2.DEA modely

Podniky resp. organizačné jednotky podrobujúce sa DEA označujeme DMUs z anglického Decision Making Units. Efektívnosť každej DMU je meraná vzhľadom na ostatné DMUs. Všetky DMUs ležia „pod” alebo „na” hranici efektívnosti. V DEA sa každý komponent dát klasifikuje ako vstup alebo výstup. Vo všeobecnosti platí, že ako vstupy sa zadávajú dáta, pre ktoré sú lepšie alebo výhodnejšie nižšie hodnoty, a pre dáta označené ako výstupy sú výhodnejšie vyššie hodnoty. Predpokladá sa, že všetky DMUs spotrebujú rovnaké vstupy a produkujú rovnaké výstupy.

V modeloch sa posudzuje n DMUs, pričom každá spotrebuje m rôznych vstupov na vyprodukovanie s rôznych výstupov. Maticu vstupov ozn. X a maticu výstupov ozn. Y. Prvok x_{ij} je teda množstvo i-teho vstupu a prvok y_{rj} udáva množstvo r-tého výstupu, ktoré spotrebováva resp. produkuje j-ta DMU. Ďalej Xj je vektor pozorovaných vstupov $X_j=(x_{1j},...,x_{ij},...,x_{mj})$ a $Y_j=(y_{1j},...,y_{rj},...,y_{sj})$ je vektor pozorovaných výstupov pre DMU_j. Predpokladá sa, že aspoň jeden výstup a aspoň jeden vstup sú kladné.

DMU označí model ako efektívnu, ak neexistuje iná jednotka (skutočná alebo virtuálna), ktorá pri spotrebovaní rovnakého alebo menšieho vstupu vyprodukuje viac výstupov(výstupná orientácia), resp. spotrebuje menej vstupov na vyprodukovanie rovnakého alebo väčšieho množstva výstupov(vstupná orientácia) ako DMU, ktorú analyzujeme.

V podkapitolách 2.1.,2.2. a 2.3.,nasledujúc prácu BANKERA, CHARNESA a COOPERA (1984), definujem množinu výrobných možností, Shephardovu “funkciu vzdialenosti” a odvodím základné typy DEA modelov. Podkapitola 2.4.

dopĺňuje DEA modely o neorientované modely s inými typmi hraníc efektívnosti.

2.1 Axiómy

Základ tejto práce tvoria axiomatické formulácie, ktoré sa v ekonomickej teórii bežne používajú a sú výsledkom práce SHEPHARDA (1953,1970). Cieľom je charakterizovať množinu výrobných možností a najmä určiť efektívnu podmnožinu len na základe pozorovaných dát.

Množina výrobných možností je popísaná nasledovne:

$A=\{(X_0, Y_0) \mid Y_0 \geq 0$, ktoré môže byť vyrobené z $X_0 \geq 0\}$. (1)

Množina výrobných možností A spĺňa nasledujúce axiómy:

Axióma 1(Konvexita):

Ak $(X_j,Y_j) \in A$, $j=1,...,n$ a $\lambda_j \geq 0$ sú nezáporné skaláre také, že $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, potom $(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j) \in A$.

Axióma 2 (Neefektívnosť):

(a) Ak $(X_0,Y_0) \in A$ a $\exists\ \overline{X}_0 \geq X_0$, potom $(\overline{X}_0, Y_0) \in A$.

(b) Ak $(X_0,Y_0) \in A$ a $\exists\ \overline{Y}_0 \leq Y_0$, potom $(X_0, \overline{Y}_0) \in A$.

Axióma 3 (Neohraničenosť lúča):

Ak $(X_0,Y_0) \in A$, potom $(kX_0, kY_0) \in A$ pre ľubovoľné $k>0$.

Axióma 4:

A je množina, ktorá je prienikom všetkých $\hat{A}$ spĺňajúcich axiómy 1,2 a 3 a zároveň vyhovujúcich podmienke, že každý z pozorovaných vektorov $(X_j,Y_j) \in \hat{A}$ pre $j=1,...,n$.

Teda A je „najmenšia” množina zhodná s pozorovanými dátami a axiomatickými vlastnosťami množiny výrobných možností. Z horeuvedených vlastností (konvexita a neohraničenosť lúča) vyplýva, že A je polyedrická množina.

Spojením Axiómy 1 a 3 dostávame, že každé (X_0, Y_0) vo forme $(k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j, k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j) \in A$ pre $k>0$, $\lambda_j \geq 0$ a $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$. Ďalej použijeme Axiómy 2 a 4:

$(X_0, Y_0) \in A \Leftrightarrow$ ak $X_0 \geq k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j$ a $Y_0 \leq k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j$ pre $k>0$ a ľubovoľné $\lambda_j, j=1,...,n$ spĺňajúce $\lambda_j \geq 0$ a $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$.