Výsledky, návody a poznámky

$\boxed{\mathbf{3}}$ Najskôr overíme korektnosť, t.j. že pre všetky $x, y \in l^2$ je $d(x,y)$ reálne číslo. (Použite lemu 1.1).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Nie. Nie je splnená trojuholníkova nerovnosť.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Zvoľte si množinu X a funkciu $d : X \times X \to R^+$ tak, aby d mala niektoré dve vlastnosti metriky a nemala tretiu. (Napr. funkcia d v príklade 4. má vlastnosti 1. a 2. ale nemá 3.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ Nezápornosť a symetričnosť funkcie d získame vhodnou špeciálnou voľbou trojice bodov x, y, z.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Áno, áno, nie.

$\boxed{\mathbf{9}}$ c) Ak má množina X aspoň dva rôzne prvky, tak možno na X definovať nekonečne veľa metrík. Napr. tzv. triviálnych t.j. $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ \alpha > 0, & \alpha \text{ - reálne; keď } x \neq y. \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Využite: Ak $0 \le a < b$, tak $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Nie.

$\boxed{\mathbf{13}}$ a) K dôkazu trojuholníkovej nerovnosti si všimnite, že $\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta \ge \operatorname{arctg} (\alpha + \beta)$, resp. že pre funkciu $f(\alpha) = \operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta - \operatorname{arctg} (\alpha + \beta)$ platí: $f(0) = 0$ a pre $\alpha > 0$ je $f(\alpha) > 0$. b) Naša metrika d je ekvivalentná euklidovskej metrike na priamke, lebo $\operatorname{arctg} \mid x_n - x_0 \mid \to 0$ práve vtedy, keď $\mid x_n - x_0 \mid \to 0$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Áno.

$\boxed{\mathbf{15}}$ b) Všimnite si, že pre každé reálne čísla a_1, a_2, b_1, b_2 platí: $\mid a_1 - a_2 \mid + \mid b_1 - b_2 \mid \le 2. \max\{\mid a_1 - a_2 \mid ; \mid b_1 - b_2 \mid\} \le 2.\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \le 2.(\mid a_1 - a_2 \mid + \mid b_1 - b_2 \mid)$. Odkiaľ už plynie ekvivalentnosť daných metrík.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Áno.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Nie.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Áno. K dôkazu trojuholníkovej nerovnosti použite tzv. Cauchy - Bunjakovského nerovnosť: $\int_a^b f(x).g(x)dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx. \int_a^b g^2(x)dx}$.

$\boxed{\mathbf{19}}$ Prvá časť zrejmá. K druhej časti: Ak by tá podmienka bola nutná, tak by z úplnosti jedného metrického priestoru vyplývala úplnosť metrického priestoru s ekvivalentnou metrikou. Ale to nie je pravda - pozri príklad 87. a definíciu 3.4.

$\boxed{\mathbf{22}}$ V E^2 áno, ale v E^1 nie.

$\boxed{\mathbf{23}}$ V oboch prípadoch 1.

$\boxed{\textbf{25}}$ Stačí použiť vetu 1.4.

$\boxed{\textbf{26}}$ M - z konvergencie bodov plynie konvergencia po súradniciach, ale obrátene nemusí. l, l^2 - ako v prípade priestoru M.

$\boxed{\textbf{27}}$ Nie sú ekvivalentné.

$\boxed{\textbf{29}}$ Existuje také $\varepsilon > 0$, že pre nekonečne veľa $n : d(x_n, x) \leq \varepsilon$.

$\boxed{\textbf{35}}$ Stačí voliť $\delta_1 < \delta - d(p,q)$.

$\boxed{\textbf{36}}$ Stačí nájsť postupnosť racionálnych (iracionálnych) čísel, ktorá konverguje k iracionálnemu (racionálnemu) číslu. A tiež, že v každom okolí každého reálneho čísla je nekonečne veľa racionálnych aj iracionálnych čísel.

$\boxed{\textbf{38}}$ Požiť vetu 1.4, resp. príklad 8.

$\boxed{\textbf{40}}$ Pozri príklad 2. a 26.

$\boxed{\textbf{43}}$ Stačí vyjsť z definície 2.2 a vety 2.1.

$\boxed{\textbf{44}}$ b) Napr. triviálny metrický priestor. (Triviálna metrika: $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$.)

$\boxed{\textbf{46}}$ Napr.: $A = \{(x,0); x \in R\}$ a $B = \{(x, \frac{1}{x}); x > 0\}$.

$\boxed{\textbf{47}}$ Ak $x_0 \in \overline{O(p,\delta_1)}$, tak existuje $\{x_i\}_{n=1}^{\infty} \in O(p,\delta_1)$ konvergujúca k bodu x_0. Vhodne použijúc trojuholníkovú nerovnosť ukázať, že $d(p,x_0) < \delta_2$.

$\boxed{\textbf{52}}$ Nie.

$\boxed{\textbf{55}}$ Napr. $A = \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

$\boxed{\textbf{57}}$ Ak $(X - \overline{A})$ je hustá v X, tak tým skôr je hustá $(X - A)$. Stačí zobrať množinu Q v R.

$\boxed{\textbf{58}}$ Stačí uvažovať množinu Q v R.

$\boxed{\textbf{60}}$ Použiť vetu 2.5 b).

$\boxed{\textbf{61}}$ Pozri vetu 2.4.

$\boxed{\textbf{62}}$ Stačí uvážiť definíciu 2.6 a vetu 2.5.

$\boxed{\textbf{68}}$ Prvá časť zrejmá. K dôkazu druhej stačí napr. $A_i = (-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i})$.

$\boxed{\textbf{69}}$ Nie! Vždy je však $intA \cup intB \subset int(A \cup B)$. Neplatí rovnosť, volíme napr. $A =< 0, 1 >, B =< 1, 2 >$.

$\boxed{\textbf{70}}$ Napr. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

$\boxed{\textbf{71}}$ a) $\emptyset$, celá rovina; b) Ľubovoľná neprázdna otvorená množina, rôzna od celej roviny - napr. vnútro jednotkového kruhu; c) Napr. body ľubovoľnej priamky $(x = 0)$.

$\boxed{\textbf{72}}$ a) $H(A \cup B) \subset (\overline{A} \cup \overline{B}) - (intA \cup intB) \subset (\overline{A} - intA) \cup (\overline{B} - intB) = H(A) \cup H(B)$. b) Stačí napr. uvažovať nasledujúce množiny: $A_n =< \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} >$.

$\boxed{73}$ Ak $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$, tak áno (zjednotením je E^2). Ak $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a$, tak nie (zjednotením je otvorený kruh o polomere a).

$\boxed{74}$ Ukážeme, že b) $\Longleftrightarrow$ a) $\Longleftrightarrow$ c). Keďže $A^d \subset \overline{A}$ a $H(A) \subset \overline{A}$, tak a) $\Rightarrow$ b) a a) $\Rightarrow$ c). Na druhej strane, pretože $\overline{A} \subset A \cup A^d$, z b) $\Rightarrow$ a) a rovnosť: $\overline{A} = intA \cup H(A)$ a tiež $intA \cup A$ dáva: c) $\Rightarrow$ a).

