3. Oceňovanie opcií

V posledných dvoch desaťročiach s rozvojom opcií, ako druhu finančného derivátu, vzrastá aj význam ich oceňovania. V tejto kapitole sa bližšie pozrieme na jeden z najznámejších modelov pre oceňovanie opcií, ktoré nám ponúka moderná finančná matematika. Konkrétne pôjde o spojitý Black-Scholesov model. F. Black a M. Scholes uverejnili odvodenie svojho modelu na oceňovanie derivátov akcií v časopise Journal of Political Economy v roku 1973 [BS]. Ich práca bola ocenená Nobelovou cenou za ekonómiu v roku 1997. Odvodenie tohto modelu je uvedené aj iných knihách, spomeňme napríklad knihu J. Hulla [H] alebo skriptá J. Komorníka, M. Komorníkovej a K. Mikulu [KKM].

3.1 Black–Scholesov model oceňovania opcií

Na časový vývoj ceny derivátu akcie na finančnom trhu sa najčastejšie využíva Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica. Predtým, ako pristúpime k jej odvodeniu, je nutné zaviesť niekoľko označení:

- S je aktuálna cena akcie na trhu (stock price)
- T je expiračná doba (expiration date), t.j. doba, do ktorej sa opcia musí realizovať
- E je realizačná cena (excercise price), t.j. vopred dohodnutá cena akcie
- t je čas, $t \in [0, T]$
- V je hodnota opcie, ktorá je funkciou ceny akcie a času, t.j. $V = V(S, t)$
- σ je volatilita
- r je spojitý bezrizikový úrok
- D je spojitý dividendový úrok

Naša úloha spočíva v stanovení ceny opcie tak, aby v čase uzatvorenia kontraktu nebola zvýhodnená ani jedna strana. Nech $V(S, t)$ je optimálna hodnota finančného derivátu, závisiaceho od ceny akcie S a času t. Nebudeme špecifikovať akého derivátu konkrétne, pretože nasledujúca analýza má všeobecný charakter. Jednotlivé typy derivátov (call, put opcie, atď.) budú spĺňať tú istú parciálnu diferenciálnu rovnicu a odlišovať sa budú len v koncových (expiračných) podmienkach.

Predpokladajme, že vývoj ceny akcie ako funkcia času $S = S(t)$ sa vyvíja podľa stochastickej diferenciálnej rovnice,

$$dS = \mu\, Sdt + \sigma\, Sdw\,, \tag{3.1.1}$$

kde dS je zmena ceny akcie za časový okamih dt, μ je očakávaná návratnosť akcie, σ je volatilita časového vývoja akcie. Zmenu tzv. Wienerovho procesu sme označili dw.

Štandardný Wienerov proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je parametrický systém náhodných veličín, pričom :

- $w(0) = 0$,
- $dw = \varepsilon \sqrt{dt}$, kde dw je prírastok w za malý časový interval dt a ε je náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobností so strednou hodnotou 0 a rozptylom 1, t.j. $\varepsilon \approx N(0,1)$
- prírastky dw pre rôzne malé (po sebe nasledujúce) časové intervaly dt sú nezávislé.

Je vhodné zdôrazniť, že v časovej analýze je podstatnou informáciou relatívna zmena $\frac{dS}{S}$ a nie absolútna zmena ceny akcie dS. Z toho vyplýva, že stochastickú diferenciálnu rovnicu (3.1.1) môžeme prepísať do tvaru :

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dw\,. \tag{3.1.2}$$

Uvedomme si, že ak by teraz volatilita bola nulová, $\sigma = 0$, tak vývoj ceny akcie $S = S(t)$ by bol úplne deterministický, čím by cena narastala exponenciálne podľa očakávanej návratnosti akcie μ, pretože $dS = \mu\, S\, dt$, z čoho integráciou dostávame $S(t) = S_o e^{\mu t}$. V prípade ak $\sigma \neq 0$ cena akcie sa stáva nepredvídateľnou, preto môže klesať aj stúpať.

