Výsledky, návody a poznámky

1 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2 a) Spojitá; b) spojitá; c) spojitá pre $y \neq 0$.

3 Spojitá pre $y \neq 0$.

7 a) 1; b) 1; c) $\frac{8}{3}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{4}$; f) $\ln \frac{2e}{1+e}$; g) $\frac{1}{2}$.

8 0.

10 Nie. (Prejdúc k limite za znakom integrálu dostávame nulu. Ak najskôr vypočítame integrál a potom prejdeme k limite, dostávame $\frac{1}{2}$. Všimnite si, že v bode $(0,0)$ integrovaná funkcia nie je spojitá.)

13 $\frac{1}{2} \ln \left[\frac{y^2}{1+y^2}\right]$, pre $y > 0$. V bode $y = 0$ derivácia neexistuje.

14 Nie. ($F'(0) = \pi$, kým derivácia podintegrálnej funkcie podľa y sa pre $y = 0$ rovná nule.)

15 a) $2ye^{-y^5} - e^{-y^3} - \int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2 y} dx$; b) $e^{(3y^2+1)y}\left[\frac{1}{y} + \frac{6y}{(3y^2+1)}\right] - \frac{3e^{y^3}}{y}$; c) $e^{y|\cos y|}\cos y - \ e^{y|\sin y|}\sin y + \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx$; d) $\left[\frac{1}{b} + \frac{1}{(b+y)}\right] \sin\left[y(b+y)\right] - \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{(a+y)}\right] \sin\left[y(a+y)\right]$; e) $(\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$; f) $f(y,-y) + 2\int_0^y f'_u(u,v)dx$, kde $u = x+y$ a $v = x - y$; g) $2y\int_{y^2-y}^{y^2+y} \sin\left(t^2 + y^4 - y^2\right) dt + 2\int_0^{y^2} \sin 2x^2 . \cos 2xydx-$
$2y\int_0^{y^2} dx \int_{x-y}^{x+y} \cos\left(x^2 + t^2 - y^2\right) dt$.

16 a) $F''(y) = 3f(y) + 2yf'(y)$; b) $F''(y) = 2f(y)$, ak $y \in (a,b), F''(y) = 0$, ak $y \notin (a,b)$; c) $F''(y) = \frac{\triangle^2 f(y)}{h^2}$, kde $\triangle^2 f(y) = f(y+2h) - 2f(y+h) + f(y)$.

17 $F^{(n)}(y) = (n-1)!f(y)$.

19 $4x - \frac{11}{3}$.

21 $\frac{(n+1)2^{n+1}\ln 2 - 2^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.

23 $\frac{b}{8a^4}\left[\frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{3}{ab}\text{arctg } \frac{b}{a}\right]$.

24 a) $\pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$; b) $\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$; c) 0, ak $|a| \leq 1; \pi \ln a^2$, ak $|a| > 1$; d) $\frac{\pi}{2}\text{sgn } a \ln(1+|a|)$; e) $\pi \arcsin a$.

25 a) Áno; b) nie; c) áno; d) nie.

26 $\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

27 $\ln \frac{b+1}{a+1}$.

28 a) $\operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; b) $\frac{1}{2}\ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$.

30 a) $y>1$; b) $y \geq 0$; c) $y>1$; d) $\left|\frac{p-1}{q}\right|<1$; e) $y<1$; f) $y>\frac{1}{2}$.

33 Prepíšte daný integrál ako $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(y+1)x+\sin(y-1)x}{x}dx$.

34 a) Konverguje rovnomerne; b) konverguje nerovnomerne.

35 a) Rovnomerne; b) rovnomerne; c) rovnomerne; d) rovnomerne; e) nerovnomerne; f) rovnomerne; g) nerovnomerne; h) α) rovnomerne; β) nerovnomerne; i) rovnomerne; j) nerovnomerne; k) rovnomerne; l) nerovnomerne.

37 a) Spojitá; b) spojitá; c) nespojitá v ± 1; d) spojitá; e) spojitá; f) nespojitá v $y=0$.

38 Nie, pretože zámena poradia limity a integrálu dáva ako výsledok 0, kým v skutočnosti je daná limita rovná 1.

39 Ukážte, že pre ľubovoľné $\varepsilon>0$ existuje dostatočne veľké B a y vyhovujúce podmienke $0 \leq y \leq \frac{1}{B}\ln\frac{2MB}{2MB-\varepsilon}$ $(0<\varepsilon<2MB)$, kde $M=\sup_{0\leq x\leq B}|f(x)| \neq 0$, tak, že $|\int_0^\infty e^{-yx}f(x)dx - \int_0^\infty f(x)dx| < \varepsilon$.