$\boxed{75}$ Podľa príkladu 33. je tento prienik uzavretá množina. Na druhej strane, ak $A \subset F, F$ - uzavretá, tak $\overline{A} \subset \overline{F} = F$, teda $\overline{A}$ je najmenšia uzavretá množina, obsahujúca množinu A.

$\boxed{77}$ Rovnosť nemusí platiť. Stačí zobrať napr. na priamke jednobodovú množinu. Ale vždy platí $\overline{intA} \subset A$. (Samozrejme iba pre A - uzavreté!)

$\boxed{78}$ Pre takúto množinu A platí: $A \cap A^d = \emptyset$. Ak $A^d = \emptyset$, tak A je uzavretá, teda F_σ. Ak $A^d \neq \emptyset$, tak opíšeme okolo každého bodu množiny A^d okolie o polomere $\frac{1}{n}$ a zjednotenie všetkých týchto okolí (pre prevné n) označme O_n. Položme $B_n = A - O_n$. B_n je uzavretá (obsahuje len izolované body) a $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = A$, z čoho plynie, že A je typu F_σ.

$\boxed{79}$ a) Platí; b) Neplatí.

$\boxed{80}$ Stačí si uvedomiť, že pre takéto F_1 a F_2 platí dist $(F_1, F_2) = \inf\{d(x,y), x \in F_1, y \in F_2\} > 0$. A teraz vhodne "obaliť" tieto uzavreté množiny otvorenými.

$\boxed{81}$ a) Zrejmé; b) Nech napr. F je uzavretá. Pre každé n prirodzené definujeme $G_n = \cup_{x \in F} O(x, \frac{1}{n})$. Zrejme pre každé n je $F \subset G_n$, teda $F \subset \cap_{n=1}^{\infty} G_n$. Na druhej strane, ak bod $p \in \cap_{n=1}^{\infty} G_n$, tak pre každé n nájdeme bod $x_n \in F$ taký, že $d(x_n, p) < \frac{1}{n}$, teda p je bod uzáveru množiny (uzavretej) F, čo implikuje $p \in F$. Dôkaz pre otvorenú množinu je analogický, alebo priamo plynie z časti a) tohoto príkladu.

$\boxed{82}$ a) Množina Q je spočitateľná, teda ju možno napísať ako spočitateľné zjednotenie jednobodových - uzavretých - množín. Na druhej strane, keby Q bola G_δ (Q všade hustá v R), bola by všade hustá G_δ množina aj množina $Q_1 = \{x + \sqrt{2}; x \in Q\}$. Ale na základe platnosti vety: Prienik G_δ a hustých množín v úplnom metrickom priestore je zase G_δ, hustá množina.(Pozri príklad 114.) by bola aj $Q \cap Q_1$ množina G_δ a všade hustá v R. Ale $Q \cap Q_1 = \emptyset$. b) Pozri príklad 81.

$\boxed{83}$ Keby $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ obsahoval dva rôzne body $x \neq y$, potom $d(x,y) = \alpha > 0$ a pre dostatočne veľké n je diam $F_n < \alpha$, teda množina F_n (a všetky ďalšie) nemôže obsahovať oba body x, y. Predpoklad: diam $F_n \to 0$ nemožno vynechať. Položme na reálnej priamke $F_n =< n, +\infty)$.

$\boxed{84}$ Áno. Ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna postupnosť (vzhľadom na metriku d), tak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ nájdeme $\delta > 0$ tak, aby $\mid x \mid < \delta \Rightarrow \text{tg} \mid x \mid < \varepsilon$. K tomuto $\delta > 0$ existuje n_0 tak, že $m, n > n_0 \Rightarrow \text{arctg} \mid x_n - x_m \mid < \delta$. (Plynie z fundamentálnosti.) Odtiaľ a z predchádzajúceho: tg $[\text{arctg} \mid x_n - x_m \mid] = \mid x_n - x_m \mid < \varepsilon$, pre $\forall m, n > n_0$. Z posledného máme, že $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna i v euklidovskej metrike, teda konverguje k bodu x_0. Ale naša metrika d a euklidovská metrika sú ekvivalentné. (Porovnaj príklad 13.)

85 Využite úplnosť priestoru (E_1, d_0) - veta 3.6.

86 Využite úplnosť priestoru (E_2, d_3) - čo je euklidovský priestor a systém nerovností v návode k príkladu 15.

87 Nie. Napr.: Položme $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).d_1(x,y) =\mid x - y \mid, d_2(x,y) =\mid \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \mid$. Metriky d_1, d_2 sú ekvivalentné, pričom (X, d_1) je úplný, ale (X, d_2) nie je.

88 Stačí pozrieť definíciu bázy.

89 Všimnite si podpriestory všetkých takých postupností racionálnych čísel, ktorých všetky členy od istého indexu sa rovnajú nule.

90 Súčinový priestor je separabilný vtedy a len vtedy, keď sú jednotlivé zložky separabilné priestory.

91 Ak $F = \emptyset$ - pozri príklad 44. b). Ak $F = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ - konečná, stačí položiť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_1, ..., a_m, a_1, ..., a_m, ...\}$. Ak F - nekonečná, tak existuje $E \subset F, E$ - spočitateľná a $\overline{E} = F$. Teraz možno písať $E = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Stačí ukázať, že postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1, ...\}$ vyhovuje našim požiadavkám.

92 K dôkazu prvej časti si stačí všimnúť množiny M' všetkých postupností núl a jedničiek. $M' \subset M, M'$ je nespočitateľná a pre každé $x, y \in M', x \neq y'$ je $d(x,y) \geq 1$. K druhej časti stačí brať také postupnosti racionálnych čísel, ktoré od istého indexu obsahujú samé nuly.

93 b) Stačí uvažovať nasledujúci systém funkcií: Ku každej postupnosti núl a jedničiek t.j. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, kde $\forall n$ je buď $y_n = 0$, alebo $y_n = 1$, definujme funkciu f nasledovne: $f(n) = y_n; n = 0, 1, 2, ...$ a f je všade inde lineárna. (Pozri predchádzajúci príklad).

94 Použite Weierstrassovu vetu: Ku každej funkcii $f \in C(a,b)$ a ku každému $\varepsilon > 0$ existuje taký polynóm P, že pre každé $x \in < a, b >$ je $\mid f(x) - P(x) \mid < \varepsilon$.

95 Možno použiť návod k príkladu 94.

96 b) Ak je X separabilný, tak za M stačí brať spočitateľnú hustú podmnožinu. Obrátene: Pre každé $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ existuje M_n, ktorá je ε_n - sieťou. Potom $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ bude spočitateľná hustá.

97 Ak (X, d) je separabilný - tvrdenie zrejmé. Obrátene. Ak (X, d) nie je separabilný, tak existuje $\varepsilon_0 > 0$ také, pre ktoré neexistuje spočitateľná ε_0 - sieť. Na základe tohoto možno zostrojiť nespočitateľnú množinu otvorených po dvoch disjunktných množín.