Ďalej na odvedenie Black-Scholesovej formuly budeme potrebovať Itôovu lemu.

Itôova lema :

Nech *f*(x, t) je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná *x* je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice $dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw$, kde dw je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie *f* je daný vzťahom:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt, \qquad (3.1.3)$$

dôsledkom čoho funkcia *f* vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} dw\,. \qquad (3.1.4)$$

Ak predpokladáme, že funkcia *V* = *V*(*S*, *t*) je nejaká hladká funkcia premenných *S* a *t*, pričom premenná S vyhovuje stochastickej rovnici (3.1.1), t.j. $dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dw$, a teda $\mu(S,t) = \mu\, S$, $\sigma(S,t) = \sigma\, S$, môžeme použiť Itôovu lemu. Preto funkcia *V*(*S*, *t*) náhodného procesu *S* bude spĺňať stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu\, S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma\, S \frac{\partial V}{\partial S} dw\,. \qquad (3.1.5)$$

Ďalej si vytvoríme svoje portfólio *P* zložené z akcií a opcií. Toto uskutočníme vhodnou lineárnou kombináciou difúznych rovníc (3.1.1) a (3.1.5) tak, aby sme eliminovali náhodnú časť a vytvorili bezrizikové portfólio. Jediný rizikový člen v oboch rovniciach je *dw*. Uvažujme portfólio *P*, obsahujúce jeden derivát a Δ akcií. Takýto postup sa nazýva spojitý Δ-hedging (Δ vyjadruje pomer počtu akcií k počtu opcií v portfóliu). To znamená, že portfólio *P* je dané vzťahom:

$$P = V + \Delta\, S. \qquad (3.1.6)$$

Zmena hodnoty tohto portfólia za malý časový interval dt, pričom $d\Delta = 0$, je rovná:

$$dP = dV + \Delta\, dS. \tag{3.1.7}$$

Dosadením rovníc (3.1.1) a (3.1.5) do poslednej rovnice (3.1.7) dostávame stochastickú rovnicu pre portfólio P:

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu\, S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \Delta\, \mu\, S \right) dt + \left(\sigma\, S \frac{\partial V}{\partial S} + \Delta\, \sigma\, S \right) dw. \tag{3.1.8}$$

Vhodným stanovením pomeru Δ môžeme anulovať náhodný člen dw. To sa podarí vtedy, ak Δ zvolíme

$$\Delta = -\frac{\partial V}{\partial S}. \tag{3.1.9}$$

Potom je zmena hodnoty portfólia už diferenciálna rovnica deterministická a rovná sa

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt\,. \tag{3.1.10}$$

Avšak aby nevznikol priestor pre arbitráž, t.j. bezrizikový zisk (ten je možný len vo výnimočných prípadoch a to po krátku dobu, lebo po jeho vyskytnutí sa ho všetci účastníci trhu snažia hneď využiť a tým ho vlastne likvidujú), musí byť prírastok portfólia za čas dt rovný prírastku, aký by sme získali uložením našej hodnoty P do banky

$$dP = r\, P dt\,. \tag{3.1.11}$$

Dosadením vzťahu (3.1.11) do (3.1.10) a predelením dt, dostávame:

$$r\, P = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\,. \tag{3.1.12}$$

Nakoniec z rovníc (3.1.6), (3.1.9) a (3.1.12) dostávame pre neznámu funkciu $V(S, t)$ tzv. ***Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu***

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r\,S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r\,V = 0\,. \tag{3.1.13}$$

