4.VEA

Pôvodná DEA je "hodnotovo voľná" (value-free), t.j. určovanie efektivity je založené len na pozorovaných dátach bez ohľadu na preferencie rozhodovateľa (Decision maker). Jednou z metód zahrňujúcich preferencie do analýzy efektívnosti je práve VEA vyvinutá HALMEM, JOROM, KORHONENOM, SALOM a WALLENIUSOM (1997). Cieľom rozhodovateľa je nájsť najvýhodnejšiu kombináciu vstupov a výstupov, pričom takáto DMU (skutočná alebo virtuálna) maximalizuje jeho "hodnotovú" funkciu - vo všeobecnosti neznáma. DMUs spĺňajúce túto podmienku sa nazývajú "najviac preferované jednotky" (NPJ-y). Ak sa predpokladá, že rozhodovateľ by chcel produkovať čo najviac výstupov pri minimálnom množstve vstupov, NPJ musí ležať na hranici efektívnosti.

Na určenie najviac preferovanej jednotky existuje veľa možností. Dá sa napríklad použiť metóda lineárneho programovania s viacerými účelovými funkciami, avšak popis rôznych spôsobov hľadania NPJ presahuje rámec mojej diplomovej práce.

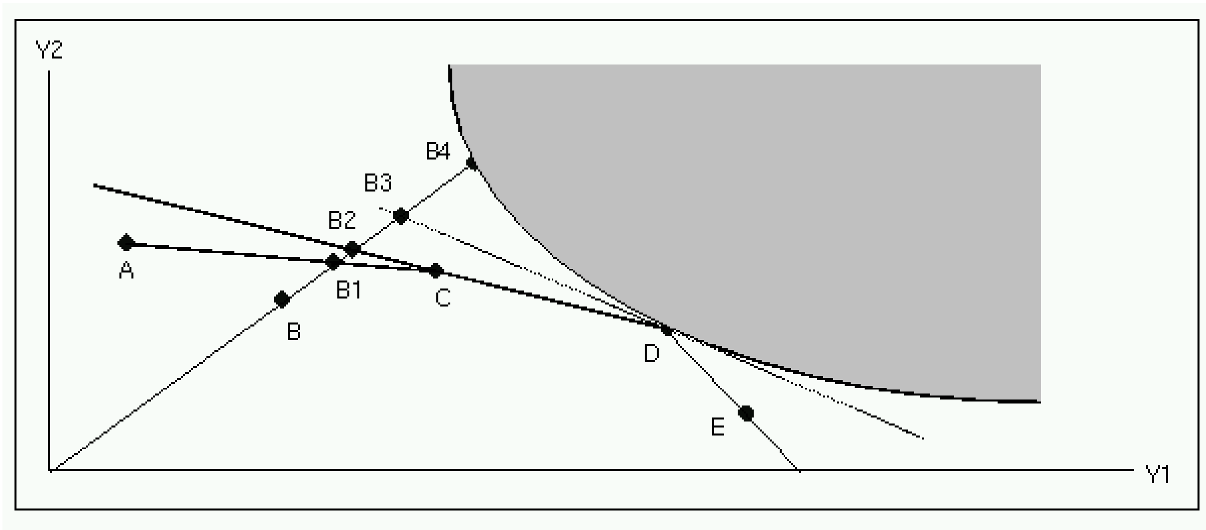
4.1 Hodnotová funkcia a jej aproximácia

Cieľom VEA je výpočet "hodnotovej" efektívnosti každej jednotky vzhľadom na krivku indiferentnosti hodnotovej funkcie $v(U_0)$, $U_0=[Y_0,-X_0]^T \in R^{s \times m}$, ktorá prechádza NPJ. V praxi však hodnotová funkcia nie je známa a preto nie je možné presne charakterizovať ani krivky indiferentnosti. Podľa KORHONENA, SILJAMÄKIHO a SOISMAAOVEJ (1998) sa predpokladá, že funkcia $v(U_0)$ je pseudokonkávna, striktne rastúca v Y_0 a striktne klesajúca v X_0, pričom dosahuje svoje maximum v NPJ $U_0^*=(Y_0^*,-X_0^*)^T$.

