Výsledky, návody a poznámky

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\frac{\pi}{4}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{2a}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $1 - \ln 2$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\frac{1}{4}(\pi + 2)$. Návod: urobiť substitúciu $\sqrt{x} = t$ a použiť vetu 1.2.

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\frac{2}{3}\ln 2$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Návod: vezmite do úvahy, že $\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}$ $(x \neq 0)$ a urobte substitúciu $x - \frac{1}{x} = t$; dostanete $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+2}$, na výpočet ktorého použite definíciu 1.4 alebo definíciu 1.7.

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\frac{\pi}{2} - 1$. Návod: urobte substitúciu $\operatorname{arctg} x = t$.

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\frac{a}{a^2+b^2}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ $\frac{b}{a^2+b^2}$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ π.

$\boxed{\mathbf{15}}$ 2.

$\boxed{\mathbf{16}}$ $2\frac{2}{3}$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ $5\frac{1}{4}$. Návod: urobte substitúciu $\sqrt[3]{x-1} = t$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{19}}$ $-\frac{1}{4}$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Diverguje.

$\boxed{\mathbf{21}}$ -1.

$\boxed{\mathbf{22}}$ $\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ π.

$\boxed{\mathbf{24}}$ 0.

$\boxed{\mathbf{25}}$ $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Návod: vezmite do úvahy, že $\frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \frac{\frac{1}{x^6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2+\frac{1}{x^5}+1}}$ a urobte substitúciu $\frac{1}{x^5}=t$.

$\boxed{\mathbf{26}}$ $\frac{1}{2}$. Návod: urobte substitúciu najprv $x^2=t$ a potom v získanom integráli položte $t=\cos\varphi$; na výpočet použite definíciu 1.3.

$\boxed{\mathbf{27}}$ $(-1)^p\,p!$. Návod: urobte substitúciu $\ln x = t$.

$\boxed{\mathbf{28}}$ $I_1 = I_2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. Návod: substitúciou $\frac{\pi}{2}-x=t$ sa integrál I_2 redukuje na integrál I_1; potom $2I_1 = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + I_1$ (to sa dostane pomocou substitúcie $\pi - t = z$ v integráli $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin t)\,dt$).

$\boxed{\mathbf{29}}$ Návod: použite definíciu 1.1 a skutočnosť, že ak $\varphi'(x)\in\Re < a,\eta >$, $\eta \geq a$, tak aj $|\varphi'(x)|\in\Re < a,\eta >$.

$\boxed{\mathbf{30}}$ $\dfrac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}$. Návod: Pretože $\sin x > 0$ pre $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k = 0,1,2,\ldots$ $\int_E \frac{e^{-\frac{x}{2}}|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{\pi+2k\pi}\frac{e^{-\frac{x}{2}}|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{\frac{t}{2}}|\sin t - \cos t|}{\sqrt{\sin t}}dt$ (po substitúcii $x-2k\pi = t$). Integrál $\int_0^{\pi}\frac{e^{\frac{t}{2}}|\sin t-\cos t|}{\sqrt{sint}}dt$ je konvergentný, čo sa dokáže na základe definície 1.2 resp. definície 1.3, ak vezmeme do úvahy, že $\sin t - \cos t \leq 0$ pre $0\leq t\leq\frac{\pi}{4}$ a $\sin t - \cos t \geq 0$ pre $\frac{\pi}{4}\leq t\leq\pi$ a zapíšeme ho ako súčet dvoch integrálov.

$\boxed{\mathbf{31}}$ $n!$

$\boxed{\mathbf{32}}$ $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, ak n je párne; $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, ak n je nepárne. Návod: urobte substitúciu $x=\sin t$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ a) 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0.

$\boxed{\mathbf{34}}$ Návod: použite definíciu 1.7, v ktorej položte d_0=0 a zohľadnite skutočnosť, že v a) je funkcia za znakom integrálu nepárna a v b) je párna.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Diverguje.

$\boxed{\mathbf{36}}$ Konverguje.

$\boxed{\mathbf{37}}$ Diverguje.

$\boxed{\mathbf{38}}$ Diverguje.

$\boxed{\mathbf{39}}$ Konverguje.

$\boxed{\mathbf{40}}$ Diverguje. Návod: dokážte na základe definície 1.1.

