# Matematicko-fyzikálna fakulta
# Univerzity Komenského

Ekonomická a finančná matematika


# Vyhľadávanie arbitrážnych príležitostí na výnosovej krivke

Diplomová práca


Diplomant: **Juraj Kotian**

Vedúci dipl. práce: **RNDr. Alena Kuklišová**



Bratislava 1999

Čestne prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 29. marca 1999

Úprimne ďakujem RNDr. Alene Kuklišovej za čas, ktorý mi venovala pri príprave diplomovej práce, za praktické pripomienky z oblasti fungovania trhu s dlhopismi, návrh programu a dodanie dát.

Taktiež moje poďakovanie patrí profesorom z ÚAM a KTPMŠ, ktorí si našli čas a trpezlivo odpovedali na moje nekonečné otázky a maily.

V neposlednom rade by som chcel poďakovať rodine za to, že s pochopením znášala moje časté vysedávanie za počítačom. Ak som niekedy myslel viac práve na diplomovú prácu ako na Vás, prosím odpustite mi to!

# Obsah

# Úvod

Nevyhnutnou súčasťou kapitálového trhu sú dlhopisy. Dlhopisy na rozdiel od akcií ponúkajú stabilný príjem, a preto ich banky držia vo svojom portfóliu ako určitú istotu. Najväčšej pozornosti sa dostáva štátnym dlhopisom, ktoré sa považujú za najmenej rizikové. Vo všeobecnosti ale platí, že menšie riziko implikuje aj nižší výnos, a teda banky sa snažia hľadať dodatočný zisk na pohyboch cien dlhopisov, pri súčasnom zachovaní si orientácie štruktúry svojho portfólia. To sa dá priebežnými korekciami, napr. predaním nadhodnotených a nákupom podhodnotených dlhopisov.

Ale čo sú to nahodnotené a čo podhodnotené dlhopisy? Na to potrebujeme poznať férovú cenu dlhopisu, teda cenu, akej je hodný v porovnaní s ostanými dlhopismi. Cena bezrizikového dlhopisu by sa mala rovnať súčasnej hodnote budúcich platieb. Lenže peňažný trh disponuje väčšinou iba jednodňovými, týždennými, mesačnými, trojmesačnými a šesťmesačnými úrokovými mierami, čo je na ohodnotenie dlhopisov s rôznorodou škálou splatností nepostačujúce.

Keďže štátne dlhopisy sa považujú za bezrizikové, tak vo svojich cenách implicitne obsahujú tieto úrokové miery, dokonca ešte plnšiu škálu úrokových mier. V tejto súvislosti sa môžme stretnúť s pojmom *časová štruktúra úrokových mier* a nemyslia sa tým iba okamžité úrokové miery (spot rates). Odhad časovej štruktúry úrokových mier z cien dlhopisov možno následne použiť na výpočet férovej ceny.

V skutočnosti však nie všetky ceny dlhopisov „vyhovujú“ časovej štruktúre úrokových mier, a teda ich cena je rozdielna od férovej. Vtedy možno očakávať isté cenové korekcie v budúcnosti, ktoré pri vhodnom okamihu nákupu a predaja prinesú dodatočný zisk. Takýto spôsob hľadania dodatočného zisku si vyžaduje vysokú likviditu na trhu, ktorou slovenský dlhopisový nedisponuje, a ani nikdy nebude. Preto sa orientujeme na najlikvidnejšie dlhopisové trhy, ktorými sú americký a nemecký trh so štátnymi dlhopismi.

Cieľom predloženej diplomovej práce je vnoriť sa problematiky oceňovania dlhopisov, odhadu časovej štruktúry úrokových mier ako aj jej využitiu k zisteniu férovej ceny dlhopisu, na základe ktorej možno potom rozhodnúť, ktorý dlhopis predať a ktorý kúpiť. Za týmto účelom sme zhotovili aj program, ktorý rieši danú problematiku a mohol by sa stať prospešnou pomôckou pri investovaní do štátnych dlhopisov na zahraničných trhoch.

Diplomová práca je rozdelená do dvoch častí — teoretickej a praktickej. Teoretická časť pozostáva zo štyroch kapitol.

V prvej kapitole definujeme základné pojmy ohľadne dlhopisov, na ktoré sa potom v ďalšom texte odvolávame. Priblížime spôsob oceňovania dlhopisov použitím spojite zloženého úročenia a popíšeme základné charakteristiky dlhopisu, akými sú výnos do splatnosti a durácia.

V druhej kapitole sa venujeme rôznym reprezentáciam časovej štruktúry úrokových mier a to v podobe kriviek diskontnej miery, diskontnej funkcie a forwardovej funkcie. Uvedieme základné teórie, ktoré interpretujú ich charakteristické tvary.

V tretej kapitole sa zaoberáme rôznymi parametrickými funkciami, ktoré aproximujú časovú štruktúru úrokových mier, ako aj spôsobu odhadu ich parametrov.

Štrvtá kapitola sa venuje Rich/Cheap analýze, ktorá na základe cenových odchýliek vyhľadáva relatívne podhodnotené alebo nadhodnotené dlhopisy a určuje, kedy je dlhopis vhodné kúpiť za účelom očakávaného kapitálového rastu a kedy je vhodné ho predať a dosiahnuť tak dodatočný zisk.

V praktickej časti uvádzame základné črty programu a jeho ovládanie. Dotkneme sa aj spôsobu riešenia jednotlivých problematík, akými sú napr. riešenie systému nelineárnych rovníc a výber dát.

V prílohe sa nachádzajú zdrojové kódy vytvorených modulov, ktoré v sebe obsahujú stručný komentár. Ďalej k diplomovej práci je priložená disketa, na ktorej možno nájsť plne funkčný finálny produkt `usgovbonds.xls` vo formáte MS Excel 97, ukážkové vstupné dáta ako aj predloženú diplomovú prácu v elektronickej verzii (PDF).

# 1 Trh s dlhopismi

Sústredíme sa na dlhopisy, ktoré vyplácajú fixný príjem a sú najbežnejším typom dlhopisov. V nich sa emitent zaväzuje majiteľovi dlhopisu vyplatiť nominálnu hodnotu dlhopisu (principal) v deň splatnosti (maturity date).[1] Dlhopisy, ktoré okrem nominálnej hodnoty vyplácajú aj stanovené pravidelné úrokové platby (kupóny) sa nazývajú kupónové dlhopisy (coupon bonds). Kupón býva stanovený spravidla ako percento z nominálnej hodnoty dlhopisu a vypláca sa pravidelne raz alebo dvakrát ročne až do splatnosti dlhopisu. Dlhopisy, ktoré nevyplácajú kupóny sa nazývajú diskontné dlhopisy alebo aj s nulovým kupónom (zero coupon bonds). Aktuálna trhová cena, ktorá je určená dopytom a ponukou, býva vyjadrená ako percento z nominálnej hodnoty dlhopisu. Bezkupónové dlhopisy sa obchodujú vždy pod nominálnu hodnotu, aby prinášali výnos.

Dlhopisy môžme rozdeliť do troch kategórií:

**Štátne dlhopisy:** sú najvýznamnejšie a najlikvidnejšie dlhopisy. Slúžia na financovanie štátneho rozpočtu a refinacovanie štátneho dlhu. Osobitným druhom štátnych dlhopisov sú pokladničné poukážky, ktoré zodpovedajú diskontným dlhopisom so splatnosťou do jedného roka. Štátne dlhopisy sa dostávajú na primárny trh prostredníctvom aukcie a neskôr bývajú obchodované na sekundárnom trhu. Sú kryté vládou a považujú sa za bezrizikové. Určujú trendy na trhu a od ich výnosov sa odvodzujú aj požadované výnosy neštátnych dlhopisov. Tie bývajú spravidla zvýšené o učitú rizikovú prémiu.

**Dlhopisy spoločností:** sú väčšinou umiestnené na trh prostredníctvom banky. Verejne obchodovateľné dlhopisy spoločností sú zvyčajne menej atívnejšie než štátne dlhopisy. Ich výnosy bývajú rôznorodé a odzrkadlujú hlavne rizikovosť daného cenného papiera.[2] Kategorizovaním rizikovosti sa zaoberajú ratingové agentúry, medzi ktorými sú najznámejšie Standard&Poor's a Moody's.

**Komunálne dlhopisy:** slúžia na financovanie dlhodobejších projektov v rámci regiónu. Emitujú ich miestne správne jednotky, najčastejšie obce (okresy).

[1] Dlhopisy, ktorých emitent si vyhradzuje právo možnosti vyplatiť nominálnu hodnotu aj pred dňom splatnosti, sa nazývajú vypovedacie (callable bonds), no my sa nimi nebudeme zaoberať.

[2] Pod rizikovosťou sa rozumie hlavne možnosť nesplatenia záväzkov.

Cieľom tejto práce nie je analyzovať riziko cenného papiera, a preto sa obmedzíme len na štátne dlhopisy. Navyše tie najlepšie odzrkadlujú očakávania trhu. Ich vysoká likvidita umožňuje nákup a okamžitý predaj s minimálnou kapitálovou stratou a cena je neustále vystavená dopytu a ponuke, čím vzniká dobrý predpoklad na to, aby dlhopis bol „dobre ohodnotený“. Nás bude v ďalšej kapitole zaujímať, aká má byť férová cena dlhopisu, aby sme zistili, či daný dlhopis je podhodnotený alebo nadhodnotený. Ešte raz pripomíname, že v ďalšom texte budú všetky dlhopisy štátnymi dlhopismi.

## 1.1 Oceňovanie dlhopisov

Cena dlhopisu je silno prepojená s úrokovými mierami. Pre potreby oceňovania dlhopisov s rôznymi splatnosťami je výhodné používať spojite zložené úročenie. Potom definície jednotlivých pojmov ako aj algebra je jednoduchšia a prehľadnejšia.

Budeme používať nasledujúcu terminológiu: Nech $i^{(n)}$ označuje ročnú úrokovú mieru konvertibilnú $n$-krát v roku (t.j. vypláca úroky $\frac{i^{(n)}}{n}$ $n$-krát v roku). Nech $i^*$ označuje efektívny ročný výnos, ktorý vznikne zloženým úročením pri úrokovej miere $i^{(n)}$ (čiže úrokové výnosy sú ihneď reinvestované). Teda

$$\left(1 + \frac{i^{(n)}}{n}\right)^n = 1 + i^*. \tag{1}$$

*Spojite zložená úroková miera* $i$ je definovaná ako nekonečnekrát konvertibilná úroková miera, ktorá dáva ročný efektívny výnos $i^*$. Limitným prechodom $n \to \infty$ a s využitím definície Eulerovho čísla dostávame

$$e^i = 1 + i^*. \tag{2}$$

Takže napr. polročne konvertibilnej úrokovej miere $i^{(2)}$ podľa (1) a (2) prislúcha spojite zložená úroková miera

$$i = 2 \ln \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right). \tag{3}$$

Ak nepovieme inak, tak v ostatnom texte už budeme pod úrokovou mierou rozumieť spojite zloženú úrokovú mieru. Aplikácia úročenia je nasledovná: hodnota jednej jednotky investovanej pri konštatnej spojite zloženej úrokovej miere $i$ za čas $\tau$ (meraný v rokoch) bude $e^{i\tau}$.