Hľadá sa oblasť obsahujúca všetky vektory $U_0 \in R^{s \times m}$, ktoré sú „preferované menej alebo rovnako” (KORHONEN et.al., 1998, str.5) ako najviac preferované riešenie. Vlastnosť pseudokonkavity hodnotovej funkcie umožňuje charakterizovať túto oblasť použitím všetkých dotykových nadrovín, ako bolo ukázané v článku HALME et.al. (1997). Nová hranica efektívnosti teda vzniká z častí týchto nadrovín. Vzhľadom na takto definovanú efektívnu hranicu je možné, pomocou klasických DEA metód, vypočítať mieru hodnotovej efektívnosti. Takouto aproximáciou indiferenčných kriviek hodnotovej funkcie sa zaručuje, že výsledná miera hodnotovej efektívnosti bude „vždy optimistickou aproximáciou skutočnej miery” (KORHONEN et.al., 1998, str.5) vzhľadom na hodnotovú funkciu.

Rada by som túto teóriu vysvetlila na obrázku, prevzatom z práce KORHONENA, SILJAMÄKIHO a SOISMAAOVEJ (1998, str.6). Päť rozhodovacích jednotiek (A,B,C,D,E) produkuje dva výstupy (y1,y2) a spotrebuje na to rovnaké množstvo jedného vstupu (x). Na Obrázku 13 čiara spájajúca body A,C,D a E znázorňuje hranicu efektívnosti v DEA a teda DMUs na nej ležiace sú efektívne. Rozhodovateľ určil ako NPJ D. Krivka z “dola” ohraničujúca šedo sfarbenú oblasť je krivka indiferentnosti hodnotovej funkcie prechádzajúca najviac preferovanou jednotkou a prerušovaná čiara je jej dotyčnicou. Hrubo zvýraznené polpriamky určujú možné aproximácie - dotykové nadroviny. Okrem DMU D budú teda hodnotovo efektívne aj jednotky C a E.

Zlomok $0B/0B^1$ udáva *technickú efektívnosť* v DEA. Mieru hodnotovej efektívnosti by určoval zlomok $0B/0B^4$, ale keďže $v(U_0)$ je neznáma, aproximuje sa dotyčnicou. Ako odhad miery hodnotovej efektívnosti je teda možné použiť zlomok $0B/0B^3$. Táto aproximácia však z dôvodu neznámej hodnotovej funkcie nie je možná, a preto uvažujeme všetky dotykové nadroviny indiferenčnej krivky (v príklade sú to polpriamky CD a DE). Vo VEA je *hodnotová miera efektívnosti* určená zlomkom $0B/0B^2$.



Obrázok 13

Hodnotová miera efektívnosti je potom vypočítaná pre každú DMU porovnaním hodnotovo neefektívnych jednotiek (A,B) s jednotkami majúcimi rovnakú hodnotu ako NPJ (C,D,E).

4.2 VEA modely

Na zjednodušenie formulácie základných DEA modelov nasledujúc KORHONENA et.al (1998) zavediem všeobecný model GEN, ktorý zahŕňa CCR a BCC modely ako svoje špeciálne príklady. Za týmto účelom je však potrebné zadefinovať všeobecnú množinu výrobných možností

$T=\{U_0 \mid U_0 \in U\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$, kde $U_0=(Y_0,-X_0)^T$, $U=[Y,-X]$ a $\Lambda=\{\lambda \mid \lambda \in R^n_+$ a $A\lambda \leq b\}$. $A \in R^{k\times n}$ a $b \in R^k$ sa používajú na charakterizovanie možných hodnôt λ a $=(1,..,1)$ budem označovať vektor jednotiek.

A teraz už spomínaný model:

GEN_P

$$\max_{\sigma,\lambda,s+,s-} Z=\sigma+\varepsilon(\mathbf{1}^T s^+ + \mathbf{1}^T s^-)$$

za podm. $Y\lambda-\sigma w^y-s^+ = g^y,$

$X\lambda+\sigma w^x+s^- = g^x,$

$s^-,s^+ \geq 0,$

$\lambda \in \Lambda,$

$\varepsilon > 0$ ("non-Archimedean"),

GEN_D

$$\min_{\nu,\mu,\xi} W=\nu^T g^x - \mu^T g^y + \xi^T b$$

za podm. $-\mu^T Y + \nu^T X + \xi^T A \geq 0,$

$\mu^T w^y + \nu^T g^x = 1,$

$\mu,\nu \geq \varepsilon 1,$

$\xi \geq 0$'

$\varepsilon > 0$ ("non-Archimedean").