Spomenieme jedno dôležité zovšeobecnenie Black-Scholesovej rovnice a to prípad, keď sú akcionárom spojite vyplácané dividendy s konštantným dividendovým úrokom D. Akcionár za malý časový okamih dt získa hodnotu $DSdt$. Z toho vyplýva, že ak v portfóliu máme Δ akcií, náš prírastok z týchto akcií za dobu dt bude $\Delta DSdt$. Tým sa nám znení rovnica (3.1.7) na

$$dP = dV + \Delta\,dS + \Delta\,DSdt. \tag{3.1.14}$$

Rovnakým postupom eliminovania náhodného člena dw dostávame vzťah

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + DS\,\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt\,. \tag{3.1.15}$$

Ďalej použitím myšlienky o zamedzení bezrizikového zisku získame rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS\,\frac{\partial V}{\partial S} = r\left(V - S\,\frac{\partial V}{\partial S}\right). \tag{3.1.16}$$

Ľavá časť rovnice nám vyjadruje bezrizikový prírastok z Δ-hedgovaného portfólia a pravá bezrizikový prírastok z bankového depozitu. Takže ***modifikovaná Black-Scholesova rovnica*** pre určenie hodnoty finančného derivátu na akciu, vyplácajúcu spojité dividendy, má tvar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S\,\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r\,V = 0\,. \tag{3.1.17}$$

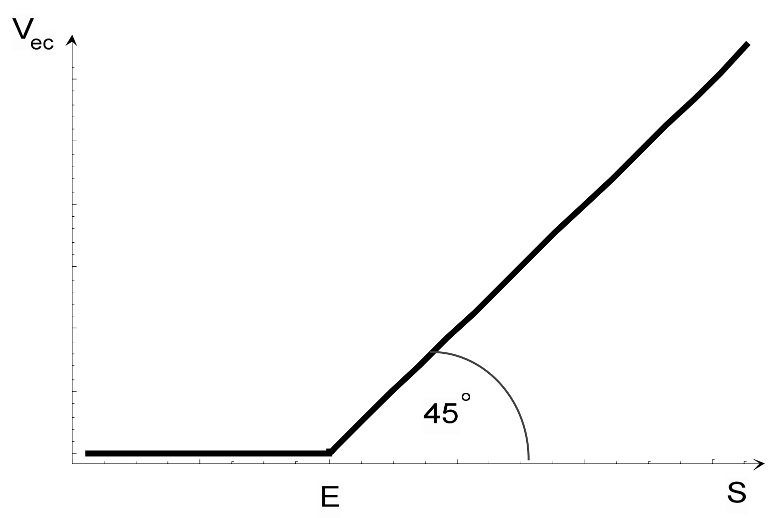
3. 2 Expiračné a okrajové podmienky

3.2.1 *Európske opcie*

Najskôr sa budeme zaoberať európskou call opciou. Jej cenu si označíme znakom V_{ec}. Na to, aby sme našli jednoznačné riešenie $V_{ec}(S, t)$ pre $S \geq 0$ a $t \in \langle 0, T \rangle$, je potrebné zadať ešte začiatočnú a okrajové podmienky. V našom prípade začiatočná podmienka súvisí s časom expirácie *T*, preto rešpektujúc tento finančný kontext, budeme hovoriť o expiračnej podmienke. Jej význam je v tom, že ak cena akcie *S* v čase expirácie *T* prekročí hodnotu *E*, na ktorú bol kontrakt uzavretý v čase $t = 0$, tak cena opcie V_{ec} musí mať hodnotu $S - E$, aby nevznikol priestor pre arbitráž. Ak bude $S < E$, tak opcia nemá žiadnu hodnotu, pretože ju nemá zmysel uplatňovať. Takže expiračnú podmienku môžeme zapísať v tvare

$$V_{ec}(S, T) = \max(S - E, 0). \qquad (3.2.1.1)$$

Funkcia daná vzťahom (3.2.1.1) sa nazýva tiež call – payoff diagram.



Obrázok č.1 - Payoff diagram pre call opciu.