98 a) Ak (X, d) je separabilný metrický priestor, tak z neho odvodený topologický priestor má spočitateľnú bázu (veta 3.2), každý jeho podpriestor má tiež spočitateľnú bázu a teda (podľa vety 3.1) je separabilný. b) Reálnu priamku R opatrime nasledujúcou topológiou $\mathcal{T}$: Označme znakom B systém množín tvaru: $\{x\} \cup (Q \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)); x \in R, \varepsilon > 0, Q$ racionálne čísla. Potom topológiu $\mathcal{T}$ budú tvoriť všetky možné zjednotenia množín z B. Overte, že je to topológia a $(R, \mathcal{T})$ je separabilný. Ale podpriestor všetkých iracionálnych čísel Q', ktorého topológia $\mathcal{T}'$ pozostáva zo všetkých množín tvaru $A \cap Q'$, kde $A \in \mathcal{T}$, nie je separabilný.(Každé iracionálne číslo, ako jednobodová množina, je otvorená.)

99 Keby topologický priestor $(R, \mathcal{T})$ z návodu 98. mal spočitateľnú bázu, musel by aj jeho podpriestor $(Q', \mathcal{T}')$ mať spočitateľnú bázu.

100 Nemusí byť. Položme $X =< 0,1 >, X' = (0,1 >, d_0$ - euklidovská metrika. Postupnosť $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je fundamentálna, ale v priestore (X', d_0) nekonverguje.

101 Platí aj obrátené tvrdenie.

102 Napr. pre M: Ak $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}, X^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_K^{(n)}, ...)$ je fundamentálna, tak zo supremovej metriky plynie, že každé z číselných postupností $\{\alpha_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}; k = 1, 2, ...$ je tiež fundamentálna v R, teda konvergentná (t.j. konverguje po súradniciach), $\{\alpha_k^{(n)}\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_k$. Ešte overte, že teraz $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, konverguje ku bodu $X = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$.

104 Ak x_0 je izolovaný bod - tak áno. V opačnom prípade nie.

105 Áno.

106 Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že pre každé $n, m > n_0$ je $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. A tiež existuje také p, že pre každé $i > p$ je $d(x_{K_i}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. (Možno vybrať $i > n_0$.) Teraz $d(x_n, x) < d(x_n, x_i) + d(x_i, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

107 Nie.

108 Porovnaj s dvojrozmerným euklidovským priestorom (E_2, d_0). Pozri príklad 85.

109 Áno, každá fundamentálna je tiež ohraničená. Lebo ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna, tak k $\varepsilon = 1$ existuje $p \in N$ také, že pre všetky $n \geq p : d(x_n, x_p) < 1$, t.j. $x_n \in O(x_p, 1)$.

110 Úplnosť $A \cup B$ je zrejmá. Ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna postupnosť z $A \cup B$, tak aspoň v jednom podpriestore (napr. A) leží nekonečne veľa členov postupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, t.j. celá vybraná postupnosť $\{x_{K_i}\}_{i=1}^{\infty}$, ktorá je tiež fundamentálna, teda konvergentná. A potom (porzi príklad 106.) i pôvodná postupnosť konverguje.b) Napr. $A =< -5, 5 >$ $, B =< -1, 1 >$.

111 Ak je $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ fundamentálna v $X \times Y$, tak zo vzťahu a) resp. b) ihneď plynie, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú fundamentálne v príslušných úplných priestoroch X alebo Y. Teda ak $\{x_n\} \overset{X}{\to} x_0, \{y_n\} \overset{Y}{\to} y_0$ tak $\{(x_n, y_b)\} \overset{X\times Y}{\longrightarrow} (x_0, y_0)$.

112 Nech $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ je postupnosť otvorených hustých množín v X. Nech S_0 je ľubovoľná guľa v priestore X. Ukážme, že $S_0 \cap G$, kde $G = \cup_{i=1}^{\infty} G_i$ je neprázdna, t.j. G - hustá. Keďže G_1 je otvorená, hustá, existuje okolie S_1 také, že $\overline{S_1} \subset S_0 \cap G_1$, pričom S_1 voľme tak, aby diam $S_1 < 1$. Pretože aj G_2 je otvorená a hustá, možno nájsť guľu S_2 takú, aby $\overline{S_2} \subset S_1 \cap G_2$, pričom diam $S_2 < \frac{1}{2}$. Ďalej nájdeme guľu S_3 tak, aby $\overline{S_3} \subset S_2 \cap G_3$,diam $S_3 < \frac{1}{3}$, atď. Máme postupnosť sfér S_n takých, že pre všetky n platí: $S_n \subset S_0, \overline{S_{n+1}} \subset S_n$ a diam $S_n < \frac{1}{n}$. Podľa vety 3.4, resp. príkladu 83. existuje bod $p \in S_n; n = 1, 2, ...$ a teda aj $p \in S_0$. Ale z konštrukcie sfér S_n vyplýva, že $p \in G_n$ pre všetky n. Záver: $p \in S_0 \cap G$.

113 Nech (R, d_0) je priamka s obvyklou euklidovskou metrikou. $Q = \{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ je množina všetkých racionálnych čísel ľubovoľne usporiadaných do postupnosti. Vieme, že (Q, d_0) nie je úplný priestor (pozri príklad 107.). Množiny $F_n = \{r_1, ..., r_n\}; n = 1, 2, ...$ sú uzavreté v (Q, d_0), teda $G_n = Q - F_n$ sú otvorené a husté v Q. Ale $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$.

114 Nech $B_1, B_2, ...B_n, ...$ sú (prvky) množiny systému $\mathcal{M}$, t.j. každé B_i je G_δ, hustá množina v X. Teda $B_i = \cap_{n=1}^{\infty} G_{i_n}, G_{i_n}$ - otvorené a tiež husté v X. Môžme písať: $\bigcap\limits_{B_i \in \mathcal{M}} B_i = \bigcap\limits_{i,n} G_{i_n}$ a na základe príkladu 112. je tento prienik hustá množina v X a zrejme typu G_δ. Doporučujeme čitateľovi v súvislosti s týmto príkladom porozmýšľať nad analógiou príkladu 113.

115 Nech $X = \cup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i$ - riedke v X. Označme $O(x_1, \varepsilon_1)$ sféru, disjunktnú s E_1. Zostrojme $O(x_2, \varepsilon_2)$ nasledovne: $O(x_2, \varepsilon_2) \cap E_2 = \emptyset, \overline{O(x_2, \varepsilon_2)} \subset O(x_1, \varepsilon_1)$ a $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$. Podobne $O(x_3, \varepsilon_3) \subset \overline{O(x_3, \varepsilon_3)} \subset O(x_2, \varepsilon_2), O(x_3, \varepsilon_3) \cap E_3 = \emptyset$ a $\varepsilon_3 < \frac{1}{3}$, atď. Podľa konštrukcie je $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ fundamentálna, teda konverguje k bodu $x_0 \in X$. Ale pretože $x_0 \in \overline{O(x_i, \varepsilon_i)}; i = 1, 2, ..., x_0 \notin E_i; i = 1, 2, ...$ a tým $x_0 \notin \cup_{i=1}^{\infty} E_i = X$. Spor.

116 Napr. (Q, d_0).

117 Nie je.

118 Označme $E = \{a_1, a_2, ...\}$. Nech by E bola typu G_δ. Vyberme $a > 0$ také, aby sa nerovnala žiadnemu z rozdielov $\mid a_i - a_j \mid$, pre $i, j = 1, 2, ...$. Označme $E_1 = E + a = \{a_i + a; i = 1, 2, ...\}$. Teraz E_1 je tiež spočitateľná, hustá, G_δ podmnožina R. Na základe príkladu 114. je aj $E \cap E_1$ - spočitateľná, hustá, G_δ v R. Ale $E \cap E_1 = \emptyset$.

