2.3 BCC MODELY

V teórii ekonómie môže mať produkčná funkcia vlastnosť konštantných alebo variabilných výnosov z rozsahu. DEA pracuje s oboma modelmi, pričom práve platnosť Axiómy 3 určuje, aká hranica efektívnosti bude výsledkom analýzy. Axióma „neohraničenosť lúča", inak nazývaná aj „konštantné výnosy z rozsahu", umožňuje určiť efektívnu DMU pri každom type výnosov z rozsahu (klesajúce, rastúce alebo konštantné). Teda ak DMU_k je efektívna v CCR modeli, je efektívna aj v ľubovolnom modeli s variabilnými výnosmi z rozsahu. Vynechaním Axiómy 3 z predpokladov sa dá odvodiť ďalšia veľká trieda modelov - BCC modely, odvodené BANKEROM, CHARNESOM a COOPEROM (1984). Nezohľadnením Axiómy 3 sa predpoklady oslabili, čo vedie k zvýšeniu počtu efektívnych DMU.

2.3.1 Shephardova funkcia vzdialenosti a BCC model

Za predpokladu, že množina A spĺňa len Axiómy 1, 2 a 4, charakterizujeme A ako „najmenšiu" množinu spĺňajúcu axiómy „konvexity" a „neefektívnosti" za podmienky, že každý pozorovaný vektor $(X_j, Y_j) \in A$. Analogicky sa dá usúdiť, že vektor (X_0, Y_0) patrí A vtedy a len vtedy, ak

$$X_0 \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \ , \ Y_0 \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \qquad (13)$$

pre ľubovoľné $\lambda_j \geq 0$,$j=1,...,n$, pre ktoré platí $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Pre takto definovanú množinu výrobných možností A je možné určiť Shepharovu funkciu vzdialenosti pre množinu vstupov $L(Y_0)$:

$g(X_0, Y_0) = 1/h(X_0, Y_0)$,

kde $h(X_0, Y_0) = \min\{h \mid hX_0 \in L(_0Y),\ h \geq 0\}$.

Teda máme minimalizačnú úlohu:

$$\min_{h,\lambda_j} h = h(X_0, Y_0)$$

$$\text{za podm. } hX_0 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \geq 0 \qquad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \geq Y_0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0 \ \text{ pre } j=1,...,n,$$

ak sa spoliehame na fakt, že $h \geq 0$. Táto nerovnosť je splnená, ak každá zložka X_j a Y_j je nenulová, čo však pri pozorovaných dátach platí.

Duálna úloha k tomuto problému lineárneho programovania má tvar:

$$\max_{u_r, v_i, u_0} \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} - u_0$$

$$\text{za podm. } \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0 \leq 0 \ \text{ pre } j=1,...,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1 \qquad (15)$$

$$u_r, v_i \geq 0 \text{ pre } \forall r, i$$

u_0 voľné.

Tento problém je ekvivalentný s problémom zlomkového programovania

$$\max_{u_r, v_i, u_0} \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} - u_0 \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}$$

$$\text{za podm. } \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - u_0 \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \qquad (16)$$

$$u_r, v_i \geq 0 \text{ pre } \forall r, i$$

u_0 voľné.

Pre matematicky korektnú úlohu sa znova podmienky nerovnosti $u_r, v_i \geq 0$ nahradia podmienkami $u_r, v_i \geq \varepsilon$. A teda, ako aj v minulej kapitole, sa dostávame k modelom:

BCCI$_D$ ([5])

$$\max_{u_r, v_i, u_0} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} - u_0$$

$$\text{za podm.} \quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0 \leq 0 \quad \text{pre } j=1,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1 \qquad (15a)$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \text{ pre } \forall r,i$$

a duálny problém

BCCI$_P$ ([6])

$$\min_{\theta, \lambda_j, s_i^-, s_r^+} \quad \Theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$$

$$\text{za podm.} \quad \Theta x_{i0} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^- = 0 \quad \text{pre } i=1,\dots,m \qquad (14a)$$