Okrajové podmienky stanovíme pre hodnoty $S = 0$ a $S \to \infty$. Ak je cena akcie nulová, tak z rovnice (3.1.1) vyplýva, že $S = 0$ aj v jej ďalšom časovom vývoji, a teda opcia sa stáva bezcennou. Preto:

$$V_{ec}(0, t) = 0 \text{ pre všetky } t \in \langle 0, T \rangle. \qquad (3.2.1.2)$$

Ak cena akcie rastie nad všetky ohraničenia, t.j. $S \to \infty$, potom cena európskej call opcie je rovná cene akcie zredukovanej o príjmy z dividend, t.j.:

$$V_{ec}(S,\, t) \to S\, e^{-D(T-t)} \text{ pre } S \to \infty \text{ a pre všetky } t \in \langle 0, T \rangle . \qquad (3.2.1.3)$$

Parciálna diferenciálna rovnica na výpočet ceny opcie s podmienkami (3.2.1.1), (3.2.1.2) a (3.2.1.3) sa dá riešiť aj explicitne. Toto riešenie pri nulových dividendách (D = 0) je známe aj ako Black-Scholesova formula oceňovania opcií. Jej riešenie má tvar:

$$V_{ec}(S,\, t) = e^{-D(T-t)} S\, N(d_1) - E\, e^{-r(T-t)} N(d_2), \qquad (3.2.1.4)$$

kde

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{a} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

a

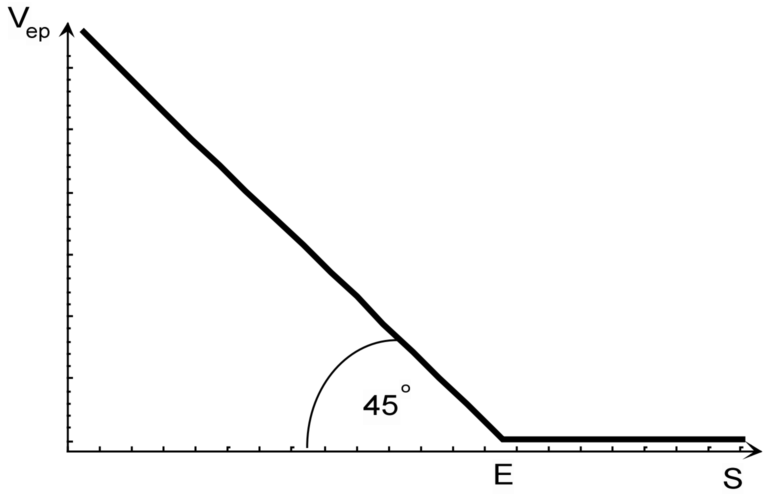
$$N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

je distribučná funkcia normálneho rozdelenia pravdepodobnosti $N(0, 1)$.

Teraz prejdeme na podmienky pre európsku put opciu. Je zrejmé, že ak v čase expirácie T je cena akcie S väčšia alebo rovná ako vopred dohodnutá cena E, tak sa opcia stáva bezcennou. V opačnom prípade, keď je $S < E$, tak cena opcie je daná rozdielom expiračnej ceny a ceny akcie. Takže expiračnú podmienku môžeme písať v tvare:

$$V_{ep}(S, T) = max\,(E - S, 0) \quad . \qquad (3.2.1.5)$$

Táto funkcia sa tiež nazýva aj put-payoff diagram.



Obrázok č.2 - Payoff diagram pre put opciu.

Okrajové podmienky:

$$V_{ep}(0,t) = E\,e^{-r\,(T-t)} \text{ pre } \forall\, t \in \langle 0, T \rangle \tag{3.2.1.6}$$

$$V_{ep}(S,t) \to 0 \quad \text{pre } S \to \infty,\ \forall\, t \in \langle 0, T \rangle\ . \tag{3.2.1.7}$$

Explicitné riešenie vychádzajúce z put–call parity sa dá písať v tvare:

$$V_{ep}(S,t) = V_{ec}(S,t) - S + E\,e^{-r\,(T-t)}\ . \tag{3.2.1.8}$$

3.2.2 *Americké opcie*

Obidva druhy opcií (put či call) sa od európskych líšia tým, že ich môžeme uplatniť v ľubovolnom časovom okamihu $t \in \langle 0, T \rangle$, čo dáva ich držiteľovi zjavne väčšie práva, a preto by mala ich cena byť vyššia, nanajvýš rovná cene európskej opcie.