119 Nech pre nejaké $\varepsilon_0 > 0$ neexistuje konečná ε_0 - sieť. Vezmime ľubovoľné $x_1 \in X$. K nemu existuje $x_2 \in X$ také, že $d(c_1, x_2) \geq \varepsilon_0$(ak by totiž také x_2 neexistovalo, bola by množina $\{x_1\}$ ε_0 - sieťou). Podobne možno nájsť bod $X_3 \in X$ taký, že $d(x_j, x_3) \geq \varepsilon_0; j = 1, 2$. (Lebo v opačnom prípade by zase množina $\{x_1, x_2\}$ bola ε_0 - sieťou.) Takto zostrojíme postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ takú, že pre všetky $m \neq n$ je $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$. A z tejto postupnosti nemožno vybrať fundamentálnu, teda ani konvergentnú čiastočnú postupnosť. Obrátene neplatí: Napr. $X = (0, 1)$ s obvyklou metrikou.

120 a) Porovnaj s príkladom 96. b) Priamo z definície 4.1 a jednoznačnosti limity. c) Stačí si uvedomiť definíciu uzavretej a kompaktnej množiny.

121 Keď A je kompakt, podľa príkladu 119. pre $\varepsilon = 1$ existuje konečná jednotková sieť $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Označme $d = \max\limits_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,m}} \{d(p_i, p_j)\}$. Teraz pre ľubovoľné $x, y \in A$ existuje $r, s \leq m$ tak, že $d(x, p_r) < 1, d(y, p_s) < 1$. Počítajme: $d(x, y) \leq d(c, p_r) + d(p_r, p_s) + d(p_s, y) < 1 + d + 1 = d + 2$. Teda diam $A \leq d + 2$.

122 Uvažujeme priestor l^2 z príkladu 3. a jeho podmnožinu $A \subset l^2$, $A = \left\{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^2, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq 1\right\}$. Overte, že A je uzavretá a ohraničená, ale nie je kompaktom. Z postupnosti bodov tejto množiny: $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}, X^n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ (na n - tom mieste je jednotka, ostatné súradnice sú nulové) nemožno vybrať konvergentnú. Iný príklad: Uvažujme priestor $M(0, 1)$ z príkladu 1. so supremovou metrikou. Označme $A = \{f_1, f_2, ...\} \subset M(0, 1)$, kde $f_k(x)$ definujeme: $f_k(0) = 0; f_k(x) = 0$, pre $\frac{1}{k} \leq x \leq 1; f_k(\frac{1}{2k}) = 1$ a $f_k(x)$ je lineárna na každom z intervalov $< 0, \frac{1}{2k} >, < \frac{1}{2k}, \frac{1}{k} >$ (nakreslite).

Množina A je uzavretá a ohraničená (overte to), ale nie je kompaktná, lebo už z množiny A nemožno vybrať fundamentálnu a teda ani konvergentnú podpostupnosť.

$\boxed{\textbf{123}}$ Nutnosť vyjadrujú príklady 120. a 121. Postačujúcosť: Pretože A je ohraničená, existuje n - rozmerný interval $I =< a_1, b_1 > \times < a_2, b_2 > \times ... \times < a_n, b_n >$ tak, že $A \subset I$. Uvažujeme ľubovoľnú postupnosť $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$ bodov množiny A, t.j. $x^i = (x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i) \in A$. Potom pre postupnosti prvých súradníc $\{x_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ platí: $a_1 \leq x_1^i \leq b_1; i = 1, 2, ...$ Podobne pre druhé súradnice: $a_2 \leq x_2^i \leq b_2; i = 1, 2, ...$ a konečne pre n - té súradnice: $a_n \leq x_n^i \leq b_n; i = 1, 2, ...$ Je známe, že z každej ohraničenej postupnosti reálnych čísel možno vybrať konvergentnú. Teda z postupnosti $\{x_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ prvých súradníc vyberme $\{x_i^{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x_1^0$. Z postupnosti $\{x_2^{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ zase vyberme konvergentnú k číslu x_2^0 $(a_2 \leq x_2^0 \leq b_2)$ atď. až pre n - té súradnice, t.j. opakujúc tento výber n - krát, dostaneme rastúcu postupnosť $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ prirodzených čísel takú, že: $\{x_1^{s_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x_1^0, \{x_2^{s_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x_2^0, ..., \{x_n^{s_i}\}_{i=1}^{\infty} \to x_n^0$. Čo je ekvivalentné s tým (pozri príklad 8.), že postupnosť $\{x^{s_i}\}_{i=1}^{\infty}$ bodov množiny A konverguje k bodu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in A$, lebo A je uzavretá.

$\boxed{\textbf{126}}$ Áno. Pozri definíciu 1.4 a vetu 1.4. Konvergencia v priestore X je ekvivalentná posúradnicovej konvergencii.

$\boxed{\textbf{127}}$ a) Stačí si uvedomiť, že ak vezmeme ľubovoľnú postupnosť bodov zo zjednotenia $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, tak aspoň v jednej z tých množín je nekonečne veľa členov tejto postupnosti. b) Nie! Voľme napr. $A_1 = \{1\}, A_2 = \{\frac{1}{2}\}, ..., A_n = \{\frac{1}{n}\}, ...$.

$\boxed{\textbf{128}}$ Pre každé $k = 1, 2, ...$ vyberme $x_k \in F_k$. Z monotónnosti postupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa ukáže, že $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$.

$\boxed{\textbf{129}}$ Nech $X =< 0, 2 >$ s euklidovskou metrikou d_0. Položme $F_k =< 0, 1 + \frac{1}{k} >; k = 1, 2, ...$. Potom $\cap_{k=1}^{\infty} F_k =< 0, 1 >$.

$\boxed{\textbf{130}}$ Ak (X, d) nie je kompakt, tak existuje postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, ktorá nemá čiastočnú konvergentnú postupnosť. Možno predpokladať, že postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je prostá. Potom množina $K = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ je uzavretá v X a teda $X - K$ je otvorená v X. Pretože $x_K; K = 1, 2, ...$ nie je hromadný bod množiny K, existuje také $\delta_K > 0$, že $K \cap O(x_K, \delta_K) = \{x_K\}$. Potom spočitateľný systém množín $\{X - K, O(x_1, \delta_1), O(x_2, \delta_2), \ldots, O(x_K, \delta_K), \ldots\}$ je otvoreným pokrytím priestoru X, z ktorého nemožno vybrať konečné podpokrytie.

