FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Univerzita Komenského v Bratislave

Katedra ekonomických a finančných modelov

Diplomová práca

NAČASOVANIE DISKRÉTNEJ VOĽBY V TEÓRII INVESTOVANIA

Diplomant : Adriana Lojschová
Vedúci diplomovej práce : Doc. RNDr. Ján Boďa, CSc. Bratislava 2001

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím získaných teoretických poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, marec 2001

Adriana Lojschová

Poďakovanie

Týmto chcem poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Doc. RNDr. Jánovi Boďovi, CSc. z Katedry ekonomických a finančných modelov za odborné vedenie, cenné rady a pomoc pri spracovaní uvedenej témy. A najmä ďakujem svojim rodičom, ktorí mi štúdium na vysokej škole umožnili.

OBSAH

1 ÚVOD

Mnohé ekonomické štúdie sa venujú problematike správania reprezentatívneho spotrebiteľa resp. firmy v oblasti investovania, preto je namieste otázka, čo sa stane v prípade agregácie spotrebiteľov resp. firiem, zachovajú sa tie isté vlastnosti? Proces *agregácie* (zoskupenia) nám umožňuje zjednodušiť a sprehľadniť výsledky získané v makroekonomickej oblasti. Tieto výhody, ktoré nám agregovanie prináša, sú však vykúpené stratou informácií. Makroekonomická teória vedie k správnemu výsledku len vtedy, ak sa pri agregácii zanedbajú len nepodstatné faktory, "nepodstatné" merané podľa cieľa vysvetlenia, ktorý teória práve sleduje.

Jednou črtou agregovaného chovania je *synchronizácia* (časová zhoda) rozhodnutí. Problematikou načasovania ekonomických aktivít ako investícia alebo zrealizovanie inovácie sa venoval Andrei Shleifer v dizertačnej práci *Implementácia rozhodnutí* (Implementation Cycles [1986]).

Andrei Shleifer sa stal v roku 1999 nositeľom Ceny Johna Batesa Clarka, je to prestížne ocenenie udeľované vynikajúcim ekonómom mladším ako 40 rokov Americkou Ekonomickou Asociáciou. Pri odozdávaní tejto ceny bol vyzdvihnutý Shleiferov prínos v troch oblastiach : podnikové financie, ekonomika finančných trhov a ekonomika prechodu. Od roku 1991 pôsobí ako Profesor ekonómie na Harvardskej univerzite a venuje sa otázkam trhovej ekonomiky Ruska a postkomunistickej východnej Európy.

Cieľom tejto diplomovej práce bola konštrukcia makroekonomického modelu, ktorý sa zaoberá implementáciou rozhodnutí v teórii investovania. Náš záujem sa predovšetkým sústredil na problematiku načasovania ekonomických aktivít agentov na trhu (všímame si oba hospodárske subjekty : domácnosti-spotrebiteľov a firmy-podnikateľov). Hľadali sme odpovede na otázky, kedy je optimálne zaviesť inováciu, aké výhody/nevýhody prináša okamžitá a na druhej strane odložená realizácia inovácie.

Zavedenie diskrétnej voľby do modelov hľadajúcich rovnovážny stav prináša mnohé zaujímavé skutočnosti, mnohé z nich sme sa pokúsili v tejto práci prešetriť, či upresniť.

2 IMPLEMENTÁCIA ROZHODNUTÍ

" The model in that paper is quite beautiful, by far the most sophisticated model Andrei ever wrote."

Oliver Blanchard[1]

V tejto časti sa budeme venovať ekonomickému prostrediu, ktoré pozostáva z konečného počtu odvetví. V každom odvetví sa nachádza veľký počet firiem, ktoré produkujú identické výrobky a získavajú si svojich zákazníkov pomocou ceny, ktorá sa stáva strategickou premennou na trhu. Každá firma sa snaží získať nové technológie, s ktorými by bola schopná lacnejšie produkovať svoje výrobky. Tieto technológie nazývame *inovácie* (novoty, vynálezy). Ak firma vynájde technológiu s nižšími nákladmi, môže ju zrealizovať (*implementovať*) v ľubovoľnom čase po jej objavení. Potom táto firma stojí pred rozhodnutím, či zaviesť novú inováciu okamžite alebo odložiť jej zavedenie. Príčinami pre oneskorenie inovácií sa budeme zaoberať v nasledujúcich kapitolách.

Kapitál predstavuje zásobu znalostí, ktorá je stelesnená do technológie a pod pojmom investovanie rozumieme použitie dostupných myšlienok, ktoré ešte neboli zrealizované. Investovanie je identické zavedeniu inovácie. Potom tento model predstavuje hru s konečným počtom hráčov (firiem) $i = 1, ..., n$, kde každý hráč robí binárne rozhodnutie investovať alebo neinvestovať v danom čase. Hráč môže investovať v ľubovoľnom čase, ale iba jeden krát.

Model Andreia Shleifera hľadá odpoveď na otázku, či diskrétne aktivity - *zavedenia inovácií* sú zosynchronizované, hoci nové technológie prichádzajú v rozličných časoch. Z hľadiska agregovanej ekonómie je exogénny proces inovácie úplne hladký.

[1] Professor of Economics, MIT, and Research Associate, NBER.

2.1 Uvedenie do problematiky.

V úvode sme uviedli základnú kostru modelu Andreia Shleifera pozostávajúcu z konečného počtu firiem. Firmy hľadajú nové technológie, ktoré by im zabezpečili lacnejšie vyrábať, a tým si získať širší okruh spotrebiteľov. Inovácie sa v tomto modeli správajú podľa nasledujúcich pravidiel:

- v každom časovom období iba jedna firma v danom odvetví získa inováciu, ktorej implementácia jej umožní získať kontrolu nad trhom a správať sa ako monopol, pričom nie v každom odvetví dochádza k inovovaniu, t.j. existujú odvetvia, v ktorých sa neinovuje,

- fakt, že iba časť odvetví získa inováciu v každom časovom období znamená, že proces technologického postupu je v ostatných odvetviach pozastavený,

- inovácie sa objavujú v danom odvetví konštantnou rýchlosťou,

- príchod inovácií je daný exogénne: firmy nemôžu načasovať objavenie inovácií tak, aby sa zhodovalo s poklesom (*recesiou*) alebo vzostupom (*oživením*) národného hospodárstva.

Ak firma vynájde technológiu s nízkymi nákladmi, môže ju začať realizovať v ľubovoľnom čase po objavení. Ale zisky firmy, ktorá profituje z tejto vylepšenej technológie, sú len dočasné. Na trh vstupujú imitátori, ktorí sa snažia napodobniť jej technológiu, a tým znižujú jej zisky. V záujme firmy je zrealizovať tieto zmeny v čase najväčšieho hospodárskeho rozmachu, tzv. *"boomu"* (najvyšší bod rozvoja národného hospodárstva), pretože investície môžu byť ziskovejšie v čase, keď hladina agregovaných investícií je vysoká. To znamená, že firmy budú profitovať z vysokého agregovaného dopytu. Inými slovami povedané, firmy dostávajú nápady v rôznych časoch, optimalizáciou môžu dospieť k rozhodnutiu odložiť ich realizáciu. Odloženie realizácie je jedno z viacerých rovnovážnych riešení, ktoré sú Pareto-optimálne.

Nastávajú dve možné situácie po prvé, že firma zavedie inováciu v čase objavu (*okamžitá realizácia*) alebo po druhé, že firma odloží zavedenie (*odložená realizácia*). Existujú dve rôzne rovnováhy : cyklická a acyklická. Okamžitá realizácia spôsobuje acyklický vývoj, naopak odložená realizácia cyklický vývoj.

V ekonomickom prostredí, v ktorom nie je budúcnosť s určitosťou známa, závisí ľudské správanie do značnej miery od očakávaní. V tomto modeli má podnikateľ čiastočne ľubovoľné ale jednoduché očakávania, akým smerom sa bude uberať budúca ekonomika a volí si nezávisle schému investovania, ktorá bude napĺňať tieto očakávania. Očakávania ovplyvňujú cyklické správanie makroekonomických premenných, efektívnosť ekonomiky a v mnohých prípadoch aj dlhodobý vývoj. Očakávaný dátum príchodu rozmachu určuje, či je daná firma ochotná oddialiť implementáciu. V časti *2.3 Konštrukcia periodickej rovnováhy* sa budeme podrobnejšie venovať podmienkam, za ktorých je firma ochotná oneskoriť zavedenie inovácií. Jeden z dôvodov je informačný, t.j. firmy sa môžu poučiť z chýb svojich predchodcov alebo sa obávajú, že ich nápady budú prevzaté.

Ak sa všetky firmy, ktoré vlastnia inováciu, podelia o svoje očakávania týkajúce sa príchodu a dĺžky rozmachu, potom môžu lepšie načasovať tieto zmeny. Keď firmy v odlišných odvetiach bezprostredne predbehnú príchod hospodárskeho rozmachu, potom na trh uvedú inovácie, ktoré sa snažili uchrániť pred ostatnými firmami. Ak zavedenie inovácií bude simultánne, tak sa naplnia očakávania o príchode rozmachu. Na druhej strane, ak firmy očakávajú "boom" vo vzdialenej budúcnosti, môžu si zvoliť oneskorené zavedenie nových technológií. Keď firmy v rozličných odvetviach odďalujú inovácie, ekonomika stagnuje. Stagnácia znamená redukciu ekonomického rastu, následne nastupuje recesia, ktorá nakoniec vyúsťuje do depresie (najnižšieho bodu rozvoja národného hospodárstva). Firma v danom odvetví ovplyvňuje osud firiem v ostatných odvetviach a to tým, že svoj zisk použije na nákup výrobkov iných firiem. Naopak, daná firma profituje z toho, keď zisky z iných odvetví sú použité na nákup jej výrobkov. Počas zavádzania inovácií, všetky firmy prispievajú k všeobecnej prosperite hospodárskeho rozmachu, ktorý im prinesie zisky, pre ktoré sa oplatí čakať.

Ako sme už vyššie uviedli, táto teória opisuje cyklické a acyklické rovnováhy, ktoré sú determinované očakávaniami agentov. Jedným možným rovnovážnym stavom je okamžité zavedenie inovácií (okamžitá realizácia), v tomto prípade produkcia rastie bez cyklov (acyklický vývoj). Ak sú očakávania nezávislé, ekonomika by mohla skončiť v jednej z mnohých dokonale-predvídateľných cyklických rovnováh (odložená realizácia). Tieto rovnovážne stavy sú Pareto-optimálne, pričom najrentabilnejšia rovnováha nemusí byť najefektívnejšou, t.j. prináša zisk, ale môže byť spoločensky nevýhodná. V časti *2.5 Koordinácia, ziskovosť a efektívnosť* uvedieme, že ak si realizácia inovácií nevyžaduje fixné náklady, acyklická rovnováha je najrentabilnejšia a najefektívnejšia. Naopak, v časti *2.6 Príklad s fixnými nákladmi* máme prípad so súčasne vynaloženými fixnými nákladmi, v ktorom je najrentabilnejšia rovnováha cyklická, ale najefektívnejšia rovnováha acyklická. V časti *2.2 Štruktúra modelu* je model rozdelený do troch blokov : *Spotrebiteľ*, *Štruktúra trhu a inovácie* a *Rozhodnutie inovovať*, kde sa budeme podrobne venovať sektoru domácností a firiem. V čase *2.4 Mnohopočetnosť rovnovážnych stavov* uvedieme vlastnosti funkcie, ktorá charakterizuje rovnovážne stavy konštantnej dĺžky a následne príklady pre konkrétne parametre modelu. V závere zhrnieme získané skutočnosti a ešte sa zamyslíme nad predpokladom absencie kapitálu.

2.2 Štruktúra modelu.

V uvažovanom národnom hospodárstve existujú len dva druhy hospodárskych subjektov. Sú to firmy a domácnosti. Každému z týchto dvoch sektorov priraďujeme tri ekonomické aktivity:

Firmy -vyrábajú statky,
-prejavujú dopyt po pracovných silách a
-investujú.

Domácnosti -spotrebúvajú statky,
-ponúkajú svoju pracovnú silu a
-vytvárajú úspory.

2.2.1 Spotrebiteľ.

Sektor domácností pozostáva z jedného reprezentatívneho spotrebiteľa, ktorý žije nekonečne veľa diskrétnych období. Preferencie spotrebiteľa sú definované počas každého obdobia (t.j. tvoria zoznam N tovarov, ktorý je konštantný počas daného obdobia). Funkcia celoživotnej užitočnosti je

$$\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} \frac{(\prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda})^{1-\gamma}}{(1-\gamma)}, \tag{2.1}$$

kde $\lambda = \frac{1}{N}$ a x_{tj} je spotreba tovaru j v čase t.

Použili sme Cobb-Douglasovu funkciu užitočnosti, pri ktorej sú tovary čiastočne navzájom nahraditeľné.

Predpokladajme, že v čase t je tovar j predávaný za cenu p_{tj} a že spotrebiteľov príjem je y_t. Príjem reprezentatívneho spotrebiteľa pochádza z práce (L-neelastickej pracovnej ponuky) a zo všetkých ziskov v danej ekonomike (Π_t-agregovaný zisk v čase t), t.j. platí $y_t = L + \Pi_t$. Ak úroková miera v čase t je r_t, potom obmedzenie pre rozpočet spotrebiteľa je

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{y_t - (\sum_{j=1}^{N} p_{tj} x_{tj})}{D_{t-1}} = 0, \tag{2.2}$$

kde $D_t = (1 + r_1)...(1 + r_t)$ a $D_0 = 1$.