Nech $P_d(t,T)$ označuje cenu bezrizikového diskontného dlhopisu (t.j. s nulovým kupónom) v čase $t$ (*deň obchodovania*), vyplácajúceho jednu jednotku v čase $T$ (*deň splatnosti*), $T > t$, kde čas je meraný v rokoch. Ak cena $P_d(t,T)$ má byť „férová“, mala by sa rovnať súčasnej hodnote jednej jednotky v čase $t$ vyplatenej za čas $T - t$ (*splatnosť dlhopisu*), inými slovami

$$P_d(t,T) = e^{-r_d(t,T)(T-t)}, \tag{4}$$

kde $r_d(t,T)$ je zodpovedajúca spojite zložená úroková miera k diskontného dlhopisu. Nazývame ju *diskontnou mierou* a po úprave dostávame jej vyjadrenie

$$r_d(t,T) = -\frac{\ln P_d(t,T)}{T-t}. \tag{5}$$

$P_d(t,m)$ ako funkciu splatnosti ($m = T - t$) nazývame aj diskontnou funkciou (v čase $t$).[3]

Nech $P(t,T,c)$ označuje „férovú“ cenu dlhopisu v čase $t$ vyplácajúceho kupóny $c$ v časoch $t_k$, $k = 1,\ldots,K$ kde $t < t_1$, $t_k < t_{k+1}$, $t_k = T$ a jednu jednotku v čase splatnosti $T$. Keďže na kupónový dlhopis možno pozerať ako na portfólio diskontných dlhopisov s rôznymi splatnosťami (každý diskontný dlhopis zodpovedá jednotlivej kupónovej platbe), tak možno písať

$$P(t,T,c) = c\sum_{k=1}^{K} P_d(t,t_k) + P_d(t,T) \tag{6}$$

a s dosadením (4) do predchádzajúceho výrazu

$$P(t,T,c) = c\sum_{k=1}^{K} e^{-r_d(t,t_k)(t_k-t)} + e^{-r_d(t,T)(T-t)}. \tag{7}$$

Pre dlhopisy sa okrem ceny počítajú aj iné charakteristiky. Sú to predovšetkým výnos do splatnosti a pre kupónové dlhopisy aj durácia.

[3] Často sa v súvislosti s diskontnými dlhopismi stretávame s pojmom *diskont*. Nie je to ani diskontná miera ani diskontná funkcia, ale hodnota na ročnej báze o ktorú sa predáva diskontný dlhopis pod nominál, t.j.

$$\text{diskont} = \frac{1 - P_d(t,T)}{T-t}.$$

## 1.2 Výnos do splatnosti

*Výnos do splatnosti* (yield to maturity) sa počíta z trhových cien dlhopisov. Pre diskontné dlhopisy[4] sa dá vyjadriť priamo z (5)

$$y(t, m) = -\frac{\ln \tilde{P}_d(t, t+m)}{m}, \tag{8}$$

kde $\tilde{P}_d$ je trhová cena dlhopisu so splatnosťou $m$ v obchodovací deň $t$.

Pre kupónové dlhopisy je výnos do splatnosti $y(t, m)$ definovaný ako riešenie[5] rovnice

$$\tilde{P}(t, t+m, c) = c \sum_{k=1}^{K} e^{-y(t,m)(t_k - t)} + e^{-y(t,m)m}, \tag{9}$$

kde $\tilde{P}$ je trhová cena dlhopisu v čase $t$ so splatnosťou $m$ vyplácajúceho kupóny $c$ v časoch $t_1, \ldots, t_k$. V porovnaní s (7) sú všetky platby diskontované pri rovnakej úrokovej miere $y(t, m)$. Výnos do splatnosti kupónového dlhopisu teda zodpovedá akémusi priemernému výnosu z jednotlivých platieb.

Je treba zdôrazniť, že výnos do splatnosti nie je výnosom, ktorý získa majiteľ dlhopisu pri jeho predaji. Ide o výnos pri držaním dlhopisu až do dňa splatnosti.

## 1.3 Durácia

Výnos do splatnosti v sebe obsahuje stratu miery informácie, a to hlavne o skladbe výnosov jednotlivých platieb. Treba poznamenať, že aj výška kupónu má svoje nezanedbateľné stránky a rovnosť výnosov do splatnosti ako aj doby splatnosti neznamenajú rovnocennosť dlhopisov. Môže vzniknúť tzv. kupónový efekt, ktorý si objasníme až v nasledujúcej kapitole. Teda veľkosť kupónových platieb, ako aj ich načasovanie majú svoju informačnú hodnotu. Tá je vyjadená práve duráciou.

*Durácia* je časový priemer vyplatenia súčasnej hodnoty kupónového dlhopisu, presnejšie

$$D = \sum_{k=1}^{K} m_k \frac{c e^{-y(t,m)m_k}}{\tilde{P}} + m \frac{e^{-y(t,m)m}}{\tilde{P}} = \frac{\sum_{k=1}^{K} m_k c e^{-y(t,m)m_k} + m e^{-y(t,m)m}}{\sum_{k=1}^{K} c e^{-y(t,m)m_k} + e^{-y(t,m)m}}, \tag{10}$$

[4]Definícia (8) je v poriadku, čo sa týka nezápornosti $y(t, m)$, pretože diskontný dlhopis sa vždy predáva pod nominál, a teda $\tilde{P}_d < 1 \Rightarrow -\ln(\tilde{P}_d) > 0$

[5]Je jediné, lebo pravá strana rovnice je klesajúca v $y$. Kladnosť vyplýva z toho, že pre $y = 0$ je ľavá strana menšia ako pravá. Riešenie možno nájsť napr. Newtonovou metódou na hľadanie koreňa rovnice $f(x) = 0$.

kde $\tilde{P}$ je jeho cena, $y(t,m)$ prislúchajúci výnos do splatnosti a $m_k = t_k - t$. Je teda zrejmé, že vyššie kupóny dávajú väčšiu váhu na skoršie platby a teda skracujú duráciu. Predlžovanie doby splatnosti naopak naťahuje duráciu.

Užitočnou charakteristikou dlhopisu je jeho *modifikovaná durácia*, ktorá meria citlivosť ceny na zmenu jej ročného efektívneho výnosu[6] $y^*$, inými slovami

$$MD = -\frac{\frac{d\tilde{P}}{\tilde{P}}}{dy^*}. \tag{11}$$

Využitím reťazového pravidla derivovania dostávame

$$MD = -\frac{\frac{d\tilde{P}}{\tilde{P}}}{dy}\frac{dy}{dy^*}, \tag{12}$$

pričom úpravou prvého zlomku

$$-\frac{\frac{d\tilde{P}}{\tilde{P}}}{dy} = \sum_{k=1}^{K} m_k \frac{ce^{-y(t,m)m_k}}{\tilde{P}} + m\frac{e^{-y(t,m)m}}{\tilde{P}} = D \tag{13}$$

dostávame duráciu a druhého z (2) $\frac{1}{1+y^*}$. Teda pojem modifikovaná durácia vychádza zo vzťahu

$$MD = \frac{D}{1+y^*}. \tag{14}$$

Aplikácia modifikovanej durácie je jednoduchá. Investor si môže vypočítať akú cenovú stratu (zisk) dosiahne pri zvýšení (znížení) výnosov. Zo vzťahu (11) dostávame

$$d\tilde{P} = -MD.\tilde{P}.dy^*, \tag{15}$$

pričom člen $MD.\tilde{P}$ je známy aj pod pojmom *basis point value* ($BPV$). Využíva sa hlavne pri prehodnocovaní dlhopisových portfólií.

# 2 Časová štruktúra úrokových mier

Už v predchádzajúcej kapitole sme načrtli, že kľúčom k oceňovaniu dlhopisov budú úrokové miery. Je teda na mieste zaoberať sa ich časovou štruktúrou, konkrétnejšie vzťahom medzi úrokovými mierami rôznych splatností v daný čas $t$. V tejto práci pod *časovou štruktúrou úrokových mier* (term structure) budeme rozumieť graf jednej z funkcií: diskontnej funkcie,

[6] definovaného podľa (2).

diskontnej miery alebo okamžitej forwardovej miery pre daný deň $t$. Na vyjadrenie časovej štruktúry stačí jedno z týchto vyjadrení, pretože sú medzi sebou vzájomne prevoditeľné. Zadefinujme si teraz funkciu forwardovej miery.

Forwardový kontrakt je dohoda, v ktorej sa strany vopred zaväzujú uskutočniť obchod v určenom čase, v stanovenej cene a množstve. Nech sa uzavrie forwardový kontrakt v čase $t$ na nákup diskontného dlhopisu v čase $t_1$ za cenu $\tilde{P}_f$, ktorý vypláca jednu jednotku v čase $T$. Forwardovú mieru $f(t, t_1, T)$ definujeme ako diskontnú mieru pre uvedený forwardový kontrakt, teda

$$e^{-f(t,t_1,T)(T-t_1)} = \tilde{P}_f. \tag{16}$$

Uskutočnime teraz kombinovanú investíciu v čase $t$, ktorá pozostáva z nákupu diskontného dlhopisu v čase $t$ s dňom splatnosti $t_1$ a uzavretia forwardového kontraktu v čase $t$ na nákup diskontného dlhopisu v čase $t_1$ s dňom splatnosti $T$. Presnejšie nech dlhopis kúpený v čase $t$ vypláca v čase $t_1$ hodnotu $e^{-f(t,t_1,T)(T-t_1)}$, ktorá sa ihneď použije na uhradenie nákupu diskontného dlhopisu, ktorý vypláca jednu jednotku v čase $T$. Cena tejto zloženej investície bude

$$e^{-r_d(t,t_1)(t_1-t)}e^{-f(t,t_1,T)(T-t_1)}. \tag{17}$$

Z argumentu arbitráže by sa mal výnos z takejto investície rovnať výnosu z diskontného dlhopisu kúpeného v čase $t$ vyplácajúceho jednu jednotku v čase $T$:

$$e^{r_d(t,T)(T-t)} - 1 = e^{r_d(t,t_1)(t_1-t)}e^{f(t,t_1,T)(T-t_1)} - 1 \tag{18}$$

z čoho po pričítaní jednotky a zlogaritmovaním dostávame

$$f(t, t_1, T) = \frac{r_d(t, T)(T-t) - r_d(t, t_1)(t_1 - t)}{T - t_1}. \tag{19}$$

Ak explicitne neexistuje forwardový trh, tak (19) možno chápať ako definíciu *implikovanej* forwardovej úrokovej miery, ktorá je určená časovou štruktúrou úrokových mier $r_d(t, T)$.

