FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

# DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2001

Andrea Némethová

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**
**UNIVERZITY KOMENSKÉHO**
**V BRATISLAVE**

---

**Ekonomická a finančná matematika**

# DEA MODELY A MERANIE EFEKTÍVNOSTI

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomantka: Andrea Némethová

Vedúca diplomovej práce: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2001

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu
vypracovala samostatne, na základe vedomostí
získaných štúdiom a s pomocou uvedenej literatúry.

................................................
Andrea Némethová

Ďakujem vedúcej diplomovej práce Doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za odborné vedenie, všestrannú pomoc a cenné rady, ktoré mi poskytla pri písaní diplomovej práce, ďakujem Martinovi Jandačkovi za poskytnutý software a nemenšia vďaka patrí mojim blízkym za podporu a trpezlivosť.

# OBSAH

# Úvod

Data Envelopment Analysis (DEA) metóda patrí medzi významné prostriedky ekonomického manažmentu. DEA umožňuje vyhodnotiť efektívnosť jednotlivých ekonomických subjektov v rámci danej skupiny. Existuje veľa rozličných DEA modelov, ktorých hlavným cieľom je odlíšiť efektívne útvary od neefektívnych. Zároveň, pomocou údajov získaných pri riešení úloh, DEA umožňuje určiť mieru efektívnosti neefektívnych subjektov. Zatiaľ čo prvú úlohu plnia DEA modely pomerne jednoznačne, t.j. spoľahlivo určia efektívne subjekty ako útvary na efektívnej hranici, pri stanovení miery efektívnosti sú výsledky podľa jednotlivých modelov veľmi rozdielne. Pritom nevýhodou mnohých DEA modelov je, že miery efektívnosti, ktoré poskytujú, nie sú príliš vhodné na porovnávanie neefektívnych útvarov medzi sebou. Prejavuje sa to výrazne najmä pri ich aplikácii na veľké súbory testovaných útvarov. Ak totiž model aplikovaný na 600 útvarov dáva také výsledky, že 500 útvarov má mieru efektívnosti nad 90%, tak takýto model (resp. miera efektívnosti, ktorú poskytuje) nie je príliš vhodný na porovnávanie efektívnosti útvarov medzi sebou. Z toho dôvodu má zmysel hľadať určité miery, resp. kritériá, ktoré umožnia lepšie porovnávať neefektívne útvary medzi sebou.

Hlavným cieľom tejto diplomovej práce bolo porovnať miery efektívnosti u niektorých DEA modelov a prípadne navrhnúť iné miery, ktoré by lepšie umožňovali porovnávať vzájomnú mieru efektívnosti jednotlivých útvarov. Pritom chceme jednotlivé miery efektívnosti otestovať na veľkom dátovom súbore, kde lepšie vyniknú ich výhody a nevýhody.

Diplomová práca je rozdelená do troch častí. Prvá kapitola je úvodom do DEA modelov a obsahuje niektoré známe základné poznatky o DEA modeloch. Bola spracovaná prevažne podľa [2]. V druhej a tretej kapitole sú uvedené vlastné výsledky. Druhá kapitola obsahuje teoretické výsledky týkajúce sa invariantnosti aditívnych modelov s váhami.

Poznatky o invariantnosti týchto modelov sú dôležité pre ich správne použitie. Hoci invariantnosť aditívnych modelov bola analyzovaná v literatúre [1], [7], v tejto práci sa pokúsime presne definovať pojem invariantnosti a dokázať invariantnosť resp. neinvariantnosť jednotlivých aditívnych modelov. Výsledky sú uvedené v tabuľke v závere kapitoly. Poznamenajme, že 2. kapitola je doplnením diplomovej práce [1], kde sa autorka nevenovala aditívnym modelom s váhami a aj invariantnosť bola definovaná odlišne. Tretia kapitola obsahuje niektoré teoretické výsledky a experimentálne poznatky súvisiace s meraním efektívnosti pomocou niektorých modelov, prípadne špeciálne navrhnutých mier efektívnosti. Teoretickým východiskom pre túto časť bola predovšetkým práca [3]. Výsledky opísané v tejto kapitole sú zhrnuté v Závere diplomovej práce.