Predpoklad celoživotného rozpočtového obmedzenia pre reprezentatívneho spotrebiteľa nám umožňuje ideálny kapitálový trh. Predovšetkým to znamená, že si podnikateľ môže požičať zo zisku (to vie s istotou), ktorý zarobí z doteraz nezrealizovanej inovácie. Môžeme si predstaviť vynálezcov predávajúcich pohľadávky na inovácie, z ktorých budú v budúcnosti profitovať. Tento model takto dovoľuje transakcie medzi spotrebiteľmi s heterogénnym bohatstvom (obzvlášť vynálezcovia /nevynálezcovia) a kapitálovým trhom. Akonáhle je transakcia ukončená, môžeme uvažovať o reprezentatívnom spotrebiteľovi s celoživotným rozpočtovým obmedzením.

Našou úlohou je maximalizovať funkciu celoživotnej užitočnosti (2.1) pri rozpočtovom obmedzení (2.2). Na hľadanie extrému pri vedľajších podmienkach použijeme Lagrangeovu metódu. Lagrangeova funkcia je definovaná ako

$$L(\overline{x}, \alpha) = \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} \frac{(\prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda})^{1-\gamma}}{(1-\gamma)} - \alpha \sum_{t=1}^{\infty} \frac{y_t - (\sum_{j=1}^{N} p_{tj} x_{tj})}{D_{t-1}}, \tag{2.3}$$

kde $\overline{x} = (x_{t1}, ..., x_{tN})$ je vektor spotreby tovarov $1, ..., N$ v čase t a α je Lagrangeov multiplikátor.

Pri derivácií funkcie (2.3) podľa premennej x_{ti} dostaneme výraz

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ti}} = \rho^{t-1}(\prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda})^{-\gamma} \frac{\lambda(\prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda})}{x_{ti}} - \alpha \frac{p_{ti}}{D_{t-1}} \qquad i = 1, ..., N. \tag{2.4}$$

Ak položíme parciálne derivácie rovné 0, po úprave dostaneme

$$\lambda \frac{1}{\alpha} \rho^{t-1} D_{t-1} (\prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda})^{1-\gamma} = x_{ti} p_{ti} \qquad i = 1, ..., N. \tag{2.5}$$

Ak pravú stranu výrazu (2.5) sčítame od $i = 1$ po N, dostaneme výdavky spotrebiteľa c_t v čase t

$$c_t = \sum_{i=1}^{N} x_{ti} p_{ti} \tag{2.6}$$

a po sčítaní ľavej strany výrazu (2.5) dostaneme

$$N\lambda \frac{1}{\alpha} \rho^{t-1} D_{t-1} (\prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda})^{1-\gamma}. \tag{2.7}$$

Vieme, že $N\lambda = N\frac{1}{N} = 1$, potom platí, že výdavky spotrebiteľa c_t v čase t sú

$$c_t = \frac{1}{\alpha} \rho^{t-1} D_{t-1} (\prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda})^{1-\gamma}. \tag{2.8}$$

Keď sa spätne pozrieme na rovnosť (2.5), zistíme, že použijúc výraz (2.8) platí

$$\lambda c_t = x_{ti} p_{ti}, \tag{2.9}$$

t.j výdavky pre variabilné tovary sú konštantné.

Teraz si vyjadríme c_t^{γ}, čo nám neskôr pomôže pri výpočte rovnovážnej úrokovej miery r_t. Postup je nasledovný. Pri úprave vzťahu (2.8) využijeme konštantnosť výdavkov pre variabilné tovary v tvare $x_{ti} = \frac{\lambda c_t}{p_{ti}}$, z čoho máme :

$$c_t = \frac{1}{\alpha} \rho^{t-1} D_{t-1} (\prod_{j=1}^{N} (\frac{\lambda c_t}{p_{tj}})^{\lambda})^{1-\gamma}. \tag{2.8a}$$

Pre zrozumiteľnosť uvádzame čiastkové výpočty :

$$\prod_{j=1}^{N} (\frac{\lambda c_t}{p_{tj}})^{\lambda} = (\prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda c_t}{p_{tj}})^{\lambda} = (\lambda c_t)^{N\lambda} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{p_{tj}^{\lambda}} = \lambda c_t \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{p_{tj}^{\lambda}} = \lambda c_t (\prod_{j=1}^{N} p_{tj}^{\lambda})^{-1},$$

z toho vyplýva

$$c_t = \frac{1}{\alpha}\rho^{t-1}D_{t-1}(\lambda c_t(\prod_{j=1}^{N} p_{tj}^{\lambda})^{-1})^{1-\gamma}. \tag{2.8b}$$

Poslednou úpravou je vyňatie c_t^{γ} na ľavú stranu

$$c_t^{\gamma} = \frac{1}{\alpha}\rho^{t-1}D_{t-1}(\prod_{j=1}^{N} p_{tj}^{\lambda})^{\gamma-1}\lambda^{1-\gamma}. \tag{2.10}$$

Predpokladajme, že fyzické uskladnenie tovarov nie je možné. Konkurenčná úroková miera sa prispôsobí $y_t = c_t$ tak, aby došlo k vyčisteniu trhu. Potom

$$\left.\begin{aligned} y_{t+1}^{\gamma} = c_{t+1}^{\gamma} = \frac{1}{\alpha}\rho^{t}D_{t}(\prod_{j=1}^{N} p_{t+1,j}^{\lambda})^{\gamma-1}\lambda^{1-\gamma} \\ y_{t}^{\gamma} = c_{t}^{\gamma} = \frac{1}{\alpha}\rho^{t-1}D_{t-1}(\prod_{j=1}^{N} p_{tj}^{\lambda})^{\gamma-1}\lambda^{1-\gamma} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$(\frac{y_{t+1}}{y_t})^{\gamma} = \rho\frac{D_t}{D_{t-1}}\frac{(\prod_{j=1}^{N} p_{t+1,j}^{\lambda})^{\gamma-1}}{(\prod_{j=1}^{N} p_{tj}^{\lambda})^{\gamma-1}}. \tag{2.11}$$

Vieme, že platí $\frac{D_t}{D_{t-1}} = (1 + r_t)$. Potom rovnovážna úroková miera je daná

$$1 + r_t = \frac{1}{\rho}(\frac{y_{t+1}}{y_t})^{\gamma}\frac{(\prod_{j=1}^{N} p_{t+1,j}^{\lambda})^{1-\gamma}}{(\prod_{j=1}^{N} p_{tj}^{\lambda})^{1-\gamma}}. \tag{2.12}$$

Z tohto výrazu vyplýva, že zmena príjmu alebo cien ovplyvní reálnu úrokovú mieru. Pri fixných cenách zvýšenie príjmu spotrebiteľa v čase $t + 1$ spôsobí rast úrokovej miery v čase t. Následne spotrebiteľ zvýši spotrebu v čase t, aby tým zareagoval na zvýšenie budúceho príjmu. Rast úrokovej miery je determinovaný zakrivením funkcie užitočnosti, parametrizovaný ρ.

Vzájomné pôsobenie (interakcia) firiem v danom odvetví určuje ceny tovarov v každom časovom období. Takto stanovené ceny a z toho vyplývajúci príjem určujú úrokovú mieru. Samozrejme, že stanovenie cien a množstva výstupu firiem zahŕňa rozhodnutie firmy, kedy načasovať zavedenie inovácií. Ako sa neskôr presvedčíme, načasovanie zmien závisí od úrokovej miery.

2.2.2 Štruktúra trhu a inovácie.

Druhým sektorom sú firmy. V danej ekonomike správanie sektora firiem závisí od rozhodnutí jednotlivých podnikov a táto skutočnosť musí byť východiskom našej analýzy.

V tomto modeli uvažujeme N odlišných odvetví, ktoré tvorí veľký počet firiem. V každom časovom období iba časť odvetví získa inováciu, pričom v danom odvetví iba jedna firma. Nech je $n < N$ počet odvetví, ktoré získajú inováciu v každom časovom okamihu. To znamená, že každú periódu jedna firma v každom z n odvetví získa inováciu. Tieto inovácie sú získané v nasledovnom poradí:

- v prvej perióde firmy v odvetviach $1, ..., n$ získajú inováciu;
- v druhej perióde firmy v odvetviach $n + 1, ..., 2n$ získajú inováciu;

...

- v perióde $T^* = N/n$ firmy v posledných n odvetviach získajú inováciu, t.j. v odvetviach $N - n + 1, ..., N$;
- v nasledujúcej perióde $T^* + 1$ (ktorá predstavuje začiatok nového cyklu) firmy v odvetviach $1, ..., n$ získajú inováciu, atď.

Toto poradie sa nemení.

V sektore firiem sa pri použití rôznych výrobných faktorov (práca L, kapitál K) vyrábajú tovary a je zrejmé, že výrobná technológia rozhodujúcou mierou ovplyvňuje správanie firiem. Súvislosť medzi použitím výrobných faktorov a produkciou popisuje produkčná funkcia. V tomto modeli je produkcia rovná práci, t.j. $y(L, K) = L$ vstupnou premennou produkčnej funkcie je práca, vstup kapitálu zanedbávame. Ide o produkčnú funkciu s konštantnými výnosmi z rozsahu.

Každú periódu firmy hrajú Bertrandovu hru bez kapacitných obmedzení. Bertrand [1883] uvažoval o hre, kde si hráči (firmy) konkurujú cenami[2]. Firmy hrajúce Bertrandovu hru (t.j. podliezajúce cenu) skončia bez inovácií v nulovom zisku.

Zavedená inovácia v každom z n odvetví zvyšuje produktivitu práce o $\mu > 1$, t.j. firma, ktorá zavedie (implementuje) inováciu, vyrába každý tovar prácou $1/\mu$. Premennú μ nazývame miera technologického pokroku, jej hodnota je väčšia ako 1 a je rovnaká pre všetky tovary v každom časovom období.

[2] Pre porovnanie si Cournot [1838] volil vo svojich hrách za rozhodujúce vyrábané množstvá.

To znamená, že :

- v prvom kole (cykle) je jedna jednotka výstupu (tovarov) produkovaná prácou $1/\mu$,
- v druhom kole (cykle) je jedna jednotka výstupu (tovarov) produkovaná prácou $1/\mu^2$, atď.

V ľubovoľnom čase po zrode inovácie môžu zrealizovať danú inováciu. Nastávajú dve možné situácie -po prvé, že firma zavedie inováciu v čase objavu (*okamžitá realizácia*) alebo -po druhé, že firma odloží zavedenie (*odložená realizácia*). Predpokladajme, že firma môže odložiť zavedenie inovácie bez obavy z toho, že nejaká iná firma uvedie na trh práve jej inováciu. Ak firma inovuje v čase t, vstúpi na Bertrandov trh, na ktorom sa stáva producentom s najnižšími nákladmi. Rovnovážna cena sa rovná hraničným nákladom neefektívnych firiem. Inovátor nebude znižovať ceny, pretože dopyt je elastický a nemôže zvyšovať ceny bez straty na predaji. V čase $t+1$ po zavedení inovácie vstupujú na trh imitátori a uchádzajú sa o zisk, pričom ceny padajú na úroveň hraničných nákladov efektívnych technológií alebo na $1/\mu$-inu starej ceny.

2.2.3 Rozhodnutie inovovať.

Kľúčovým rozhodnutím firmy, ktorá získa inováciu je načasovanie jej zavedenia. Už viackrát sme spomenuli, že firma môže zaviesť inováciu bezprostredne po jej objavení alebo odložiť jej implementáciu. Rozoberme si situáciu, čo sa stane firme, ktorá implementuje inováciu v čase t, keď je agregovaný dopyt rovný y_t a ostatné firmy v danom odvetví vyrábajú tovary pri nákladoch w_{ti}. Náklady na jednotku výstupu firmy, ktorá inovuje, sú w_{ti}/μ. Firma má príjem λy_t, pretože hladina agregovaného dopytu je y_t a agregát firiem tvorí N odvetví, kde $1/N = \lambda$. Potom zisk firmy, ktorá inovuje v čase t, je

$$\pi_t = \lambda y_t - (\frac{\lambda y_t}{w_{ti}})(\frac{w_{ti}}{\mu}) = \frac{\lambda(\mu-1)y_t}{\mu}. \tag{2.13}$$

Pre vysvetlenie : zisk je rozdiel príjmov a nákladov, kde príjem je λy_t a náklady tvoria súčin množstva výrobkov $\lambda \frac{y_t}{w_{ti}}$ a nákladov na jednotku w_{ti}/μ. Pre zjednodušenie použijeme zápis $m \equiv \lambda(\mu - 1)/\mu$, potom

$$\pi_t = m y_t. \tag{2.13a}$$

Výraz (2.13a) môže byť interpretovaný nasledovne : zisk firmy π_t, ktorá inovuje v čase t, je proporcionálny hladine agregovaného dopytu y_t. Teda faktory, ktoré zvyšujú agregovaný dopyt v jednotlivých periódach, spôsobujú, že zisk zo zavedenia inovácií v týchto periódach je vyšší. Pretože agregovaný dopyt závisí na celkových ziskoch, periódy vysokých ziskov sú periódami vysokého agregovaného dopytu. Kedže zisky sú vyššie, keď firmy zavádzajú inovácie, je pre firmy ziskovejšie zaviesť inovácie v čase, keď aj iné firmy inovujú. A to sa stáva podnecujúcim motívom pre zosynchronizovanie inovácií. Z toho plynie, že sa v tomto modeli budeme venovať ekonomickému prostrediu, v ktorom firmy získavajú inovácie v rozličných časoch, ale tieto inovácie budú realizovať simultánne. Hlavným dôvodom je, že budú profitovať z vysokého agregovaného dopytu. Naopak vysoký agregovaný dopyt plynie zo simultánnych inovácií vo viacerých odvetviach.

