IV. Parametrické integrály

1. Riemannov parametrický integrál

Definícia 1.1. *Nech* $E =< a, b > \times(c, d)$ *a nech funkcia* $f : E \to R$ *je pre každé* $y \in (c, d)$ *riemannovsky integrovateľná na intervale* $< a, b >$. *Potom funkciu*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

nazývame Riemannovým parametrickým integrálom.

Veta 1.1. *Ak je funkcia* f *spojitá na množine* E, *tak funkcia* F *je spojitá na intervale* (c, d).

Veta 1.2. *Ak je funkcia* f *spojitá na množine* E *a hranice integrovania sú spojité funkcie* φ *a* ψ, *ktoré zobrazujú interval* (c, d) *do intervalu* $< a, b >$, *tak funkcia*

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$$

je spojitá na intervale (c, d).

Veta 1.3. *Za predpokladov vety 1.1, resp. vety 1.2, platí pre* $y_0 \in (c, d)$:

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)dx,$$

resp.

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)dx.$$

Veta 1.4. *Ak spojitá funkcia* $f : E \to R$ *má na množine* E *spojitú parciálnu deriváciu* $\frac{\partial f}{\partial y}$, *tak funkcia* $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ *je diferencovateľná na* (c, d) *a platí*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx \text{ (tzv. Leibnizov vzorec).}$$

Veta 1.5. *Ak spojitá funkcia $f : E \to R$ má na množine E spojitú parciálnu deriváciu $\frac{\partial f}{\partial y}$ a funkcie φ a ψ, ktoré zobrazujú interval (c,d) do intervalu $< a,b >$, sú diferencovateľné na (c,d), tak funkcia $I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$ je diferencovateľná na (c,d) a platí*

$$I'(y) = f\left(\psi(y), y\right)\psi'(y) - f\left(\varphi(y), y\right)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Veta 1.6. *Ak je funkcia f spojitá na množine $< a,b > \times < c,d >$, tak*

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx.$$

1. Nájdite definičný obor funkcie $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}$.

2. Zistite, kde sú spojité nasledujúce funkcie:

a) $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{\pi}{4}}(x^2+y^2+1)}$,

b) $F(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2}{(x+|y|)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}}dx, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$

c) $F(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\operatorname{arctg}\,(x^2+y^2)\sin x}dx, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

3. Zistite, pre ktoré hodnoty argumentu y je spojitá funkcia

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx,$$

kde funkcia f je spojitá a kladná na intervale $< 0,1 >$.

4. Dokážte, že funkcia

$$F(y) = \int_0^{\pi} \frac{2\cos x + 2y}{1 + 2y\cos x + y^2}dx$$

nie je spojitá v bodoch $y = 1$ a $y = -1$.

5. Ukážte, že integrál $F(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)dx$ z nespojitej funkcie $f(x,y) = \operatorname{sgn}\,(x-y)$ je spojitou funkciou. Zostrojte graf funkcie F.

6.* Dokážte, že funkcia $F(y) = \int_a^b \varphi(x)f(x,y)dx$ je spojitá na $< c, d >$, ak sú splnené podmienky:

(i) funkcia f je spojitá na $< a, b > \times < c, d >$,

(ii) funkcia φ je absolútne integrovateľná na intervale (a, b).

7. Nájdite:

a) $\lim\limits_{y\to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+y^2}dx,\ |y| < \frac{1}{2}$,

b) $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+y)}{x^2y^2+xy+1}dx$,

c) $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^2 x^2 \cos xy dx$,

d) $\lim\limits_{y\to +\infty} \int_1^2 \frac{y}{x+y} e^{-x^2y}dx$,

e) $\lim\limits_{y\to 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2},\ |y| < 1$,

f) $\lim\limits_{n\to \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$,

g) $\lim\limits_{y\to \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+|y|)}{\ln(x^2+y^2)}dx$.

8. Nájdite $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta$.

9. Nech funkcia f je spojitá na intervale $< A, B >$. Dokážte, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]\, dt = f(x) - f(a)\ (A < a < x < B).$$

10. Je možné uskutočniť limitný prechod za znakom integrálu vo výraze

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx?$$

11. Dokážete, že v nasledujúcich prípadoch je možný limitný prechod za znakom integrálu:

a) $\int_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}+y^2}dx$ pre $y \to \infty$,

b) $\int_{-1}^3 \text{arctg}\left(\frac{xy}{1+y}\right) dx$ pre $y \to 0$.

12. Nech

(i) funkcia $\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá na $< a, b > \times < c, d >$,

(ii) funkcia φ je absolútne integrovateľná na intervale (a, b).

Potom integrál

$$F(y) = \int_a^b \varphi(x)f(x,y)dx$$

je spojite diferencovateľnou funkciou premennej $y \in (c, d)$ a platí

$$F'(y) = \int_a^b \varphi(x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Dokážte!

