2.2 CCR modely

2.2.1 Shephardova funkcia vzdialenosti a CCR model

Podľa SHEPHARDA (1953,1970) sa množina možných vstupov pre každé Y_0 definuje ako

$$L(Y_0)=\{X_0 \mid (X_0, Y_0) \in A\} \quad (2)$$

a množina možných výstupov $P(X_0)$, pre každé X_0, ako

$$P(X_0)=\{Y_0 \mid (X_0, Y_0) \in A\}. \quad (3)$$

„Funkciu vzdialenosti” $g(X_0,Y_0)$ množiny vstupov $L(Y_0)$ definoval SHEPHARD nasledovne $g\,(X_0,Y_0)=\dfrac{1}{h(X_0,Y_0)}$, kde $h(X_0,Y_0)=\min\{h: hX_0 \in L(Y_0), h\geq 0\}$.

Pomocou už charakterizovaných (X_0,Y_0) je možné vyjadriť funkciu $h(X_0,Y_0)$:

$$h(X_0,Y_0)=\min_{h,\lambda_j,k} h$$

$$\text{za podmienok} \quad hX_0 \geq k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j \quad (4)$$

$$Y_0 \leq k\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\ \lambda_j \geq 0 \ \text{pre } j=1,...,n \ \text{ a } k>0.$$

Zavedením substitúcie $\mu_j = k\lambda_j$ sa úloha(4)zmení

$$\min_{h,\mu_j} \xi=h(X_0,Y_0)$$

$$\text{za podmienok} \quad hX_0 \geq \sum_{j=1}^{n}\mu_j X_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_j Y_j \geq Y_0, \quad (5)$$

$$\mu_j \geq 0, j=1,2,...,n.$$

Duálny problém tohto problému lineárneho programovania môže byť v tvare:

$$\max_{U_0,V_0} \Psi = U_0^T Y_0$$

za podmienok $V_0^T X_0 = 1,$

$$U_0^T Yj - V_0^T Xj \leq 0 \text{ pre } j=1,...,n, \qquad (6)$$

$$U_0 \geq 0, V_0 \geq 0,$$

kde $U_0^T \equiv (u_1,...,u_r,...,u_s)$ a $V_0^T \equiv (v_1,...,v_i,...,v_m)$.

Transformáciou odvodenou CHARNESOM a COOPEROM (1962) je možné túto úlohu lineárneho programovania previesť na úlohu:

$$\max_{U_0,V_0} h_0 = U_0^T Y_0 / V_0^T X_0$$

za podmienok $U_0^T Y_j / V_0^T X_j \leq 1$ pre $j=1,...,n$ (7)

$$U_0, V_0 \geq 0.$$

Problém zlomkového programovania (7) je zhodný s historicky prvým DEA modelom - CCR model, ktorý je pomenovaný podľa CHARNESA, COOPERA a RHODESA (1978). Týmto je dokázaná ekvivalencia medzi mierou efektívnosti v CCR modeli a prevrátenou hodnotou Shephardovej funkcie vzdialenosti pre množinu možných vstupov $L(Y_0)$ za podmienky, že množina výrobných možností A spĺňa už spomínané 4 axiómy.

V ponímaní CHARNESA, COOPERA a RHODESA sa efektívnosť každej DMU meria funkciou váh vstupov a výstupov - funkcia $h(X_0, Y_0)$ (7). Snažíme sa dosiahnuť čo najvyššiu možnú hodnotu efektívnosti, t.j. účelovú funkciu maximalizujeme. Takýto problém by bol bez ďalších podmienok neohraničený, preto sa zavádza podmienka $U_0^T Y_j / V_0^T X_j \leq 1$, t.j. aby pri vybraných váhach U,V iná DMUj nedosahovala efektívnosť vyššiu ako 100 %.

Model odvodený pomocou Shephardovej funkcie vzdialenosti a tým aj CCR model, majú nekonečne veľa riešení, čo vyplýva z Axiómy 3. V modeli (6) podmienka $V_0^T X_0=1$ zaručuje konečný počet riešení.

DEA spracúva n maximalizačných problémov, v ktorých sa mení len účelová funkcia a podmienky zostávajú rovnaké.