$\boxed{\textbf{131}}$ Topologická $\Rightarrow$ metrickú: Nech $A \subset X, A$ vyhovuje vete 4.1. Nech $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov množiny A, z ktorej nemožno vybrať konvergentnú podpostupnosť. Teda každý bod $a \in A$ má okolie $O(a, \delta)$, obsahujúce len konečne veľa členov postupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Tieto okolia typu $O(a, \delta)$ tvoria otvorené podpokrytie množiny A. Teda z neho možno vybrať konečné podpokrytie, t.j. $A \subset O(a_1, \delta_1) \cup O(a_2, \delta_2) \cup ... \cup O(a_n, \delta_n)$. Ale to je spor, lebo zjednotenie vpravo obsahuje len konečne veľa členov postupnosti $\{x_i\}$. Obrátene: metrická $\Rightarrow$ topologickú: Sporom: Nech A je kompaktná v zmysle definície 4.1 ale existujú také otvorené množiny $\{G_\alpha\}$, ktoré pokrývajú množinu A, ale z nich nemožno vybrať konečné podpokrytie. Pre $n = 1, 2, ...$ položme $\varepsilon = \frac{1}{n}$ a keďže A je kompakt, tak pre každé ε_n existuje konečná ε_n - sieť v A (pozri príklad 119.). Teda pre $\varepsilon = 1$ existuje konečná ε_1 sieť v A. Okolo každého bodu tejto siete opíšme ε_1 - okolie. Uzávery týchto okolí majú s množinou A neprázdny prienik, ktorý je kompaktnou podmnožinou množiny A (overte prečo). Teda množinu A možno písať ako zjednotenie konečného počtu kompaktov $F_1, ..., F_n$, ktorých priemery neprevýšia $2.\varepsilon_1$. Keďže celú množinu A nebolo možné pokryť konečným podsystémom systému $\{G_\alpha\}$, tak aspoň jeden z kompaktov $F_1, \ldots, F_n$ má túto vlastnosť. Označme ho A_1. Pre $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ urobíme podobnú úvahu, ale pre kompakt A_1. Tak dostaneme kompakt $A_2 \subset A_1 \subset A$, ktorý nemožno pokryť žiadnym konečným podsystémom systému $\{G_\alpha\}$. Indukciou možno takto zostrojiť postupnosť kompaktných množín $A \supset A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$, pre ktoré diam $A_n \to 0$. Teda ich prienik (pozri príklad 83.) je jednobodová množina $\{a_0\}$. Pretože $a_0 \in A$, existuje otvorená množina $G_{\alpha_0} \in \{G_\alpha\}$ tak, že $a_0 \in G_{\alpha_0}$. Z otvorenosti G_{α_0} plynie, že existuje $\delta > 0 : O(a_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$. A zrejme pre dostatočne veľké n_0 je $2\varepsilon_{n_0} < \delta$. Z posledného ale plynie, že pre všetky $n \geq n_0$ je $A_{n_0} \subset G_{n_0}$, čo je v spore s výberom množín $A_i; i = 1, 2, ...$

132 V ľubovoľnom metrickom priestore je kompaktná množina uzavretá (veta 4.2) a obsahuje konečnú ε - sieť (príklad 119.). Teraz obrátene: nech (X, d) je úplný, A je uzavretá a pre kaťdé $\varepsilon > 0$ obsahuje konečnú ε - sieť. Ukážeme, že A je kompakt. Nech $\{X_i\}$ je ľubovoľná postupnosť bodov množiny A. Pre $\varepsilon_1 = 1$ existuje konečná ε_1 - sieť. Okolo každého bodu tejto siete zostrojme guľu o polomere 1. Aspoň v jednej z týchto gúľ - označme ju G_1 - je nekonečne veľa členov postupnosti $\{X_i\}$. Jeden z nich vyberme a označme x_{n_1}. Podobne pre $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ tiež existuje konečná ε_2 - sieť. Okolo jej bodov vytvorme gule o polomere $\frac{1}{2}$. Aspoň v jednej z nich - označme ju G_2 - existuje nekonečne veľa tých bodov postupnosti $\{x_i\}$, ktoré patria aj do G_1. Vyberme z nich jeden - x_{n_2} - tak, aby $n_2 > n_1$. Teda obecne pre $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$ existuje konečná ε_i - sieť, okolo jej bodov zostrojíme gule o polomere dĺžky $\frac{1}{i}$. Aspoň v jednej z týchto gúľ - označme G_i - existuje nekončne veľa členov postupnosti $\{x_i\}$, ktoré zároveň patria do gule G_{i-1}. Vyberme jeden z nich - x_{n_i} - tak, aby $n_i > n_{i-1}$. Takto postupujúc zostrojíme postupnosť $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ vybranú z postupnosti $\{X_i\}$. A táto vybraná postupnosť je zrejme fundamentálna (X je úplný) a tým i konvergentná.

133 Ak $(x, \mathcal{T})$ je súvislý, tak stačí za G voliť celý priestor X. Ak X nie je súvislý, existujú dve napr. otvorené a navzájom disjunktné podmnožiny A, B. Teraz stačí vybrať $x \in A, y \in B$.

134 Snáď len prípad 6. Nech X je množina, ktorej mohutnosť je väčšia, ako mohutnosť kontinua. Definujme topológiu $\mathcal{T} \subset 2^X$ nasledovne: Do $\mathcal{T}$ patrí $\emptyset$ a každá taká množina $A \subset X$, pre ktorú je $X - A$ spočitateľná. (overte, že $\mathcal{T}$ je topológia.)

135 Ak by $x_0 \in E$ bol izolovaný bod množiny E, tak množiny $\{x_0\}$ a $E - \{x_0\}$ by boli dve neprázdne otvorené disjunktné podmnožiny množiny E.

136 Rovnosť $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$ je ekvivalentná vzťahom: $\overline{A} \cap B = \emptyset$ a $A \cap \overline{B} = \emptyset$ čo je ekvivalentné s tvrdením, že množina B (A) neobsahuje žiadny hromadný bod množiny A (B).

137 Ak A, B - uzavreté, tak $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) = \emptyset$ a stačí použiť predchádzajúci príklad. Ak A, B - otvorené, tak každý bod množiny B je vnútorný, teda $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Podobne $A \cup \overline{B} = \emptyset$.

138 a) Kedže E je nesúvislá, existuje také $A, B \subset E$, že $E = A \cup B$, kde A, B

sú oddelené, t.j. $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$. Pretože E je uzavretá, je $\overline{A} \subset E$ a tiež $\overline{A} \subset E - B = A$, z čoho už plynie, že A je uzavretá. Podobne pre množinu B. b) Zase možno písať: $E = A \cup B, A, B$ - oddelené. Nech $a \in A$ (E je otvorená), teda existuje $O(a, \varepsilon) \subset E$. Ale a nie je hromadný bod množiny B (lebo $(A \cap \overline{B}) = \emptyset$), teda existuje $O(a, \delta) \subset O(x_0, \varepsilon), O(a, \delta) \cap B = \emptyset$. Posledné možno prepísať: $O(a, \delta) \subset E - B = A$, čo dokazuje, že a je vnútorný bod množiny A. Podobne pre B.

139 Nepriamo. Nech napr. E nie je súvislá množina. Potom možno písať $E = A \cup B$, kde A, B sú neprázdne, disjunktné uzavreté množiny. Potom aspoň jedna z množín $A \cap F$ alebo $B \cap F$ je prázdna. (V opačnom prípade by sme mohli písať $E \cap F = (A \cap F) \cup (B \cap F)$, čo by znamenalo, že $E \cap F$ je nesúvislá.) Nech napr. $A \cap F = \emptyset$. Potom $E \cup F = (A \cup B) \cup F = A \cup (B \cup F)$, pričom A i $(B \cup F)$ sú uzavreté, neprázdne a disjunktné. A to je v spore so súvislosťou množiny $E \cup F$.