V prípade americkej call opcie nevyplácajúcej dividendy (D = 0) je známe, že jej cena sa rovná cene európskej call opcie, t.j. $V_{ec} = V_{ac}$. Vyplýva to z toho, že:

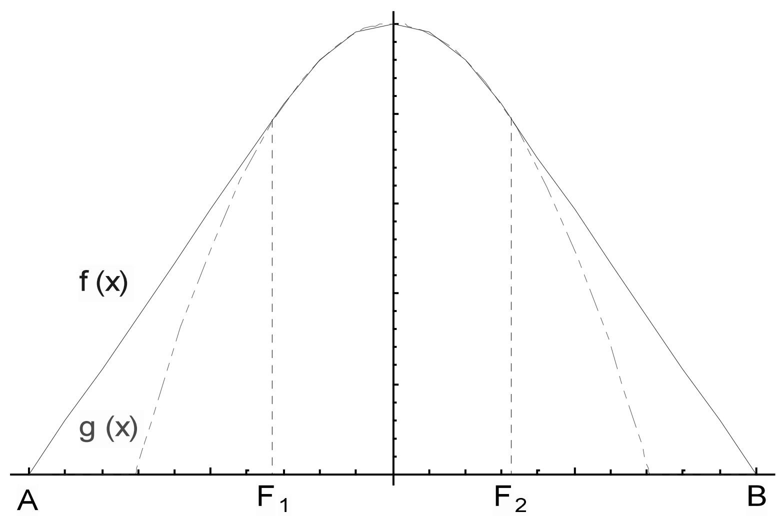
$$V_{ec}(S,t) > V_{ec}(S,T) = \max\,(S - E, 0)\ \forall\, t \in \langle 0, T \rangle . \tag{3.2.2.1}$$

Takže opciu nie je výhodné uplatňovať, pretože v čase expirácie je jej hodnota daná payoff diagramom menšia ako V_{ec} vlastnenej opcie. Takže vlastník ju bude držať až do času expirácie, alebo ju predá za cenu V_{ec}.

Odlišný prípad však nastáva pri akciách, ktoré vyplácajú dividendy. Na jeho vysvetlenie využijeme analógiu s *problémom prekážky*.

3.2.2.1 Problém prekážky

Princíp prekážky si vysvetlíme na modeli natiahnutej struny $f\,(x)$, ktorá je pevne ukotvená v dvoch bodoch A a B, ponad prekážku $g\,(x)$. Chceme zistiť body, v ktorých sa struna prestáva dotýkať prekážky (F_1 *a* F_2).



Obrázok č.3 – Struna f(x) natiahnutá nad prekážkou g(x).

Pričom platí:

1) $-f''(x) = 0,\ \ x \in [A, F_1] \cup [F_2, B]$ vyplýva to z Laplaceovej rovnice
2) $f\,(x) = g\,(x),\ \ x \in (F_1,\ F_2)$
3) $f\,(\mathrm{A}) = f\,(\mathrm{B}) = 0$ (3.2.2.1.1)
4) $f\,(F_1) = g\,(F_1),\quad f\,(F_2) = g\,(F_2)$ - Dirichletove podmienky
5) $f\,'(F_2) = g\,'(F_1),\quad f\,'(F_1) = g\,'(F_2)$ - podmienka na hladkosť.

