2.4 Aditívny a multiplikatívny model

Z kapitoly 2.3.2 je zrejmé, že hranica efektívnosti sa skladá z častí oporných nadrovín definovaných rovnicou

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} - u_0^* = 0 \text{ pre nejaké k.} \tag{29}$$

Každá efektívna DMU spĺňa rovnicu (20) a pre každý bod

$$(X_j, Y_j) \in A \text{ platí } \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0^* \leq 0. \tag{30}$$

Ak sa požaduje, aby pri nejakých multiplikátoroch bola DMU_j efektívna a všetky ostatné DMUs ležali "na" alebo "pod" hranicou efektívnosti, vzniká nový model nazývaný aditívny

ADD_P:

$$\max_{u_r, v_i, u_0} m_0 = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} - u_0$$

$$\text{za podm. } \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0^* \leq 0 \quad \text{pre } j=1,..,n \tag{31}$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \qquad \text{pre } r=1,..,s,\ i=1,..,m.$$

$$u_0 \text{ voľné}$$

$\varepsilon > 0$ ("non-Archimedean").

Účelová funkcia meria vzdialenosť DMU_0 od nadroviny. DMU je efektívna, ak hodnota účelovej funkcie je rovná 0, pretože práve maximalizáciou účelovej funkcie sa vyberá taká nadrovina, ktorá minimalizuje vzdialenosť analyzovanej DMU od tejto nadroviny a teda je "najbližšie" k efektívnej hranici. Ak je hodnota účelovej funkcie menšia ako 0, DMU_0 je neefektívna a leží "pod" hranicou efektívnosti.

Duálny model pridaním zodpovedajúcich premenných λ_j, s_i^-, s_r^+ nadobúda tvar:

ADD_D

$$\min_{\lambda, s^+, s^-} \quad n_0 = -\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \qquad (32)$$

$$\text{za podm.} \quad \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \qquad \text{pre } r=1,...,s$$

$$-\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^- = -x_{i0} \qquad \text{pre } i=1,...,m$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = -1$$

$$\lambda_j,\ s_i^-, s_r^+ \geq 0 \quad \forall i,r,j$$

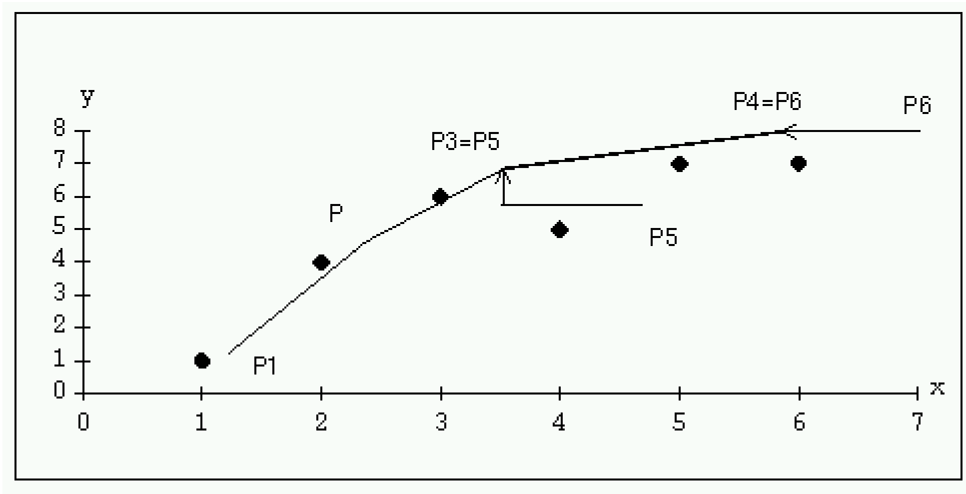
Aditívny model zodpovedá variabilným výnosom z rozsahu a je to model bez orientácie.

Ako pracuje aditívny model názorne ukážem na príklade z odseku 2.2.4, ktorý uvažuje 6 DMUs P1,P2,P3,P4,P5 a P6. Výsledky primárneho a duálneho aditívneho modelu sú uvedené v Tabuľke 5.

	primárny model (31)									duálny model (32)			
DMU	m_0	s^-_i	s^+_r	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6	n_0	v_i	u_r	u_0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3.000	1.000	-2.000
2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3.000	1.000	0.000
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1.000	2.000	9.000
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1.000	2.000	9.000
5	-2	0	0	0	0	1	0	0	0	-2	1.000	1.000	3.000
6	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	1.000	2.000	9.000

Tabuľka 5

Keďže jednotky 1-4 majú hodnotu účelovej funkcie rovnú 0, sú efektívne. Sú to tie isté jednotky, ktoré boli efektívne v BCC modeloch, a teda tieto dva modely majú rovnakú hranicu efektívnosti. Rozdiel je len v projekcii. Táto situácia je zobrazená na Obrázku 7.



Obrázok 7

Doposiaľ som rozoberala DEA modely, ktorých výsledkom je po častiach lineárna hranica efektívnosti. Vo všeobecnosti však produkčná funkcia nemá lineárny tvar a práve tento dôvod podnietil vývin multiplikatívnych modelov. Hranica efektívnosti týchto modelov je po častiach log-lineárna alebo po častiach Cobb-Douglasova.

Všetky interpretácie jednotlivých premenných platia aj pre tieto modely (CHARNES,COOPER, SEIFORD a STUTZ,1983), jediná zmena je v priestore $(X,Y) \rightarrow (LogX, LogY)$. Modely s po častiach nelineárnymi typmi obálok majú tvar:

MULT$_P$

$$\min_{\lambda,s^+,s^-} z_0 = -(\mathbf{1}^T s^+ + \mathbf{1}^T s^-)$$

$$\begin{aligned} \text{za podm. } & \log(Y)^T\lambda - s^+ = \log(Y_0)^T, \\ & \log(X)^T\lambda + s^- = \log(X_0)^T, \\ & \mathbf{1}^T\lambda = 1, \\ & \lambda, s^+, s^- \geq 0 \end{aligned} \tag{33}$$

MULT$_D$

$$\max_{u,v,u_0} m_0 = u^T \log(Y_0)^T - v^T \log(X_0)^T - u_0$$

za podm. $u^T \log(Y)^T - v^T \log(X)^T - u_0 \leq 0,$ (34)

$u, v \geq \mathbf{1}^T,$

u_0 voľné.