Okamžitá forwardová úroková miera $f(t, t_1)$ je definovaná ako limita

$$f(t, t_1) = \lim_{T \to t_1} f(t, t_1, T) \tag{20}$$

a zodpovedá forwardovým kontraktom na nákup diskontného dlhopisu s najmenšou možnou (infinitizimálnou) splatnosťou. V praxi sa stotožňuje s odhadmi jednodňovej úrokovej miery (overnight).

Rovnica (18) sa dá zovšeobecniť tak, že zložená investícia bude pozostávať z $n$ forwardových kontraktov s dňom uskutočnenia $t_k$ na nákup diskontného dlhopisu s dňom splatnosti $T_k$, $k = 1, \ldots, n$ ($t_1 = t$, $T_n = T$) s rovnakou splatnosťou ($T_k - t_k = \tau = \frac{T-t}{n}$), pričom nasledujúci kontrakt bude nadväzovať na splatnosť dlhopisu z predchádzajúceho kontraktu ($t_{k+1} = T_k$). Opäť z argumentu arbitráže dostávame

$$e^{r_d(t,T)(T-t)} - 1 = e^{f(t,t,t+\tau)\tau} e^{f(t,t+\tau,t+2\tau)\tau} \cdots e^{f(t,t+(n-1)\tau,T)\tau} - 1, \tag{21}$$

čo po úprave dáva

$$r_d(t,T)(T-t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t, t+k\tau, (k+1)\tau)\tau. \tag{22}$$

Limitným prechodom $n \to \infty$ s využitím definície okamžitej forwardovej úrokovej miery (20) a pri označení si splatnosti $m = T - t$ dostávame

$$r_d(t, t+m) = \frac{1}{m} \int_{s=0}^{m} f(t, t+s) ds. \tag{23}$$

Deriváciou podľa $m$ dostávame ekvivalentný zápis

$$f(t, t+m) = r_d(t, t+m) + m \frac{\partial r_d(t, t+m)}{\partial m}. \tag{24}$$

Pod forwardovou krivkou budeme odteraz rozumieť krivku okamžitej forwardovej miery ako funkcie splatnosti kontraktu[7] pre daný deň obchodovania $t$. Teda v deň $t$ platí medzi jednotlivými vyjadreniami časovej štruktúru nasledovný vzťah

$$P_d(m) = e^{-r_d(m)m} = e^{-\int_0^m f(s)ds}. \tag{25}$$

Časová štruktúra úrokových mier býva často nahrádzaná pojmom *výnosová krivka*. Pod výnosovou krivkou („čistou“) sa pritom rozumie krivka výnosov do splatností diskontných dlhopisov vhľadom ku splatnosti, v daný deň obchodovania $t$. Výnos do splatnosti by mal u diskontných dlhopisov zodpovedať diskontnej miere[8], čiže je iba synonymom pre jedno vyjadrenie časovej štruktúry úrokových mier, a to prostredníctvom diskontnej miery.

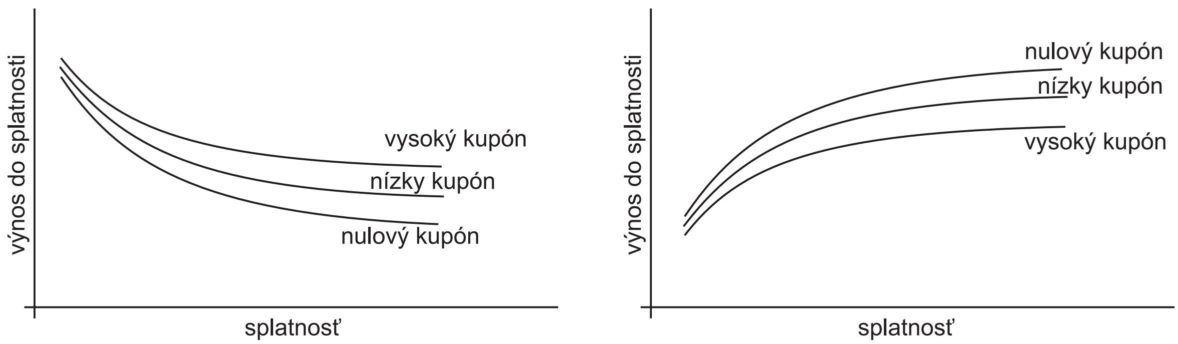
Za výnosovú krivku sa niekedy mylne berú aj výnosy do splatnosti z kupónových dlhopisov. Tento koncept býva častokrát preceňovaný. Prehliada sa, že výnosy do splatnosti

[7] Pod pojmom splatnosť kontraktu budeme rozumieť čas od uzavretia do uskutočnenia kontraktu, t.j. $t_1 - t$

[8] Keď zoberieme do úvahy (5), (8) a bezrizikovosť štátnych dlhopisov

u kupónových dlhopisov nie sú diskontnými mierami, a teda by sa nemali používať k diskontovaniu platieb podľa (7).[9]

Aj napriek tomu výnos do splatnosti kupónových dlhopisov býva v praxi prvotným indikátorom na určovanie vhodnosti investovania do kupónového dlhopisu. Ukážeme si ako výška kupónu ovplyvňuje výnos do splatnosti: Majme napr. dva dlhopisy s rovnakou dobou splatnosti, s rovnakým kreditom ale rozdielnymi kupónmi. Ktorý z nich bude mať vyšší výnos do splatnosti? Aby sme vedeli odpovedať na túto otázku, musíme poznať aspoň hrubé rysy časovej štruktúry úrokových mier. Ak má diskontná miera napr. klesajúci charakter, tak dlhopis s vyšším kupónom bude mať aj vyšší výnos do splatnosti, pretože väčší objem jeho platieb bol vyplatený v skoršom čase a teda dal aj vyšší výnos. Naopak pri rastúcej diskontnej miere by vyšší výnos mali mať dlhopisy s nižším kupónom.




Obr. 1: Možné tvary výnosových kriviek

Z Obr. 1 je dobre vidieť, že výnos do splatnosti má naozaj funkciu akéhosi priemeru diskontnej miery, pričom váhy závisia od veľkosti kupónu. Teda zmiešať výnosy do splatnosti z kupónových dlhopisov s rôznymi kupónmi do jednej krivky a považovať to za časovú štruktúru úrokových mier je zavádzajúce, no i napriek tomu veľmi časté.

Existuje veľa teórií, ktoré sa pokúšajú vysvetliť časovú štruktúru úrokových mier, najčastejšie vo forme výnosovej krivke (grafu diskontnej miery). Najznámejšie sú

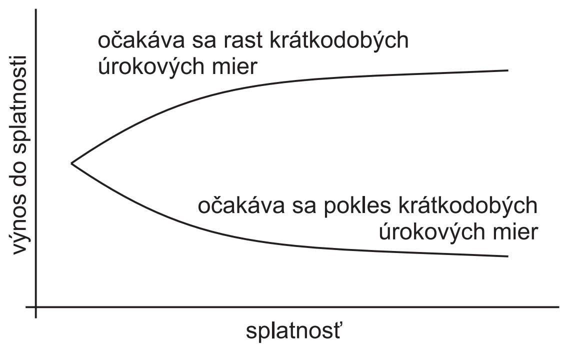
**Teória očakávaní:** hovorí, že dlhodobé úrokové miery sú determinované očakávaniami vo vývoji krátkodobých úrokových mier. Dokonca ešte silnejšie, že výnos z dlhodobej investície by sa mal rovnať výnosu zo série krátkodobých investícií. Teda presnejšie

$$e^{r_d(t,T)(T-t)} - 1 = e^{r_d(t,t_1)(t_1-t)} e^{r_d(t_1,T)(T-t_1)} - 1, \tag{26}$$

[9]Toto skreslenie vzniká z toho, že u bezkupónových dlhopisov to tak funguje.

čo sa môže zdať to isté ako (18), ale nie je tomu tak. Forwardová miera bola známa už v čase $t$, pričom $r_d(t_1, T)$ je známa až v čase $t_1$. V súvislosti práve s touto „podobnosťou" sa okamžité forwardové miery považujú za odhady budúcich krátkodobých úrokových mier.

Ak sa očakáva, že krátkodobé úrokové miery sa v budúcnosti nebudú meniť, tak výnosová krivka bude „plochá" (flat). Ak sa očakáva pokles (rast) krátkodobých úrokových mier, výnosová krivka bude klesajúca (rastúca) ako ukazuje Obr. 2. Teória očakávaní v




Obr. 2: Teória očakávaní

sebe predpokladá, že účastníci trhu majú zmysel pre perfektný odhad budúcich úrokových mier, no v reálnom svete je budúcnosť neistá.

**Teória preferencie likvidity:** hovorí, že výnosy pre dlhšie splatnosti sú zvýšené o časovú prémiu. Dlhodobé aktíva totiž bývajú vystavené väčšiemu riziku zmeny úrokových mier, a teda by mali vykazovať vyšší výnos aby kryli prípadné kapitálové straty.

**Segmentačná teória:** sa zaoberá výnosmi pre spektrum rôznych splatností. Rozdeľuje výnosovú krivku na krátko-, stredno- a dlhodobú, pričom časový vývoj na týchto častiach považuje za nezávislý (viď. Obr. 4 na str. 21). Vychádza z poznaku, že napr. banky sa zameriavajú na kratšie aktíva, pričom poisťovne na dlhé. Tým ovplyvňujú ponuku a dopyt na jednotlivých častiach výnosovej krivky, pričom napr. zvýšenie dlhodobých (krátkodobých) úrokových mier nie tak silným motívom, aby zmenil stratégiu investovania banky (poisťovne).

# 3 Odhady časovej štruktúry úrokových mier

V tejto časti sa budeme venovať odhadom časovej štruktúry úrokových mier, ktoré potom využijeme na oceňovanie dlhopisov. Napr. aj niektoré modely na oceňovanie finančných derivátov vyžadujú počiatočný odhad časovej štruktúry úrokových mier, z ktorého najprv kalibrujú svoje parametre, a potom sa zaoberajú dynamikou. My budeme hľadať odhad v tvare parametrickej funkcie.

