3. Eulerove integrály

A. Beta-funkcia

Definícia 3.1. *Funkciu*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt,$$

ktorá je definovaná pre $x > 0,\ y > 0$, *nazývame Eulerovým integrálom prvého druhu alebo beta - funkciou.*

Základné vlastnosti:

(i) $B(x,y) = B(y,x)$.

(ii) $B(x,y) = \dfrac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$.

(iii) $B(x,n) = \dfrac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}$ pre $n = 1,2,\ldots$.

(iv) $B(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$.

(v) $B(x,1-x) = \dfrac{\pi}{\sin\pi x},\ 0 < x < 1$.

B. Gama-funkcia

Definícia 3.2. *Funkciu*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

ktorá je definovaná pre $x > 0$, *nazývame Eulerovým integrálom druhého druhu alebo gama-funkciou.*

Základné vlastnosti:

(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)!$ pre prirodzené n.

(iii) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin\pi x},\ 0 < x < 1$.

(iv) $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$, špeciálne:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \text{pre prirodzené } n.$$

(v) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

(vi) $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} n^x$.

61. Pomocou Eulerových integrálov vypočítajte nasledujúce integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}dx$,

c) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{a^2-x^2}dx,\ a>0$, d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2}dx$,

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$, f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$,

g) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx,\ n\in N$.

62. Určte oblasť existencie a vyjadrite pomocou Eulerových integrálov:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx,\ n>0$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}dx$,

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}dx,\ a>0,\ b>0,\ n>0$, d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}},\ m>0$,

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x dx$, f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx$,

g) $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-x^n}dx$, h) $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$,

i) $\displaystyle\int_0^\infty x^p e^{-ax}\ln x dx,\ a>0$, j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx$,

k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx$, l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx,\ 0<p<1$.

63. Vypočítajte:

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx$ (Raabeho integrál), b) $\displaystyle\int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)dx,\ a>0$,

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x dx$, d) $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x dx$, n je prirodzené číslo.

64. Dokážte, že ak $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$ a $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx$, n je prirodzené číslo, tak

$$I_1 I_2 = \frac{\pi}{2n}.$$

65. Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^n}dx = 1$.

66. Pomocou rovnosti $\dfrac{1}{x^m} = \dfrac{1}{\Gamma(m)} \displaystyle\int_0^\infty t^{m-1} e^{-xt} dt, x > 0$, nájdite integrály:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^m} dx,\ 0 < m < 1,\ a \neq 0,$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m} dx,\ 0 < m < 2.$

67. Nájdite dĺžku lemniskáty $r^2 = a^2 \cos 2\varphi,\ a > 0.$

68. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkou $r^4 = \sin^3 \varphi \cos \varphi.$

69. Nájdite obsah časti roviny ohraničenej krivkou $|x|^n + |y|^n = a^n,\ n > 0,\ a > 0.$