140 Napr. na reálnej priamke položme: $E = < 0, 1 > \cup < 2, 3 >; F = < 0, 2)$.

141 a) Nech A - súvislá a $\overline{A}$ - nesúvislá. Potom $\overline{A} = E \cup F$, kde E, F sú neprázdne disjunktné uzavreté množiny (pozri 138 a)). Potom $A \cap E$ a $A \cap F$ sú neprázdne. (Ak by totiž napr. $A \cap E = \emptyset$, tak $A \subset F \subset \overline{A}$, pričom F je uzavretá množina a rôzna od $\overline{A}$. Čo nie je možné. (Pozri príklad 75.) Teda množiny $A \cap E$ i $A \cap F$ sú neprázdne oddelené podmnožiny množiny A, čo je v spore so súvislosťou množiny A. b) Stačí napr. za A zobrať všetky racionálne čísla reálnej priamky R. A - je nesúvislá, ale $\overline{A} = R$ je súvislá.

142 Možno postupovať podobne nepriamo ako v predchádzajúcom príklade. Alebo si stačí uvedomiť, že množina M je uzáverom množiny A v priestore M a použiť predchádzajúce tvrdenie príkladu 141.

143 Ak by A bola nesúvislá, možno písať: $A = E \cup F$, kde E, F sú oddelené. Vyberme teraz $x \in E, y \in F$. Podľa predpokladu existuje súvislá množina Q obsahujúca body x a y. Potom ale $Q \cap E$ a $Q \cap F$ sú oddelené podmnožiny (overte!) množiny Q, čo je v spore s výberom tejto množiny.

144 Nech A je naša množina. Označme $E \subset A, E$ - sú body s kladnými (iracionálnymi) súradnicami, $F \subset A, F$ - body so zápornými súradnicami. Zrejme $A = E \cup F$ a E, F sú oddelené.

145 Stačí si uvedomiť, že spojnica dvoch bodov (úsečka obsahujúca aj tieto koncové body) je súvislá množina. A teraz použiť tvrdenie príkladu 143.

146 Označme $E = E_1 \cup E_2$ a predpokladajme nepriamo, že E nie je súvislá. Potom $E = A \cup B$, kde A, B - oddelené množiny. Aspoň jedna z množín E_1, E_2 má neprázdny prienik aj s množinou A aj s B. (Ak by totiž napr. $E_2 \cap A = \emptyset$, potom $E_2 \subset B$ a $E_1 \supset A$. Teraz $E_1 \cap B \supset E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ a tiež $E_1 \cap A \neq \emptyset$). Nech teda napr. $E_1 \cap A \neq \emptyset$ aj $E_1 \cap B \neq \emptyset$. Potom $E_1 = (E_1 \cap A) \cup (E_1 \cap B)$, z čoho plynie nesúvislosť množiny E_1, čo je spor.

147 Nech $x, y \in E$. Potom $x \in E_{n_1}$ a $y \in E_{n_2}$. Označme $n = \max\{n_1, n_2\}$. Potom $x, y \in E_n$. Ale E_n je súvislá. Teda (pozri príklad 143.) aj E je súvislá.

148 Indukciou (a použitím príkladu 146.) možno nahliadnuť, že pre každé n prirodzené je množina $F_n = \cup_{i=1}^{n} E_i$ súvislá. Takto sme vytvorili rastúcu postupnosť $\{F_n\}$ súvislých množín a podľa predchádzajúceho príkladu je $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ súvislá. Ale množina $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

149 Pre $i = 1, 2, ...$ označme $H_i = E_i \cup E_{i+1}$. H_i je zrejme súvislá. Počítajme $H_i \cap H_{i+1} = (E_i \cup E_{i+1}) \cap (E_{i+1} \cup E_{i+2}) \supset E_{i+1} \neq \emptyset$. Ďalej stačí použiť predchádzajúci príklad.

150 Každé dva body takejto množiny možno spojiť lomenou čiarou, pozostávajúcou najviac s troch na seba nadväzujúcicjh úsečiek rovnobežných so súradnicovými osami. Ale takáto lomená čiara (pozri príklad 146.) je súvislá množina a teda podľa príkladu 143. je naša množina súvislá.

151 Nech E je súvislá podmnožina R a $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2$. Keby existoval bod $c \in R$ taký, že $x_1 < c < x_2$, ale $c \notin E$, označme $A = (-\infty, c) \cap E$ a $B = (c, +\infty) \cap E$. Zrejme $E = A \cup B$ a A, B sú oddelené, tak E by nebola súvislá. Teda s každými dvoma bodmi $x_1, x_2 \in E$, množina E obsahuje celý interval $< x_1, x_2 >$. A to je možné iba vtedy, ak sama množina E je intervalom (akýmkoľvek, prípadne aj nekonečným). Obrátene, ak E je akýkoľvek interval, je zrejme E súvislá.

152 Nech existuje množina $A \subset X, A \neq \emptyset, A \neq X, A$ obojaká. Potom aj $(X - A)$ je neprázdna obojaká množina. Čo by znamenalo (pozri príklad 137.), že X je nesúvislý.

153 Nech $E \times F$ - súvislá a nech napr. množina E je nesúvislá. Potom $E = A \cup B, A, B$ - oddelené. A tým aj $A \times F$ a $B \times F$ sú oddelené (overte to!). Ale $E \times F = A \times F \cup B \times F$, čo je v spore so súvislosťou množiny $E \times F$. Obrátene: Nech E a F sú súvislé v X a Y. Vyberme dva ľubovoľné body $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$. Všimnime si množiny $\{x\} \times F$ a $E \times \{y\}$. Prienik týchto množín je bod (x_1, y_2) a tieto množiny $\{x_1\} \times F$ a $E \times \{y_2\}$ sú súvislé (plynie zo súvislosti množín E a F). Teda zjednotenie $\{x_1\} \times F \cup E \times \{y_2\}$ je súvislá (pozri príklad 146.), ale toto zjednotenie obsahuje oba body $(x_1, y_2), (x_2, y_2)$. Teda v zmysle príkladu 143. je $E \times F$ súvislá.

154 Podľa príkladu 143. stačí ukázať, že každé dva body $x, y \in E$ možno "zabalit" do súvislej množiny ležiacej v E. Teda ak $x, y \in E$, tak existujú množiny $A(x)$ a $A(y)$ zo systému $A_t, t \in T$ tak, že $x \in A(x), y \in A(y)$. Ale $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$, preto podľa príkladu 146. je i $A(x) \cup A(y)$ súvislá a to je naša hľadaná súvislá nadmnožina bodov x, y. Poznámka: Z prevedeného dôkazu vidieť, že tvrdenie nášho príkladu zostane v platnosti, ak budeme žiadať iba toľko, aby každé dve množiny systému A_t mali neprázdny prienik.

155 Touto komponentou je zjednotenie všetkých súvislých podmnožín množiny E obsahujúcich bod x. Podľa predchádzajúceho príkladu je to súvislá množina. Jednoznačnosť je zrejmá.

156 Možno použiť myšlienku z predchádzajúceho príkladu.

157 Nech E je uzavretá a A je jej komponenta. Potom zrejme $A \subset \overline{A} \subset E$. Z príkladu 141. plynie, že i $\overline{A}$ je súvislá. A vzhľadom na definíciu komponenty: $A = \overline{A}$.