Ako ukázali CHARNES, COOPER a RHODES na jednoduchom príklade (1979,str. 339), CCR model evidentne neefektívnu jednotku ohodnotí ako efektívnu, lebo hodnota jej účelovej funkcie $h_0^*=1$:

	y	x_1	x_2
DMU_1	1	2	6
DMU_2	1	2	5

Je zrejmé, že DMU_1 spotrebováva väčšie množstvo vstupu x_2 na vyprodukovanie rovnakého množstva výstupu y ako DMU_2 a teda DMU_1 nie je efektívna. Avšak výsledkom CCR modelu pre túto jednotku sú hodnoty $h_1^*=1$, u=1, $v_1=1/2$, $v_2=0$. Problém je v podmienkach nezápornosti pre premenné U a V. Preto vzniká nový model, kde sa problematické podmienky nezápornosti nahrádzajú podmienkami U, V >0:

$$\max_{U_0,V_0} U_0^T Y_0 / V_0^T X_0$$

$$\text{za podmienok } U_0^T Y_j / V_0^T X_j \leq 1 \quad \text{pre } j=1,...,n \tag{7a}$$

$$U_0, V_0 > 0.$$

Za takýchto podmienok už DMU_1 nebude vyhodnotená ako efektívna.

V teórii sa však pracuje s pôvodným CCR modelom, pričom podmienka nezápornosti sa odstráni zavedením dostatočne malého nezáporného parametra ε, v literatúre nazývaného „non-Archimedean”. Vzniká matematicky korektný model:

CCR

$$\max_{U_0,V_0} U_0^T Y_0 / V_0^T X_0$$

za podmienok $U_0^T Y_j / V_0^T X_j \le 1$ pre $j=1,...,n$ (7b)

$U_0, V_0 \ge \varepsilon$.

2.2.2 Vstupne orientované CCR modely

Funkcia vzdialenosti bola definovaná pre množinu možných vstupov $L(Y_0)$, z tohto dôvodu sú modely (5) a (6) nazývané vstupne orientované. Spätnou úpravou modelu (7b) dostávame model označovaný $CCRI_D$ ([1]) alebo nazývaný aj problém multiplikátorov.

CCRI$_D$:

$$\max_{u_r, v_i} z_0 = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}$$

za podm. $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$ (6a)

$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0$ pre $j=1,...,n$

$u_r, v_i \ge \varepsilon$ pre $r=1,...,s$, $i=1,...m$.

K nemu duálny problém je $CCRI_P$ ([2]) resp. problém obálky.

CCRI$_P$:

$$\min_{\theta, \lambda_j, s_i^-, s_r^+} w_0 = \Theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$$

za podm. $0 = \Theta x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^-$ pre $i=1,...,m$ (5a)

$y_{r0} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+$ pre $r=1,...,s$

$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \ge 0 \quad \forall i,r,j$

$\varepsilon > 0$.

Optimálna hodnota Θ^* duálneho problému (5a) určuje mieru efektívnosti danej DMU. Každá DMU_j nadobúda optimálnu hodnotu Θ^*. Efektívne sú tie DMUs, pre ktoré má Θ^* hodnotu 1, zároveň s_i^- a s_r^+ sú nulové a teda ležia na hranici efektívnosti, tie s $\Theta^*<1$ sú neefektívne. Premenná Θ^* je proporcionálnou redukciou, ktorá sa aplikuje na všetky vstupy DMU_0, aby bola dosiahnutá efektívnosť. Výsledkom takéhoto typu redukcie je radiálny pohyb smerom k hranici efektívnosti. Pre každú neefektívnu DMU_k, (X_k,Y_k), existuje bod $(\hat{X}_k, \hat{Y}_k)$ ležiaci na hranici efektívnosti. Nie je ho možné dosiahnuť len proporcionálnou redukciou, ale je potrebné dodatočné zníženie jednotlivých vstupov pomocou premenných s_i^-, pričom takýto spôsob poklesu hladiny vstupov je charakteristický pre vstupne orientované modely. Bod $(\hat{X}_k, \hat{Y}_k)$ sa teda dá vyjadriť lineárnou kombináciou DMUs ležiacich na hranici, $\hat{X}_k=\sum\lambda_m^* X_m$, $\hat{Y}_k=\sum\lambda_m^* Y_m$, pričom $\lambda_m^* \geq 0$ $\forall m$, cez všetky efektívne body.

Dalo by sa povedať, že projekcia bodu (X_k,Y_k) na bod $(\hat{X}_k, \hat{Y}_k)$, môže byť prevedená v dvojkrokovom procese:

1. maximálna redukcia všetkých vstupov - Θ^*
2. posun smerom na hranicu efektívnosti - pomocou doplnkových premenných s_i^- a s_r^+ (CHARNES,COOPER,LEWIN a SEIFORD, 1994, str.32).