Odhad si bude vyžadovať tri rozhodnutia:

1. Z akých dát budeme časovú štruktúru odhadovať.

2. Tvar parametrickej funkcie na aproximáciu buď funkcie diskontnej miery $r_d(m)$, diskontnej funkcie $P_d(m)$ alebo forwardovej funkcie $f(m)$.

3. Výber ekonometrickej metódy na odhad parametrov.

## 3.1 McCullochov kubický splajn

McCulloch ako jeden z prvých sa začal zaoberať rôznymi polynómami a splajnami k získaniu aproximácie diskontnej funkcie $P_d(m)$. V McCullochovej metodológii diskontná funkcia má tvar kubického splajnu. To znamená, že ak rozdelíme spektrum splatností na niekoľko intervalov, tak $P_d(m)$ bude na každom z týchto intervalov nejakým polynómom tretieho stupňa. Tieto polynómy sú hladko spojené v uzlových bodoch a to jednoducho tak, že prvé a druhé derivácie v uzlovom bode sú si rovné. Parametrická reprezentácia tejto aproximácie je daná funkciou

$$P_d(m) = b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + b_3 m^3 + \sum_{j=1}^{K} c_j (m - m_j)_+^3, \tag{27}$$

kde $K$ je počet uzlových bodov, $(\cdot)_+$ je kladná časť a $m_j$ sú uzlové body. Spolu máme $K+4$ parametrov:

$$(b_0, b_1, b_2, b_3, c_1, \ldots, c_K)\,.$$

Substituovaním (27) do rovnice oceňovania kupónových dlhopisov (6) dostávame, že cena í-teho dlhopisu je

$$P_i(m) = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \sum_{j=1}^{K} c_j Z_j + \epsilon_i. \tag{28}$$

V (28) sú $X_j$ funkciami kupónu $c_i$ a času do splatnosti $m$. Funkcie $Z_j$ sú funkciami uzlových bodov splajnu a $X$-ov. Parameter $b_0$ sa môže položiť rovný jednej, pretože to zodpovedá súčasnej hodnote jednej jednotky vyplatenej ihneď. Ostatné parametre diskontnej funkcie sú odhadnuté minimalizáciou váženej sumy štvorcov cenových odchýliek z (28), čiže váženou metódou najmenších štvorcov. Váhy sú zvolené nasledovne: $w_i = 1/(P_i^a - P_i^b)$, kde $P_i^a$ je kúpna a $P_i^b$ predajná cena í-teho dlhopisu. McCulloch navrhol vybrať uzlové body $m_j$ tak, aby v každom intervale bolo splatných rovnaký počet dlhopisov.

Odhadovanie diskontnej funkcie pomocou kubického splajnu poskytuje vysokú flexibilitu v aproximácii širokej škály tvarov, pretože parametre krivky v danom intervale silne závisia od pozorovaní v tomto intervale. Na druhej strane táto flexibilita niekedy môže viesť k prílišnej oscilácii funkcie.

Splajny majú veľmi dobrú priľnavosť na intervale, z ktorého sme brali pozorovania, ale mimo vzorky sú už nepresné. To je spôsobené hlavne ubiehajúcim chvostom, ktorý je pre kubickú funkciu tak charakteristický. Teda vypovedacia schopnosť splajnu mimo intervalu vzorky je nedostatočná.

Ďalej otázkou zostáva, koľko uzlových bodov zvoliť? Je prirodzené, že čím viac uzlových bodov zvolíme, tým bude priliehavosť k pozorovaniam väčšia, ale zároveň aj splajn bude „zvlnený“. Mieru medzi priliehavosťou a hladkosťou sa pokúsil riešiť Fisher [12].

## 3.2 Fisherov vyhladzovací splajn

Fisher zaviedol dve hlavné inovácie k McCullochovmu modelu. Po prvé, používa vyhladzovací splajn namiesto regresného splajnu k aproximácii vybratej funkcie reprezentujúcej časovú štruktúru úrokových mier. Po druhé, aplikuje splajn priamo na funkciu forwardových mier namiesto diskontnej funkcie. Vo vyhladzovacom splajne kritérium na určovanie parametrov splajnu vyžaduje kompromis medzi priliehavosťou (meranou sumou najmeších štvorcov) a hladkosťou výslednej funkcie. Fisher na rozdiel od McCullocha použil komfortnejšie vyjadrenie kubického splajnu a to pomocou lineárnej kombinácie B-splajnov:[10]

$$f(m) = \sum_{i=-2}^{K-1} \alpha_i B_i(m_i), \tag{29}$$

kde $m_1, \dots, m_K$ sú uzlové body a $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \dots, \alpha_{K-1}$ sú hľadané parametre.

Fisher navrhol minimalizovať vo všeobecnosti účelovú funkciu

$$\sum_{i=1}^{N} (\tilde{P}_i - P_i^{(h)})^2 + \lambda \int_0^T h''(m)dm, \tag{30}$$

kde $N$ je počet dlhopisov vo vzorke, $\tilde{P}_i$ ich cena a $h(m)$ je odhadovaná funkcia. Môže to byť diskontná funkcia, funkcia diskontnej miery ale aj forwardová funkcia. Fisher uprednostnil forwardovú funkciu $f(m)$. Druhý výraz v (30) meria krivosť aproximačnej funkcie. Kladná konštanta $\lambda$ určuje pomer medzi priliehavosťou a hladkosťou. Poznamenajme, že ak $\lambda = 0$, tak dostaneme klasický splajn. Extrémny prípad nastáva, ak $\lambda$ je príliš veľké, vtedy ako odhad dostávame lineárnu funkciu. Čiže parameter $\lambda$ reguluje dôležitosť uzlových bodov, a teda ich nie je treba meniť ako to bolo u McCullocha. Parameter $\lambda$ môže byť daný, no Fisher ho určil minimalizovaním zovšeobecneného prechádzajúco-overovacieho pravidla (General Cross Validation — $GCV$)

$$GCV(\lambda) = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^{N} (\tilde{P}_i - P_i^{(f_\lambda)})^2}{(1 - \frac{K+2}{N})^2}, \tag{31}$$

kde $\sum_{i=1}^{N} (\tilde{P}_i - P_i^{(f_\lambda)})^2$ je suma rezíduí, ktoré vzniknú pri minimalizácii rovnice (30) pri danom $\lambda$.

K odhadu parametrov možno postupovať nasledovne: vytvorí sa sieť bodov $\lambda$, pre ktoré sa minimalizuje (30) – čo je nelineárny problém a odhad, pre ktorý je $CGV(\lambda)$ minimálne považujeme za optimálny. Fisher využil vo svojej aproximácii Monte Carlo simulácie, ktorými efektívne získal odhad forwardovej funkcie.

## 3.3 Nelson-Siegel

V záujme nájsť rozumnú mieru medzi priliehavosťou a hladkosťou sa Nelson a Siegel [7] snažili nájsť parametrickú funkciu, ktorá by pokrývala charakteristické tvary časovej štruk-

[10] B-splajn je vyjadrený v závislosti od štyroch uzlových bodov:

$$B_i(m) = (m_{i+4} - m_i) \sum_{j=i}^{i+4} \frac{(m_j - m)_+^3}{L_i'(m_j)},$$

kde $L_i(m) = (m - m_i)(m - m_{i+1})(m - m_{i+2})(m - m_{i+3})(m - m_{i+4})$ a $(\cdot)_+$ je kladná časť. Bližšie viď. [4].

túry úrokových mier. Čiže hľadali funkciu, ktorá by v závislosti od parametrov mohla byť monotónna, mať „kopček“ (lokálny extrém) a esovité prehnutie (inflexný bod). Navrhli množinu funkcií, ktoré sú riešením lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu.

Vychádzame z poznatku o úrokových mierach, že ich vysoké nárasty ako aj vysoká hodnota majú negatívny vplyv na ich ďalší rast. Pri využití forwardových mier ako odhadoch budúcich úrokových mier dostávame tomu zodpovedajúcu diferenciálnu rovnicu

$$f''(m) = -bf'(m) - cf(m), \tag{32}$$

kde $b$, $c$ sú kladné konštanty. Riešením tejto rovnice v prípade reálnych, rôznych koreňov dostávame

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 e^{-\frac{m}{\tau_2}}, \tag{33}$$

kde $\tau_1$ a $\tau_2$ sú časové konštanty a $\beta_0$, $\beta_1$ a $\beta_2$ sú určené počiatočnými podmienkami. Táto rovnica generuje triedu forwardových funkcií, ktoré nadobúdajú charakteristické tvary v závislosti od hodnôt parametrov. Diskontná miera $r_d$ sa potom vypočíta z (23) ako priemer forwardových mier

$$r_d(m) = \frac{1}{m}\int_0^m f(\tau)d\tau.$$

Výnosová krivka vytvorená týmto modelom vykazuje rovnakú triedu tvarov ako forwardová krivka.

Nelson a Siegel testovali model na výnosoch zo štátnych pokladničných poukážok a prišli k názoru, že model je preparametrizovaný. Ako sa menili hodnoty $\tau_1$ a $\tau_2$, bolo možné nájsť hodnoty $\beta_1$, $\beta_2$ také, že dávali takmer rovnaký fit. Štandardný softvér na nelineárnu regresiu navyše nekonvergoval. To viedlo k zmene modelu, pričom sa predpokladal iba jeden reálny násobný koreň diferenciálnej rovnice (32):

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{m}{\tau}} + \beta_2 \frac{m}{\tau} e^{-\frac{m}{\tau}}. \tag{34}$$

Podobne ako forwardová krivka (33), tak aj (34) generuje požadované tvary výnosovej krivky. K forwardovej krivke (34) možno prísť aj z rovnice (33) aproximovaním jej posledného člena rozvojom do Taylorovho radu

$$e^{-\frac{m}{\tau_2}} \approx e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \frac{(-\frac{1}{\tau_1})e^{-\frac{m}{\tau_1}}}{1!}\left(-\frac{m}{\tau_2} + \frac{m}{\tau_1}\right) = e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \tfrac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \tau_2}\left(\tfrac{m}{\tau_1}\right)e^{-\frac{m}{\tau_1}}$$

a zoskupením jednotlivých členov. Potom parametre $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ vyjadrenia (34) budú zodpovedať

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_0, \qquad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \beta_2, \qquad \tilde{\beta}_2 = \beta_2(\tfrac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \tau_2}),$$

kde $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ sú parametre vyjadrenia (33).