158 Stačí použiť príklad 155.

160 Stačí si všimnúť vety 5.1.

161 Položme napr. $X = \{1, 2, 3, ...\}, Y$ je množina všetkých racionálnych čísel. Na oboch priestoroch uvažujme euklidovskú metriku. X aj Y sú spočítateľné množiny, teda existuje prosté zobrazenie $f : X \to Y$. f je spojité, lebo definičný obor pozostáva len z izolovaných bodov. Ale f^{-1} nie je spojité v žiadnom bode.

162 Z definície izometrického zobrazenia ihneď plynie, že f je prosté. Ešte spojitosť f: Nech $x_0 \in X, \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \to x_0$, t.j. $d(x_i, x_0) \to 0$. Ale pre každé $i = 1, 2, ...$ je $d(x_i, x_0) = d'(f(x_i), f(x_0))$, teda aj $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty} \to f(x_0)$. (Pozri vetu 5.1.) Spojitosť funkcie f_{-1} analogicky.

163 Izometrické zobrazenie je rovnomerne spojité - zrejmé. Neplatí obrátene: Voľme napr. $f :< 0, 1 >\to< 0, 1 >$ definovanú predpisom: $f(x) = x^2$.

164 Stačí vyjsť priamo z definície 5.1.

165 a) Neplatí. Napr. položme $A =< 0, 2 >, f(x) = x^2$. Vždy platí: $A \subset f^{-1}(f(A))$. b) Vždy platí.

166 Stačí napr. použiť vetu 5.1 a príklad 159. Podiel bude tiež spojitý, ale iba v tých bodoch, kde $g(x) \neq 0$.

167 Ak X je diskrétny - zrejmé. Ak X nie je diskrétny, tak existuje $p \in X$ taký, že každé jeho okolie $O(p, \delta)$ obsahuje nejaký bod z X rôzny od p. Definujme teraz $f : f(p) = 1$ a $f(x) = 0$, pre $x \neq p$. Ukážte, že f nie je spojitá.

168 Prvú časť možno ukázať priamo z definície 5.4. Odpoveď na otázku je negatívna. Stačí brať napr. $X =< 0, +\infty)$ s euklidovskou metrikou $f(x) = g(x) = x$.

169 Stačí si uvedomiť definície limity a spojitosti. Doporučujeme čitateľovi odpovedať si na otázku, prečo definujeme limitu funkcie len v hromadnom bode definičného oboru? O spojitosti funkcie v izolovanom bode hovorí príklad 160.

170 Hociktoré z tvrdení a), resp. b) možno ukázať priamo z definície uzavretej, resp. otvorenej množiny a spojitosti funkcie f. Zvyšné tvrdenia možno ukázať cez komplementy množín.

171 Ak f je spojitá v bode x, tak z definície spojitosti v bode plynie, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také okolie $O(x)$ bodu x, ktorého diameter je menší ako ε. Teda $\omega_f(x) \leq \varepsilon$. Ale ε - bolo ľubovoľné. Obrátene, ak $\omega_f(x) = 0 = \inf_{O(x)} \operatorname{diam} f(O(x))$, tak prakticky spätným postupom ako vyššie ukážeme, že f je spojitá.

172 a) Uvedomme si, že na základe predchádzajúceho príkladu možno písať $D_f = \cup_{K=1}^{\infty}\{x \in X; \omega_f(x) \geq \frac{1}{K}\}$. Ak množiny, vystupujúce v zjednotení na pravej strane uvedenej rovnosti, sú podľa príkladu 170. uzavreté. b) Stačí si uvedomiť, že $C_f = X \setminus D_f$ a tú skutočnosť, že komplement množiny typu F_σ je množina typu G_δ.

173 Podľa predchádzajúceho príkladu body spojitosti ľubovoľnej funkcie tvoria množinu typu G_δ. Ale naša množina E (pozri príklad 118.) nemôže byť typu G_δ.

174 a) Napr.: $f(x) = (x^2 - 1).d(x)$; kde $d(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racionálne číslo} \\ 0, & x \text{ iracionálne číslo} \end{cases}$ ($d(x)$ je tzv. Dirichletova funkcia.) b) Napr.: $f(x) = d(x). \sin \pi x$.

$\boxed{\textbf{175}}$ Uvedená funkcia je nespojitá v každom bode Cantorovej množiny a spojitá mimo nej.

$\boxed{\textbf{176}}$ Takáto je napr. tzv. Riemannova funkcia, definovaná:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}; & \text{ak } x = \frac{p}{q}; p, q \text{ - nesúdeliteľné} \\ 0; & \text{ak } x \text{ je iracionálne} \\ 1; & \text{pre } x = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{177}}$ a) $f(x) = e^x$ - je všade spojitá, ale $f((-\infty, 0>) = (0, 1>$. b) $f(x) = \sin x$ - je všade spojitá, ale $f((0, 2\pi)) =< -1, 1>$.

$\boxed{\textbf{178}}$ Neplatí! Napr. $f(x) = c$, potom $f^{-1}(\{c\}) = X$. Alebo $f(x) = \sin x$. Teraz $f^{-1}(< -1, 1>) = R$.

$\boxed{\textbf{179}}$ Ak f je spojitá, že platí aj a) aj b) - plynie z definície 5.1 a príkladu 164. Obrátene, t.j. že každá z podmienok a) i b) stačí k spojitosti f: Podmienka a): Nech $x_0 \in R$ ľubovoľný. Označme $y_o = f(x_0)$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ je $f^{-1}((y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))$ otvorená v R a obsahujúca bod x_0 i s nejakým svojím δ - okolím, a teda $f((x_0 - \delta, x_0 +, \delta)) \subset (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, čo je vlastne spojitosť funkcie f. Podmienka b): Možno napr. použiť predchádzajúci výsledok: Nech (a, b) je ľubovoľný otvorený interval. Možno ho vyjadriť ako doplnok uzavretej množiny $(-\infty, a> \cup < b, +\infty)$, ktorej vzor - podľa b) - je uzavretá množina, teda vzor $f^{-1}((a, b))$ je otvorená.

$\boxed{\textbf{180}}$ Pre každé $x', x'' \in X$ platí: $d(x', y_0) - d(x'', y_0) \le d(x', x'')$ a tiež $d(x'', y_0) - d(x', y_0) \le d(x', x'')$, odkiaľ plynie: $\mid d(x', y_0) - d(x'', y_0) \mid \le d(x', x'')$, čo dokazuje rovnomernú spojitosť funkcie $f(x) = d(x, y_0)$.

$\boxed{\textbf{181}}$ Stačí si uvedomiť, že spojitý obraz intervalu je interval (v prípade konštantnej funkcie bod) pozri vetu 5.2 c).

$\boxed{\textbf{182}}$ Nemusí byť spojitá. Napr. $f(x) = \sin \frac{1}{x}; x \neq 0, f(0) = 0$ má na $< -1, 1 >$ Darbouxovu vlastnosť, ale v bode $x = 0$ nie je spojitá.

$\boxed{\textbf{183}}$ Poznámka: Veta 5.2 nám udáva niektoré vlastnosti, ktoré sa spojitým zobrazením prenášajú. Tento príklad nám poukazuje na ďalšiu takúto vlastnosť - zachovávanie hustoty množiny. Nech $y \in f(X)$, t.j. $y = f(x), x \in X$. Ale E je hustá v X, teda existuje $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \to x, x_i \in E$, pre $i = 1, 2, ...$ Ale f je spojitá, z čoho plynie: $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty} \to f(x) = y$ a $f(x_i) \in f(E)$.