2.3 Konštrukcia periodickej rovnováhy.

Rovnováha je postupnosť cien, úrokových mier, spotreby a implementácie rozhodnutí, ktoré sú výsledkom optimalizácie daného subjektu v danom časovom období na trhu. V trhovom hospodárstve sa reprezentatívna firma snaží maximalizovať súčasnú hodnotu zisku.

V zmysle tohto modelu jediným rozhodnutím firmy, ktorá vlastní inováciu, je určiť, kedy zaviesť inováciu, t.j. kedy *"implementovať inováciu"*. V predchádzajúcej časti sme uviedli, že firmy z odlišných odvetví budú uprednostňovať simultánne zavedenie inovácií v čase vysokých ziskov a vysokého agregovaného dopytu napriek tomu, že inovácie získavajú v rozličných časoch. Synchronizácia rozhodnutí sa takto stáva charakteristickou črtou správania firiem v tomto modeli.

Napriek tomu model v sebe obsahuje aj rovnovážny stav, v ktorom synchronizácia nenastáva. V tejto rovnováhe všetky firmy realizujú svoje inovácie v čase, keď ich získali. Kedže v takomto prípade nenastáva hospodársky rozmach v agregovanom dopyte, firmy neuvažujú o odloženom zavedení inovacií a o zosynchronizovaní s ostatnými firmami. Takto uvažuje každá firma v ľubovoľnom odvetví. Pretože i iné firmy implementujú okamžite, je hladina agregovaného dopytu konštantná. Okamžitá realizácia, ktorá predstavuje bezprostredné zavedenie inovácie po jej objavení, je príkladom acyklickej rovnováhy.

Na druhej strane existujú rovnovážne stavy, ktoré vykazujú synchronizáciu. Uvažujme o cykloch s periódou T, v ktorých sú inovácie zhromažďované počas časových období $1, ..., T$ a potom sú zrealizované simultánne. Ako sme v časti *2.2.1 Štruktúra trhu a inovácie* uviedli, trh tvorí N odvetví s veľkým množstvom firiem. V každom časovom období inovuje iba časť $n < N$ odvetví a v každom odvetví iba jedna firma. Teda dané odvetvie získa novú inováciu za čas N/n. Preto sme sa rozhodli uvažovať o cykloch s periódou $T \leq N/n$, a keďže sme v časti *2.2.1 Štruktúra trhu a inovácie* zaviedli označenie $T^* = N/n$, t.j budeme uvažovať o cykloch s periódou $T \leq T^*$. V čase po zavedení inovácií nastáva hromadné napodobňovanie vylepšených technológií v každom odvetví. Inovácie sú imitované v čase $T+1$, ktorý predstavuje začiatok ďalšieho cyklu. Aby sme mohli uvažovať o T-cykloch, musia byť splnené dve nasledovné predpoklady :

i) firmy, ktoré zhromažďujú inovácie počas časových období $1, ..., T-1$, t.j. pred hospodárskym rozmachom, sú ochotné odložiť svoje rozhodnutie implementovať inováciu a počkať do hospodárskeho rozmachu[3] v čase T,

ii) firmy sú ochotné zaviesť inováciu v čase, keď i iné firmy inovujú, t.j zosynchronizovať svoje rozhodnutia.

Najprv sa budeme venovať prvému predpokladu a odvodíme podmienky na odloženie procesu inovovania. Zvoľme si pevné T a uvažujme o T-cykle, v ktorom firmy nebudú zavádzať inovácie (ako sme uviedli firmy hrajúce Bertrandovu hru skončia bez inovácií v nulovom zisku). Pred hospodárskym rozmachom nebudú mať firmy žiadne zisky v takejto ekonomike, t.j. hladina agregovaného zisku Π_t je nulová. Z rozpočtového obmedzenia $y_t = L + \Pi_t$, ktoré sme uviedli v časti *2.2.1 Spotrebiteľ* nám plynie, že príjem v časoch $1, ..., T-1$ je rovný práci L. V časti *2.2.1 Spotrebiteľ* sme našli vzťah pre rovnovážnu úrokovú mieru (2.12) a keďže sa ceny v tomto ekonomickom prostredí nemenia, úroková miera v časoch $1, ..., T-2$ je daná vzťahom

$$1 + r_1 = ... = 1 + r_{T-2} = 1/\rho. \tag{2.14}$$

[3]Hospodársky rozmach v čase T nazývame aj T-rozmach.

Ďalej uvažujme o hospodárskom rozmachu v čase T. Pretože sa firma bude držať danej vylepšujúcej myšlienky, pokiaľ nepríde ďalšia a tá pôvodná sa stane zastaralou, T musí vyhovovať nerovnici

$$T < T^* = N/n. \tag{2.15}$$

Čas $T^* = T/n$ predstavuje dobu, za ktorú sa v danom odvetví objaví ďalšia inovácia.

Agregovaný zisk v čase hospodárskeho rozmachu označíme Π_T. Úpravou výrazu (2.13) sme dostali, že zisk firmy, ktorá inovuje v čase t, je $\pi_t = my_t$, kde $m = \lambda(\mu - 1)/\mu$. Pretože v každom časovom okamihu iba n firiem získa inováciu a cyklus tvorí T časových období, je agregovaný zisk v čase T

$$\Pi_T = nT\pi_T = nTmy_T. \tag{2.16}$$

Použitím rozpočtového obmedzenia $y_t = L + \Pi_t$ v čase T dostaneme, že

$$y_T = \frac{L}{1 - nTm} \tag{2.17}$$

a zisk firmy, ktorá inovuje v čase hospodárskeho rozmachu T-cyklu, je

$$\pi_T = \frac{mL}{1 - nTm} = my_T. \tag{2.18}$$

Potom úroková miera pred hospodárskym rozmachom je

$$1 + r_{T-1} = \frac{1}{\rho}(\frac{y_T}{y_{T-1}})^\gamma \frac{(\prod_{j=1}^{N} p_{Tj}^{\lambda})^{1-\gamma}}{(\prod_{j=1}^{N} p_{T-1,j}^{\lambda})^{1-\gamma}} = \frac{1}{\rho}\frac{(\frac{L}{1-nTm})^\gamma}{(L)^\gamma} = \frac{1}{\rho}(1 - nTm)^{-\gamma}, \tag{2.19}$$

pretože sa ceny nemenia v čase od $T - 1$ do T a príjem v čase $T - 1$ je rovný práci L.

Teraz sa nám núka otázka, či pri danej hladine zisku je firma ochotná zosynchronizovať svoje rozhodnutie zaviesť inováciu s ostatnými firmami? Pouvažujme nad možnosťami firmy, ktorá získa inováciu na začiatku T-cyklu. Mala by táto firma odložiť zrealizovanie inovácie? Ak áno, potom aj iné firmy, ktoré získajú inovácie v priebehu cyklu, oddialia svoje rozhodnutie napriek tomu, že úroková miera je kladná[4].

[4] Totiž ak je úroková miera kladná, firmy by si mali zvoliť okamžité zavedenie inovácií.

Predpokladajme, že namiesto odloženia, firma implementuje svoje rozhodnutie okamžite. Takže máme firmu, ktorá získa inováciu v čase 1 a okamžite ju zrealizuje. Potom zisky tejto firmy sú mL (platí $\pi_t = my_t$), pretože hladina agregovaného dopytu je rovná práci L, pokiaľ ostatné firmy oddiaľujú proces inovovania. Oneskorenie zavedenia inovácie o dobu, ktorá je o niečo kratšia ako T, môže byť určitým spôsobom nežiadúce. Napríklad dôsledkom diskontovania je odloženie rozhodnutia nákladné. Ak predsa len firma odloží realizáciu inovácie o dobu T, potom fakt, že agregovaný dopyt je vysoký v čase hospodárskeho rozmachu, môže vyvážiť náklady spojené s odložením. To nám poskytuje návod na odvodenie podmienok, za ktorých je firma ochotná oneskoriť zavedenie inovácie až o dobu T. Vieme, že súčasná hodnota zisku, ktorý firma získa v čase hospodárskeho rozmachu, je π_T/D_{T-1}, kde $D_{T-1} = (1+r_1)...(1+r_{T-1})$. Aby firma bola ochotná odložiť zavedenie inovácie o dobu T, musí jej odložená realizácia priniesť väčší zisk, t.j. musí platiť

$$\pi_T/D_{T-1} > \pi_1. \tag{2.20}$$

Úpravami dostaneme ekvivalentnú podmienku

$$\left.\begin{aligned} \pi_T &= \frac{mL}{1-nTm} \\ D_{T-1} = (1+r_1)...(1+r_{T-1}) &= (\frac{1}{\rho})^{T-1}(1-nTm)^{-\gamma} \\ \pi_1 &= mL \end{aligned}\right\} \qquad \Longrightarrow$$

$$\rho^{T-1}(1-nTm)^{\gamma-1} > 1. \tag{2.20a}$$

Pri analýze podmienky (2.20a) si uvedomíme, že existujú dva faktory, ktoré môžu spôsobiť oneskorenie zavedenia inovácií. Po prvé je to fakt, že zisky sú vyššie v čase hospodárskeho rozmachu a to zapríčiňuje odloženie realizácie inovácie. Všimnime si, že podiel zisku v čase hospodárskeho rozmachu a ziskov mL, pri ktorých nenastáva odklad, je $\frac{\pi_T}{mL} = 1/(1-nTm)$ a tento podiel je väčší ako 1 (podmienka $T < 1/nm$ vyplýva z (2.15)). Druhým faktorom je D_{T-1}, ktorý predstavuje súčin úrokových mier od časového obdobia 1 po $T-1$. V časovom rozpätí od 1 do $T-2$ pred hospodárskym rozmachom sú úrokové miery konštantné, pretože ceny a príjem sa nemenia. V čase $T-1$ bezprostredne pred hospodárskym rozmachom očakáva spotrebiteľ vyšší výnos a spotrebu počas hospodárskeho rozmachu a rád by si požičal z vyššieho budúceho príjmu. Z predpokladu vyčistenia trhu v časti *2.2.1*

Spotrebiteľ si spotrebiteľ nemôže požičať ani ušetriť. Z tohto dôvodu sa úroková miera prispôsobí, t.j. nastane zvýšenie úrokovej miery, aby odradila spotrebiteľa od úmyslu požičať si. Rast úrokovej miery spôsobí zníženie pravdepodobnosti odloženia zavedenia inovácie. V čase T hospodárskeho rozmachu nemusí byť zvýšenie úrokovej miery prudké. Je zrejmé, že úspory sú citlivé na zmenu úrokovej miery. Citlivosť úspor na zmenu úrokovej miery je determinovaná parametrom γ, pričom podmienka (2.20a) nám poskytuje obmedzenia pre γ. Je vhodné voliť γ v intervale [0,1).[5] Pokiaľ je $\gamma < 1$ a platí (2.20a), nebude úroková miera natoľko rásť pred hospodárskym rozmachom, aby odradila firmy od úmyslu byť ziskový v čase T.

Navyše aby sme garantovali, že žiadna firma, ktorá získa inováciu v časovom období $1, ..., T$, si nebude želať zrealizovať túto inováciu okamžite po jej objavení, je nutné taktiež overiť, že žiadna firma nebude čakať až na nasledujúci T-cyklus, aby zaviedla inováciu v čase $T + 1$. Príčinou takého správania firmy môže byť možnosť zápornej úrokovej miery v čase T alebo zníženie cien v čase $T + 1$ vďaka imitovaniu nových technológií. Preto potrebujeme nájsť podmienky, za ktorých firma nebude ochotná zaviesť svoju inováciu v čase $T + 1$.
Dva vplyvy môžu odradiť firmu od zavedenia inovácie v čase $T + 1$:

-prvý je, že hoci ceny klesajú, diskontovanie môže spôsobiť, že odloženie bude neziskové,

-po druhé, v čase, keď by firma chcela v budúcnosti inovovať, ďalší vynález sa objaví v tomto odvetví a ona bude chcieť predísť tomu, aby iná firma profitovala z jej myšlienky.
Preto treba po prvé zabezpečiť podmienku, aby firma nepremrhala dobu rozmachu, lebo je tu riziko, že jej inovácia bude predstihnutá.

Našou úlohou je teraz odvodiť podmienku, ktorá nám zabezpečí, že nenastane odloženie inovácie až za dobu T (po hospodárskom rozmachu). Takže máme firmy, ktoré zhromažďujú inovácie v časovom intervale od 1 po T a nás zaujíma, či je ochotná odložiť svoje rozhodnutie do doby $2T$ prípadne ešte neskôr. Podotknime, že ak firma nebude chcieť čakať až do doby $2T$, aby zaviedla inováciu, nebude chcieť čakať ani v priebehu druhého cyklu, t.j. od $T+1$ do $2T$. Ak by tak urobila (t.j. bola by ochotná počkať do doby $2T$), potom by chcela odložiť inováciu z pred $2T$ do doby

[5] Na porovnanie Grandmont [1983] odporúča vysoké γ, aby sa generovali cykly v modeloch prekrývajúcich sa generácií.