Pri riešení duálnej úlohy (6a) sú výsledkom optimalizácie multiplikátory u_r^* a v_i^*, pričom pre účelové funkcie platí : $w_0^*= z_0^*=1$ (SEIFORD, THRALL, 1990, S 11). Teória duality ponúka možnosť interpretácie a použitia multiplikátorov $u_r^*, v_i^* > 0$. Tieto multiplikátory by sa dali chápať ako tzv. tieňové ceny. Každému vstupu a výstupu sa teda priradí nejaká cena. Ak v primárnom modeli niektorá doplnková premenná s_i^- (s_r^+) nadobúda veľké hodnoty, z teórie duality vyplýva, že zodpovedajúce v_i^* (u_r^*) budú blízke nule. Ak by sa do teórie nezaviedlo ε, práve v prípade $s_i^- >> 0$ ($s_r^+ >> 0$) by v_i^* (u_r^*) boli nulové, t.j. model by týmto vstupom (výstupom) nepriraďoval žiadnu hodnotu. Znamenalo by to, že v tomto vstupe (výstupe) nie je ohodnocovaná DMU veľmi "dobrá" , teda je výhodné tento vstup (výstup) úplne zanedbať. Podobne to ukázal už spomínaný príklad CHARNESA, COOPERA a RHODESA(1979), kde sa vstupu x_2 priradila nulová cena.

Možnosť narábať priamo s viacvstupovou a viacvýstupovou množinou dát je jednou z hlavných výhod týchto DEA modelov. Ďalšou z výhod $CCRI_D$ a $CCRI_P$ modelov je ich jednoduchosť. Na rozdiel od CCR modelu (7b) (model zlomkového programovania) sú to modely lineárne.

2.2.3 Výstupne orientované CCR modely

Na doplnenie všetkých súvislostí medzi CCR mierou efektívnosti a Shephardovou funkciou je potrebné zúžitkovať informáciu o množine možných výstupov $P(X_0)$. Aj pre túto množinu Shephard definoval funkciu vzdialenosti

$h'(X_0,Y_0)=1/g'(X_0,Y_0)$,

kde $g'(X_0,Y_0)= \max \{g', g'Y_0 \in P(X_0), g' \geq 0\}$. Analogicky sa dá funkcia g' popísať pomocou (X_0,Y_0) nasledovne:

$$\max_{g',\lambda_j,k} g'$$

za podmienok $g' Y_0 \leq k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j$ (8)

$$X_0 \geq k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0 \text{ a } k>0.$$

Substitúciou $\nu_j = k\lambda_j$ sa (8) prevedie na model:

$$\max_{g',\mu_j} g'$$

za podmienok $g' Y_0 \leq \sum_{j=1}^{n} \nu_j Y_j$ (9)

$$\sum_{j=1}^{n} \nu_j X_j \leq X_0$$

$\nu_j \geq 0$ pre j=1,...,n.

Duálny problém má tvar:

$$\min_{U_0,V_0} V_0^T X_0$$

za podmienok $U_0^T Y_0 = 1$

$V_0^T X_j - U_0^T Y_j \leq 0$ pre j=1,...,n

(10)

$U_0, V_0 \geq 0$

a po malej úprave

$$\min_{U_0,V_0} V_0^T X_0 / U_0^T Y_0$$

za podmienok $V_0^T X_j / U_0^T Y_j \leq 1$ pre j=1,...,n (11)

$U_0, V_0 \geq 0$.

Zavedením „non-Archimedean”-skej podmienky a spätnou úpravou dostávame v literatúre známe výstupne orientované modely.

CCRO$_D$ ([3])

$$\min_{\nu,\mu} \; s_0 = \nu^T X_0$$

za podm. $\mu^T Y_0 = 1$ (10a)

$-\mu^T Y + \nu^T X \geq 0^T$

$\mu, \nu \geq \varepsilon$

$\varepsilon > 0$

CCRO$_P$ ([4])

$$\max_{\phi,\lambda,s+,s-} \; t_0 = \Phi + \varepsilon(\mathbf{1}^T s^+ + \mathbf{1}^T s^-) \quad (12)$$

za podm. $Y\lambda - \Phi Y_0 - s^+ = 0$

$X\lambda + s^- = X_0$

$\lambda, s^+, s^- \geq 0$

$\varepsilon > 0$,

kde μ a ν sú vektory multiplikátorov, $\mathbf{1}^T = (1,..,1)$, $\lambda = (\lambda_1,..,\lambda_n)^T$, $s^- = (s_1^-,..,s_i^-,..,s_m^-)^T$, $s^+ = (s_1^+,..,s_r^+,..,s_s^+)^T$.

Lineárny model (12) maximalizuje Φ na dosiahnutie proporcionálneho zvýšenia výstupov. Cieľom výstupne orientovaných modelov je maximalizovať produkciu výstupu tak, aby nebola prekročená daná úroveň vstupov.

Podobne ako pri vstupne orientovanom modeli platí vzťah primárnej a duálnej úlohy, ako aj podmienky efektívnosti pre uvažovanú DMU.