$\boxed{\mathbf{41}}$ Diverguje. Návod: pre dôkaz použite definíciu 1.2 a poznámku 1.1.

$\boxed{\mathbf{42}}$ Konverguje (pozri úlohu 31).

$\boxed{\mathbf{43}}$ Konverguje.

44 Konverguje. Návod: použite vetu 2.7.

45 Konverguje.

46 Konverguje. Návod: použite definíciu 1.7 a potom definíciu 1.2 resp. 1.3.

47 Diverguje. (Pozri návod k úlohe 46).

48 Konverguje.

49 Diverguje.

50 Diverguje. Návod: Napíšte daný integrál ako súčet dvoch integrálov $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} + \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$, pričom v druhom integráli funkcia $\frac{1}{\ln x} = \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{x-1}\right)$ pre $x \to 1^+$; ďalej využite poznámku 2.4 a definíciu 1.7.

51 Konverguje. Návod: Na základe definície 1.7 zapíšte integrál ako súčet dvoch integrálov a na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý dôsledok 2.2 (alebo poznámku 2.2).

52 Konverguje. Návod: Daný integrál má singulárny bod $x = 0$, t.j. integrál je typu integrála z definície 1.3. Využitím poznámky 1.4 sformulujte špeciálne porovnávacie kritérium v limitnom tvare pre uvedený typ nevlastného integrálu, podobne ako je toto kritérium sformulované vo vete 2.5 pre integrál z definície 1.2. Na základe toho hľadajte $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^p|\ln \sin x|}{\sqrt{x}} \left(\dfrac{1}{2} < p < 1\right)$, kde $x^p = (x-0)^p$.

53 Diverguje. Návod: Integrál zapíšte v tvare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^a \frac{\sin^2 x}{x} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \ (a > 0).$$

Prvý integrál existuje, druhý integál na pravej strane rovnosti použitím vzorca $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ napíšte ako rozdiel dvoch integrálov použite na jeden z nich definíciu 1.1 a na druhý vetu 2.7.

54 Konverguje. Poznámka: bod $x = 1$ nie je singulárnym bodom funkcie $\frac{\ln x}{1-x^2}$, lebo existuje $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x}{1-x^2}$, o čom sa presvedčte sami.

55 Návod: Uvažujte dva prípady: a) $s \le 0$; b) $s > 0$.

a) Ak $s \le 0$, integrál existuje ako vlastný (prečo?).

b) Ak $s > 0$, funkcia $\frac{1}{(\sin x)^s}$ má singulárne body $x = 0$ a $x = \pi$. Podľa definície 1.7 zapíšte integrál vo tvare $\int_0^\pi \frac{dx}{(\sin x)^s} = \int_0^c \frac{dx}{(\sin x)^s} + \int_c^\pi \frac{dx}{(\sin x)^s}$ $(0 < c < \pi)$. Na dôkaz konvergencie 1. integrálu použite poznámku 2.4 (tu $a = 0$); 2. integrál substitúciou $\pi - x = t$ prevediete na integrál so singulárnym bodom $x = 0$. Z a), b) dostanete dôkaz tvrdenia úlohy.

56 Návod: Uvažujte dva prípady: a) $p \le 0$, b) $p > 0$. Prípad a) pozrite v návode k úlohe 55. V prípade b) funkcia $\frac{\sin x}{x^p}$ má singulárny bod $x = 0$. Na dôkaz konvergencie integrálu $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$ použite poznámku 2.4, pritom vezmite do úvahy, že $\frac{\sin x}{x^p} = \frac{\sin x}{x} . \frac{1}{x^{p-1}}$.

57 Návod: Použite vetu 2.7.

58 Pozrite návod k úlohe 57.

59 Konverguje, ak $|\alpha| < 1$ a diverguje, ak $|\alpha| \geq 1$. Návod: Zapíšte daný integrál v tvare $\int_0^c \frac{dx}{x^{-\alpha}(x^2+1)} + \int_c^\infty \frac{dx}{x^{-\alpha}(x^2+1)}$ $(c > 0)$. Použitím poznámky 2.4 na 1. integrál dostanete množinu A_1 hodnôt parametra α, pre ktoré konverguje tento integrál, a množinu A_1' hodnôt parametra α, pre ktoré integrál diverguje. Podobne použitím poznámky 2.2 dostanete množiny A_2 a A_2' pre 2. integrál. Potom je množina $A = A_1 \cap A_2$ hodnôt parametra α, pre ktoré daný integrál konverguje, a množina $A' = A_1' \cup A_2'$ je množinou hodnôt parametra α, pre ktoré daný integrál diverguje.