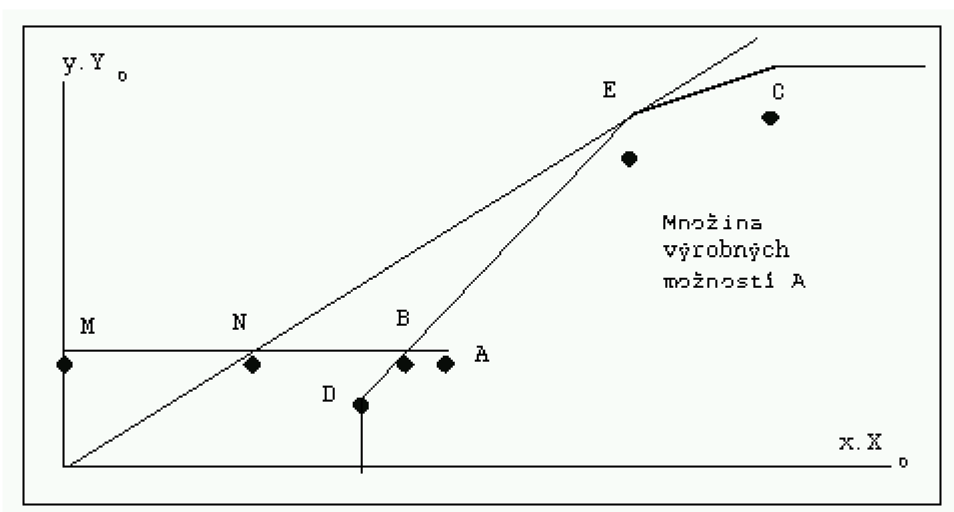
$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \text{ pre } r=1,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j,\ s_i^-, s_r^+ \geq 0 \quad \forall i,r,j$$

$$\varepsilon > 0.$$

BCC model ponúka možnosť zaujímavo interpretovať a použiť multiplikátory $u_r^*, v_i^* > 0$. Keďže BBC modely uvažujú variabilné výnosy z rozsahu a CCR modely len konštantné výnosy z rozsahu, je možné, že CCR model určí jednotku ako neefektívnu(dokonca s veľmi nízkou mierou efektívnosti) a v BCC bude táto jednotka efektívna. Pomocou multiplikátorov je možné odhaliť tzv. neefektívnosť z rozsahu. Pre ilustráciu uvádzam jednoduchý príklad spolu s Obrázkom 4 (BANKER,CHARNES a COOPER,1984,str.29 a 30). Uvažujme 5 DMUs, A, B, C, D a E, ktoré spotrebujú 1 vstup $x.X_0$ na výrobu jedného výstupu $y.Y_0$, t.j. $A=(x_A X_0, y_A Y_0), B=(x_B X_0, y_B Y_0), .., E=(x_E X_0, y_E Y_0)$. Nech A je ohodnocovaná jednotka a B je technicky efektívny referenčný bod s rovnakou hladinou výstupu. Bod E vykazuje technickú efektívnosť a aj efektívnosť z rozsahu. Potom podiel MB/MA = $y_A:x_A/y_B:x_B$ = x_B/x_A zodpovedá miere *(vstupnej) technickej efektívnosti*, podiel MN/MB = $y_B:x_B/y_N:x_A$ = $(x_E:x_B).(y_B:y_E)$ určuje mieru vstupnej efektívnosti z rozsahu a MN/MA = $y_A:x_A/y_N:x_A$ = $(x_E:x_A).(y_A:y_E)$ je miera technickej efektívnosti a efektívnosti z rozsahu. Vzťah MN/MA < MB/MA medzi týmito dvoma mierami platí aj pre všeobecnejší prípad viacvstupovej a viacvýstupovej situácie (BANKER, CHARNES a COOPER,1984).



Obrázok 4

Podobne ako bola zadefinovaná funkcia vzialenosti pre $L(Y_0)$, je možné odvodiť Shephardovu funkciu vzdialenosti pre množinu výstupov $P(X_0)$:

$$\max_{u_r,v_i,u_0} h'(X,Y)= \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} \;/\; \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} - v_0$$

$$\text{za podm. } \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \;/\; \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 1 \quad j=1,...,n \qquad (17)$$

$$u_r, v_i \ge 0 \; \forall i,r$$

$$v_0 \text{ voľné}$$

Pridaním ε ("non-Archimedean") a spätnou analogickou úpravou vznikajú modely

BCCO$_D$ (7)

$$\min_{\nu,\mu,v_0} s_0 = \nu^T X_0 - v_0$$

$$\text{za podm. } \mu^T Y_0=1, \qquad (18)$$

$$-\mu^T Y+\nu^T X - v_0 \mathbf{1}^T \ge 0^T,$$

$$\mu^T, \nu^T \ge \varepsilon \mathbf{1}^T,$$

$$\varepsilon > 0,$$

$$v_0 \text{ voľná},$$

BCCO$_P$ (8)