40 Zameňte poradie limity a integrálu a použite substitúciu $x=\sqrt{n}.\operatorname{ctg} z$. Pri počítaní limity, ktorú dostanete, použite Wallisov vzorec.

41 a) 1; b) 1; c) $\frac{\pi}{2}$; d) 0.

42 $(-1)^m \frac{m!}{n^{m+1}}$.

43 $\frac{(n-1)!}{y^n}$.

44 $\frac{\pi}{2y^{2n-1}}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}$.

45 Návod: Položte $xy=t$.

47 a) $\ln\frac{b}{a}$; b) 0; c) $\ln\frac{b}{a}$; d) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$.

48 a) $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$; b) $\ln\frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2a+2b}}$; c) $\operatorname{arctg}\frac{m(b-a)}{ab+m^2}$; d) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+m^2}{a^2+m^2}$; e) $\pi\left(\sqrt{1-a^2}-1\right)$; f) $-\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$; g) $\pi\arcsin a$; h) $I=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\,(ab)\ln\frac{(|a|+|b|)^{|a|+|b|}}{|a|^{|a|}|b|^{|b|}}$, ak $ab\neq 0$, $I=0$, ak $ab=0$; i) $\frac{\pi}{|b|}\ln\left(|a|+|b|\right)$, $b\neq 0$; j) $\frac{2\pi}{3}\left[ab\left(a+b\right)+a^3\ln a+b^3\ln b-\left(a^3+b^3\right)\ln\left(a+b\right)\right]$, $a>0,\ b>0$.

50 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Návod: V integráli $I=\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ urobte substitúciu $t=xy,\ x>0$, potom vynásobte e^{-x^2} a integrujte v hraniciach $0\leq x<+\infty$. Dostanete vzťah $I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty xe^{-x^2y^2}dy$. V integráli na pravej strane využite substitúciu $\alpha=x^2\left(y^2+1\right)$ a dostanete $I^2=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}$.

51 a) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$; b) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$; c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$; d) $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)$; e) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$; f) $\frac{b}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

52 $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b$.

53 a) $\pi\frac{|b|}{2}-\sqrt{\pi a}$; b) $\frac{\pi}{4}\left[\operatorname{sgn}\ (a+b)+\operatorname{sgn}\ (a-b)\right]$; c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$; d) $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} a$; e) $\frac{\pi}{2}|a|$; f) $\frac{3\pi}{8}a|a|$; g) $\frac{\pi}{4}$; h) $\frac{3}{8}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$; i) $\frac{\pi}{4}$.

54 $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$.

55 a) $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2}\right)$; b) $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$; c) $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{\alpha b}{a}e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$.

56 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

57 a) $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} a\right)$; b) $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$; c) $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$.

60 a) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; c) $\frac{p}{p^2+1}$; d) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$; e) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$.

61 a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{60\pi}\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$; c) $\pi\frac{a^4}{16}$; d) $\frac{\pi}{(5\sin\frac{2\pi}{5})}$; e) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; f) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; g) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$.

62 a) $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}},\ 0<m<n$; b) $B\left(n-m,m\right),\ 0<m<n$; c) $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right),\ 0<\frac{m+1}{n}<p$, d) $\frac{1}{m}B\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\right),\ n<0$ alebo $n>1$; e) $\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),\ m>-1,\ n>-1$; f) $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}},\ |n|<1$; g) $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),\ \frac{m+1}{n}>0$; h) $\Gamma\left(p+1\right),\ p>-1$; i) $\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right],\ p>-1$; j) $-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi},\ 0<p<1$; k) $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{2}}\right|,\ 0<p<1,\ 0<q<1$; $\pi\operatorname{cotg}\pi p$ (Návod: Integrál možno chápať ako $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)\right]$.).

63. a) $\ln\sqrt{2\pi}$ (Vyjdite z toho, že daný integrál je možné prepísať ako $\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left[\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right]dx$ a potom použite vzorec (iii) pre gama - funkciu.) b) $\ln\sqrt{2\pi}+a\left(\ln a-1\right)$ (Derivujte daný integrál podľa parametra a.) c) $\frac{1}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$ (Prepíšte daný integrál ako $\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left[\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right]\sin\pi x dx$ a využite vzorec (iii) pre gama - funkciu.) d) $\frac{1}{4n}$.

65 Urobte substitúciu $x=t^{\frac{1}{n}}$ a využite spojitosť gama - funkcie pre $x>0$.

66 a) $\frac{\pi|a|^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}, a\neq 0$; b) $I=\frac{\pi a}{2|a|^{2-m}\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}$, ak $a\neq 0, I=0$, ak $a=0$.

67 $aB\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

68 $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

69 $\frac{2a^2}{n}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$.