$\boxed{\textbf{184}}$ Ukážeme, že f je spojitá v každom bode $x_0 \in X$. Uvažujeme ľubovoľné okolie $O(f(x_0), \varepsilon)$ bodu $f(x_0)$. Vzor tohoto okolia, t.j. $f^{-1}(O(f(x_0), \varepsilon))$ je otvorená množina v X a obsahuje bod x_0. Teda existuje také okolie $(O(x_0, \delta) \subset f^{-1}(O(f(x_0), \varepsilon))$ a tak $F(O(x_0, \delta)) \subset O(f(x_0), \varepsilon))$, čo dokazuje spojitosť funkcie f v bode x_0.

$\boxed{\textbf{185}}$ Definujme $f : R \to R; f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \text{arctg } x$. Potom pre každé dva body x, x' platí: $\mid f(x) - f(x') \mid = \mid (x - x') - (\text{arctg } x - \text{arctg } x') \mid$. Podľa (Lagrangeovej) vety o strednej hodnote možno písať: $\text{arctg } x - \text{arctg } x' = (x - x').\frac{1}{1+t^2}; t$ leží medzi bodmi x, x'. Po dosadení do predchádzajúcej rovnosti dostávame $\mid f(x) - f(x') \mid = \mid x - x' \mid . \frac{t^2}{1+t^2} < \mid x - x' \mid$ pre $x \neq x'$. A pre x, x' dosť veľké je i t dosť veľké, lebo t leží medzi x, x'. Inými slovami neexistuje $\alpha < 1$ také, aby $\mid f(x) - f(x') \mid < \alpha. \mid x - x' \mid$. Teda $f(x)$ nie je kontraktívne zobrazenie v zmysle definície 5.5. A skutočne veta 5.5 neplatí, lebo $f(x)$ má nekonečne veľa bodov, v ktorých $f(x) = x$. (Stačí, aby arctg $x = \frac{\pi}{2}$.)

186 Podľa vety 5.5 existuje jediný pevný bod x_0 zobrazenie f^k. Čiže $x_0 = f^k(x_0)$. Potom: $f(x_0) = f\left(f^k(x_0)\right) = f^{k+1}(x_0) = f^k\left(f(x_0)\right)$. Teda aj $f(x_0)$ je pevný bod zobrazenia f^k. Teraz si všimnime: Ak x_1 je pevný bod zobrazenia f, tak $x_1 = f(x_1)$,
$f(x_1) = f\left(f(x_1)\right) = f^2(x_1)$... atď., teda x_1 je pevný bod zobrazenia f^k, ale toto má iba jediný pevný bod.

187 Stačí si uvedomiť, že už $f \circ f = f^2$ sa identicky rovná nule, teda je kontraktívne.

188 $\bigvee_a^b (k.f(x) + m) = \mid k \mid .A.$

189 $\bigvee_0^2 f(x) = 23.$

190 Nech $\mid f'(x) \mid \leq A$ pre všetky $x \in < a.b >$. Nech $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ je ľubovoľné delenie intervalu $< a, b >$. Podľa Lagrangeovej vety možno pre všetky $i = 1, 2, ..., n$ písať: $\mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid = f'(\alpha_i).(x_i - x_{i-1}) \leq A.(x_i - x_{i-1})$, kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Teda $\sum_{i=1}^n \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid \leq \sum_{i=1}^n A. \mid x_i - x_{i-1} \mid = A. \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = A.(b - a)$.

191 Vo všeobecnosti nie. Napr.:
Položme: $f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sin k\pi(x(k+1) - 1), & \text{pre } x \in < \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} > \\ 0, & \text{pre } x \text{ mimo tohoto intervalu} \end{cases}$.
Potom $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ je rovnomerne konvergentný funkcionálny rad na intervale $< 0, 1 >$ (overte to!), každá z funkcii $f_k(x)$ má na $< 0, 1 >$ ohraničenú variáciu a predsa súčet tohoto radu je funkcia s neohraničenou variáciou na intervale $< 0, 1 >$. (Čitateľ si túto skutočnosť načrtnutím situácie ľahko overí.)

192 Nech $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ je ľubovoľné delenie intervalu $< a, b >$. Počítajme: $\sum_{i=1}^n \mid (f(x_i) + g(x_i)) - (f(x_{i-1}) + g(x_{i-1}) \mid = \sum_{i=1}^n \mid (f(x_i) - f(x_{i-1})) + (g(x_i) - g(x_{i-1})) \mid \leq \sum_{i=1}^n \mid f(x_i) - f(x_{i-1} \mid + \sum_{i=1}^n \mid g(x_i) - g(x_{i-1}) \mid \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$. Pre súčin: $\sum_{i=1}^n \mid f(x_i).g(x_i) - f(x_{i-1}).g(x_{i-1}) \mid = \sum_{i=1}^n \mid f(x_i).(g(x_i) - g(x_{i-1})) + (f(x_i) - f(x_{i-1})).g(x_{i-1}) \mid \leq \sum_{i=1}^n \mid f(x_i) \mid . \mid g(x_i) - g(x_{i-1}) \mid + \sum_{i=1}^n \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid .$
$\mid g(x_{i-1}) \mid \leq \sup_{x \in <a,b>} \mid f(x) \mid . \bigvee_a^b g + \sup_{x \in <a,b>} \mid g(x) \mid . \bigvee_a^b f.$

193 Uvažujme ľubovoľné delenie intervalu $< a, b >$ také, aby bod c patril medzi deliace body, t.j. $a = x_0 < x_1 < ... < x_r = c = x_r < x_{r+1} < ... < x_n = b$. Počítajme: $\sum_{i=1}^r \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid + \sum_{i=r+1}^n \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid = \sum_{i=1}^n \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid \leq \bigvee_a^b f$. "Supremujúc" túto nerovnicu dostaneme: $\bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f \leq \bigvee_a^b f$. Ešte opačnú nerovnosť. Nech $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ je ľubovoľné delenie intervalu $< a, b >$. Bod $c \in (a, b)$ patrí do niektorého čiastkového intervalu, nech napr. $c \in < x_{s-1}, x_s >$. Potom:
$\sum_{i=1}^n \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid \leq \left(\sum_{i=1}^{s-1} \mid f(x_i) - f(x_{i-1}) \mid + \mid f(c) - f(x_{s-1}) \mid\right) +$
$\left(\mid f(x_s) - f(c) \mid + \sum_{i=s+1}^n \mid f(x_i) - f(x_{i-1} \mid\right) \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$. A opäť „supremujúc" túto nerovnosť cez všetky delenia intervalu $< a, b >$ dostaneme $\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^c + \bigvee_c^b f$.

194 Že z ohraničenosti variácie funkcie $f(x)$ plynie ohraničenosť variácie funkcie $\mid f(x) \mid$ ihneď plynie zo vzťahu $\mid\mid a \mid - \mid b \mid\mid \leq \mid a - b \mid$. Odtiaľ naviac plynie, že $\bigvee_a^b \mid f \mid \leq \bigvee_a^b f$. Na dôkaz toho, že obrátené tvrdenie nemusí platiť, stačí zobrať Dirichletovu funkciu.