$$\max_{\phi,\lambda,s+,s-} t_0 = \Phi + \varepsilon(\mathbf{1}^T s^+ + \mathbf{1}^T s^-) \qquad (19)$$

$$\text{za podm. } Y\lambda - \Phi Y_0 - s^+=0,$$

$$X\lambda + s^- = X_0,$$

$$\mathbf{1}^T \lambda=1,$$

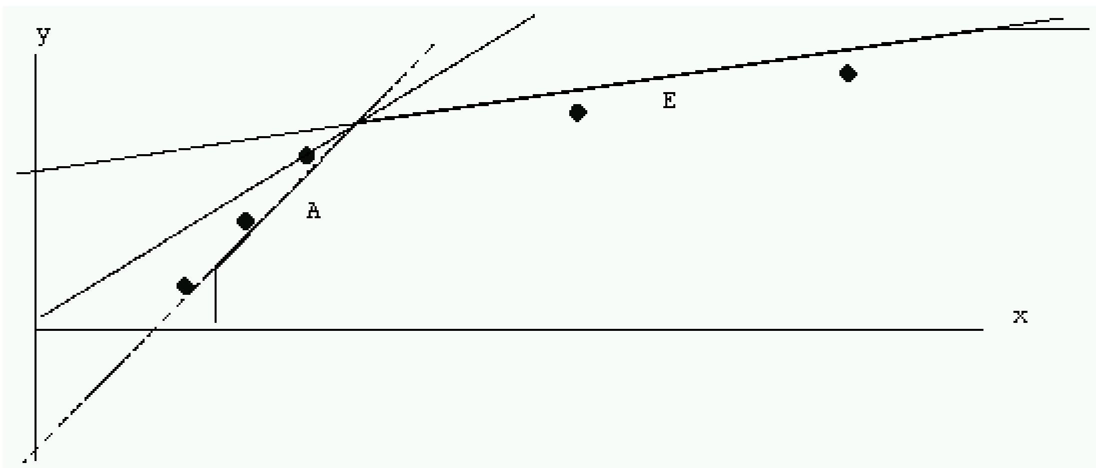
$$\lambda, s^+, s^- \ge 0$$

$$\varepsilon > 0.$$

Opačné znamienka u_0 a v_0 poukazujú na skutočnosť, že mieru efektívnosti je možné zmeniť buď zvýšením čitateľa alebo zmenšením menovateľa.

2.3.2
Grafické znázornenie BCC modelov

Na ilustráciu teoretického základu BCC modelov uvádzam príklad z odseku 2.2.3, ktorý uvažuje 6 rozhodovacích jednotiek P1,P2,P3,P4,P5 a P6. Na Obrázku 5 je hrubo vyznačená zmenená hranica efektívnosti.



Obrázok 5

Počet efektívnych jednotiek sa zvýšil, pribudli P1 a P4. Výsledky duálnych a primárnych modelov vstupne resp. výstupne orientovaných sú uvedené v Tabuľke 3 resp.4.

	primárny model (14a)									duálny model (15a)			
DMU	θ	s^-_i	s^+_r	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$	$\lambda 6$	z_0	v_i	u_r	u_0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1.000	1.000	0.333	-0.667
2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1.000	0.500	0.250	0.000
3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1.000	0.334	0.166	0.000
4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1.000	0.200	0.400	1.800
5	0.625	0	0	0	0.5	0.5	0	0	0	0.625	0.250	0.125	0.000
6	0.833	0	0	0	0	0	1	0	0	0.833	0.167	0.330	1.500

Tabuľka 3

	primárny model (19)									duálny model (18)			
DMU	ϕ	s^-_i	s^+_r	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$	$\lambda 4$	$\lambda 5$	$\lambda 6$	s_0	ν_i	μ_r	v_0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1.000	1.000	3.000	2.000
2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1.000	0.500	0.250	0.000
3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1.000	0.083	0.167	-0.750
4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1.000	0.071	0.143	-0.643
5	1.3	0	0	0	0	0.5	0.5	0	0	1.300	0.100	0.200	-0.900
6	1.001	1	0	0	0	0	1	0	0	1.001	0.001	0.143	-0.990

Tabuľka 4

Zatiaľ čo tvar hranice je pre vstupne a výstupne orientované modely rovnaký, neefektívne DMUs sa projektujú na rôzne body(Obrázok 6). DMU 5 je v BCC vstupne orientovanom modeli projektovaná na bod (2.5,5) a vo výstupne orientovanom modeli na (4,6.5). Bod P6 sa projektuje v oboch prípadoch do P4. Čiže boby P5’ a P6’ sú projekciami vo vstupnej orientácii a body P5” a P6” zodpovedajú projekcii vo výstupnej orientácii.