60 Konverguje, ak $\alpha < -1$ a diverguje, ak $\alpha \geq -1$. Návod: Zapíšte funkciu, ktorú integrujete vo tvare $\frac{1}{x^{-\alpha}} \cdot \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}$ a použite poznámku 2.2.

61 Konverguje pre $\alpha > 1$ a diverguje pre $\alpha \leq 1$. Návod: Urobte substitúciu $\ln x = t$ a na získaný integrál použite dôsledok 2.2.

62 Pre $\alpha < 1$ konverguje, pre $\alpha \geq 1$ diverguje. Návod: Zapíšte integrál v tvare: $\int_0^\pi \frac{1}{x^\alpha} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$; prvé dva integrály majú singulárny bod $x = 0$, použite na nich poznámku 2.4.

63 Konverguje pre $\alpha > 0$. Návod: Integrál zapíšte vo tvare súčtu dvoch integrálov: $\int_0^c \frac{e^{-x}}{x^{1-\alpha}} dx + \int_c^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x} dx$ $(c > 0)$; na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý dôsledok 2.2.

64 Konverguje pre $1 < \alpha < 2$. Návod: Zapíšte daný integrál vo tvare súčtu dvoch integrálov: $\int_0^c \frac{\operatorname{arctg}\, ax}{x^\alpha} dx + \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\, ax}{x^\alpha} dx$ $(c > 0)$; na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý poznámku 2.2.

65 Konverguje pre $1 < \alpha < 2$. Návod: Urobte substitúciu $\ln(1 + x) = t$ a ďalej postupujte podľa návodu k úlohe 63.

66 Konverguje pre $\alpha > 0$ $(a \neq 0)$. Návod: Použite vetu 2.7.

67 Konverguje pre $\alpha > -1$. Návod: Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál ako súčet dvoch integrálov na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý poznámku 2.3.

68 Konverguje, ak $p > -1$ a $q > -1$. Návod: Po substitúcii $\ln \frac{1}{x} = u$ v danom integráli dostaneme integrál $\int_0^\infty \frac{u^a}{e^{(1+p)u}} du$. Ďalej postupujete podľa návodu k úlohe 63.

69 Konverguje, ak $m > -1$, $n - m > 1$. Návod: Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál ako súčet dvoch integrálov na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý poznámku 2.2.

70 Konverguje, ak $m > -2$, $n - m > 1$. Poznámka: Pri hľadaní hodnôt parametrov m a n, pre ktoré daný integrál konverguje, postupujte podľa návodu k úlohe 69.

71 Konverguje, ak $p < 1, q < 1$. Návod: Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál v tvare súčtu dvoch integrálov: $\int_0^c \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_c^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ $\left(0 < c < \frac{\pi}{2}\right)$; funkciu

$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x}$ v 1. integráli rozšírte x^p a použite poznámku 2.4; v 2. integráli túto funkciu rozšírte výrazom $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^q$ a použite poznámku 2.3.

72 Konverguje, ak $\min\{p,q\} < 1$, $\max\{p,q\} > 1$. Návod: Na základe definície 1.7 zapíšte daný integrál v tvare súčtu dvoch integrálov: $\int_0^c \frac{dx}{x^p+x^q} + \int_c^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$; na zistenie konvergencie prvého z nich použite poznámku 2.4 v dvoch prípadoch a) $p > q$, b) $p < q$; na zistenie konvergencie druhého použite poznámku 2.2 tiež v uvedených dvoch prípadoch.

73 Konverguje, ak $p > 1, q < 1$. Návod: Použitím substitúcie $\ln x = t$ v danom integráli dostanete integrál $\int_0^\infty \frac{dt}{e^{(p-1)t}t^q}$. Ďalej postupujte podľa návodu k úlohe 63.