Tento problém sa dá formulovať aj v tvare *lineárnej komplementarity*:

Z obrázku č.3 vidíme, že:

ak A < x < F_1 ,	tak platí $f(x) > g(x)$	a tiež platí	$- f''(x) = 0$
ak $F_1 < x < F_2$,	tak platí $f(x) = g(x)$	a tiež platí	$- f''(x) > 0$
ak $F_2 < x <$ B,	tak platí $f(x) > g(x)$	a tiež platí	$- f''(x) = 0$.

Z toho vyplýva:

1) $f(x) \geq g(x)$, $x \in [A, B]$

2) $- f''(x) \geq 0$, $x \in [A, B]$

1+2) $- f''(x)\,(f(x) - g(x)) = 0$ (3.2.2.1.2)

3) f (A) = f (B) = 0

4) f' a f sú spojité funkcie na intervale $[A, B]$.

Uvedieme ešte jednu formuláciu problému prekážky, a to v tvare *variačnej nerovnice:* Nech $\Re$ je množina funkcií v, pre ktoré platí, že sú spojité a ich prvé derivácie sú po častiach spojité, v (A) = v (B) = 0, $v(x) \geq g(x)$ pre $\forall x \in [A, B]$. Hľadáme funkciu $f(x) \in \Re$, ktorá má navyše spojitú prvú deriváciu takú, že integrálna rovnica

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\left[v'(x) - f'(x)\right]dx \geq 0 \qquad (3.2.2.1.3)$$

platí pre všetky testovacie funkcie $f(x) \in \Re$. Dá sa ukázať, že existuje práve jedno riešenie, ktoré ak je dostatočne hladké, je zároveň riešením problému lineárnej komplementarity, ako aj pôvodnej úlohy prekážky.

Ukážme si teraz, ako problém prekážky súvisí s oceňovaním amerických opcií. V každom časovom okamihu t $\in [0, T]$ existuje S_p také, že pre S > S_p je hodnota $V_{ec}(S.\ t)$ pod call payoff diagramom. Ak by aj napriek tomu stále platilo $V_{ec} = V_{ac}$, tak potom si kúpime opciu $V_{ac}(S,\ t) < S - E$ a okamžite ju uplatníme. Čiže kúpime akciu za E a predáme ju za S, pričom za opciu sme zaplatili len V_{ac}. Náš zisk by bol: S - E - V_{ac} > 0. Takže máme nenulový zisk a nepodstúpili sme žiadne riziko. Jeho elimináciu spôsobí argument arbitráže a cena opcie V_{ac} vzrastie až na úroveň payoff diagramu, t.j musí byť nutne splnená podmienka:

$$V_{ac}(S,t) \geq \max\left(S - E, 0\right) \quad \forall\, t \in \left[0, T\right]. \tag{3.2.2.2}$$

Teraz sa dostávame k takzvanej úlohe s voľnou hranicou pre americkú call opciu, vyplácajúcu dividendy, t.j. treba nájsť krivku $S_f(t)$, ktorá reprezentuje optimálnu expiračnú cenu v každom časovom okamihu $t \in \left[0, T\right]$.

1. S (t) < $S_f(t)$ - opciu je výhodné držať, pretože jej hodnota je väčšia ako payoff diagram. V_{ac} pritom spĺňa Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu.
2. S (t) ≥ $S_f(t)$ - opcia je uplatnená a má hodnotu danú payoff diagramom, t.j. V_{ac}(S, t) = $S - E$.

Všimnime si, že po dosadení V_{ac}(S, t) = $S - E$ do Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}(S - E) + (r - D)S\frac{\partial}{\partial S}(S - E) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}(S - E) - r\,(S - E) = r\,E > 0\,,$$

dostávame pre S (t) ≥ $S_f(t)$ nerovnicu

$$\frac{\partial V_{ac}}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V_{ac}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{ac}}{\partial S^2} - r\,V_{ac} > 0\ . \tag{3.2.2.3}$$