Pre jednotlivé primárne modely platí:

	w^x	g^x	w^y	g^y	Λ
$CCRO_P$	0	X_0	Y_0	0	R^n_+
$CCRI_P$	X_0	0	0	Y_0	R^n_+
$BCCO_P$	0	X_0	Y_0	0	$\{\lambda \mid \lambda \in R^n_+$ a $\mathbf{1}^T\lambda=1\}$
$BCCI_P$	X_0	0	0	Y_0	$\{\lambda \mid \lambda \in R^n_+$ a $\mathbf{1}^T\lambda=1\}$.

Existujú ešte dva typy modelov, tzv. kombinované modely (JORO et.al.,1998), ktoré som v kapitole 2 neuviedla. Sú to modely líšiace sa od už známych orientovaných modelov tým, že zároveň proporcionálne zmenšujú vstupy a zároveň aj proporcionálne zmenšujú výstupy alebo proporcionálne zvýšia výstupy aj vstupy.

Takéto modely majú vo VEA využitie pretože vyberú, či je na priblíženie sa NPJ výhodnejšie redukovať vstupy alebo zvýšiť výstupy. Pre tieto modely platí:

	w^x	g^x	w^y	g^y	Λ
$CCRK_P$	X_0	X_0	Y_0	Y_0	R_+^n
$BCCK_P$	X_0	X_0	Y_0	Y_0	$\{\lambda \mid \lambda \in R_+^n \text{ a } \mathbf{1}^T\lambda=1\}$.

Uvažujme DMUk s $G_k=[g^y,-g^x]^T \in T$, kde $g^y = Y_k$ je vektor výstupov a $g^x = X_k$ je vektor vstupov. Alternatívny VEA model k modelu GEN_P určujúci mieru hodnotovej efektívnosti má tvar:

V-GEN$_P$

$$\max_{\sigma,\lambda,s+,s-} Z=\sigma+\varepsilon(\mathbf{1}^T s^+ + \mathbf{1}^T s^-)$$

za podm. $Y\lambda-\sigma w^y - s^+ = g^y$,

$X\lambda+\sigma w^x + s^- = g^x$,

$s^-, s^+ \geq 0$,

$A\lambda+\mu = b$,

$\varepsilon > 0$ (“non-Archimedean”),

$\lambda_j \geq 0$, ak $\lambda_j^* = 0$ pre $j=1,...,n$,

$\mu_j \geq 0$, ak $\mu_j^* = 0$ pre $j=1,...,k$,

kde λ^* a μ^* zodpovedajú NPJ

$$Y_0^* = Y\lambda^*,\ X_0^* = X\lambda^*.$$

Považujem za potrebné podrobnejšie vysvetliť podmienky $\lambda_j \geq 0$, ak $\lambda_j^* = 0$ pre $j=1,...,n$ a to na príklade 10. Jednotka D zodpovedá NPJ a preto riešením sústavy rovníc $Y_0^* = Y\lambda^*$, $X_0^* = X\lambda^*$ sú $\lambda_A=0$, $\lambda_B=0$, $\lambda_C=0$, $\lambda_D=1$, $\lambda_E=0$. Teda ak $\lambda_D=1$ a ostatné $\lambda_p=0$ pre

$p=A,B,C,D \Rightarrow$ zodpovedajúce podmienky v modeli V-GENP budú $\lambda_A \geq 0$, $\lambda_B \geq 0$, $\lambda_C \geq 0$, $\lambda_E \geq 0$, λ_D bude voľné.

Je nutné poznamenať, že model sa odlišuje od DEA GENP modelu len v podmienkach na λ. Voľné budú tie λ_j, ktoré zodpovedajú NPJ resp., ak je NPJ virtuálna, zodpovedajú jednotkám, ktorých je NPJ lineárnou kombináciou.
Napríklad pre $CCRO_P$ model by VEA úloha mala tvar:

V-CCRO$_P$

$$\max_{\sigma,\lambda,s+,s-} Z=\sigma+\varepsilon(\mathbf{1}^T s^+ + \mathbf{1}^T s^-)$$

za podm. $Y\lambda-\sigma w^y-s^+ = g^y$,

$X\lambda+\sigma w^x+s^- = g^x$,

$s^-, s^+ \geq 0$,

$\varepsilon > 0$ ("non-Archimedean"),

$\lambda_j \geq 0$, ak $\lambda_j^* = 0$ pre $j=1,...,n$.