$2T$, to plynie z (2.20a). A taktiež, ak máme firmu, ktorá nie je ochotná počkať do doby $2T$, nebude chcieť čakať až za dobu $2T$, pretože oneskorené zavedenie inovácie v čase od $2T$ po $2T+t \leq 3T$ je ako zavedenie inovácie v čase od T po $T+t \leq 2T$, ak nie horšie (daná inovácia môže byť predstihnutá). Preto sa náš problém redukuje na hľadanie podmienky, za ktorej firma zavedie inováciu v čase T a nie $2T$.

Predtým však musíme zrátať rovnovážnu úrokovú mieru v čase T. Ako sme v časti *2.2.2 Štruktúra trhu a inovácie* uviedli, v čase $T+1$ vstupujú na trh imitátori a uchádzajú sa o zisk, pričom ceny klesajú na $1/\mu$-inu starej ceny. Aplikáciou vzťahu (2.12) získame úrokovú mieru v čase hospodárskeho rozmachu

$$\begin{aligned} 1 + r_T &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{y_{T+1}}{y_T}\right)^\gamma \frac{\left(\prod_{j=1}^{N} p_{T+1,j}^\lambda\right)^{1-\gamma}}{\left(\prod_{j=1}^{N} p_{T,j}^\lambda\right)^{1-\gamma}} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{L}{\frac{L}{1-nTm}}\right)^\gamma \frac{\left(\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{\mu}p_{T,j}\right)^\lambda\right)^{1-\gamma}}{\left(\prod_{j=1}^{N} p_{T,j}^\lambda\right)^{1-\gamma}} = \\ &= \frac{1}{\rho}(1-nTm)^\gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)^{nT\lambda(1-\gamma)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Úroková miera v časoch $T+1, ..., 2T-1$ kopíruje úrokovú mieru z obdobia $1, ..., T-1$ a zisk v období $2T$ je daný vzťahom (2.13). Aby firma zaviedla inováciu v čase T a nie $2T$, musí jej inovácia v čase hospodárskeho rozmachu T priniesť väčší zisk ako v čase $2T$, t.j. musí platiť[6]

$$(1+r_T)(1+r_{T+1})...(1+r_{2T-1})\pi_T \geq \pi_{2T}. \tag{2.22}$$

Úpravami dostaneme ekvivalentnú podmienku

$$\left.\begin{aligned} \pi_T &= \frac{mL}{1-nTm} \\ (1+r_T)(1+r_{T+1})...(1+r_{2T-1}) &= \left(\frac{1}{\rho}\right)^T\left(\frac{1}{\mu}\right)^{nT\lambda(1-\gamma)} \\ \pi_{2T} &= \frac{\lambda(\mu-1)y_{2T}}{\mu} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow$$

$$\rho\mu^{n\lambda(1-\gamma)} < 1. \tag{2.22a}$$

[6] Aplikujeme podobný mechanizmus ako pri odvodení podmienky (2.20).

Podmienka (2.22a) nám zabezpečí, že firma, ktorá bude v budúcnosti implementovať inováciu, si radšej zvolí zaviesť inováciu v čase T ako v nasledujúcom T-rozmachu. Ďalej táto podmienka vylučuje možnosť, že firma bude chcieť natrvalo odkladať zavedenie inovácie. Podmienka (2.22a) je ekvivalentná podmienke transverzality pre spotrebiteľa, garantujúc vlastnosť, že funkcia celoživotnej užitočnosti (2.1) je konečná v rovnováhe.

Dôležitým záverom tejto časti je, že ak platí

$$T < N/n, \tag{2.15}$$

$$\rho^{T-1}(1 - nTm)^{\gamma-1} > 1, \tag{2.20a}$$

$$\rho\mu^{n\lambda(1-\gamma)} < 1, \tag{2.22a}$$

potom existuje T-cyklus. Ako sme už uviedli, cyklus s okamžitým zavedením inovácií ($T = 1$) vždy existuje. Ale vráťme sa opäť ku podmienke (2.22a). Ak obrátenú hodnotu ľavej strany tohto výrazu umocníme na T, dostaneme diskontný faktor medzi T a $2T$, t.j. $(1 + r_T)(1 + r_{T+1})...(1 + r_{2T-1}) = (\frac{1}{\rho})^T(\frac{1}{\mu})^{nT\lambda(1-\gamma)}$. Nerovnosť (2.22a) nám hovorí, že z pohľadu T by zisky v čase $2T$ mali byť diskontované.
Tu vzniká problém, pretože v čase $T + 1$ po hospodárskom rozmachu ceny padajú na úroveň hraničných nákladov efektívnych technológií alebo na $1/\mu$ starej ceny a to spôsobuje, že úroková miera môže byť záporná. Napriek tomu, ak zoberieme do úvahy podmienku (2.22a), môžeme trvať na tom, že budúcnosť bude diskontovaná kladnou úrokovou mierou. To nastane, len ak technologický vývoj nie je príliš rýchly.

Keď platí (2.22a), žiadna firma nechce odložiť inováciu až za dobu hospodárskeho rozmachu T napriek tomu, že v danom odvetví sa neobjaví ďalšia inovácia až do nasledujúceho T-rozmachu. Ak (2.22a) neplatí, firma chce odložiť inováciu do T-rozmachu, po ktorom sa bezprostredne v danom odvetví objaví ďalšia inovácia.
V tomto prípade len cykly dĺžky $T^* = N/n$ obsahujú v sebe periodické dokonale-predvídateľné rovnovážne stavy a takéto cykly existujú, keď podmienka (2.22a) neplatí. Tomuto tvrdeniu nepripisujeme veľkú váhu, pretože vedie k nejasnostiam. Je pozoruhodné, že na jednej strane na existenciu T-cyklu potrebujeme tri pomienky (konkrétne (2.15), (2.20a), (2.22a)), ale na druhej strane nepravdivosť podmienky (2.22a) nám zabezpečí existenciu cyklu s vlastnosťami vyššie uvedenými. Tento

vzniknutý paradox nás donútil, že odteraz budeme toto tvrdenie ignorovať. Ale napriek tomu, že ho nebudeme brať do úvahy, môžeme sa jednoducho presvedčiť o jeho platnosti. (*Dôkaz.* Budeme vychádzať z platnosti podmienky (2.20a) a zvolíme si krajný prípad $T = T^* = N/n$, ktoré nám zabezpečia existenciu T-cyklu. Podmienku

$$\rho^{T-1}(1 - nTm)^{\gamma-1} > 1 \tag{2.20a}$$

môžeme upraviť na tvar

$$\rho^{[N/n]-1}\mu^{1-\gamma} > 1,$$

ak využijeme, že $(1 - nTm)^{\gamma-1} = (1 - nT\frac{\lambda(\mu-1)}{\mu})^{\gamma-1} = (1 - n\frac{N}{n}\frac{\frac{1}{N}(\mu-1)}{\mu})^{\gamma-1} = (1 - \frac{\mu-1}{\mu})^{\gamma-1} = (\frac{1}{\mu})^{\gamma-1} = \mu^{1-\gamma}$, pričom vieme, že platí $T = N/n$, $m = \frac{\lambda(\mu-1)}{\mu}$ a $\lambda = 1/N$. Výraz $\rho^{[N/n]-1}\mu^{1-\gamma} > 1$, je pravdivý, ak platí

$$\rho\mu^{n/N[1-\gamma]} = \rho\mu^{n\lambda[1-\gamma]} > 1.$$

Pričom podmienka (2.22a) má tvar $\rho\mu^{n\lambda(1-\gamma)} < 1$.)

Teraz môžeme sformulovať nasledovné tvrdenie, v ktorom sú zosumarizované doterajšie výsledky našej práce.

Tvrdenie 1. *Nech je technologický vývoj dostatočne pomalý, aby platilo (2.22a). Potom pre každé T, ktoré spĺňa (2.15) a (2.20a), existuje dokonale-predvídateľný cyklický rovnovážny stav, v ktorom všetky akumulované inovácie sú implementované simultánne každú T-periódu.*

Z toho plynie jednoduchá ekonomická interpretácia. Ak firmy môžu byť ziskové len v jednom časovom úseku, potom si volia obdobie vysokého agregovaného dopytu. Naopak vysoký agregovaný dopyt plynie zo simultánnych inovácií vo viacerých odvetviach. Zistili sme, že okrem rovnovážneho stavu s okamžitým zavedením inovácií existujú i rovnovážne stavy, v ktorých sú odložené inovácie zosynchronizované. Pre nás sú zaujímavejšie rovnovážne stavy so zosynchronizovanými inováciami.
Ďalšou zaujímavou črtou tohto modelu je, že poukazuje na spojitosť medzi cyklami a rastom. Vieme, že ekonomický rast je poháňaný technologickým vývojom a tento model bol jeden z prvých, ktorý zdôraznil, že cykly a rast nie sú nezávislé procesy.

2.3.1 Graf úrokovej miery pre konkrétne parametre modelu.

Citlivosť úspor na zmenu úrokovej miery je determinovaná parametrom γ, pričom je odporúčané voliť γ z intervalu $[0, 1)$. Premennú μ nazývame miera technologického pokroku a platí $\mu > 1$ a parameter ρ by mal byť blízky 1.

V časti *2.3 Konštrukcia periodickej rovnováhy* sme postupne odvodili úrokové miery v jednotlivých časových obdobiach. Platí, že :

$i)$ úroková miera v časoch $1, ..., T-2$ je daná vzťahom

$$1 + r_1 = ... = 1 + r_{T-2} = 1/\rho, \tag{2.14}$$

$ii)$ úroková miera pred hospodárskym rozmachom je

$$1 + r_{T-1} = \frac{1}{\rho}(1 - nTm)^{-\gamma}, \tag{2.19}$$

$iii)$ úroková miera v čase hospodárskeho rozmachu je

$$1 + r_T = \frac{1}{\rho}(1 - nTm)^{\gamma}(\frac{1}{\mu})^{nT\lambda(1-\gamma)}. \tag{2.21}$$

Na základe týchto vzťahov môžeme skonštruovať program, ktorý bude generovať hospodárske cykly. Program bol vypracovaný v *Mathematice 3.0* a je uvedený v *Dodatku.*

Príklad 1. Nech $\gamma = 0.95$, $\mu = 2$, $\rho = 0.85$, $n = 5$, $T = 10$ a $N = 50$. Potom priebeh úrokovej miery je :

2.4 Mnohopočetnosť rovnovážnych stavov.

Synchronizácia inovácií má za následok vznik rôznych dokonale-predvídateľných rovnovážnych stavov. Jednou z nich je aj acyklická rovnováha, v ktorej sú inovácie zrealizované okamžite. Pri dokonale-predvídateľnej rovnováhe si firmy formujú očakávania týkajúce sa pohybu úrokovej miery a agregovaného dopytu, a tieto očakávania sú naplnené správnym načasovaním inovácií. Predpokladá sa, že firmy sú malé, t.j. každá firma ignoruje svoj vlastný dopad na správanie agregovaných premenných. Podobne, keď sa firma rozhoduje, záleží jej len na agregovaných dátach a nie na tom, čo sa deje v ostatných odvetviach.[7]

Tvrdenie 1 poukazuje na to, že pre danú množinu parametrov $(\gamma, \lambda, \mu, \rho)$ môže byť viacej T periód, pre ktoré existuje cyklus. Ako sme už spomenuli 1-cyklus s okamžitým zavedením inovácií ($T = 1$) vždy existuje.

Pri štúdiu vlastností rovnovážnych stavov konštantnej dĺžky si zadefinujeme funkciu $f(T)$. Funkčný predpis $f(T)$ bude tvoriť ľavá strana výrazu (2.20a)

$$f(T) \equiv \rho^{T-1}(1 - nTm)^{\gamma-1}. \tag{2.23}$$

Pripomeňme si, že $mLf(T)$ predstavuje súčastú hodnotu zisku[8], ktorý firma získa v čase hospodárskeho rozmachu T (ak za súčasnosť zoberieme čas 1), t.j.

$$\pi_T/D_{T-1} = \frac{\frac{mL}{1-nTm}}{(\frac{1}{\rho})^{T-1}(1-nTm)^{-\gamma}} = mL\rho^{T-1}(1-nTm)^{\gamma-1} = mLf(T).$$

Nás bude zaujímať množina takých T, ktoré budú z intervalu $[1, \frac{N}{n}]$ a budú spĺňať nerovnosť $f(T) > 1$ (táto nerovnosť je ekvivalentná podmienke (2.20a)). Predtým však uvedieme dve lemy, ktoré sa týkajú vlastností funkcie $f(T)$.

Lema 1. *Funkcia $f(T)$ dosiahne svoje minimum v kladnom T_M za platnosti podmienky (2.22a).*

Dôkaz. Pri derivácií funkcie $f(T)$ dostaneme výraz

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \rho^{T-1}\ln\rho(1-nTm)^{\gamma-1} + \rho^{T-1}(\gamma-1)(1-nTm)^{\gamma-2}(-nm).$$

[7]Mohli by sme uvažovať o nekonečne veľkom počte odvetví. Základným predpokladom je, že firmy ignorujú svoj vlastný dopad na agregované premenné . Preto je zavádzajúce interpretovať tento model ako hru medzi odvetviami.