2.3.3 Výnosy z rozsahu

Ako už bolo spomenuté, DEA modely sa líšia nielen svojou orientáciou, ale aj tvarom hranice efektívnosti. Táto hranica môže mať vlastnosť rastúcich, konštantných alebo klesajúcich výnosov z rozsahu. Za účelom určiť aké podmienky na premenné u_0 a λ_j zodpovedajú jednotlivým typom výnosov, definujeme podľa BANKERA, CHARNESA a COOPERA (1984) opornú nadrovinu pre množinu výrobných možností A, s premennými y_r a x_i rovnicou

$$\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_i^* x_i - u_0^* = 0 \tag{20}$$

kde u_r^*, v_i^* a u_0^* sú optimálne hodnoty úlohy lineárneho programovania (15a).

Je potrebné pripomenúť, že táto nadrovina je opornou len za podmienky, že všetky body (X_j, Y_j) ležia na alebo pod nadrovinou a zároveň aspoň jeden z nich leží na nej. Matematicky je možné tieto podmienky zapísať

$$\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_i^* x_i - u_0^* \leq 0 \quad \text{pre } j=1,...,n. \tag{21}$$

Teda pre ľubovoľné $\lambda_j \geq 0$, s podmienkou $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ máme:

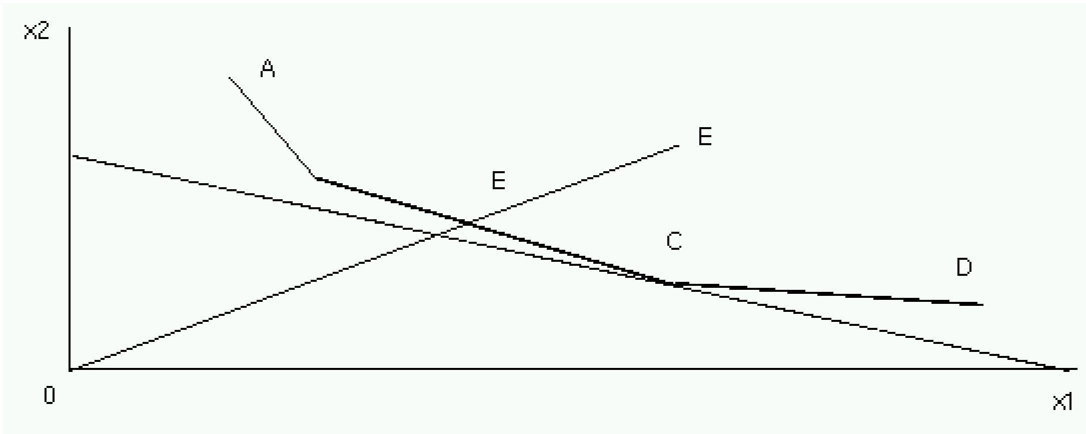
$$\sum_{r=1}^{s} u_r^* \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - \sum_{i=1}^{m} v_i^* \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - u_0^* \leq 0. \tag{22}$$

Pomocou vzťahov (13) môžeme vyjadriť každý bod $(X_0, Y_0) \in A$ ako $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j\right)$, kde $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0 \ \forall j$.

Teda platí

$$(X_0, Y_0) \in A \Rightarrow \sum_{r=1}^{s} u_r^* y_r - \sum_{i=1}^{m} v_i^* x_i - u_0^* \leq 0 \tag{23}$$

Uvažujme bod E so súradnicami (X_E, Y_E), ležiaci na hranici efektívnosti, ako je zobrazené na Obrázku 6.



Obrázok 6

Ak bod (X_E,Y_E) je efektívny, platia rovnosti

$$U^{*T}Y_E - u_0^* / V^{*T}X_E = 1 \quad \text{alebo} \quad U^{*T}Y_E - V^{*T}X_E - u_0^* = 0. \qquad (24)$$

Zo vzťahov (23) a (24) vyplýva, že $U^{*T}Y - V^{*T}X - u_0^* = 0$ je oporná nadrovina pre A v bode (X_E,Y_E).