Takže pre všetky S dostávame podmienku

$$\frac{\partial V_{ac}}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V_{ac}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{ac}}{\partial S^2} - r\,V_{ac} \geq 0. \tag{3.2.2.4}$$

Okrajové podmienky: $V_{ac}(0, t) = 0$ pre $\forall$ všetky t $\in \langle 0, T\rangle$ (3.2.2.5)

$$V_{ac}(S, t) \to S\, e^{-D(T - t)} \text{ pre } S \to \infty \text{ a pre } \forall\ t \in \langle 0, T\rangle \tag{3.2.2.6}$$

a expiračná podmienka $V_{ac}(S, T) = \max(S - E, 0)$ (3.2.2.7)

zostávajú nezmenené, ale pribudli nám dve podmienky na voľnú hranicu

$$V_{ac}(S_f(t), t) = S_f(t) - E, \quad \frac{\partial V_{ac}(S_f(t), t)}{\partial S} = 1 \ . \qquad (3.2.2.8\text{ -}9)$$

Podobne môžeme vyjadriť problém určenia optimálnej hodnoty americkej put opcie v tvare úlohy s voľnou hranicou.

Treba nájsť spojitú funkciu $V_{ap}(S, t)$, $S \geq 0$, $t \in \langle 0, T \rangle$ so spojitou parciálnou deriváciou $\frac{\partial V_{ap}}{\partial S}$ a krivku $S_f : [0, T] \to R$ tak, aby platilo:

Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V_{ap}}{\partial t} + r\, S \frac{\partial V_{ap}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{ap}}{\partial S^2} - r\, V_{ap} = 0 \quad \text{pre } S > S_f(t) \ . \qquad (3.2.2.10)$$

Algebraická rovnica

$$V_{ap}(S, t) = E - S \quad \text{pre } S \leq S_f(t) \ . \qquad (3.2.2.11)$$

Okrajové podmienky

$$V_{ap}(0, t) = E\, e^{-r(T-t)} \text{ pre } \forall\, t \in \langle 0, T \rangle \qquad (3.2.2.12)$$

$$V_{ap}(S, t) \to 0 \quad \text{pre } S \to \infty, \ \forall\, t \in \langle 0, T \rangle \ . \qquad (3.2.2.13)$$

Expiračná podmienka

$$V_{ap}(S, T) = \max(E - S, 0) \ . \qquad (3.2.2.14)$$

Dve podmienky na voľnej hranici

$$V_{ap}(S_f(t), t) = E - S_f(t), \quad \frac{\partial V_{ap}(S_f(t), t)}{\partial S} = -1 \ . \qquad (3.2.2.15\text{-}16)$$

Takže dostávame podobné podmienky ako pri probléme prekážky:

- Black-Scholesova PDR sa zmenila na nerovnicu.
- Hodnota sa musí nachádzať nad alebo na payoff diagrame.
- Hodnota opcie je spojitá funkcia dvoch premenných S a t.
- Prvá parciálna derivácia $\frac{\partial V}{\partial S}$ je spojitá funkcia.

Mohli by sme teda naformulovať úlohu voľnej hranice v tvare lineárnej komplementarity napríklad pre $V_{ap}(S,t)$:

1. $V_{ap}(S,t)$ a $\frac{\partial V_{ap}}{\partial S}$ sú spojité funkcie
2. $\frac{\partial V_{ap}}{\partial t} + r\,S\frac{\partial V_{ap}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_{ap}}{\partial S^2} - r\,V_{ap} \le 0, \quad S \in [0,\infty]$ (3.2.2.17)
3. $V_{ap}(S,\mathrm{t})$- Payoff$(S) \ge 0, \quad S \in [0,\infty]$
4. (BS (V_{ap}))($V_{ap}(S,t)$- $Payoff(S)$) = 0, $\quad S \in [0,\infty]$
5. $V_{ap}(S,t) \to 0$ pre $S \to \infty$,

kde BS(V_{ap}) je ľavá strana Black-Scholesovej rovnice.