[8]Podrobnejšie sa tejto problematike venujeme v časti *2.3 Konštrukcia periodickej rovnováhy.*

Keď položíme deriváciu rovnú 0, po úprave dostaneme extrém v bode

$$T_M = \frac{1}{nm} + \frac{1-\gamma}{\ln \rho}. \tag{2.24}$$

Ďalším krokom bude, že zistíme znamienko prvej derivácie funkcie $f(T)$ naľavo a napravo od T_M. Výraz $\frac{\partial f}{\partial T}$ postupne upravíme na

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \rho^{T-1}(1-nTm)^{\gamma-2}[\ln \rho(1-nTm) + nm(1-\gamma)].$$

Znamienko derivácie funkcie $f(T)$ je zhodné so znamienkom výrazu $[\ln \rho(1-nTm) + nm(1-\gamma)]$, pretože výraz $\rho^{T-1}(1-nTm)^{\gamma-2} = \rho^{T-1}\frac{(1-nTm)^{\gamma}}{(1-nTm)^2}$ je kladný pre ľubovoľné T. Výraz $[\ln \rho(1-nTm) + nm(1-\gamma)]$ je záporný pre $T < T_M$ a kladný pre $T > T_M$. Z toho vyplýva, že funkcia $f(T)$ dosiahne v bode T_M svoje minimum. Ďalej nám ostáva dokázať kladnosť T_M. Ak zlogaritmujeme obe strany podmienky (2.22a), dostaneme $\ln \rho + n\lambda(1-\gamma)\ln \mu < 0$, t.j.

$$\frac{1}{\ln \rho} > -\frac{1}{n\lambda(1-\gamma)\ln \mu}.$$

Potom

$$T_M = \frac{1}{nm} + \frac{1-\gamma}{\ln \rho} > \frac{1}{nm} - \frac{1-\gamma}{n\lambda(1-\gamma)\ln \mu} =$$

$$= \frac{1}{n\lambda}(\frac{\lambda}{m} - \frac{1}{\ln \mu}) = \frac{1}{n\lambda}(\frac{\lambda}{\lambda(\mu-1)/\mu} - \frac{1}{\ln \mu}) = \frac{1}{n\lambda}(\frac{\mu}{\mu-1} - \frac{1}{\ln \mu}) > 0,$$

pretože $\ln \mu > (\mu-1)/\mu$ pre $\mu > 1$ (grafický dôkaz v *Dodatku*).

□

Dôsledok 1. *Funkcia $f(T)$ je klesajúca pre $T < T_M$ a rastúca pre $T > T_M$.*

Ďalej Andrei Shleifer vo svojej práci *Implementation cycles* uvádza lemu nasledovného znenia.

Lema 2. *Ak platí podmienka (2.22a), potom $f(N/n) < f(1)$.*

Pri dôkladnom prešetrení *Lemy 2* sme dospeli k mnohým nezrovnalostiam.
Za daného predpokladu, ktorý táto lema uvádza (platnosť podmienky (2.22a)), existuje interval, na ktorom nerovnosť $f(N/n) < f(1)$ neplatí. Preto na vyvrátenie platnosti *Lemy 2* uvádzame kontrapríklad a následne *Lemu 2a*, v ktorej spresníme interval, na ktorom daná nerovnosť neplatí.

Kontrapríklad. Chceme porovnať hodnoty funkcie $f(T) = \rho^{T-1}(1 - nTm)^{\gamma-1}$ v bodoch $T = 1$ a $T = N/n$ za platnosti podmienky (2.22a), t.j.

$$f(1) = \rho^0(1 - n1m)^{\gamma-1} = (1 - nm)^{\gamma-1} = (1 - n\frac{\lambda(\mu-1)}{\mu})^{\gamma-1} = (1 - \frac{n}{N}\frac{\mu-1}{\mu})^{\gamma-1}$$

$$f(N/n) = \rho^{N/n-1}(1 - n\frac{N}{n}m)^{\gamma-1} = \rho^{N/n-1}(1 - mN)^{\gamma-1} = \rho^{N/n-1}(1 - \frac{\lambda(\mu-1)}{\mu}$$

$$N)^{\gamma-1} = \rho^{N/n-1}(1 - \frac{\mu-1}{\mu})^{\gamma-1} = \rho^{N/n-1}\mu^{1-\gamma},$$

pričom $\lambda = \frac{1}{N}$ a $m = \frac{\lambda(\mu-1)}{\mu}$.
Z platnosti podmienky (2.22a) vyplýva, že

$$\rho < \mu^{-n\lambda(1-\gamma)} = \mu^{-n/N(1-\gamma)},$$

t.j. táto nerovnosť predstavuje horné ohraničenie pre premennú ρ. Vieme, že obmedzenia pre parametre modelu sú : $\mu > 1$, $0 < \frac{n}{N} < 1$ a $\gamma \in [0, 1)$.
Potom, ak si zvolíme konkrétne čísla, vieme spočítať horné ohraničenie pre ρ a funkčné hodnoty v bodoch $T = 1$ a $T = N/n$.

Nech $\mu = 2$, $\frac{n}{N} = 0.5$, $\gamma = 0.3$, potom $\rho < 0.784584$.
Ak si zvolíme :
1) $\rho 1 = 0.5$ $\quad f(1) = 1.22309$ $\quad f(\frac{n}{N}) = 0.81225$
2) $\rho 2 = 0.75$ $\quad f(1) = 1.22309$ $\quad f(\frac{n}{N}) = 1.21838$
3) $\rho 3 = 0.755$ $\quad f(1) = 1.22309$ $\quad f(\frac{n}{N}) = 1.2265$

Vidíme, že v prvých dvoch prípadoch platí nerovnosť $f(N/n) < f(1)$, ale v treťom prípade pre $\rho 3 = 0.755$ platí opačná nerovnosť $f(N/n) = 1.2265 > 1.22309 = f(1)$. To nás doviedlo k úvahe, že môže existovať unterval (ρ_{min}, ρ_{max}), kde nebude platiť nerovnosť $f(N/n) < f(1)$.

Horné ohraničenie pre ρ, ktoré vyplýva z platnosti podmienky (2.22a), bude predstavovať ρ_{max}, teraz musíme nájsť ρ_{min}. Najprv zistíme, čo by ρ muselo spĺňať, aby platila nerovnosť $f(N/n) < f(1)$:

$$\rho^{N/n-1}\mu^{1-\gamma} < (1 - \frac{n}{N}\frac{\mu-1}{\mu})^{\gamma-1}$$

$$\rho^{N/n-1} < (1 - \frac{n}{N}\frac{\mu-1}{\mu})^{\gamma-1}\mu^{\gamma-1}$$

$$\rho^{N/n-1} < [\mu - \frac{n}{N}(\mu-1)]^{\gamma-1}$$

$$\rho_{min} \equiv \rho < [\mu - \frac{n}{N}(\mu-1)]^{\frac{\gamma-1}{\frac{N}{n}-1}}. \qquad (2.25)$$

Pre naše konkrétne hodnoty $\mu = 2$, $\frac{n}{N} = 0.5$ a $\gamma = 0.3$ je hľadaný interval (0.75289; 0.784584), na ktorom neplatí nerovnosť $f(N/n) < f(1)$ za platnosti podmienky (2.22a).

Preto môžeme vysloviť lemu, ktorá sa stáva vedľajším produktom na ceste hľadania exaktnejších predpokladov.

Lema 2a. *Ak platí podmienka (2.22a), potom existuje interval*

$$([\mu - \frac{n}{N}(\mu-1)]^{\frac{\gamma-1}{\frac{N}{n}-1}}; \mu^{-n/N(1-\gamma)}), \qquad (2.26)$$

na ktorom neplatí nerovnosť $f(N/n) < f(1)$.

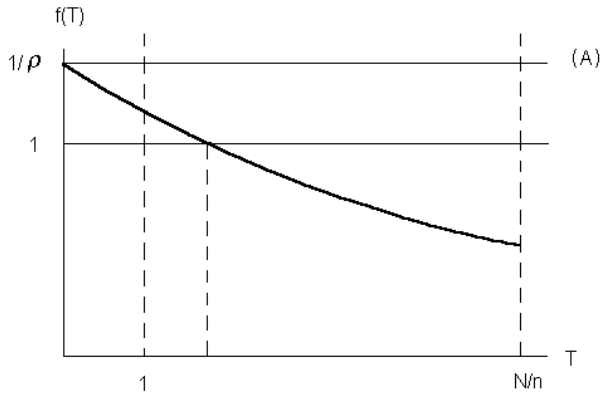
Dôkaz. Ak by si sme zvolili ľubovoľné $\rho > \rho_{min} \equiv \mu - \frac{n}{N}(\mu-1)]^{\frac{\gamma-1}{\frac{N}{n}-1}}$, potom neplatí nerovnosť $f(N/n) < f(1)$ (to plynie z (2.25)). Horný odhad intervalu vyplýva z platnosti podmienky (2.22a). □

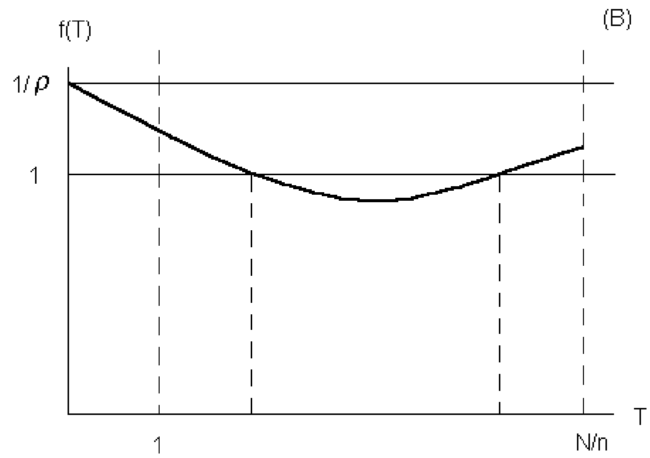
Pôvodne sme sa v tejto práci snažili sprísniť predpoklady tak, aby sme docielili platnosť žiadanej nerovnosti. V *Dodatku* uvádzame dve verzie predpokladov (moje1, moje2), ktoré nám zabezpečia jej platnosť. Ale skúsme zúžitkovať získané fakty a môžeme náš model rozšíriť o ďalšiu úvahu, ako sa môže funkcia $f(T)$ správať.

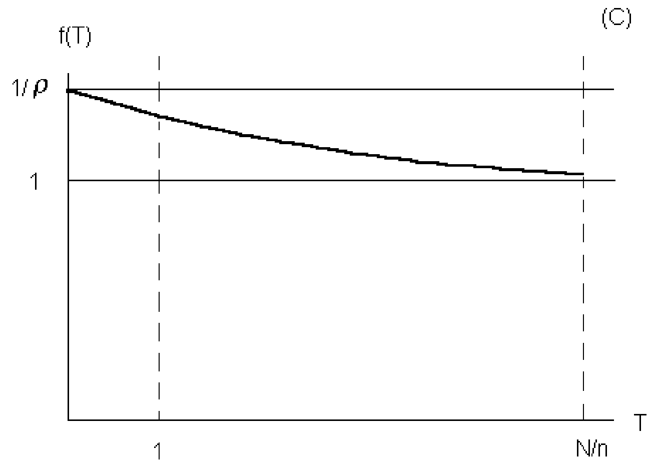
Vieme, že pre $\rho < \rho_{min} \equiv \mu - \frac{n}{N}(\mu-1)]^{\frac{\gamma-1}{\frac{N}{n}-1}}$ platí nerovnosť $f(N/n) < f(1)$ a ak zoberieme do úvahy *Lemu 1* a jej *Dôsledok*, potom funkcia $f(T)$ dosiahne svoje minimum niekde napravo od $T = 1$. Nasledovné tri obrázky popisujú tri možné priebehy funkcie $f(T)$. S istotou vieme, že minimum sa dosahuje napravo od $T = 1$, ale nevieme jednoznačne rozhodnúť, či sa minimum nachádza v intervale $(1; N/n)$ alebo je totožné s N/n alebo väčšie ako N/n. Z tohto hľadiska môžeme uvažovať o troch možných situáciach, kde je funkcia $f(T) > 1$ (t.j spĺňa podmienku (2.20a)) :

- obrázok (A) udáva množinu T, kde je funkcia $f(T) > 1$, túto vlastnosť majú iba nízke T,
- obrázok (B) udáva množinu T, kde je funkcia $f(T) > 1$, táto množina obsahuje nízke i vysoké T s medzerou uprostred (kde daná podmienka $f(T) > 1$ neplatí),

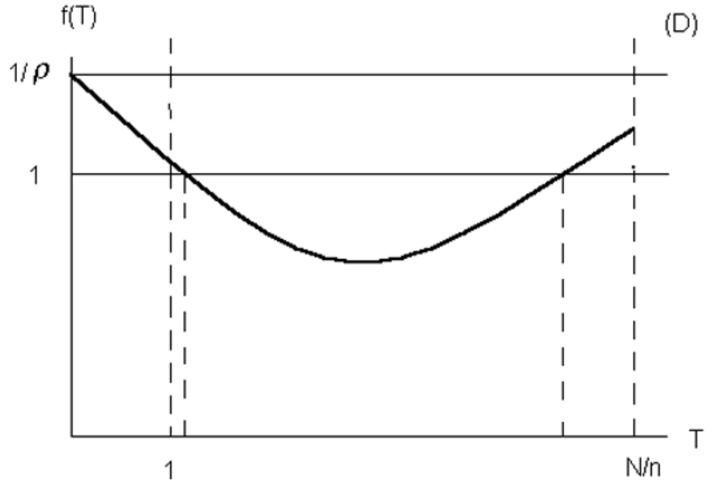
- obrázok (C) udáva množinu T, kde je funkcia $f(T) > 1$ na celom intervale $[1; N/n]$.