K získaniu funkcie diskontnej miery pre model s násobným koreňom integrujeme (34) od 0 po $m$ a delíme $m$. Výsledná funkcia má tvar

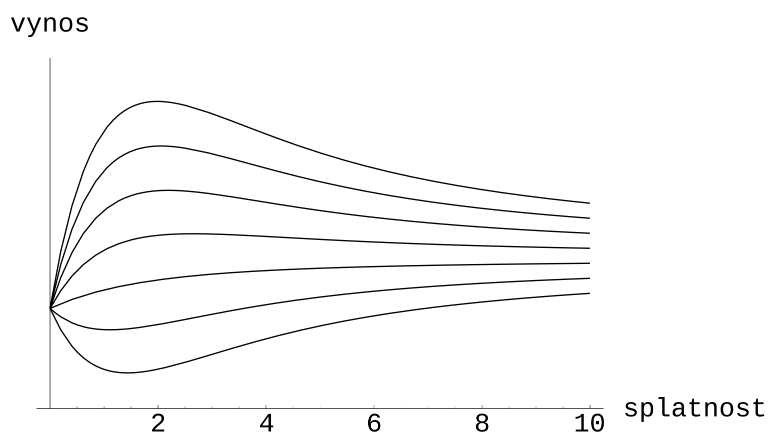
$$r_d(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\left[\frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau}}}{\frac{m}{\tau}}\right] - \beta_2 e^{-\frac{m}{\tau}} \tag{35}$$

a pre dané $\tau$ je lineárna v koeficientoch. Limitná hodnota funkcie[11] $m \to \infty$ je $\beta_0$, a $m \to 0$ je $(\beta_0 + \beta_1)$ — podobne ako u forwardovej funkcii (34), lebo $r_d(m)$ je práve priemerom $f(\cdot)$.

Na ilustráciu si zvoľme $\tau = 1$, $\beta_0 = 1$ a $(\beta_0 + \beta_1) = 0$, čo zodpovedá určitému normovaniu. Škála tvarov funkcie diskontnej miery $r_d(m)$ potom závisí už iba od jedného parametra $a$:

$$r_d(m) = 1 - (1 - a)\left[\frac{1 - e^{-m}}{m}\right] - a e^{-m}. \tag{36}$$

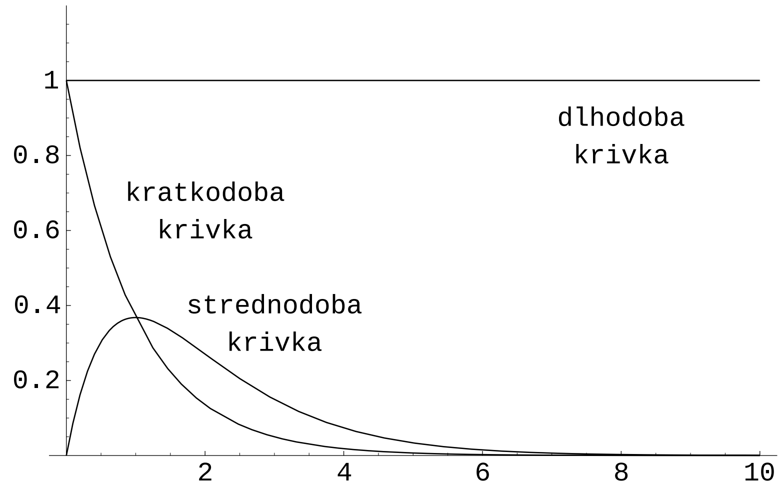
Pre hodnoty parametra $a = 6, \ldots, 12$ dostávame na Obr. 3 rôzne krivky diskontnej miery, ktoré preukazujú žiadané tvary.




Obr. 3: Výnosová krivka $r_d$.

Iný uhol pohľadu na tvarovú flexibilitu tohto modelu je interpretovať koeficienty v (34) v súlade so segmentačnou teóriou ako miery krátkodobej, strednodobej a dlhodobej

[11] môže nám to poslúžiť ako okrajová podmienka, napr. $(\beta_0 + \beta_1)$ položíme rovné jednodňovej úrokovej miere, alebo výnosu z práve splatného dlhopisu.




Obr. 4: Komponenty forwardovej krivky

komponenty vo forwardovej funkcii. Príspevok dlhodobej komponenty je konštantný člen forwardovej funkcie – $\beta_0$, ktorý je zároveň aj limitnou hodnotou. Krátkodobej komponente zodpovedá parameter $\beta_1$ a strednodobej $\beta_2$. Z Obr. 4 je zrejmé, že takéto priradenie je opodstatnené. Dlhodobá komponenta je konštatná, a preto ako jediná neklesá k nule. Strednodobá krivka je jediná funkcia v tomto modeli, ktorá začína v nule (preto nemôže byť krátkodobá) a konverguje k nule (preto nie je dlhodobá). Krátkodobá krivka má v modeli najrýchlejšiu konvergenciu a monotónne klesá k nule. Je ľahko vidieť, že výberom vhodných váh týchto komponentov, môžme generovať množstvo výnosových kriviek založených na forwardových krivkách požadovaných tvarov.

Preznačme teraz parametre v rovnici (35):

$$r_d(m) = a + b\left[\frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau}}}{\frac{m}{\tau}}\right] + ce^{-\frac{m}{\tau}}. \tag{37}$$

Pre každú hodnotu parametra $\tau$ môžme vypočítať hodnotu dvoch regresorov. Ostatné parametre sú lineárne a vypočítame ich metódou najmenších štvorcov. Opakovaním tejto procedúry pre sieť hodnôt $\tau$ dostaneme koeficienty $\tau$, $a$, $b$ a $c$, ktoré dávajú najlepšiu priliehavosť.

### 3.3.1 Svenssonove rozšírenie

Model Nelsona a Siegla bol pôvodne navrhnutý pre odhad časovej štruktúry úrokových mier zo štátnych pokladničných poukážok. Teda vzorka mala splatnosť menšiu než jeden rok. Tento fakt nič nemenil na tom, že model preukazoval vysokú vypovedaciu schopnosť aj mimo vzorky. Svensson zistil [9], že vo väčšine prípadov Nelson–Siegelov model dosahoval prijateľné výsledky aj pri použití kupónových dlhopisov. Rozšírenie predchádzajúceho modelu (34) ešte o jeden člen $\beta_3 \frac{m}{\tau_2} e^{-\frac{m}{\tau_2}}$ umožnilo dosiahnuť väčšiu flexibilitu. Teda Svenssonova parametrická funkcia okamžitej forwardovej miery má tvar

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} e^{-\frac{m}{\tau_2}}, \tag{38}$$

kde $\tau_1$, $\tau_2$ sú kladné konštanty rôzne[12]. Pridaný štvrtý člen zodpovedá ďalšiemu „kopčeku“, ktorý sa môže vyskytnúť v súvislosti s rozšíreným intervalom dĺžky splatnosti dlhopisov, na ktoré model aplikujeme.

Funkciu diskontnej miery dostaneme z (38) a (23)

$$r_d(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}}{\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}}{\frac{m}{\tau_1}} - e^{-\frac{m}{\tau_1}} \right] + \beta_3 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_2}}}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{-\frac{m}{\tau_2}} \right]. \tag{39}$$

Na tomto mieste treba pripomenúť, že použitie bezkupónových dlhopisov (ktorými sú aj pokladničné poukážky) podstatne zjednodušili odhad paramerov v Nelson-Siegelovom modeli, pretože tie sa odhadovali z funkcie diskontnej miery (resp. výnosovej funkcie). Lenže ceny kupónových dlhopisov majú komplikovanejšie vyjadrenie (7), v závislosti od funkcie diskontnej miery (39). Diskontná funkcia je odhadovaná minimalizáciou švorcov buď cenových odchýliek alebo výnosových. Tento problém je ale vysoko nelineárny a nevystačíme už so sieťou bodov $\tau_1$, $\tau_2$ a lineárnou regresiou.

# 4 Rich/Cheap Analýza

Dlhopisový trh je pomerne dosť široký a nie je ľahké na prvý pohľad zistiť, do ktorého dlhopisu investovať a ktorý predať. Výnos do splatnosti je podmienený držbou až do dňa splatnosti dlhopisu, a teda nezodpovedá reálnemu výnosu z jeho predaja, ktorý sa rovná kapitálovému nárastu[13]

$$\frac{\tilde{P}^b(t_1) - \tilde{P}^a(t)}{\tilde{P}^a(t).(t_1 - t)}, \tag{40}$$

[12] Prípad $\tau_1 = \tau_2$ zodpovedá dvom „kopčekom“ nad sebou a teda originálnemu Nelson–Siegelovmu modelu. Navyše medzi tretím a štvrtým členom nastáva multikolinearita a nedajú sa odhadnúť parametre $\beta_2$, $\beta_3$ ale iba ich súčet. Vtedy sa treba vrátiť k originálnemu Nelson–Siegelovmu parametrickému vyjadreniu (zvolíme $\beta_3 = 0$).

[13] Môže dôjsť aj k prípadnej strate.

pričom dlhopis bol kúpený v čase $t$ za cenu $\tilde{P}^a(t)$ a predaný v čase $t_1$ za cenu $\tilde{P}^b(t_1)$ a v čase $(t, t_1)$ nebola vyplatená žiadna kupónová platba. V prípade, že by v čase $(t, t_1)$ boli vyplatené nejaké kupóny, tak do čitateľa by sa pridali tieto kupóny, zúročené ku dňu $t_1$.

Vyspelé dlhopisové trhy sú charakteristické vysokou likviditou, a iba úzka trieda investorov (napr. poisťovne) drží dlhopis až do splatnosti. Navyše kapitálové nárasty môžu poskytnúť podstatne vyššie výnosy, než sú výnosy do splatnosti. Teda pre investorov je zaujímavé vedieť, či dlhopis je „správne“ ocenený aby mohli vyhodnotiť, či sa oplatí do daného dlhopisu investovať napr. z pohľadu kapitálového nárastu.

Na pohyb ceny dlhopisu má vplyv viacero faktorov. Najvýznamnejšie pohyby cien sa vyskytujú v dôsledku zmien úrokových mier. Keď rastú úrokové miery, tak klesajú ceny dlhopisov, aby mohli poskytnúť vyšší výnos a naopak, čo je zrejmé aj z (7).