4.3 VEA v praxi

Na praktickú analýzu hodnotovej efektívnosti som si vybrala výstupne orientovaný model s variabilnými výnosmi z rozsahu. Výber NPJ bol podmienený efektívnosťou tejto jednotky v modeloch s variabilnými výnosmi z rozsahu. Rozhodla som sa ako svoj najviac preferovaný bod vziať lineárnu kombináciu dvoch rozhodovacích jednotiek, ktoré boli efektívne aj v CCR modeloch. Aby bolo možné považovať takúto kombináciu za najviac preferovanú jednotku musí byť efektívna. Je teda potrebné overiť, či banky s číslami 10 a 23 ležia na jednej opornej nadrovine. Za týmto účelom som vytvorila novú DMU ako lineárnu kombináciu DMU_{10} a DMU_{23}, $\lambda_{10}=0,5$ a $\lambda_{23}=0,5$. Tento som pridala k ostatným dátam a určila mieru efektívnosti tejto jednotky pomocou $CCRI_P$ modelu (výber modelu bol vhodný, pretože obe-DMU_{10} aj DMU_{23} sú efektívne aj pri konštantných výnosoch z rozsahu).

Model vyhodnotil jednotku ako efektívnu, teda možno usúdiť, že banky 10 a 23 ležia na jednej nadrovine.

Model, ktorý určí mieru hodnotovej efektívnosti, ak NPJ je lineárnou kombináciou DMU_{10} a DMU_{23}, má tvar:

V-BCCI$_P$

$$\max_{\sigma,\lambda,s+,s-} Z=\sigma+\varepsilon(\mathbf{1}^T s^+ + \mathbf{1}^T s^-)$$

za podm. $Y\lambda - s^+ = \sigma Y_0$,

$X\lambda + s^- = X_0$,

$s^-, s^+ \geq 0$,

$\varepsilon = 10^{-6}$ ("non-Archimedean"),

$\mathbf{1}^T\lambda = 1$

$\lambda_k \geq 0$, pre k=1,..9 a 11,..,22,

λ_{10} a λ_{23} sú voľné.

Model v takomto znení žiaľ software Mathematica nedokáže vyriešiť. Nepripúšťa žiadne z premenných ako záporné čísla. Túto prekážku som odstránila zavedením substitúcie, kde som λ_{10} nahradila rozdielom b-c a λ_{23} d–e, pričom b, c, d a e ≥ 0. Týmto spôsobom sa docieli možnosť záporných hodnôt pre λ_{10} a λ_{23}. Po spustení Modelu č.1 v prílohe som sa však nedopracovala k žiadnym výsledkom, pretože software nedokázal takto zadanú úlohu vyriešiť.

Z teórie VEA vyplýva, že všetky jednotky, ktoré boli neefektívne v BCC modeloch, budú určite neefektívne aj v BCC modeloch určujúcich hodnotovú mieru efektívnosti, t.j. ich lambdy budú nulové. Na základe tejto skutočnosti som podmienky $\lambda_k \geq 0$ pre k=1,..9 a 11,..,22 zamenila za podmienky $\lambda_k \geq 0$ pre k=1,2,3,4,16,18,19,21,22 a $\lambda_z = 0$ pre z=5,6,7,8,9, 11,12,13,14,15,17,20. Tento Model je uvedený v prílohe pod číslom 2. Niektorým z bánk už boli priradené miery hodnotovej efektívnosti, avšak údaje pre mnohé banky ešte chýbali.

Bolo potrebné sa pozrieť na jednotky, ktoré boli v BCC modeloch efektívne a či niektoré z nich Model č.2 neoznačil ako neefektívne. Takýmto prípadom boli DMU_3 a DMU_{21}, t.j. λ_3 a λ_{21} budú nulové. Ďalej som sa pokúsila aplikovať V-BCC model na dva prípady, a to ak NPJ je len jedna DMU. Najprv som vyskúšala vypočítať miery hodnotovej efektívnosti, ak NPJ bola DMU_{10} (Model č.8 v prílohe). Ako neefektívne Model určil DMUs s číslami 7,9,21 a ako efektívne 1,2,3,22 a 23. Pre ostatné rozhodovacie jednotky nevedel model určiť riešenie. Pre NPJ 23 (Model č.9 v prílohe) bolo neefektívnych oveľa viac jednotiek :1,3,4,5,7,8,15,17 a efektívne boli 16,18,21 a 22.