Na druhej strane, ak si zvolíme $\rho > \rho_{min} \equiv \mu - \frac{n}{N}(\mu - 1)]^{\frac{\gamma-1}{\frac{N}{n}-1}}$, potom platí opačná nerovnosť, t.j. $f(N/n) > f(1)$. Vieme, že funkcia $f(T)$ dosahuje kladné minimum, potom by daná funkcia mohla mať nasledovný priebeh (obr. D) :



Obrázok (D) udáva množinu T, kde je funkcia $f(T) > 1$, táto množina obsahuje nízke i vysoké T s medzerou uprostred (kde daná podmienka $f(T) > 1$ neplatí). Tieto možnosti demonštujú mnohopočetnosť rovnovážnych stavov.

Rôzne rovnovážne stavy nastávajú, keď očakávania riadia načasovanie investícií. V 1-cykle agenti vždy očakávajú slabý hospodársky rozmach a pohotovo inovujú. V cykloch s dlhšou periódou agenti očakávajú nízku hladinu agregovaného dopytu a správne predpokladajú príchod veľkého hospodárskeho rozmachu. Na porovnanie cyklov s kratšou a dlhšou periódou, dlhšie cykly majú dlhšiu a hlbšiu depresiu-najnižší bod rozvoja národného hospodárstva (po odstránení trendu) a širší rozptyl rozmachu. Prípadne môžu existovať rovnovážne stavy s premenlivou dĺžkou cyklu. Akonáhle firmy nebudú chcieť počkať na nasledujúci T-rozmach, perióda súčasného cyklu neovplyvní periódu budúceho cyklu.

Je pozoruhodné, že ak podmienky (2.20a) a (2.22a) spĺňajú ostrú nerovnosť, potom žiaden z rovnovážnych stavov nie je citlivý na malé zmeny procesu agregovaného dopytu. Napríklad predpokladajme, že firma v nejakom sektore urobí chybu a inovuje v období depresie. Ak je dopad tejto chyby na agregovaný dopyt v čase hospodárskeho rozmachu zanedbateľný, podmienka (2.20a) bude platiť a ostatné firmy sa budú držať svojho pôvodného plánovania, kedy inovovať. Rovnovážne stavy sa takto stávajú nemennými voči malým exogénnym zmenám v dopyte.

2.5 Koordinácia, ziskovosť a efektívnosť.

V tejto práci opisujeme cyklické a acyklické rovnováhy, ktoré sú determinované očakávaniami agentov. Jedným možným rovnovážnym stavom je okamžité zavedenie inovácií (*okamžitá realizácia*), v tomto prípade produkcia rastie bez cyklov (spôsobuje acyklický vývoj). Ak sú očakávania nezávislé, ekonomika by mohla skončiť v jednej z mnohých dokonale-predvídateľných cyklických rovnováh (*odložená realizácia*). Tieto rovnovážne stavy sú Pareto-optimálne, pričom najrentabilnejšia rovnováha nemusí byť najefektívnejšia, t.j. prináša zisk, ale môže byť spoločensky nevýhodná. Na druhej strane očakávania nemusia byť čisto náhodné, môžu odzrkadľovať preferencie agentov na trhu. Napríklad niektoré rovnováhy môžu generovať vyššie zisky pre všetky firmy, ktorých činnosť ovplyvňuje správanie rovnováhy. V tejto časti si ukážeme prípad, že ak si inovácie nevyžadujú fixné náklady, potom je acyklická rovnováha najrentabilnejšou a najefektívnejšou (pre porovnanie v nasledujúcej časti *2.6 Príklad s fixnými nákladmi* uvedieme prípad so súčasne vynaloženými fixnými nákladmi, v ktorom je najrentabilnejšia rovnováha cyklická, ale najefektívnejšia rovnováha acyklická).

V čase 1 uvažujme o firme, ktorá počas svojej existencie pozoruje svoje zisky pri rôznych rovnováhach. Ak sú jej zisky najvyššie v T^*-cykle, potom všetky firmy, ktoré získavajú inovácie do času T^*, budú uprednostňovať hospodársky rozmach v T^* pred akýmkoľvek skorším rozmachom. A čo viac, firmy si uvedomujú, že väčší rozmach ako v čase T^* nemožno dosiahnuť, dokonca ani po T^*, pretože nové kolo inovácií zamedzí oneskoreniu ostatných firiem. V tomto prípade bude T^*-cyklus najziskovejší pre všetky firmy, ktoré získavajú inovácie do času T^* a v tomto zmysle je tento fakt najdôležitejší. (Je potrebné všimnúť si, že nie všetky firmy uprednostňujú rozmach v T^*. Napríklad ak je $T^* = 3$, firmy ktoré získavajú inovácie v čase 4, budú uprednostňovať 2-cyklus.) Prípadne, ak firmy získavajú inovácie v čase 1, je rozumné očakávať, že ich zavedú okamžite. V tomto prípade je rovnomerný rast ústredným výsledkom.

Teraz si pripomeňme vzťah, ktorý sme odvodili v časti *2.4 Mnohopočetnosť rovnovážnych stavov*. Naše úvahy sa týkali odvodenia vzťahu pre diskontované zisky, pričom sme uvažovali o T-cykle pre $T = 1, ..., T^*$. Súčasnú hodnotu zisku, ktorý firma získa v čase hospodárskeho rozmachu T (ak za súčasnosť zoberieme čas

1) predstavuje množstvo $mLf(T)$. Podľa *Lemy 1* a na základe vlastností funkcie $f(T)$ je toto množstvo najväčšie v 1-cykle, t.j. pre $T = 1$ (za daných predpokladov pre funkciu $f(T)$ platí $f(1) > f(T^*)$ a funkcia $f(T)$ dosahne na intervale R^+ svoje minimum). V nasledujúcej časti ukážeme zovšeobecnenie, v ktorom budú T^*-cykly najziskovejšie.

Ďalšiou prirodzenou otázkou sú preferencie spotrebiteľa týkajúce sa rovnováhy. Aj keď sa intuitívne javí, že spotrebiteľ bude uprednostňovať 1-cyklus pred ostatnými, dôkaz tejto vlastnosti nie je triviálny. V 1-cykle platí, že spotrebiteľ dosahuje zníženie cien najrýchlejšie a produkcia napreduje technologicky najrýchlejším možným tempom. Dôsledkom toho je, že ak porovnáme T-cyklus s 1-cyklom, vo všetkých časových obdobiach iných ako v čase hospodárskeho rozmachu T je spotrebiteľ jednoznačne zvýhodnený v 1-cykle. V T-rozmachoch však vysoké zisky môžu kompenzovať vyššie ceny. Vezmime si napríklad časové obdobie T^* v T^*-cykle. V tomto čase sa inovácie vyskytujú vo všetkých odvetviach a navyše nenastane odklon od stabilnej polohy, keďže rozdiel medzi nákupnou a predajnou cenou je pre všetky tovary rovnaký. V čase T^* v 1-cykle nastáva odklon od stabilnej polohy, keďže iba n cien z N prekročí hraničné náklady. Preto je blahobyt v čase T^* vyšší v T^*-cykle. V podstate, pri extrémne vysokých mierach technologického pokroku (t.j. technologických mierach, ktoré zabezpečia nízku diskontnú mieru ρ pre podmienku (2.22a)) spotrebiteľ uprednostní T^*-cyklus.

Príklad 2. Pre konkrétne paramerte $T^* = 2$ a $\gamma = 0$ porovnajme užitočnosť pri $T = 1$ a T^*.

Predtým ako uvedieme riešenie si zavedieme funkciu $U(z)$, ktorá bude predstavovať celkovú užitočnosť dosiahnutú v rovnovážnom stave počas prvých T období v z-cykle. Nás budú konkrétne zaujímať 1-cyklus a T-cyklus. Ďalej si pre prvých T časových období 1-cyklu zadefinujme $f_t = \prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda}$, kde x_{tj} je rovnovážna spotreba tovaru j v čase t v 1-cykle, a podobne $g_t = \prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda}$, kde x_{tj} je rovnovážna spotreba tovaru j v čase t v T-cykle. Potom

$$U(1) = \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1}(f_t^{1-\gamma}) \tag{2.28a}$$

a

$$U(T) = \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1}(g_t^{1-\gamma}). \tag{2.28b}$$

Riešenie. Našou úlohou je teda porovnať $U(1)$ a $U(2)$, t.j. rozdiel pre konkrétne parametre $T^* = 2$ a $\gamma = 0$ je

$$U(1) - U(2) = (1 + \rho\mu^{1/2})[2\mu/(\mu + 1)] - (1 + \rho\mu).$$

Ale vráťme sa späť ku podmienkam (2.20a) a (2.22a), pri daných $T^* = 2$ a $\gamma = 0$ sa tieto dve podmienky zúžia na

$$\left.\begin{array}{r} \rho^{T-1}(1 - nTm)^{\gamma-1} > 1 \\ \rho\mu^{n\lambda(1-\gamma)} < 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \rho\mu > 1 \quad \text{a} \quad \rho\mu^{1/2} < 1.$$

Ak si zvolíme za $\rho = 1/4$ a $\mu = 9$, budú splnené podmienky (2.20a) a (2.22a). Potom rozdiel $U(1) - U(2) = -0.1 < 0$ je záporný, t.j. pri extrémne vysokých mierach technologického pokroku (napr. $\mu = 9$) spotrebiteľ uprednostní T^*-cyklus (v našom prípade 2-cyklus). Napriek takému záveru platí nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 2. *Nech platí podmienka (2.22a) a nech je $\mu \leq T$. Potom je celoživotná užitočnosť spotrebiteľa v rovnovážnom stave v 1-cykle vyššia ako v rovnovážnom stave v T-cykle, t.j. platí $U(1) > U(T)$.*

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia je pre svoju rozsiahlosť uvedený v *Dodatku.*

Obmedzenie $\mu \leq T$ je ekonomicky bezvýznamné, aj keď je miernejšie ako obmedzenie $\mu < 2$. Ak si za periódu zoberieme rok, potom "rozumná" hodnota miery technologického pokroku v priemernom odvetví nemôže byť ani zďaleka taká vysoká.

Z *Tvrdenia 2* nám vyplýva, že spotrebiteľ uprednostňuje okamžité zavedenie inovácií, t.j. jeho užitočnosť je vyššia v 1-cykle ako v T-cykle. Takže acyklická rovnováha sa stáva najefektívnejšou. Na druhej strane, ak sú očakávania skutočne nezávislé a vedú k cyklickej rovnováhe, spotrebiteľov blahobyt sa znižuje aj napriek potenciálu dosiahnutému prostredníctvom okamžitých inovácií. Samozrejme, žiadna rovnováha v tomto modeli nie je efektívna.

Na určenie zdrojov neefektívnosti modelu je potrebné vziať do úvahy odchýlky z Walrasovho modelu :

- po prvé, firmy sa nesprávajú ako cenoví príjemcovia, pretože rozoznávajú efekt dnes zavedených inovácií na zajtrajšie ceny,

- po druhé, firma, ktorá inovuje, zlepšuje produktívne možnosti imitátorov, keďže tí nemôžu imitovať, kým sa inovácie nezrealizujú.

Túto situáciu opísuje nasledovný príklad. Kvôli konštantným výnosom z rozsahu dosahujú imitátori nulový zisk (pretože hrajú Bertrandovu hru prinajmenšom proti inovátorovi). Z toho dôvodu si nemôžu dovoliť zaplatiť právo na imitovanie. Aj keby sme zaviedli trh pre nákup/predaj práv na imitovanie, pričom by sme nechali inovátora určiť cenu, inovátor by nepredal žiadne právo za cenu vyššiu ako nula a taktiež by ju nechcel predať za nulovú cenu. To má za následok, že sa tento trh imitácií vyčistí pri veľmi nízkej cene, pri ktorej sa dopyt a ponuka rovnajú nule v každom časovom období. Absencia akceptovania ceny je príčinou neefektívnosti. V podstate je možné ukázať, že ak sa firmy správajú ako cenoví príjemcovia v podobnom zovšeobecnenom modeli so znižujúcimi výnosmi (aby boli v rovnovážnom stave dosiahnuté zisky), nie je možné dosiahnuť oneskorené zavedenie inovácií.