# 1 Základy DEA modelov

Podniky resp. organizačné jednotky podrobujúce sa DEA analýze označujeme DMUs podľa anglickej skratky z Decision Making Units. Predpokladáme, že tieto útvary sú relatívne homogénne, t.j. že sa zaoberajú rovnakou činnosťou a túto činnosť možno charakterizovať určitým počtom vstupov a určitým počtom výstupov. Vstupy sú také veličiny, ktoré sa pri danej činnosti spotrebovávajú a pre ktoré sú žiadanejšie čo najmenšie hodnoty. Ako výstupy označujeme tie veličiny, ktoré sú produktom danej činnosti a majú byť čo možno najväčšie. V najjednoduchšom prípade, keď proces je charakterizovaný jediným vstupom a jediným výstupom možno merať efektívnosť podľa vzorca:

$$E = \frac{výstup}{vstup}.$$

Ako však merať efektívnosť v prípade, keď je proces charakterizovaný viacerými vstupmi a viacerými výstupmi? V tomto prípade by bolo možné dosadiť do predchádzajúceho vzorca ako výstup určitý vážený súčet výstupov a za vstup určitý vážený súčet vstupov. To znamená, že vo váženom súčte výstupov by sme mohli každý výstup vynásobiť určitým kladným číslom, váhou, ktorá by vyjadrovala cenu daného výstupu a takto násobené výstupy sčítať. Podobne pre vstupy. Ako však voliť tieto ceny, keď hovoríme o činnostiach prebiehajúcich v nevýrobných organizáciách? Skôr ako odpovieme na túto otázku, zavedieme nasledujúce označenia, ktoré budeme používať počas celej práce.

Uvažujme $p$ organizačných jednotiek, ktoré označíme $DMU_o$, $o \in \{1,...p\}$.

Predpokladajme, že všetky útvary sa venujú činnosti, ktorá je charakterizovaná $m$ vstupmi a $n$ výstupmi. Označme $x_{oi}$ $(i=1,...,m)$ hodnotu $i$-teho vstupu $o$-teho útvaru a $y_{ok}$ $(k=1,...,n)$ hodnotu $k$-teho výstupu $o$-teho útvaru. Potom hodnoty vstupov $o$-teho útvaru tvoria vektor vstupov $o$-teho útvaru $x_o=(x_{o1},...,x_{om})^T$ a hodnoty výstupov $o$-teho útvaru tvoria vektor výstupov $o$-teho útvaru $y_o=(y_{o1},...,y_{on})^T$. Predpokladáme, že hodnoty vstupov a výstupov pre každý útvar sú nezáporné a každý útvar má hodnotu aspoň jedného vstupu a aspoň jedného výstupu kladnú. Označme hypotetické ocenenie vstupov a výstupov (t.j. vnútorné ceny alebo váhy) pomocou vektorov $u=(u_1,...,u_m)^T$ pre vstupy a $v=(v_1,...,v_n)^T$ pre výstupy. To znamená, že $u_i$ $(i=1,...,m)$ je cena $i$-teho vstupu a $v_k$ $(k=1,...,n)$ je cena $k$-teho výstupu. Pre pevne určené ceny $u,v$ potom možno určiť mieru efektívnosti $E_o(u,v)$ útvaru $DMU_o$ podľa nasledujúceho vzorca:

$$E_o(u,v)=\frac{\sum_{k=1}^{n} v_k y_{ok}}{\sum_{i=1}^{m} u_i x_{oi}}=\frac{v^T y_o}{u^T x_o}.$$

Častokrát však ceny $u,v$ nepoznáme a nie je ani zrejmé, ako ceny voliť tak, aby sme boli spravodliví voči všetkým analyzovaným DMU. Určitým východiskom by bolo umožniť každému DMU, aby si zvolil svoje vlastné ceny, avšak pri splnení určitých podmienok. Jednou takou podmienkou je, aby vo zvolenom systéme cien bola miera efektívnosti všetkých útvarov v danej skupine ohraničená zhora nejakou kladnou konštantou (nezávislou od výberu $u,v$). Keďže sme predpokladali útvary nevýrobného charakteru, ktoré majú výstupy menšie, alebo rovné ako vstupy, je prirodzené za túto konštantu zvoliť jednotku. Druhou prirodzenou požiadavkou je, aby ceny všetkých vstupov a výstupov boli kladné. Táto požiadavka vyjadruje skutočnosť, že všetky vstupy a výstupy považujeme za významné pre daný proces a musíme ich brať do úvahy. Teraz môžeme dovoliť každému $DMU_o$ zvoliť si vlastné ceny, avšak za predpokladu, že tieto ceny spĺňajú obe uvedené požiadavky. To znamená, že útvar $DMU_o$ hľadá také kladné ceny $u$ a $v$, aby v danom systéme cien boli efektívnosti všetkých útvarov menšie nanajvýš rovné jednej, t.j. aby

$$E_j(u,v)\le 1, \quad \forall\, j=1,...,p \tag{1}$$

a zároveň aby $E_o(u,v)$ bolo čo možno najväčšie. Presnejšie povedané, pre útvar $DMU_o$ hľadáme riešenie nasledovnej úlohy:

$$\begin{aligned} \max_{u,v} \quad & E_o(u,v) \\ \text{za podmienok} \quad & E_j(u,v)\le 1, \quad \forall\, j=1,...,p \\ & u>0 \\ & v>0. \end{aligned}$$

Ak pre útvar $DMU_o$ existuje optimálne riešenie $u^*$, $v^*$ takejto úlohy, potom zrejme optimálna hodnota účelovej funkcie $E_o^*=E_o(u^*,v^*) \in (0,1]$. Ak $E_o^* =1$, tak $DMU_o$ je efektívny. Inak je neefektívny a $E_o^*$ je mierou efektívnosti.