Každý investor má isté očakávania, ktoré zohľadňuje aj pri oceňovaní dlhopisov. Pod vplyvom ponuky a dopytu sa na trhu tvoria ceny. Rozdiel medzi aktuálnou dopytovou cenou $\tilde{P}^a$ a ponukovou cenou $\tilde{P}^b$ sa nazýva *spread*. Nízky spread je charakteristický na vysoko likvidných trhoch a vyjadruje určitý konsenzus investorov v cene dlhopisu, resp. cena sa považuje za „rozumnú“. Takáto cena by sa mala najviac približovať k „férovej cene“ dlhopisu definovej na str. 9, a teda v sebe implicitne obsahuje časovú štruktúru úrokových mier. O odhade časovej štruktúry úrokových mier z takýchto dlhopisov pojednávala predchádzajúca kapitola.

Skutočné ceny dlhopisov sa však od férovej ceny väčšinou líšia. Ak skutočná cena je vyššia ako férová, tak hovoríme, že dlhopis je *absolútne nadhodnotený* a keď je menšia, tak *absolútne podhodnotený*. V oboch prípadoch možno po čase očakávať nejakú dodatočnú cenovú korekciu. A síce v prípade podhodnoteného dlhopisu možno očakávať rast ceny a teda zvýšené kapitálové výnosy, čo indikuje vhodnosť investovania do takéhoto dlhopisu. Naopak u nadhodnoteného dlhopisu v súvislosti s prípadným poklesom ceny možno počítať s nižším kapitálovým výnosom (ak nie stratou), a teda je vhodné ho ďalej nedržať ale predať ihneď za „vysokú cenu“. Rozdiel medzi skutočnou cenou dlhopisu a jej férovou cenou nazveme *cenová odchýlka*.

Avšak sú dlhopisy, ktoré bývajú permanentne nadhodnotené alebo podhodnotené, teda ich skutočná cena je stále vyššia než férová, resp. nižšia. U takýchto dlhopisov treba sledovať relatívny pokles alebo nárast aktuálnej cenovej odchýlky voči priemernej cenovej odchýlke.

Toto pravidlo platí aj pre vyššie uvedené prípady a teda možno ho zovšeobecniť na všetky dlhopisy. Nech $\Delta P$ označuje aktuálnu cenovú odchýlku, $\overline{\Delta P}$ a $s(\Delta P)$ historický priemer a štandardnú odchýlku za $n$ dní. Potom

$$Z = \frac{\Delta P - \overline{\Delta P}}{s(\Delta P)} \tag{41}$$

nazývame *Z-skóre*, a je indikátorom relatívneho podhodnotenia alebo nadhodnotenia dlhopisu. Štandardná odchýlka normuje tento rozdiel. Je možné sa pozerať na $Z$ ako na náhodnú premennú z normovaného normálneho rozdelenia. Kritériom na výber *relatívne podhodnodnoteného* (Cheap) a *relatívne nadhodnoteného* (Rich) dlhopisu potom bude $Z$ mimo nejakého intervalu spoľahlivosti. Napr. $Z > 2$ môže byť dostatočným stimulom na predaj dlhopisu a $Z < -2$ na nákup. Voľby intervalov sú na investorovi a je možné si zvoliť niekoľko kategórií (spravidla 0,5–3,0).

# 5 Vytvorenie aplikácie v MS Excel

V predchádzajúcich častiach sme zadefinovali všetky potrebné pojmy z oblasti spojitého úročenia, férovej ceny dlhopisu, časovej štruktúry úrokových mier a metódam jej odhadu ako aj ich využitiu v podobe Rich/Cheap analýzy. V tejto časti sa budeme zaoberať ich praktickej realizácii.

Za týmto účelom sme zhotovili program alebo presnejšie povedané súbor makier v MS Excel v jazyku Visual Basic, ktoré vykonávajú

- načítanie novo emitovaných dlhopisov
- načítanie uzatváracích cien dlhopisov
- vyradenie starých dlhopisov po dni splatnosti
- výber dlhopisov, z ktorých sa bude odhadovať časová štruktúra úrokových mier
- odhad parametrov parametrickej funkcie reprezentujúcej časovú štruktúru úrokových mier
- Rich/Cheap analýzu dlhopisov, ktorá dá jednoznačný výstup či dlhopis je relatívne nadhodnotený alebo podhodnotený

- grafické výstupy

Každá z týchto činností je riadená prostredníctvom ovládacích prvkov (tlačítka, zoznamy, dialógové okná). Kvôli univerzálnosti a možnému praktickému využitiu tohto programu, sme zvolili ako jazyk komunikácie angličtinu. Anglická terminológia je vo finančnej praxi určitým štandardom, a niektorým termínom neexistujú jednoznačne zaužité slovenské ekvivalenty.

| Select | Update list of bonds | | | At date 26/3/99 | Update prices | Run estimation! | | YTM and rd curve | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Use | Bond name | Coupon | Maturity date | Years to maturity | Closing price | Fair price | Diff. bp. | YTM | rd |
| | T 7 04/99 Govt | 7 | 15/4/99 | 0.05 | 100.125 | 100.122 | 0.1 | 4.6 | 4.6 |
| | T 6.5 04/99 Govt | 6.5 | 30/4/99 | 0.10 | 100.172 | 100.166 | 0.2 | 4.6 | 4.6 |
| | T 6.375 04/99 Govt | 6.375 | 30/4/99 | 0.10 | 100.156 | 100.155 | 0.1 | 4.6 | 4.6 |
| | T 9.125 05/99 Govt | 9.125 | 15/5/99 | 0.14 | 100.578 | 100.588 | -0.3 | 4.7 | 4.6 |
| | T 6.375 05/99 Govt | 6.375 | 15/5/99 | 0.14 | 100.203 | 100.220 | -0.5 | 4.8 | 4.6 |
| | T 6.75 05/99 Govt | 6.75 | 31/5/99 | 0.18 | 100.344 | 100.355 | -0.4 | 4.7 | 4.7 |
| | T 6.25 05/99 Govt | 6.25 | 31/5/99 | 0.18 | 100.266 | 100.266 | 0.0 | 4.7 | 4.7 |
| 1 | T 6.75 06/99 Govt | 6.75 | 30/6/99 | 0.26 | 100.547 | 100.512 | 1.1 | 4.5 | 4.7 |
| | T 6 06/99 Govt | 6 | 30/6/99 | 0.26 | 100.359 | 100.319 | 1.3 | 4.5 | 4.7 |
| | T 6.375 07/99 Govt | 6.375 | 15/7/99 | 0.30 | 100.516 | 100.478 | 1.2 | 4.6 | 4.7 |

Obr. 5: Hlavný list, z ktorého sa riadia všetky činnosti.

Prečo práve MS Excel? Tento program sa nachádza takmer na každom dealingovom pracovisku a jeho základné ovládanie je pomerne jednoduché. Import dát, ako aj úprava ich vstupnej formy si nevyžaduje znalosť žiadneho programovacieho jazyka. Teda hlavne užívateľský komfort a dostupnosť rozhodla o MS Excel.

Programovací jazyk Visual Basic umožňuje použiť všetky základné matematické funkcie. Z pohľadu práce s vektormi a maticami — umožňuje prácu s poľami, no však na pomerne nízkej úrovni (napr. súčet dvoch vektorov treba vykonať po zložkách). Tým sa troška stráca prehľadnosť v programovom kóde.

## 5.1 Vstupné dáta

Aby vôbec Rich/Cheap analýza mala svoje opodstatnenie, tak dlhopisy musia byť dostatočne likvidné. Medzi najlikvidnejšie dlhopisové trhy patria americký a nemecký so štátnymi dlhopismi. **Teda obmedzíme sa iba na americké a nemecké štátne kupónové**

**dlhopisy, bez opcie.** Kvôli prehľadnosti budeme popisovať proces len pre americké štátne dlhopisy.

Budeme rozlišovať medzi dvoma typmi vstupných dát. Na dennej báze sa pridávajú záverečné ceny dlhopisov a z času na čas na pridajú novo emitované dlhopisy.

Dáta v oboch prípadoch by mali byť importované v štandardnej forme z užívateľom vybratého súboru vo formáte MS Excel. Prvý list[14] takéhoto súboru by mal obsahovať vstupné dáta v nasledujúcej forme:

| Stĺpec | Obsah | Formát |
|---|---|---|
| **A** | Názov dlhopisu | *text* |
| **B** | Uzatváracia cena dlhopisu | *číslo* |

Tabuľka 1: Forma vstupných dát – uzatváracie ceny.

| Stĺpec | Obsah | Formát |
|---|---|---|
| **A** | Názov dlhopisu | *text* |
| **B** | Kupón | *číslo* |
| **C** | Deň splatnosti | *dátum* |

Tabuľka 2: Forma vstupných dát – emitované dlhopisy.

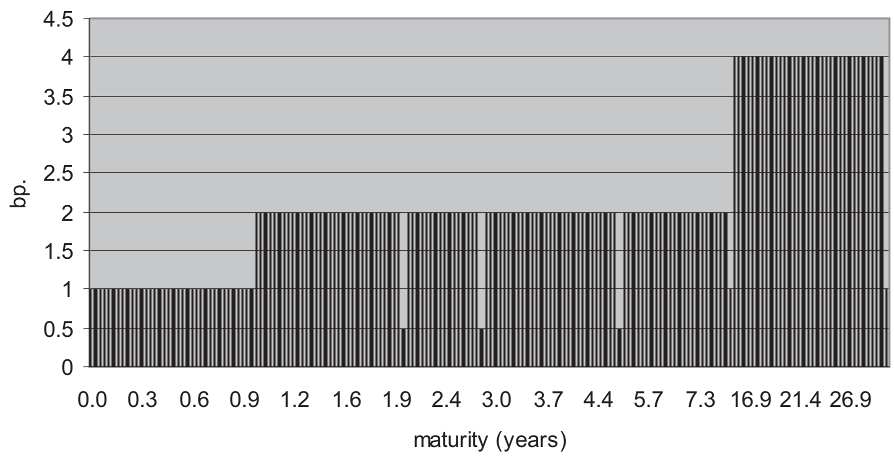
Treba zdôrazniť, že dáta v stĺpcoch by mali začínať hneď na prvom riadku; teda bez záhlavia.

Vstupné dáta možno jednoducho získať prostedníctvom systému REUTERS alebo BLOOMBERG. Oba systémy umožňujú v zošite MS Excel vytvárať dynamické odkazy na aktuálne dáta, čo podstatne uľahčuje prácu.