74 Konverguje pre $m > -1, n > -1, m+n < -1$. Návod: Singulárne body funkcie, ktorú integrujeme na intervale $(0,\infty)$ sú $0, 1, +\infty$. Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál vo tvare súčtu štyroch integrálov:
$\int_0^{d_0} f(x)dx + \int_{d_0}^1 f(x)dx + \int_1^{d_1} f(x)dx + \int_{d_1}^\infty f(x)dx$ $(0 < d_0 < 1 < d_1 < \infty$, $f(x) = x^\alpha|x-1|^\beta)$, z ktorých každý obsahuje len jeden singulárny bod. Na vyšetrenie konvergencie 1. a 3. integrálu použite poznámku 2.4, konvergencie 2. integrálu poznámku 2.3 a konvergenciu 4. integrálu poznámku 2.2.

75 Konverguje, ak $p > 0$ a $q > 0$. Návod: Podľa definície 1.7 daný integrál zapíšte v tvare: $\int_0^c \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}dx + \int_c^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}$ $(0 < c < 1)$; na prvý z nich použite poznámku 2.4 a na druhý použite poznámku 2.3.

76 Konverguje pre $p > 1$, ľubovoľné $q, r < 1$ a pre $p = 1$, $q > 1$, $r < 1$. Návod: Substitúciou $\ln\ln x = u$ v danom integráli dostanete integrál

$$\int_0^\infty \frac{du}{e^{(p-1)e^u} e^{(q-1)u} u^r}.$$

Ďalej postupujte podľa návodu k úlohe 63, pričom pri vyšetrení konvergencie 2. integrálu (ktorý má singulárny bod ∞) rozlíšte dva prípady: a) $p - 1 > 0$, b) $p - 1 = 0$.

77 Konverguje, ak $p_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^n p_i > 1$. Návod: Funkcia, ktorú integrujeme na intervale $(-\infty, \infty)$ má tieto singulárne body: $-\infty, a_1, \ldots, a_n, \infty$. Ďalej postupujeme podobne ako v návode k úlohe 74.

78 Návod: Podľa definície 1.7 zapíšte daný integrál ako súčet dvoch integrálov $\int_0^c \frac{\sin tx}{x^s}dx + \int_c^\infty \frac{\sin tx}{x^s}dx$ $(c > 0, t \neq 0)$.
Poznámka 1.: Pre $t = 0$ dostanete nulovú funkciu, ktorej integrál absolútne konverguje na $(0,\infty)$.

Pri vyšetrovaní konvergencie daného integrálu postupujeme takto:
1. Použitím poznámky 2.4 dostanete $\frac{|\sin tx|}{x^s} = \left|\frac{\sin tx}{tx}t\right| . \frac{1}{x^{s-1}} = \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{x^{s-1}}\right)$ pre $x \to 0^+$, z čoho vyplýva, že $\int_0^c \frac{|\sin tx|}{x^s}dx$ konverguje, ak $s - 1 < 1$, t.j. $s < 2$; použite poznámku 2.1.
2. Na získanie konvergencie 2. integrálu použite vetu 2.7.

Z 1. a 2. dostanete množinu hodnôt parametra s, pre ktoré daný integrál konverguje.

Poznámka 2.: Z 1. vyplýva, že 1. integrál absolútne konverguje pre $s < 2$.

Absolútnu konvergenciu 2. integrálu zistíte na základe prvej časti vety 2.4.

Z poznámky 2. a absolútnej konvergencie 2. integrálu dostanete množinu hodnôt parametra s, pre ktoré daný integrál konverguje absolútne.

79 Návod: Použitím vzorca $1-\cos tx = 2\sin^2\frac{tx}{2}$ v danom integráli dostanete integrál $2\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{tx}{2}}{x^s}dx$. Funkcia $\frac{\sin^2\frac{tx}{2}}{x^s}$ je na $(0,\infty)$ nezáporná, preto konvergencia tohoto integrálu je súčasne aj absolútnou konvergenciou. Pri skúmaní konvergencie integrálu postupujete podľa návodu k úlohe 78., pričom v prvom z integrálov, ktoré dostanete po vyjadrení uvedeného integrálu ako súčtu dvoch integrálov, vezmite do úvahy, že

$$\frac{\sin^2\frac{tx}{2}}{x^s} = \frac{t^2}{4}\left(\frac{\sin\frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2 . \frac{1}{x^{s-2}},\ t \neq 0.$$

80 Návod: Po použití vzorcov pre goniometrické funkcie polovičného argumenta v danom integráli dostanete $2\int_0^\infty \frac{\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x^s}dx$. Dôkaz tvrdenia úlohy preveďte podľa návodu k úlohe 78.