Korešpondencia medzi vstupne a výstupne orientovanými modelmi je popísaná SEIFORDOM a THRALLOM (1990,str.23):

<u>Veta:</u>

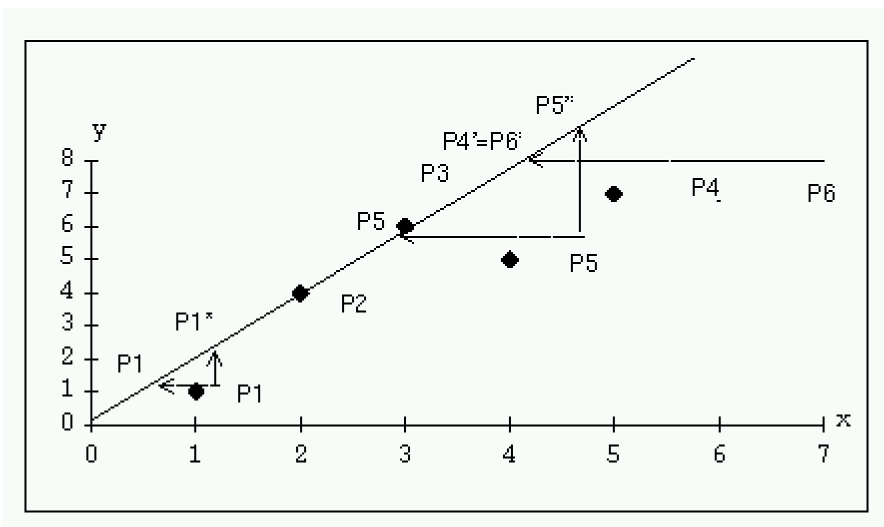
Nech (Θ^*, λ^*) je optimálne riešenie vstupne orientovaného primárneho CCR modelu - CCRIP. Potom $(\Theta, \lambda') = (1/\Theta^*, (1/\Theta^*)\lambda^*)$ je optimálne riešenie pre CCROP a zobrazenie $(\Theta,\lambda') \rightarrow (1/\Theta,(1/\Theta)\lambda)$ je L-1 korešpondencia medzi optimálnymi riešeniami oboch problémov.

Dôkaz je uvedený v spomínanom článku SEIFORDA a THRALLA(1990).

2.2.4 Grafické znázornenie CCR modelov

Bez ujmy na všeobecnosti teraz na jednoduchom príklade s jedným vstupom (x) a jedným výstupom (y) ilustrujem CCR modely.

Uvažuje sa 6 rozhodovacích jednotiek P1,P2,P3,P4,P5 a P6, ako sú zobrazené na Obrázku 3.



Obrázok 3

Na určenie miery efektívnosti som použila všetky 4 základné typy CCR modelov, pričom ich výsledky sú znázornené v Tabuľke 1 vstupne orientovaný model primárny a duálny a v Tabuľke 2 sú výsledky výstupne orientovaných modelov.

	primárny model (5a)									duálny model (6a)		
DMU	θ	s^-_i	s^+_r	$\lambda1$	$\lambda2$	$\lambda3$	$\lambda4$	$\lambda5$	$\lambda6$	z_0	v_i	u_r
1	0.5	0	0	0	0.25	0	0	0	0	0.500	1.000	0.500
2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1.000	0.500	0.250

3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1.000	0.333	0.167
4	0.7	0	0	0	1.75	0	0	0	0	0.700	0.200	0.100
5	0.625	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0.625	0.250	0.125
6	0.583	0	0	0	1.75	0	0	0	0	0.583	0.167	0.083

Tabuľka 1

	primárny model (12)									duálny model (10a)		
DMU	ϕ	s^-_i	s^+_r	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$	$\lambda 6$	s_0	ν_i	μ_r
1	2	0	0	0	0	0.33	0	0	0	2.000	2.000	1.000
2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1.000	0.500	0.250
3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1.000	0.330	0.167
4	1.429	0	0	0	2.5	0	0	0	0	1.429	0.286	0.143
5	1.6	0	0	0	2	0	0	0	0	1.600	0.400	0.200
6	1.714	0	0	0	3	0	0	0	0	1.714	0.285	0.143

Tabuľka 2

DMU číslo 2 (P2) a DMU 3 (P3) majú hodnoty účelových funkcii rovné jednej a teda sú efektívne. Cez ne prechádza hrubo vyznačená čiara na Obrázku 3 znázorňujúca hranicu efektívnosti pre vstupne aj výstupne orientované modely. Z Tabuliek 1 a 2 je zrejmé, že modely sa líšia v určení miery efektívnosti a aj v projekcii neefektívnych bodov na hranicu efektívnosti. Na Obrázku 3 body P1′,P4′,P5′ a P6′ zodpovedajú projekcii vo vstupne orientovanom modeli a P1″,P5″ určujú projekciu pri výstupnej orientácii (body P4″ a P6″ nie sú na obrázku, ale samozrejme existujú).