2.6 Príklad s fixnými nákladmi.

Predpokladajme, že zavedenie inovácie si vyžaduje jednorazový výdaj F jednotiek práce v čase, v ktorom sa realizácia inovácie uskutoční. Imitácia tak ako pred tým prebehne zdarma hneď po inovácii. Prítomnosť fixných nákladov spôsobí, že si firmy zvolia oneskorenú realizáciu svojich inovácií v čase hospodárskeho rozmachu. Takže cyklická rovnováha sa stáva najrentabilnejšou, t.j. prináša najväčší zisk. Úpravou predchádzajúcich analýz dostaneme zisk firmy, ktorá inovuje v čase hospodárskeho rozmachu T-cyklu, t.j.

$$\pi_T = \frac{mL - F}{1 - nTm} = my_T - F, \tag{2.18a}$$

pričom je potrebné predpokladať, že

$$mL - F \geq 0. \tag{2.29}$$

Pri odvodení podmienky, za ktorej je firma ochotná odložiť svoje rozhodnutie *"implementovať inováciu"* do času T, budeme aplikovať podobný postup ako sme uviedli v časti *2.3 Konštrukcia periodickej rovnováhy.* Aby firma bola ochotná odložiť zavedenie inovácie o dobu T, musí jej odložená realizácia priniesť väčší zisk, t.j. musí platiť

$$\pi_T / D_{T-1} > \pi_1, \tag{2.20}$$

kde $D_{T-1} = (1 + r_1)...(1 + r_{T-1})$. Úroková miera v časoch $1, ..., T - 2$ kopíruje úrokovú mieru z modelu v časti *2.3 Konštrukcia periodickej rovnováhy* a úroková miera pred hospodárskym rozmachom je

$$1+r_{T-1} = \frac{1}{\rho}(\frac{y_T}{y_{T-1}})^{\gamma} \frac{(\prod_{j=1}^{N} p_{Tj}^{\lambda})^{1-\gamma}}{(\prod_{j=1}^{N} p_{T-1,j}^{\lambda})^{1-\gamma}} = \frac{1}{\rho}\frac{(\frac{L-nTF}{1-nTm})^{\gamma}}{(L)^{\gamma}} = \frac{1}{\rho}(\frac{L-nTF}{L})^{\gamma}(1-nTm)^{-\gamma} \tag{2.19a}$$

pretože sa ceny nemenia v čase od $T - 1$ do T a príjem v čase T je $y_T = \frac{L-nTF}{1-nTF}$. Úpravami dostaneme ekvivalentnú podmienku podmienke (2.20)

$$\left.\begin{aligned} \pi_T &= \frac{mL - F}{1 - nTm} \\ D_{T-1} = (1 + r_1)...(1 + r_{T-1}) &= (\frac{1}{\rho})^{T-1}(\frac{L - nTF}{L})^{\gamma}(1 - nTm)^{-\gamma} \\ \pi_1 &= mL - F \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\rho^{T-1}(1 - nTm)^{\gamma-1}(\frac{L}{L - nTF})^{\gamma} > 1, \tag{2.20b}$$

t.j. ak platí posledná nerovnosť firma, ktorej inovovanie si vyžaduje fixné náklady F, je ochotná odložiť zavedenie inovácie o dobu T.

Fixné náklady zvyšujú možnosť existencie T-cyklov, pretože za prítomnosti fixných nákladov je agregovaný dopyt v čase hospodárskeho rozmachu T nižší, a tým je úroková miera r_{T-1} nižšia (porovnaj úrokovú mieru (2.19) z časti *2.3 Konštrukcia periodickej rovnováhy* a úrokovú mieru (2.19a), kde berieme do úvahy fixné náklady). Môžeme si všimnúť, že pomer ziskov π_T/π_1 v modeli, kde firma neuvažovala o fixnných nákladoch (v časti *2.3 Konštrukcia periodickej rovnováhy*), je rovnaký pomeru ziskov v modeli s fixnými nákladmi a to $\pi_T/\pi_1 = (\frac{mL}{1-nTm})/(mL) = (\frac{mL-F}{1-nTm})/(mL-F) = 1/(1-nTm)$. Základným rozdielom, ktorý je spôsobený prítomnosťou fixných nákladov je, že nastáva zníženie úrokovej miery v čase $T-1$, a tým sa zvyšujú diskontované zisky v hospodárskom rozmachu T (všimnite si, že ak platí $mL - F \geq 0 \Rightarrow F \leq mL = \frac{\lambda(\mu-1)}{\mu}L < \lambda L \Rightarrow nTF < nT\lambda L < L$). Podmienka, že firma nie je ochotná čakať na nasledujúci T-rozmach ostáva, takže môžeme sformulovať nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 3. *Ak existuje T-cyklus v modeli bez fixných nákladov, potom existuje T-cyklus v modeli s fixnými nákladmi, pričom musí byť splnený predpoklad*

$$mL - F \geq 0. \tag{2.29}$$

Z *Tvrdenia 3* vyplýva, že problém mnohopočetnosti rovnovážnych stavov je prinajmenšom taký rozsiahly, ako to bolo v prípade bez fixných nákladov. Navyše, keďže sa diskontované zisky s F zvyšujú, firma, ktorá získa inováciu v čase 1, bude teraz uprednostňovať T^*-cyklus.

Lema 3. *Ak je F o niečo menšie ako mL, potom je T^*-cyklus najrentabilnejší za predpokladu, že*

$$\rho^{(N/n)-1}[\mu - (\frac{n}{N})(\mu-1)] > 1. \tag{2.30}$$

Dôkaz. Zo vzťahu (2.18a) nám vyplýva, že

$$\pi_{T^*} = \frac{mL-F}{1-nT^*m} = \frac{mL-F}{1-n\frac{N}{n}\frac{\lambda(\mu-1)}{\mu}} = \frac{mL-F}{\mu^{-1}}$$

a

$$\pi_1 = \frac{mL-F}{1-nm},$$

kde $T^* = N/n$, $m = \lambda(\mu-1)/\mu$ a $\lambda = 1/N$. Našou úlohou je porovnať zisky π_{T^*} a π_1, ale nesmieme zabudnúť na fakt, že sú vyjadrené vzhľadom na rôzne časy. Potom diskontovaná hodnota zisku π_{T^*} je

$$\pi_{T^*}/D_{T^*-1} = \pi_{T^*}/[(\frac{1}{\rho})^{T^*-1}(\frac{L-nT^*F}{L})^{\gamma}(1-nT^*m)^{-\gamma}] =$$

$$= \rho^{(N/n)-1}\mu^{1-\gamma}(\frac{L}{L-NF})^{\gamma}(mL-F).$$

Ďalej si vyjadríme podiel

$$\frac{\pi_{T^*}/D_{T^*-1}}{\pi_1} = \mu^{1-\gamma}(\frac{L}{L-NF})^{\gamma}(1-nm)\rho^{(N/n)-1} \approx \mu(1-nm)\rho^{(N/n)-1},$$

ak platí $F \approx mL$. Ak upravíme výraz $\mu(1-nm) = \mu - (\frac{n}{N})(\mu - 1)$ a za platnosti predpokladu (2.30), je podiel $\frac{\pi_{T^*}/D_{T^*-1}}{\pi_1} > 1$, t.j. T^*-cyklus prináša väčší zisk.
□

Mali by sme poznamenať, že podmienka (2.30) implikuje existenciu T^*-cyklu. Ak parametrické hodnoty spĺňajú súčasne nerovnosti (2.22a) a (2.30), môžu sa firmy dostať do T^*-cyklu. Ak je v tom istom čase F tesne pod mL, spotrebiteľ uprednostňuje 1-cyklus. Príčinou je, že zisky sú prakticky rovné nule, a preto "vysoké" zisky v T nemôžu vykompenzovať vysoké ceny z 1-cyklu. V tomto špeciálnom prípade je jednoznačné, že spotrebiteľ uprednostňuje okamžitú inováciu. Fixné náklady nám môžu spôsobiť, že si firmy vyberú rovnováhu, ktorá nevyhovuje spotrebiteľom. Ak sa však očakávania prispôsobia tomuto výberu, dostaneme dokonale-predvídateľnú rovnováhu, ktorej efektívnosť môže byť nižšia ako efektívnosť menej ziskovej rovnováhy.

2.7 Zhrnutie modelu.

Model a špeciálne prípady uvedené v tejto práci sa pokúsili prešetriť dopad očakávaní týkajúcich sa vývinu makroekonomických premenných na rozhodnutia agentov zrealizovať alebo odložiť investičné projekty. Je zrejmé, že nastávajú dve možné situácie :

i) firma zavedie inováciu v čase objavu (tzv. *okamžitá realizácia*),

ii) firma odloží zavedenie (tzv. *odložená realizácia*).

Sprievodná teória opisuje cyklické a acyklické rovnováhy, ktoré sú determinované očakávaniami agentov. Okamžitá realizácia spôsobuje *acyklický* vývoj, naopak odložená realizácia *cyklický* vývoj.

Zaujímavým faktom je, že firmy sú ochotné zaviesť inováciu v čase, keď i iné firmy inovujú, t.j. *zosynchronizovať* svoje rozhodnutia. Synchronizácia inovácií má za následok vznik rôznych dokonale-predvídateľných rovnovážnych stavov. Mnohopočetnosť rovnovážnych stavov nás núti zamyslieť sa nad otázkou, akú rovnováhu budú firmy resp. spotrebitelia uprednostňovať. V časti *2.5 Koordinácia, ziskovosť a efektívnosť* sme uviedli ekonomiku, v ktorej oba subjekty, t.j. firmy a spotrebitelia, volia rovnováhu s okamžitým zavedením inovácií. Firmy uprednostňujú okamžitú implementáciu z dôvodu vyšších diskontovaných očakávaných ziskov a pri spotrebiteľoch sme poukázali na fakt, že ak nie je miera technologického pokroku príliš vysoká, spotrebiteľ dá potom prednosť okamžitému zavedeniu. Naopak ak začneme uvažovať o fixných nákladoch (v časti *2.6 Príklad s fixnými nákladmi*), zisky firmy sú vyššie pri odloženej realizácii inovácií. Základným rozdielom, ktorý je spôsobený prítomnosťou fixných nákladov je, že nastáva zníženie úrokovej miery v čase $T-1$, a tým sa zvyšujú diskontované zisky v hospodárskom rozmachu T, t.j. diskontované zisky sú pri oneskorení vyššie. V časti *2.5 Koordinácia, ziskovosť a efektívnosť* uvádzame, že ak si inovácie nevyžadujú fixné náklady, potom je acyklická rovnováha najrentabilnejšou a najefektívnejšou. Pre porovnanie v časti *2.6 Príklad s fixnými nákladmi* uvedieme prípad so súčasne vynaloženými fixnými nákladmi, v ktorom je najrentabilnejšia rovnováha cyklická, ale najefektívnejšia rovnováha acyklická.

Pri hodnotení tohoto modelu môže byť vhodné spomenúť štyri podmienky, ktoré sa zdajú byť zodpovedné za cyklickú rovnováhu :

i) musia existovať konštantne sa dopĺňajúce ponuky čistých ziskov,

ii) tieto možnosti nemôžu byť využívané do nekonečna bez toho, aby boli čisté zisky eliminované vstupmi,

iii) zisky v rôznych odvetviach ekonomiky musia vyúsťovať do zvýšenia dopytu v ostatných hospodárskych odvetviach,

iv) tieto prelivy dopytu musia byť podstatné v okamihu príjmu ziskov.

Táto diskusia naznačuje, že nepokladáme inovácie za rozhodujúcu časť problému : ide jednoducho o extrémne výhodný spôsob vytvorenia modelu dočasných čistých ziskov. Navyše, prvé tri podmienky zodpovedajú trhovej ekonomike.

Absencia kapitálu je však kritickým predpokladom, ktorý nemožno odstrániť bez ponúknutia alternatívy. Predpokladajme, že do modelu pridáme kapitál. Potom počas recesie (poklesu národného hospodárstva), kedy si spotrebitelia uvedomia, že zlepšenie nastane v budúcnosti, sa spotrebitelia snažia nesporiť (prípadne čerpať z úspor), a tým znížiť budúci základný kapitál a vyhladiť tak spotrebu medzi jednotlivými časovými obdobiami. V tomto prípade nenastane hospodársky rozmach a ani cyklická rovnováha nebude možná. Pri špecifikácií modelu bolo uvedené, že fyzické záporné sporenie nie je možné, pretože neexistuje kapitál. Keď nastane vyrovnanie fluktuácií príjmu prostredníctvom úrokových sadzieb sa stimulujúce podnety, aby firma nebola ochotná počkať na hospodársky rozmach, stávajú nepostačujúcimi, t.j. nastáva eliminácia cyklov.

Ohľadom kapitálu potrebujeme ďalšie predpoklady na prispôsobenie cyklov implementácie. Po prvé, obmedzenie pôžičiek môže zamedziť možnostiam na vyhladenie spotreby. Výsledky tejto práce sa môžu aplikovať v modeli s prekrývajúcimi sa generáciami so záverom, že ak si podnikatelia nemôžu požičať na budúce zisky, cyklické rovnováhy nie sú prípustné. Alternatívna formulácia, ktorá je možno vhodným predmetom ďalšieho výskumu, môže vzniknúť, ak vezmeme do úvahy trvale nevratnú investíciu ako Arrow [1968]. Efekt stáleho kapitálu by mal obmedziť množstvo fyzických záporných úspor, ktoré sú v ekonomike možné. Dôsledkom toho si môže stály kapitál prispôsobiť cykly implementácie, i keď túto možnosť sme v tejto práci neoverili.

3 ZÁVER

S využitím dostupnej literatúry a teoretických poznatkov bol v tejto práci prešetrený makroekonomický model *Andreia Shleifera* Implementácia rozhodnutí (Implementation Cycles [1986]).