Teda tie DMUs, ktoré buď pre NPJ 10 alebo 23 vyšli ako neefektívne, určite neležia na rovnakej nadrovine ako tieto dve rozhodovacie jednotky. Z tohoto dôvodu som pridala ďalšie ohraničenia $\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$ a $\lambda_{21} = 0$ (Model č.3 v prílohe). Riešením takéhoto modelu sa rozšíril počet bánk, pre ktoré boli známe miery hodnotovej efektívnosti, ale ešte stále chýbali riešenia pre DMU_1, DMU_2, DMU_4, DMU_5, DMU_6, DMU_{15}, DMU_{16}, DMU_{18} a DMU_{19}. Na základe už známych výsledkov som usúdila, že banky 16 a 19 určite budú efektívne, pretože niektoré z bánk sa práve s týmito DMUs porovnávali. Napr. Projekcia banky číslo 9 na hranicu efektívnosti vznikla kombináciou $\lambda_{10}, \lambda_{16}, \lambda_{19}$ a λ_{23} ($\lambda_{10} = -0,14, \lambda_{16} = 2,04, \lambda_{19} = 12,69$ a $\lambda_{23} = -13,58$).

V tomto momente chýbali ešte výsledky pre sedem bánk, a teda mi nezostávalo nič iné, len postupne pridávať ďalšie podmienky. Najprv som skúsila pridať $\lambda_{18} = 0$ (Model č.4, príloha), potom som ju vymenila za podmienku $\lambda_2 = 0$ (Model č.5, príloha), ďalej som postavila $\lambda_2 = 0, \lambda_{16} = 0$ a $\lambda_{18} = 0$ (Model č.6 v prílohe), až nakoniec všetky λ_w $w \neq 10$ a 23 boli rovné nule (Model č.7 v prílohe).

Postupným sprísňovaním ohraničení vznikla zaujímavá situácia. Pre mnohé DMUs vychádzalo viacero rôznych mier hodnotovej efektívnosti. Keďže som nemohla použiť VEA model v originálnom tvare, nemôžem taktiež vyhlásiť, ktorá z mier je tá správna, preto uvádzam tie, ktoré určili hore spomínané modely.

Zhrnutie výsledkov všetkých modelov je uvedené v Tabuľke 11 v prílohe. Prvý stĺpec zodpovedá číslu ohodnocovanej banky. V druhom stĺpci je uvedená miera hodnotovej efektívnosti. Bod $(x1_i^*, x2_i^*, y1_i^*, y2_i^*)$ pre i=1,..,23 je projekcia i-tej DMU na hranicu efektívnosti, pričom tento bod vzniká lineárnou kombináciou λ_{10}, λ_{16}, λ_{19}, λ_{22} a λ_{23}.

Na ilustráciu hodnotovej analýzy som si vybrala banku číslo 5 (Tabuľka 11). Pre túto banku existujú 3 možnosti, ako sa stať rovnako hodnotovo efektívnou ako NPJ (lineárna kombinácia bánk 10 a 23).

Prvou z mier hodnotovej efektívnosti je 2,32, t.j. všetky výstupy je potrebné vynásobiť číslom 2,32. V tomto prípade sú λ_{10}=-1,72, λ_{16}=0,23, λ_{19}=48,02 a λ_{23}=-45,53, a teda hodnotová efektívnosť sa dosahuje ich lineárnou kombináciou. Prvý projektovaný bod je $(x1_5^*, x2_5^*, y1_5^*, y2_5^*)_1$ = (38,884673,34562742, 40356556).