## 5.2 Výber dlhopisov na odhad časovej štruktúry úrokových mier

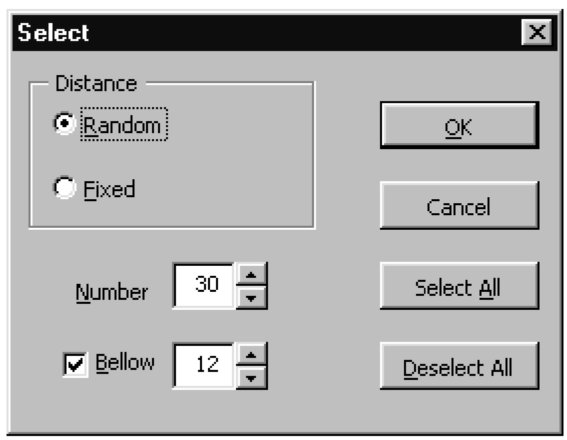
K odhadu časovej štruktúry úrokových mier z kupónových dlhopisov nie je nutné použiť všetky dostupné dlhopisy. Ba naopak, je to skôr nevhodné, pretože aj medzi štátnymi dlhopismi sa nachádzajú dlhopisy s rôznou lividitou. Ako vidieť na Obr. 6, dlhopisy so splatnosťou vyššou ako 15 rokov majú vyšší spread a naopak dlhopisy so splatnosťou menšou ako 1 rok, nižší. Istým špecifikom sú benchmarkové dlhopisy, ktoré majú spravidla najnižší spread a bývajú permanentne absolútne nadhodnotené, a preto je lepšie ich nepoužiť k odhadu. Ako optimálna množina výberu sa ukazujú dlhopisy so splatnosťou 1

[14] Od verzie 5.0 môže zošit obsahovať niekoľko listov (Sheets). Pod pojmom prvý list budeme rozumieť prvý v poradí, nezávisle od toho, ako je pomenovaný.




Obr. 6: Spready amerických štátnych dlhopisov.

až 10 rokov. Dlhopisy možno vybrať „ručne", alebo aj za pomoci dialógového okna (viď. Obr. 7).




Obr. 7: Výber dlhopisov pomocou dialogového okna.

## 5.3 Odhad parametrov

Na reprezentáciu časovej štruktúry úrokových mier použijeme Svenssonove vyjadrenie diskontnej miery (39), ktoré po preznačení má tvar

$$r_d(m, \mathbf{b}) = b_1 + b_2 \frac{1 - e^{-\frac{m}{b_4}}}{\frac{m}{b_4}} + b_3 e^{-\frac{m}{b_4}} + b_5 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{m}{b_6}}}{\frac{m}{b_6}} - e^{-\frac{m}{b_6}} \right], \tag{42}$$

kde $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_6)$ je vektor odhadovaných parametrov. Parametre určíme minimalizáciou sumy štvorcov cenových odchýliek ($RSS(\mathbf{b})$), presnejšie

$$RSS(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N} (\tilde{P}_i - P_i(\mathbf{b}))^2 \qquad \to \min, \tag{43}$$

kde $\tilde{P}_i$ je trhová cena í-teho dlhopisu vo vzorke a

$$P_i(\mathbf{b}) = P(c, m, \mathbf{b}) = c \sum_{k=1}^{K} e^{-r_d(m_k, \mathbf{b})m_k} + e^{-r_d(m,\mathbf{b})m} \tag{44}$$

je jeho férová cena v závislosti od parametra $\mathbf{b}$.

Ide o vysoko nelineárny problém, a výpočtovo dosť náročný. Navyše MS Excel štandardne neposkytuje moduly na nelineárnu regresiu ani riešenie sústavy nelineárnych rovníc.[15] Túto medzeru sme sa snažili riešiť použitím numerických metód na hľadania minima funkcie viac premenných.

Na samotnú minimalizáciu nelineárnej funkcie $RSS(\mathbf{b})$ premenných možno vo všeobecnosti použiť niektorú z gradientných metód alebo presnejšie newtových alebo kvázinewtonových metód na riešenie systému nelineárnych rovníc, pretože nutnou podmienkou problému (43) je riešiť systém

$$\nabla RSS(\mathbf{b}) = \mathbf{0}. \tag{45}$$

Každá z uvedených gradientných metód potrebuje počiatočný odhad. V prípade, že už máme parametre odhadnuté z predchádzajúceho obchodovacieho dňa, možno tento odhad považovať za dosť dobrý východiskový bod a Newton–Kantorovičova metóda skonverguje. V prípade, že ešte nemáme žiadny odhad, tak sa použije kontinuačná metóda na výpočet systému (45) v tvare

$$\mathbf{F}(\mathbf{b}, \lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{G}(\mathbf{b}) + \lambda \nabla RSS(\mathbf{b}) = \mathbf{0}, \tag{46}$$

kde $\mathbf{G}(\mathbf{b})$ je taká funkcia, že pre štartovaciu pozíciu $\tilde{\mathbf{b}}$ je $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{b}}) \approx \mathbf{0}$, a teda $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{b}}, 0) \approx \mathbf{0}$. To umožňuje použiť $\tilde{\mathbf{b}}$ ako dobrý štartovací bod pre riešenie systému (46) pre $\lambda = 0$. Čiže pre $\lambda = 0, \Delta\lambda, \ldots, 1$ riešime postupne systém (46) štandardnou Newton-Kantorovičovou metódou so štartovacím bodom $\tilde{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}$, kde $\hat{\mathbf{b}}$ je riešenie systému (46) pre predchádzajúce $\lambda$. Prechodom $\lambda \to 1$ prídeme k riešeniu systému (45).

[15] Existuje komerčný balík IMSL od Visual Numerics, ktorý v sebe obsahuje aj knižnicu sa nelineárnu regresiu.

Za funkciu $\mathbf{G}(\mathbf{b})$ možno zvoliť napr. triviálne

$$\mathbf{G}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}, \tag{47}$$

kde $\tilde{\mathbf{b}}$ je nejaký vektor parametrov, pre ktorý má funkcia $RSS(\mathbf{b})$ zmysel. Vektor $\tilde{\mathbf{b}}$ môžme určiť napr. aproximáciou krivky diskontných mier z výnosov do splatnosti, presnejšie minimalizáciou

$$RSSy(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N} (YTM_i - r_d(m_i, \mathbf{b}))^2, \tag{48}$$

kde $YTM_i$ je spojitý výnos do splatnosti í-teho dlhopisu so splatnosťou $m_i$. Na tento prípad je pre fixné $b_4$, $b_6$ možné aplikovať lineárnu regresiu prostredníctvom vbudovanej funkcie `linest`. Teda pre sieť hodnôt $b_4$, $b_6$ počítame lineárnou regresiou sumu štvorcov rezíduí $RSSy$. Hodnotu parameta $\mathbf{b}$, pre ktorý sme dosiahli najmenšie $RSSy$ berieme za vektor $\tilde{\mathbf{b}}$ a zároveň aj ako štartovací bod.

V dôsledku prechodu $\lambda \to 1$ v kontinuačnej metóde sa tak plynule prejde od diskontovania výnosovou krivkou k diskontovaniu krivkou diskontných mier.

K riešeniu $\mathbf{F}(\mathbf{b}, \lambda) = \mathbf{0}$ pre dané $\lambda$ sme zakaždým použili Newton-Kantorovičovu metódu. Tá si vyžaduje znalosť gradientu, ako aj Hessovej matice rezíduí. MS Excel nevie derivovať, takže sme gradient a Hessovu maticu aproximovali za pomoci centrálnych diferencií

$$\nabla_i RSS(\mathbf{b}) \approx \frac{RSS(\mathbf{b} + h\mathbf{e_i}) - RSS(\mathbf{b} - h\mathbf{e_i})}{2h} \tag{49}$$

$$\nabla^2_{ij} RSS(\mathbf{b}) \approx \frac{RSS(\mathbf{b}+h\mathbf{e_i}+h\mathbf{e_j}) - RSS(\mathbf{b}-h\mathbf{e_i}+h\mathbf{e_j}) - RSS(\mathbf{b}+h\mathbf{e_i}-h\mathbf{e_j}) + RSS(\mathbf{b}-h\mathbf{e_i}-h\mathbf{e_j})}{4h^2} \tag{50}$$

a podobne aj pre $RSSy$. Samotný iteračný proces Newton-Kantorovičovej metódy pre dané $\lambda$ je daný vzťahom

$$\mathbf{b}^{new} = \mathbf{b} - (\nabla \mathbf{F}(\mathbf{b}, \lambda))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{b}, \lambda). \tag{51}$$

Inverzná matica sa počíta vbudovanou funkciou `MInverse`. Počítanie Hessovej matice funkcie $RSS(\mathbf{b})$ je pomerne časovo náročné, a preto je možné v makre zvoliť použitie Broydenovho updatu matice $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{b}, \lambda)$, ktorý má tvar

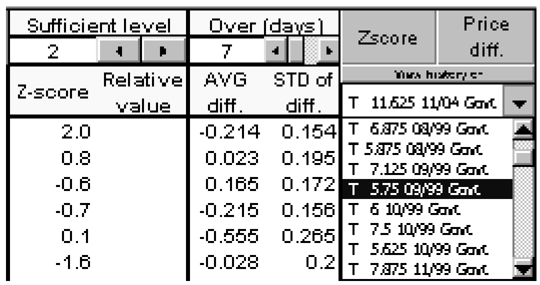
$$\nabla \mathbf{F}^{new} = \nabla \mathbf{F} - \frac{(\nabla \mathbf{F}\mathbf{u} - \mathbf{v})}{||\mathbf{u}||^2} \mathbf{u}^T \tag{52}$$

kde $\mathbf{u} = \mathbf{b}^{new} - \mathbf{b}$ a $\mathbf{v} = \mathbf{F}^{new} - \mathbf{F}$.

Definitívna voľba optimálnej metódy na odhad parametrov zostáva ešte stále otvorená, a preto práve v tomto bode možno očakávať v budúcnosti isté „dolaďovania“.

## 5.4 Rich/Cheap analýza

Z-skóre je počítané na základe aktuálnej cenovej odchýlky, priemernej $n$-dňovej odchýlky a jej štandardnej odchýlky. Počet dní $n$ ako aj hraničnú úroveň $Z$ nad ktorou sa dlhopis považuje za relatívne nadhodnotený alebo podhodnotený je možno jednoducho meniť. Priemery a štandartné odchýlky sú počítané z historických odchýliek a ak je ich počet nepostačujúci, Rich/Cheap analýza sa nevyhodnotí.




Obr. 8: Ovládacie prvky – zoznamy a posúvatka.