Uvažujeme bod (X_D,Y_D) blízky (X_E,Y_E). Tento bod bude ležať v množine výrobných možností vtedy a len vtedy, ak $U^{*T}Y_D - V^{*T}X_D - u_0^* \le 0$, za predpokladu jednoznačnosti nadroviny, t.j. ak U^*, V^* a u_0^* sú optimálne hodnoty zodpovedajúceho problému lineárneho programovania.

Pomocou bodu $Z_\delta \equiv [(1+\delta)X_E,(1+\delta)Y_E]$, ktorý leží v blízkosti (X_E,Y_E) pre dostatočne malé δ, je možné zistiť, aký typ výnosov z rozsahu je prítomný. Podľa BANKERA, CHARNESA a COOPERA (1984) sa výnosy z rozsahu rozlišujú nasledovne:

(25a) rastúce $\Leftrightarrow$ ak $\exists \delta^* > 0$ také, že

I. $Z_\delta \in A$ pre $\delta^* > \delta \ge 0$ a

II. $Z_\delta \notin A$ pre $-\delta^* < \delta < 0$

(25b) konštantné $\Leftrightarrow$ ak $\exists \delta^* > 0$ také, že

I. $Z_\delta \in A$ pre $\forall \delta$ také, že $\delta^* > \delta \geq 0$ a

II. $Z_\delta \in A$ pre $\forall \delta$ také, že $-\delta^* < \delta < 0$

(25c) klesajúce $\Leftrightarrow$ ak $\exists \delta^* > 0$ také, že

I. $Z_\delta \notin A$ pre $\delta^* > \delta > 0$ a

II. $Z_\delta \in A$ pre $-\delta^* < \delta \leq 0$.

Aby $Z_\delta \in A$, zo vzťahu (23) vyplýva:

$$U^{*T}(1+\delta)Y_E - V^{*T}(1+\delta)X_E - (1+\delta)u_0 = U^{*T}(1+\delta)Y_E - V^{*T}(1+\delta)X_E - u_0^* =$$

$$(1+\delta)(U^{*T}Y_E - V^{*T}X_E - u_0^*) + \delta u_0^* \leq 0. \qquad (26)$$

Keďže E je efektívny bod, platí nerovnosť (24), a teda

$$\delta u_0^* \leq 0 ,$$

z čoho vyplýva, že $Z_\delta \in A \Leftrightarrow$ ak $\delta u_0^* \leq 0$, pričom sa zameriavame na prípad jednoznačnej opornej nadroviny v E polyedrickej množiny A. Ak chceme, aby jednoznačná oporná nadrovina prechádzala bodom (X_E, Y_E), podľa vzťahov (25a,b,c) musí pre u_0^* platiť:

(27a) rastúce výnosy z rozsahu $\Leftrightarrow u_0^* < 0$

(27b) konštantné výnosy z rozsahu $\Leftrightarrow u_0^* = 0$

(27c) klesajúce výnosy z rozsahu $\Leftrightarrow u_0^* > 0$.

Pre modely (15),(15a) a (16) znamienko u_0^* rozhoduje o výnosoch z rozsahu, napr. pridaním podmienky $u_0^* > 0$ sa zaručuje pre empirickú produkčnú funkciu, a teda aj pre hranicu efektívnosti, vlastnosť klesajúcich výnosov z rozsahu.

Na Obrázku 6 nadrovina prechádzajúca bodom A má rastúce výnosy z rozsahu a preto $u_0^* < 0$.

Všeobecne pre variabilné výnosy z rozsahu sa na u_0^* nekladú žiadne podmienky, t.j. u_0^* je voľné. Tejto podmienke v primárnych modeloch (15),(15a),(16) zodpovedá podmienka $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$ v modeloch duálnych (14) a (14a). Samozrejme je možné aj v duálnych modeloch zaručiť rastúce, konštantné alebo klesajúce výnosy z rozsahu, a to nasledovnými ohraničeniami (SEIFORD a THRALL, 1990):

(28a) rastúce $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\lambda_j < 1$

(28b) konštantné $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$ nemá podmienku

(28c) klesajúce $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\lambda_j > 1$.

Je teda zrejmé, že CCR modely zodpovedajú konštantným výnosom z rozsahu, pretože pre ne platia podmienky (25b), (27b) a (28b). Na druhej strane BCC modely uvažujú variabilné výnosy z rozsahu.