13. Vypočítajte $F'(y)$, ak

$$F(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx, \ y > 0.$$

Čo možno povedať o derivácii v bode $y = 0$?

14. Je možné vypočítať pomocou Leibnizovho vzorca deriváciu funkcie

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx,$$

v bode $y = 0$?

15. Nájdite $F'(y)$, ak

a) $F(y) = \displaystyle\int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx,$

b) $F(y) = \displaystyle\int_{y^2}^{3y^2+1} \frac{e^{xy}}{x} dx, \ y \neq 0,$

c) $F(y) = \displaystyle\int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx,$

d) $F(y) = \displaystyle\int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx,$

e) $F(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1 + xy)}{x} dx,$

f) $F(y) = \displaystyle\int_0^y f(x + y, x - y) dx,$

g) $F(y) = \displaystyle\int_0^{y^2} dx \int_{x-y}^{x+y} \sin\left(x^2 + t^2 - y^2\right) dt.$

16. Nájdite $F''(y)$, ak

a) $F(y) = \displaystyle\int_0^y (x + y) f(x) dx$, kde f je diferencovateľná funkcia,

b) $F(y) = \displaystyle\int_a^b |x - y| f(x) dx$, kde $a < b$ a f je spojitá funkcia na $< a, b >$,

c) $F(y) = \frac{1}{h^2} \displaystyle\int_0^h d\xi \int_0^h f\left(y + \xi + \eta\right) d\eta$ $(h > 0)$, kde f je spojitá funkcia.

17. Nájdite $F^{(n)}(y)$, ak

$$F(y) = \int_0^y (y - x)^{n-1} f(x) dx$$

a f je spojitá funkcia.

18. Dokážte správnosť vzorca

$$I_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \psi_n(x), \ n = 1, 2, \ldots,$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ak } x \neq 0, \\ 1, & \text{ak } x = 0, \end{cases}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x y^n \cos\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) dy, & \text{ak } x \neq 0, \\ \dfrac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1}, & \text{ak } x = 0,\ n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Použijúc uvedený vzorec urobte odhad

$$\left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right| \leq \frac{1}{n+1} \text{ pre } x \in (-\infty, +\infty).$$

19. Funkciu $f(x) = x^2$ na intervale $< 1, 3 >$ približne zameňte lineárnou funkciou $a + bx$ tak, aby hodnota integrálu

$$\int_1^3 \left(a + bx - x^2\right)^2 dx$$

bola minimálna.

20. Dokážte, že Besselova funkcia celého indexu n

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(n\varphi - x \sin\varphi\right) d\varphi$$

vyhovuje Besselovej rovnici

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) + \left(x^2 - n^2\right) I_n(x) = 0.$$

21. Vypočítajte $\displaystyle\int_1^2 x^n dx$ pre $n \neq -1$ a potom pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte $\displaystyle\int_1^2 x^n \ln x dx$.

22. Vyjdúc z rovnosti

$$\int_0^b \frac{dx}{1 + ax} = \frac{1}{a} \ln(1 + ab)$$

odvoďte pomocou derivovania podľa parametra vzorec

$$\int_0^b \frac{x dx}{(1 + ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1 + ab) - \frac{b}{a(1 + ab)}.$$

23. Vyjdúc z rovnosti

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arctg } \frac{b}{a}$$

vypočítajte

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}, a \neq 0.$$

24. Pomocou derivovania podľa parametra vypočítajte nasledujúce integrály:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2-\sin^2 x\right) dx,\ a>1,$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right) dx,$

c) $\int_0^{\pi} \ln\left(1-2a\cos x + a^2\right) dx,$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{arctg }(a\text{tg } x)}{\text{tg } x} dx,$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}.\frac{dx}{\cos x},\ |a|<1.$

25. V ktorých prípadoch je prípustná zámena poradia integrovania?

a) $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\cos xy}{x+y} dx,$ b) $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx,$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^1 \frac{\text{tg }(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dx,$ d) $\int_0^1 dy \int_{-1}^1 \frac{1}{y}\text{arctg } \frac{x}{y} dx.$

26. Použijúc vzorec

$$\frac{\text{arctg } x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$$

vypočítajte integrál

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg } x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

27. Pomocou integrovania podľa parametra vypočítajte integrál

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x} dx, a>0, b>0.$$

28. Vypočítajte integrály:

a) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x} dx,$

b) $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x} dx,\ a>0,\ b>0.$

29. Dokážte správnosť vzorca

$$\int_0^x tI_0(t)dt = xI_1(x),$$

kde $I_0(x)$ a $I_1(x)$ sú Besselove funkcie indexov 0 a 1 (pozri úlohu 20).