V tejto práci sme sa venovali ekonomickému prostrediu, v ktorom firmy získajú nové technológie "*inovácie*" v rozličných časoch, ale tieto inovácie budú *implementovať* simultánne. Tak sa *synchronizácia* stáva charakteristickou črtou agregovaného správania. Firmy sa rozhodnú pre synchronizáciu z dôvodu, že môžu profitovať z vysokého agregovaného dopytu. Naopak vysoký agregovaný dopyt plynie zo simultánnych inovácií vo viacerých odvetviach. Ďalej si firmy môžu zvoliť *oneskorené zavedenie* svojich rozhodnutí, pretože chcú lepšie zosúladiť svoje kroky.

V tejto ekonomike nastávajú viacnásobné cyklické rovnováhy, ktoré sú determinované očakávaniami podnikateľov. Tieto rovnovážne stavy sú Pareto-optimálne, pričom najrentabilnejšia rovnováha nemusí byť najefektívnejšia, t.j. prináša zisk, ale môže byť spoločensky nevýhodná. Stabilizačná politika môže miestami zvýšiť blahobyt krajiny, ale ak v období hospodárskeho rozmachu si inovácie vyžadujú fixné náklady, potom stabilizačná politika môže pozastaviť celý technologický vývoj.

Pri prešetrení tohto makroekonomického modelu sa ukázalo, že spĺňa uvedené vlastnosti, navyše sa nám podarilo upresniť priebeh funkcie $f(T)$, ktorá charakterizuje rovnovážne stavy konštantnej dĺžky. Pôvodná práca popisuje tri možné priebehy tejto funkcie, nám sa vďaka *Kontrapríkladu* a *Leme 2a* podarilo obohatiť túto prácu o ďalšiu možnosť, ako by sa funkcia $f(T)$ mohla správať.

Skonštruovaný model môže napomôcť pri štúdiu a analýzach makroekonomických modelov, ktorých sprievodným znakom je agregovanie. Proces *agregácie* (zoskupenia) nám umožňuje zjednodušiť a sprehľadniť výsledky získané v makroekonomickej oblasti, ale na druhej strane nás núti zamyslieť sa nad otázkami, akými sú synchronizácia alebo zhladzovací efekt. Dúfame, že sme touto prácou zodpovedali úvodnú otázku venovanú problematike agregovaných spotregiteľov resp. agregovaných firiem.

4 LITERATÚRA

[1] Andrei Shleifer : Implementation Cycles, Journal of Political Economy, 1986, vol. 94, no. 6, The University of Chicago.

[2] Cooper, Haltiwanger a Power : Timing of Discrete choices, 1997.

[3] Farmer, Drew Fudenberg, Jean Tirole : Game Theory, The MIT Press, London, England.

[4] Olivier Blanchard : In Honor of Andrei Shleifer : Winner of the John Bates Clark Medal, 2000, MIT, NBER.

[5] Douglas Gale : Dynamic coordination games, 1994, Economics Department, Boston University, USA.

[6] B. Felderer, S. Homburg : Makroekonomika a nová makroekonomika, 1995, preklad : Prof. Dr. Mikuláš Luptáčik a kolektív, ELITA.

[7] www.economics.harvard.edu/∼ashleifer/as-cv.pdf

5 DODATOK

Tvrdenie 2. *Nech platí podmienka (2.22a) a nech je $\mu \leq T$. Potom je celoživotná užitočnosť spotrebiteľa v rovnovážnom stave v 1-cykle vyššia ako v rovnovážnom stave v T-cykle.*

Dôkaz. Najprv zavedieme označenie $\alpha = n/N$, potom $T^* = 1/\alpha$. Nech $L(T)$ je rovnovážna celoživotná funkcia užitočnosti agenta v T-cykle pre $T = 1, ..., T^*$. Neskoršie dokážeme, že pri porovnávaní funkcií $L(1)$ a $L(T)$ stačí brať do úvahy prvých T časových období. Taktiež zavedieme funkciu $U(T)$, ktorá bude predstavovať celkovú užitočnosť dosiahnutú v rovnovážnom stave počas prvých T období v T-cykle a funkciu $U(1)$, ktorá bude podobne predstavovať celkovú užitočnosť dosiahnutú v rovnovážnom stave počas prvých T období v 1-cykle. Funkciu $v(T)$ označíme ako užitočnosť v T-rozmachu. Ďalej si pre prvých T časových období 1-cyklu zadefinujme $f_t = \prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda}$, kde x_{tj} je rovnovážna spotreba tovaru j v čase t v 1-cykle, a podobne $g_t = \prod_{j=1}^{N} x_{tj}^{\lambda}$, kde x_{tj} je rovnovážna spotreba tovaru j v čase t v T-cykle. Potom

$$U(1) = \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1}(f_t^{1-\gamma})$$

a

$$U(T) = \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1}(g_t^{1-\gamma}).$$

Dôkaz tohto tvrdenia je rozdelený do piatich krokov. V *Kroku 1* ukážeme, že ak blahobyt v rovnovážnom 1-cykle je porovnateľný s blahobytom v rovnovážnom T-cykle, potom je postačujúce brať do úvahy prvých T časových období individuálneho života. *Krok 2* a Krok 3 ohraničuje parametrický priestor pre prípad T-cyklového blahobytu : v *Kroku 2* ukážeme, že je postačujúce zvoliť $\gamma = 0$ a v *Kroku 3*, že pre $\gamma = 0$ stačí zobrať najväčšie dostupné ρ, ktoré je určené podmienkou (2.22a) na $\rho = \mu^{-n/N}$. V *Kroku 4* dokážeme, že $v(t)$ nie je nikdy väčšia ako μ^{α}. Nakoniec v *Kroku 5* ukážeme, že $U(1) > U(T)$, keď platí $\mu < T$.

Krok 1 :

$L(1) > L(T)$ práve vtedy, keď $U(1) > U(T)$. Pre rovnovážny 1-cyklus a taktiež pre rovnovážny T-cyklus platí, že sprievodné javy spojené s časovými obdobiami $T+1, ..., 2T$ sú také isté ako v časoch $1, ..., T$, okrem nT, kedy ceny klesajú na $1/\mu$-inu pôvodnej ceny. To spôsobuje, že užitočnosť v čase $T+x$ (kde $x = 1, ..., T$) je rovná $\rho^T \mu^{nT\lambda(1-\gamma)} \times$[užitočnosť v čase x]. Potom platí

$$L(1) = \frac{U(1)}{1 - \rho^T \mu^{nT\lambda(1-\gamma)}}$$

a

$$L(T) = \frac{U(T)}{1 - \rho^T \mu^{nT\lambda(1-\gamma)}}.$$

Platnosť podmienky (2.22a)

$$\rho\mu^{n\lambda(1-\gamma)} < 1$$

nám zabezpečí konečnosť oboch výrazov a platnosť tvrdenia $L(1) > L(T)$ práve vtedy, keď $U(1) > U(T)$.

Krok 2 :

Ďalej platí, ak $U(1) > U(T)$ pre $\gamma = 0$, potom $U(1) > U(T)$ pre $\gamma > 0$. Pri derivovaní dostaneme, že $\frac{\partial U(1)}{\partial f_t} = (f_t)^{-\gamma}\rho^{t-1}$ a $\frac{\partial U(T)}{\partial g_t} = (g_t)^{-\gamma}\rho^{t-1}$. Pri 1-cykle je príjem (mzdy sú vyjadrené v jednotkách) konštantný, ale ceny klesajú. Teda

$$f_i > f_j \qquad \text{pre } i > j.$$

Taktiež pred časom T sa individum teší viac z vyššieho príjmu a z nižších cien v 1-cykle ako v T-cykle. Teda

$$g_i < f_i \qquad \text{pre } i < T.$$

Ak platí $g_T < f_T$, potom sme dokázali $U(1) > U(T)$. Problém vznikne, ak je $g_T > f_T$ a odteraz sa budeme zaoberať týmto prípadom. Potom má naša hypotéza tvar :

$$\sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1} f_i > \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1} g_i.$$

Nech je $\gamma > 0$ a pomocou *Vety o strednej hodnote* nájdime

$$U(T) - U(1) = \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1} h_i^{-\gamma}(g_i - f_i),$$

kde

$$f_T < h_T < g_T$$

a

$$g_i < h_i < f_i \qquad \text{pre } i < T.$$

Ak skombinujeme

$$\left.\begin{array}{r} f_T < h_T < g_T \\ g_i < h_i < f_i \qquad \text{pre } i < T \\ f_i > f_j \qquad \text{pre } i > j \end{array}\right\} \Longrightarrow h_T > f_T > f_i > h_i \qquad \text{pre } i < T.$$

Z poslednej nerovnosti vyplýva, že pre ľubovoľné $i < T$ máme

$$h_i^{-\gamma} > h_T^{-\gamma}.$$

Potom dostaneme

$$\left.\begin{array}{r} h_i^{-\gamma} > h_T^{-\gamma} \\ g_i < f_i \qquad \text{pre } i < T \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1} h_i^{-\gamma}(g_i - f_i) <$$

$$< \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1} h_T^{-\gamma}(g_i - f_i) = h_T^{-\gamma}(\sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1} g_i - \sum_{i=1}^{T} \rho^{i-1} f_i) < 0.$$

A to dokazuje tvrdenie.

Krok 3 :

Ak je $\gamma = 0$ a $U(1) > U(T)$ pre nejaké ρ_1, potom $U(1) > U(T)$ pre všetky $\rho < \rho_1$.

Zoberieme do úvahy výsledky z *Kroku 2* a predpokladáme, že

$$\sum_{t=1}^{T-1} \rho_1^{t-1}(f_t - g_t) > \rho_1^{T-1}(g_T - f_T).$$

Ak prenásobíme obe strany výrazom ρ^{T-1}/ρ_1^{T-1}, dostaneme

$$\sum_{t=1}^{T-1} \frac{\rho^{T-1}}{\rho_1^{T-t}}(f_t - g_t) > \rho^{T-1}(g_T - f_T).$$

Ale platí $\rho^{T-1}/\rho_1^{T-t} < \rho^{t-1}$ pre $\rho < \rho_1$. Preto

$$\sum_{t=1}^{T-1} \rho^{t-1}(f_t - g_t) > \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\rho^{T-1}}{\rho_1^{T-t}}(f_t - g_t) > \rho^{T-1}(g_T - f_T).$$

Pretože podmienka (2.22a) nám udáva horné ohraničenie pre ρ, odteraz budeme mať $\rho = \mu^{-\alpha}$ pre $\gamma = 0$.

Krok 4 :

Teraz zrátame horné ohraničenie pre užitočnosť v T-rozmachu, t.j. pre $v(T)$:

$$v(T) = \frac{1}{1 - T\alpha[(\mu-1)/\mu]}\rho^{T-1} = \rho^{T-1}\frac{\mu}{(T^* - T)\alpha(\mu-1)+1} =$$

$$= \frac{\mu^{(T^*-T)\alpha}}{(T^* - T)\alpha(\mu-1)+1}\mu^{\alpha}.$$

Poslednú nerovnosť sme dostali použitím vzťahu $\rho = \mu^{-\alpha}$. Potom pomocou *Vety o strednej hodnote* dostaneme

$$\mu^{(T^*-T)\alpha} = 1 + (\mu-1)(T^* - T)\alpha y^{-T\alpha}$$

pre $1 < y < \mu$. Potom je $y^{-T\alpha} < 1$ a

$$\mu^{(T^*-T)\alpha} < 1 + (\mu-1)(T^* - T)\alpha.$$

Ak použijeme poslednú nerovnosť na vyjadrenie funkcie $v(T)$, potom dostaneme, že $v(T) < \mu^{\alpha}$.

Krok 5 :

$U(1) > U(T)$ pre $\mu < T$. Ak je $\rho = \mu^{-\alpha}$ a $\gamma = 0$, potom môžeme zrátať

$$U(1) = \frac{1}{1 - \alpha[(\mu-1)/\mu]}T.$$

Ak použijeme *Vetu o strednej hodnote* na funkciu $f(x) = \frac{1}{x}$ pre x z intervalu $[1 - \alpha[(\mu-1)/\mu]; 1]$, dostaneme

$$U(1) = T(1 - \alpha\frac{\mu-1}{\mu}[\frac{-1}{(1-Y)^2}])$$

pre $0 < Y < \alpha[(\mu-1)/\mu]$. Ale potom je $U(1) > T(1+\alpha[(\mu-1)/\mu])$. Ak je $\rho = \mu^{-\alpha}$, $\gamma = 0$ a $v(T) < \mu^{\alpha}$, potom máme

$$U(T) \leq 1 + \mu^{-\alpha} + ... + \mu^{(-T+1)\alpha} + \mu^{\alpha} < (T-1) + \mu^{\alpha}.$$

Posledná nerovnosť plynie z toho, že každý člen medzi 1 a μ^{α} je menší ako 1 a týchto členov je $(T-2)$. Ak použijeme *Vetu o strednej hodnote* na funkciu $f(x) = x^{\alpha}$

pre x z intervalu $[1;\mu]$, dostaneme $(T-1)+\mu^\alpha = (T-1)+1+(\mu-1)\alpha Z^{\alpha-1}$ pre $1 < Z < \mu$. Ale pretože je $Z^{\alpha-1} < 1$, máme $U(T) < T + \alpha(\mu-1)$.

Potom ak zrátame rozdiel

$$U(1) - U(T) > T + T\alpha\frac{\mu-1}{\mu} - T - \alpha(\mu-1) = \alpha(\mu-1)(\frac{T}{\mu} - 1) > 0,$$

pretože $\alpha = n/N > 0$, $\mu > 1$ a $\mu < T$.

$\square$