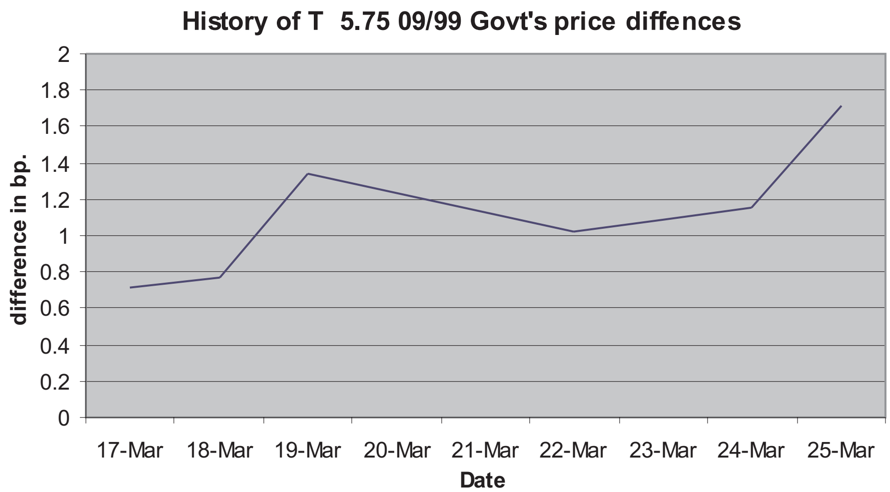
## 5.5 Grafické výstupy

Program umožňuje produkovať grafy základných charakteristík. Sú to predovšetkým grafy výnosov do splatnosti, krivka diskontnej miery, Z-skóre, cenové odchýlky vzhľadom k priemerným a história cenových odchýliek vybraného dlhopisu; viď nasledujúca kapitola.

# 6 Testovanie programu

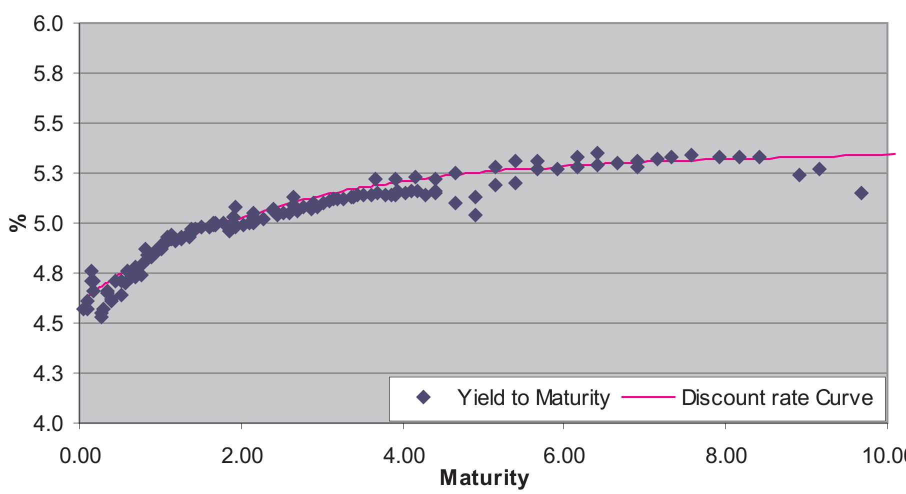
Ako vstupné dáta sme použili americké štátne kupónové dlhopisy bez opcie zo dňa 17. až 26.3.1999. Dáta sme získali prostredníctvom systému BLOOMBERG, a teda dlhopisy v súbore `usgovbonds.xls` sme evidovali pod menami uvedenými na BLOOMBERGu.

Ku každému dňu sme importovali záverečné ceny a následne uskutočnili odhad parametrov. Rich/Cheap analýzu sme vyhodnotili až v posledný deň, nakoľko si táto metóda vyžadaduje odchýlky z niekoľkých predchádzajúcich dní, ktorých sme aj tak nemali nazvyš.



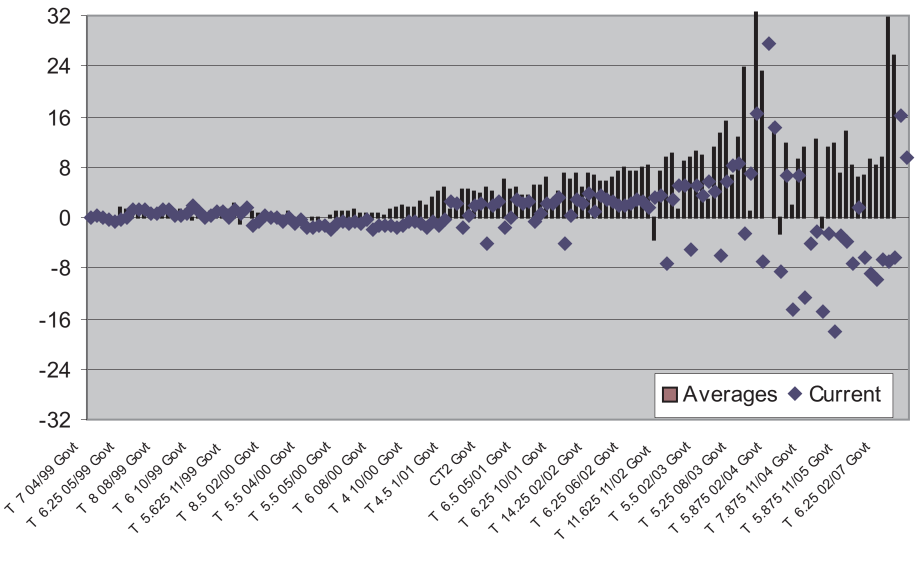

Obr. 9: História relatívne nadhodnoteného dlhopisu

Odhad parametrov Svenssonovho rozšírenia Nelson-Siegelovej parametrickej funkcie je časovo pomerne náročný ale po aplikovaní Broydenovej formuly sa odhady urýchlili. Treba poznamenať, že Svenssonova parametrická funkcia má isté špecifiká, ktoré komplikujú odhad jej parametrov a medzi nimi najviac vynikal problém nestability. Napr. bolo možné nájsť množinu parametrov, ktoré dávali takmer rovnaký fit (na danom intervale). Medzi jednotlivými regresormi pôsobila multikolinearita čo spôsobovalo, že sa parametre (napr. $b_2$, $b_3$) „preťahovali“ no ich súčet sa udržiaval konštantný. Newton-Kantorovičova metóda




Obr. 10: Krivka diskontnej miery by sa mala nachádzať tesne nad výnosovou krivkou (použitý Broydenov update).

pri vhodnom štartovacom bode skonvergovala, no niekedy aj do nejakého degenerovaného riešenia – napr. $b_3$, $b_4$ boli nulové alebo $b_4 = b_6$. O dosť lepšie fungoval Broydenov update matice $H$. Minimalizácia postupovala v malých ale časovo rýchlych krokoch. Parametre nezaznamenávali v jednotlivých iteráciach také skoky ako v Newtonovej metóde. Broyden sa výborne uplatnil aj v kontinuačnej metóde.




Obr. 11: Aktuálne a priemerné cenové odchýlky.

Zo 170 dlhopisov nám Rich/Cheap analýza zo sedemdňových dát označila osem dlhopisov ako relatívne podhodnotených a jeden ako relatívne nadhodnotený. Samozrejme by sa vyžadovala väčšia história dát, aby bolo možno s určitosťou prehlásiť daný dlhopis za relatívne podhodnotený, resp. nadhodnotený. Ako kritérium na Z-skóre sme uvažovali úroveň 2.

# Záver

Predložená diplomová práca je ukážkou, akú širokú škálu jednoduchých matematických nástrojov možno využiť vo finančnej praxi. V diplomovej práci sme zadefinovali spojité úročenie, pojem férovej ceny dlhopisy, vyjadrili vzťahy medzi rôznymi reprezentáciami časovej štruktúry úrokových mier ako aj priblížili metódy ich odhadov, pričom sme nenápadne využili definíciu Eulerovho čísla, pojem limity, základy integrovania a riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc, kubické splajny, numerické aproximácie derivácií, lineárnu a nelineárnu regresiu a numerické metódy na hľadanie riešenia sústavy nelineárnych rovníc.

Aby sme sa ale nepohybovali len v rovine teoretickej, tak sme sa pokúsili ako vrchol diplomovej práce zhotoviť program v MS Excel, ktorý by mohol mať prípadne svoje uplatnenie v praxi. Program je pomerne dosť flexibilný a možno v ňom použiť všetky v tejto práci spomínané metódy na odhad parametrov. Parametrickú funkciu je možné jednoducho modifikovať, čím dostávame univerzálny program na odhad časovej štruktúry úrokových mier z kupónových dlhopisov, ktorá sa potom môže využiť pri oceňovaní dlhopisov a Rich/Cheap analýze, alebo aj iných modeloch, ktoré vyžadujú časovú štruktúru úrokových mier.

S radosťou príjmeme akékoľvek pripomienky a nápady k danému programu, alebo uvedenému textu. Jednou z možností ako ešte rošíriť program by mohlo byť pridanie simulácie nákupu podhodnotených a predaja nadhodnotených dlhopisov s vyhodnotením ziskovosti, ktorá by mohla byť porovnávaná s obchodníkmi na reálnych trhoch.

# Literatúra


[1] Adams, A.: *Investment Mathematics and Statistics*. Kluwer Law International, 1993

[2] Bekdache, B., Baum, Ch. F.: *The Ex Ante Predictive Accuracy of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates*. Wayne State University, 1997

[3] Bliss, R.: *Testing Term Structure Estimation Methods*. Working Paper 96-12a, Federal Reserve Bank of Atlanta, 1996

[4] Buchanan, J. L., Turner, P. R.: *Numerical Methods and Analysis*. McGrow-Hill, 1992

[5] Campbell, J. Y.: *Some Lessons from the Yield Curve*. Working Paper No. 5031, National Bureau of Economic Research, 1995

[6] Jacobson, R.: *Microsoft Excel 97 Visual Basic - Krok za krokem*. Computer Press, 1998

[7] Nelson, Ch. R., Siegel, A. F.: *Parsimonious Modeling of Yield Curve*. Journal of Business, vol. 60, no. 4, 1987

[8] Söderlind, P., Svensson, L. E. O.: *New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments*. Stockholm University, 1996

[9] Svensson, L. E. O.: *Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method*. Stockhol University, 1995

[10] Vandoorne, M.: presentation *Tools for Total Rate of Return Portfolio Management*. Barclays de Zoete Wedd, 1995

[11] Vrij, G.: presentation *Fixed Income Strategy*. ABN AMRO Bank, International Bond Research, 1997

[12] Waggoner, D. F.: *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*. Working Paper 97-10, Federal Reserve Bank of Atlanta, 1997