenie: $A = F''_{xx}(x_0, y_0),\ B = F''_{xy}(x_0, y_0),\ C = F''_{yy}(x_0, y_0)$. Pre klasifikáciu singulárnych bodov uvažujeme rovnicu

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}f'(x_0) + F''_{yy}{f'}^2(x_0) = 0, \tag{4}$$

ktorú dostaneme dvojnásobným derivovaním rovnice $F(x, f(x)) = 0$ a využitím (3), kde $f(x)$ je spojitá funkcia.

1. Ak $AC - B^2 > 0$, bod (x_0, y_0) je izolovaný singulárny bod. V tomto prípade má rovnica (4) komplexné korene.
2. Ak $AC - B^2 < 0$, existujú dve krivky, ktoré sa pretínajú v bode (x_0, y_0). Je to <u>uzlový</u> singulárny bod.
3. Ak $AC - B^2 = 0$, obidve krivky majú v bode (x_0, y_0) spoločnú dotyčnicu. Môžu nastať tieto prípady:

a) <u>bod vratu 1. druhu</u>, keď obidve vetvy krivky sa nachádzajú na tej istej strane spoločnej normály a na rôznych stranách spoločnej dotyčnice;
b) <u>bod vratu 2. druhu</u>, keď obidve vetvy krivky sa nachádzajú na tej istej strane spoločnej normály a na tej istej strane spoločnej dotyčnice;
c) <u>bod samodotyku</u>, keď obidve vetvy krivky sa nachádzajú na rôznych stranách spoločnej dotyčnice a na rôznych stranách spoločnej normály;
d) <u>izolovaný</u> singulárny bod.

V prípade $A = B = C = 0$ môžu byť singulárne body zložitejšieho typu.

5.4. Dotyková rovina a normála

Nech je plocha určená rovnicou $F(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in D \subset R^3$, kde F je spojitá funkcia spolu so svojimi parciálnymi deriváciami $F'_x,\ F'_y,\ F'_z$ v bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, pričom

$$[F'_x(x_0, y_0, z_0)]^2 + \left[F'_y(x_0, y_0, z_0)\right]^2 + [F'_z(x_0, y_0, z_0)]^2 > 0.$$

Potom v bode (x_0, y_0, z_0) rovnica dotykovej roviny je

$$(x - x_0)F'_x(M_0) + (y - y_0)F'_y(M_0) + (z - z_0)F'_z(M_0) = 0$$

a $x = x_0 + F'_x(M_0)t,\ y = y_0 + F'_y(M_0)t,\ z = z_0 + F'_z(M_0)t,\ t \in R$ sú parametrické rovnice normály v bode M_0 alebo

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

je jej rovnica v kanonickom tvare.

Špeciálne, ak plocha je grafom funkcie $z = f(x, y)$, kde f je diferencovateľná funkcia v bode (x_0, y_0) a $z_0 = f(x_0, y_0)$, tak

$$(x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) = z - z_0$$

je rovnica dotykovej roviny k tejto ploche v bode (x_0, y_0, z_0) a $x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t$, $y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t,\ z = z_0 - t,\ t \in R$, je rovnica normály daná v parametrickom tvare alebo

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

je jej rovnica v kanonickom tvare.

Ak plocha je daná rovnicami $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$, kde funkcie x, y, z sú spojité diferencovateľné v niektorej oblasti $D \subset R^2$, v bode $(u_0, v_0) \in D$ funkcie x, y, z nadobúdajú zodpovedajúce hodnoty x_0, y_0, z_0, potom

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0$$

je rovnica dotykovej roviny a $x = x_0 + At,\ y = y_0 + Bt,\ z = z_0 + Ct,\ t \in R$, je rovnica normály daná v parametrickom tvare alebo

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

je jej rovnica v kanonickom tvare, kde

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

pričom sa parciálne derivácie počítajú v bode dotyku.

172. Napíšte Taylorov vzorec pre funkciu $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ v okolí bodu $M = (1, -2)$.

173. Napíšte Taylorov vzorec pre funkciu $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ v okolí bodu $M = (1, 1, 1)$.

174. Nájdite prírastok funkcie $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ v bode $(x_1, y_1) = (1, -1)$ vzhľadom na bod $(x_2, y_2) = (1 + h, -1 + k)$.

175. Vypíšte členy až do 2. rádu včítane v Taylorovom vzorci pre funkciu $f(x, y) = x^y$ v okolí bodu $M(1, 1)$.

176. Napíšte Maclaurinov vzorec až do členov 4. rádu včítane pre funkciu $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

177. Odvoďte približné vzorce pre výrazy: a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$; b) arctg $\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$ použitím prvých dvoch členov Maclaurinovho vzorca.

Rozviňte do Maclaurinovho radu nasledujúce funkcie:

178. $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$.

179. $f(x,y) = \ln(1+x+y)$.

180. $f(x,y) = e^x \sin y$.

181. $f(x,y) = e^x \cos y$.

182. $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

183. Funkciu e^{x+y} rozviňte do mocninového radu, ktorého členy sú kladné celé mocniny binómov $x-1$ a $y-1$.

Preštudujte typy singulárnych bodov nasledujúcich kriviek:

184. $y^2 = ax^2 - x^3$.

185. a) $x^3+y^3-3xy=0$; b) $x^2+y^2 = x^4+y^4$; c) $(x^2+y^2)^2 = a^3(x^2-y^2)$, $a \neq 0$.

186. Vyšetrite singulárne body kriviek: a) $y^2-1+e^{-x^2}=0$; b) $(y-x^3)^2-x^5=0$.

Napíšte rovnice dotykových rovín a normál k nasledujúcim plochám v danom bode $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

187. $z = xy,\ M_0 = (5,1,5)$.

188. $x^2y^3 - xy^3 = z + \frac{3}{8},\ M_0 = (2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$.

189. $xy+xz+yz = x^3+y^3+z^3,\ M_0 = (1,1,1)$.

190. $x^3+y^3+z^3 = -xyz,\ M_0 = (1,-1,-1)$.

191. $x = u+v,\ y = u^2+v^2,\ z = u^3+v^3,\ M_0 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, $u_0 = 1,\ v_0 = 2$.

192. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v,\ M_0 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, $u_0 = 1,\ v_0 = \frac{\pi}{4}$.

193. $x = e^u + u\sin v,\ y = e^u - u\cos v,\ z = uv,\ M_0 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$, $u_0 = 1,\ v_0 = \pi$.

194. K ploche $x^2+y^2+2z^2=1$ nájdite dotykovú rovinu, ktorá je rovnobežná s rovinou $x-y+2z=0$.

195. Nájdite geometrické miesto bodov na valci $(x+z)^2+(y-z)^2=18$, v ktorých je normála rovnobežná so súradnicovou rovinou xOy.