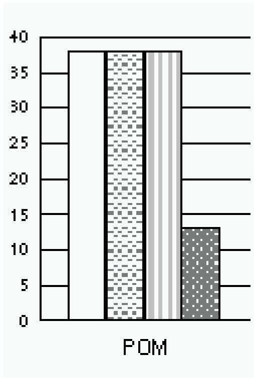
Ďalšou možnosťou je pozrieť sa na druhú mieru hodnotovej efektívnosti 2,29. Je síce pravda, že nadobúda nižšiu hodnotu, t.j. DMU_5 by mala byť pri tejto miere efektívnejšia, ale je možné pozrieť sa na túto skutočnosť aj z iného hľadiska. Zatiaľ čo v prvom prípade nebolo potrebné žiadne dodatočné zvyšovanie výstupov, teraz okrem proporcionálneho zvýšenia všetkých výstupov číslom 2,29, je potrebné ešte zvýšiť úvery voči klientom o 3 miliardy (z1=3).V tomto prípade je projektovaný bod

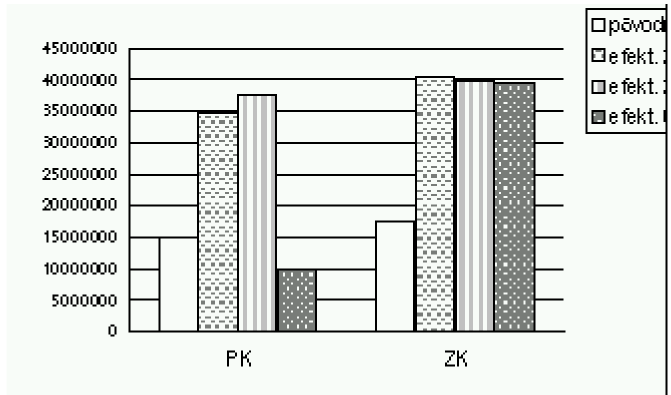
$(x1_5^*, x2_5^*, y1_5^*, y2_5^*)_2$ = (38,884673, 37508510,39870794) lineárnou kombináciou λ_{10}=-2,13, λ_{19}=54,04 a λ_{23}=-50,91.

Pri pohľade na oba projektované body $(x1_5^*, x2_5^*, y1_5^*, y2_5^*)_1$, $(x1_5^*, x2_5^*, y1_5^*, y2_5^*)_2$ je jasné, že oba majú rovnakú hladinu vstupov, ale prvý (index 1) na dosiahnutie efektívnosti síce musí zvýšiť pohľadávky voči klientom "len" na 34562742, ale zdroje od klientov by mali byť až 40356556.

Ešte stále zostáva tretia možnosť. Miera hodnotovej efektívnosti je v tomto prípade menšia ako jedna a je 0,67. DMU_5 sa porovnáva len s bankami 10 a 23 (λ_{10}=1,43, λ_{23}=-0,43). Tretí projektovaný bod má tvar: $(x1_5^*, x2_5^*, y1_5^*, y2_5^*)_3$ = (13,884673,9990525,39653824). Tento raz sa všetky výstupy prenásobili 0,67, teda sa znížili, ale z1=28, t.j. zdroje od klientov sa spätne zvýšili o 28 miliárd. Druhý výstup (y2) je teraz porovnateľný s výstupom v $(x1_5^*, x2_5^*, y1_5^*, y2_5^*)_2$, ktorý má hodnotu 39870794. Pohľadávky voči klientom (y1) sú však pomerne nízke, čo by niekoho mohlo priviesť na otázku, ako môže byť táto projekcia efektívna. Je, a to z jedného dôvodu. Nie je totiž možné prehliadnuť hodnotu doplnkovej premennej s1 = 26. Znamená to, že počet obchodných miest sa má znížiť z 38 na 13. Práve tento fakt umožňuje, aby táto jednotka $(x1_5^*, x2_5^*, y1_5^*, y2_5^*)_3$ ležala na hranici efektívnosti.

Na dosiahnutie efektívnosti banky číslo 5 existuje teda viacero možností. Zmeny vstupu x1 a výstupov y1 a y2 sú znázornené na Obrázkoch 14 a 15. Vstup x2 sa nezmenil ani v jednom prípade a teda ukážka zmien by bola zbytočná.





Obrázok 14 Obrázok 15

Myslím si, že ak sa do analýzy zahŕňa rozhodovateľ, je aj táto možnosť výberu projekcie zaujímavá. Pre niektoré DMUs (2,5,9,12 a 14- Tabuľka 11) sú až tri možnosti, ako vykazovať hodnotovú efektívnosť, ak najviac preferovanou jednotkou je lineárna kombinácia bánk 10 a 23.