81 Návod: a) Na zistenie konvergencie integrálu použite vetu 2.7. Pri dôkaze divergencie integrálu $\int_0^\infty \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}}dx$ využite nerovnosť $|\cos x| \geq \cos^2 x$.

b) Dôkaz robte podľa návodu v a), pritom využite nerovnosť $|\sin x| \geq \sin^2 x$.

c) Substitúciou $x^2 = t$ v danom integráli dostanete integrál typu, ktorý sa uvažuje v úlohe b).

82 Postup riešenia úlohy je ten istý, ako úlohy 81. a).

83 Konverguje absolútne, ak $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$; konverguje neabsolútne, ak $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$. Návod: A. Po použití substitúcie $x^q = t$ v danom integráli dostanete integrál $\frac{1}{|q|}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt$, ktorý na základe difinície 1.7 zapíšte ako súčet dvoch integrálov

$$\frac{1}{|q|}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt + \frac{1}{|q|}\int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}dt.$$

Použitím poznámky 2.4 na 1. integrál a vety 2.7 na 2. integrál dostanete podmienku pre parametre p a q takú, aby daný integrál konvergoval.

B. 1. Pri skúmaní absolútnej konvergencie daného integrálu vezmite do úvahy, že 1. integrál konverguje aj absolútne pre tie isté hodnoty parametrov p a q, pre ktoré konverguje v obyčajnom zmysle.

2. Na zístenie absolútnej konvergencie 2. integrálu použite 1. časť vety 2.4. Z 1. a 2. dostanete podmienku pre p a q, aby daný integrál absolútne konvergoval.

Porovnaním výsledkov v A a B dostanete podmienku, za ktorej daný integrál konverguje neabsolútne.

84 Konverguje absolútne. Návod: Použitím substitúcie $\sec x = \frac{1}{\cos x} = t$ v danom integráli dostanete $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}}dt$. Postup riešenia tejto úlohy je podobný postupu riešenia úlohy 83., len tu je o to ľahšie, že nemáme nijaké parametre.

$\boxed{\mathbf{85}}$ Konverguje neabsolútne. Návod: Urobte substitúciu $e^x = t$ a na získaný integrál použite vetu 2.7. Pri skúmaní divergencie tohto integrálu využite nerovnosť $|\cos t| \geq \cos^2 t$.

$\boxed{\mathbf{86}}$ Konverguje absolútne, ak $p > -2,\ q > p+1$; konverguje neabsolútne, ak $p > -2,\ p < q \leq p+1$. Poznámka: Pri riešení úlohy postupujte podľa návodu k úlohe 83.

$\boxed{\mathbf{87}}$ Návod: Ukážte, že $\int_0^\infty \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ konverguje absolútne a potom použite vetu 2.6.

$\boxed{\mathbf{88}}$ Riešenie: Bez ujmy na všeobecnosti môžeme považovať, že nerovnosť $f[\varphi(x)]\,\varphi'(x) \leq q f(x)$ $(q < 1)$ je splnená pre všetky $x \in < a, \infty)$. Nech $b > c,\ x = \varphi(t)$, $c = \varphi(a),\ b = \varphi(\beta)$, potom

$$\int_c^b f(x)dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt \leq q \int_a^\beta f(t)dt = q\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx\right),$$

$$\text{odkiaľ vyplýva, že } \int_c^b f(x)dx - q\int_c^\beta f(x)dx \leq q\int_a^c f(x)dx$$

$$\text{alebo } \int_c^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx - q\int_c^\beta f(x)dx \leq q\int_a^c f(x)dx.$$

Pretože $\beta \leq b,\ f(x) > 0$, integrál $\int_\beta^b f(x)dx \geq 0$ a teda, $(1-q)\int_c^\beta f(x)dx \leq q\int_a^c f(x)dx$ alebo $\int_c^\beta f(x)dx \leq \frac{q}{1-q}\int_a^c f(x)dx$.

Ak $b \to \infty$, tak aj $\beta \to \infty$ a $\int_c^\infty f(x)dx = \lim\limits_{\beta\to\infty}\displaystyle\int_c^\beta f(x)dx \leq \frac{q}{1-1}\int_a^c f(x)dx$. Pretože integrály $\int_a^\infty f(x)dx$ a $\int_c^\infty f(x)dx$ konvergujú alebo divergujú súčasne (pozri poznámku 1.6), prvá časť tvrdenia je dokázaná.

Nech teraz $f[\varphi(x)]\,\varphi'(x) \geq f(x)$. Pre zavedené označenia máme:

$$\begin{aligned}\int_c^b f(x)dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt &= \int_a^c f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt + \int_c^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt \\ &\geq \int_a^c f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt + \int_c^\beta f(t)dt.\end{aligned}$$

Ak $b \to \infty$, tak aj $\beta \to \infty$, a $\int_c^\infty f(x)dx \geq \int_a^c f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt + \int_c^\infty f(t)dt$, čo je možné len vtedy, keď $\int_c^\infty f(x)dx = \infty$.

$\boxed{\mathbf{92}}$ Nemusí. Návod: a) Z týmto integrálom ste sa stretli už v úlohe 81., kde sa zistilo na základe vety 2.7, že konverguje. Avšak $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x^2$ neexistuje. (Prečo?)

b) Konvergenciu daného integrálu zistite na základe tvrdenia z odseku 1. Podľa neho a po použití substitúcie $x^2 = t$ dostanete, že

$$\int_0^\infty (-1)^{[x^2]}\,dx = \sum_{k=0}^\infty \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^{[x^2]}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \frac{(-1)^{[t]}}{\sqrt{t}} dt.$$

Keď vypočítate integrál za znakom sumácie, dostanete číselný rad, ktorého konvergenciu zistíte pomocou Leibnizovho kritéria. Potom ukážte, že tento výsledok nezávisí od voľby postupnosti $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty} < (0,\infty)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = \infty$ (pozri [3]).

Záverom dostanete, že $\lim\limits_{x\to\infty} (-1)^{[x^2]}$ neexistuje.

93 Návod: Uvažujte integrál $\int_{x_0}^{\infty} f(x)f'(x)dx$, ktorý konverguje na základe predpokladov z tejto úlohy. Využite túto skutočnosť, definíciu 1.1 a dôkaz tvrdenia urobte sporom.

94 Nie. (Odôvodnite to.)

95 Ak integrál $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konverguje neabsolútne a funkcia $\varphi(x)$ je ohraničená, tak $\int_a^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ môže divergovať (pozri úlohu 53., v ktorej za $f(x)$ vezmite funkciu $\frac{\sin x}{x}$ a $\varphi(x) = \sin x$). Na druhú otázku dáva odpoveď veta 2.6.

96 Návod: Podľa predpokladu existuje vlastná limita $\lim\limits_{\eta\to 0^+} \displaystyle\int_{\eta}^{1} f(x)dx$ (pozri definíciu 1.3). Položte $\eta = \frac{1}{n}$, $n \in N$ a predpokladajte, že $f(x)$ je monotónne klesajúca na $< \frac{1}{n}, 1 >$ (podobné úvahy potom môžete previesť pre monotónne rastúce funkcie). Urobte delenie intervalu na n rovnakých častí a napíšte horný $\overline{S}$ a dolný $\underline{S}$ integrálny súčet funkcie $f(x)$ zodpovedajúce danému deleniu takto:

$$\overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1)}{n};$$

$$\underline{S} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(\frac{1}{n})}{n}.$$

Ďalej využite z teórie určitého integrálu známu nerovnosť

$$\underline{S} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq \overline{S}$$

a to, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\frac{1}{n})}{n} = 0$ (odôvodnite to!) a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(1)}{n} = 0$. Limitným prechodom v tejto nerovnosti dostanete platnosť tvrdenia.

98 a) $\ln \frac{1}{2}$. Poznámka: Vezmite do úvahy, že integrál má singulárne body $1, 2, \infty$; b) 0; c) π; d) 0.