## 1.1 Koncepčný model

V predchádzajúcej časti uvedené úvahy umožňujú sformulovať základný, koncepčný model, ktorý je východiskom pre celý rad DEA modelov. Použitie koncepčného modelu pre analýzu efektívnosti útvarov $DMU_o$ (pre $\forall\ o=1,...,p$) znamená pre každé pevne zvolené $o \in \{1,...,p\}$ riešiť nasledovnú úlohu matematického programovania:

**(MP)o**

$$\max_{u\in R^m, v\in R^n} \frac{v^T y_o}{u^T x_o} \tag{2}$$

$$\text{za podmienok} \quad \frac{v^T y_j}{u^T x_j} \le 1, \quad \forall\ j=1,...,p \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u &> 0 \\ v &> 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Nech dvojica $(u^*,v^*)$ je optimálnym riešením a $E_o^*$ je optimálna hodnota účelovej funkcie pre úlohu $(MP)_o$. Ak $E_o^*$ je rovná jednej, tak $DMU_o$ je efektívny, inak je neefektívny a $E_o^*$ udáva mieru efektívnosti.

Poznamenajme, že táto úloha tzv. zlomkového programovania nemusí mať vždy riešenie kvôli ostrým nerovnostiam v podmienkach kladnosti cien $u$ a $v$. V DEA modeloch sa táto podmienka odstráni zmenou otvorenej množiny prípustných riešení na uzavretú. V niektorých modeloch sa kladnosť cien $u,v$ nahradí nezápornosťou cien, v iných modeloch sa ohraničia zdola malými kladnými číslami, váhami. Voľbou týchto váh sa zaoberáme pri aditívnych modeloch s váhami. Na odstránenie zlomku z účelovej funkcie sa používajú dva spôsoby, ktoré popíšeme v nasledujúcich podkapitolách.

## 1.2 CCR model

CCR model je historicky prvým DEA modelom z roku 1978, nazývame ho podľa autorov Charlnesa, Coopera a Rhodesa. Nasledovnými úpravami ho ľahko odvodíme z modelu *(MP)$_o$*. Najprv si všimnime, že ak $(u^*,v^*)$ je optimálnym riešením úlohy *(MP)$_o$*, potom aj každé $(c\ u^*,\ c\ v^*)$, c > 0, je optimálnym riešením. Túto nejednoznačnosť riešení možno odstrániť pridaním normalizačnej podmienky $u^T x_o=1$, čím zároveň odstránime zlomok z účelovej funkcie *(2)*. Podmienku *(3)* prevedieme na lineárny tvar nasledovne:

$$\frac{v^T y_j}{u^T x_j} \le 1 \quad \Rightarrow v^T y_j - u^T x_j \le 0, \quad \forall\ j = 1,\dots,p.$$

Ostré nerovnosti *(4)* nahradíme pre lineárne programovanie prijateľnými neostrými podmienkami:

$$u \ge 0\,,\ v \ge 0.$$

Po prevedení predchádzajúcich úprav na modeli *(MP)* dostaneme tzv. vstupne orientovaný CCR model (lebo sme normalizovali vstupy). Jeho použitie predpokladá riešiť pre $\forall\ o=1,\dots,p$ nasledovnú úlohu lineárneho programovania:

**(CCR I D)$_o$**[1)]

$$\begin{aligned} &\max_{u\in R^m, v\in R^n} && v^T y_o \\ &\text{za podmienok} && u^T x_o = 1 \\ & && v^T y_j - u^T x_j \le 0, \quad \forall\ j = 1,\dots,p \\ & && u \ge 0 \\ & && v \ge 0. \end{aligned}$$

Podľa tohto modelu je testovaný útvar $DMU_o$ efektívny, ak existuje také optimálne riešenie úlohy $(u^*,v^*)$, že $u^* > 0$, $v^* > 0$ a hodnota účelovej funkcie $E_o^*$ je rovná jednej. V prípade, že $E_o^*$ je menšia ako jedna a $u^*,v^*$ sú kladné, $E_o^*$ môžeme pokladať za mieru efektívnosti. Ak ale neexistuje kladné optimálne riešenie $(u^*,v^*)$ danej úlohy *(CCR I D)$_o$*, príslušné $E_o^*$ sa nedá interpretovať.

[1)] označenie pre I - input (výstupne) orientovaný CCR model v D - duálnom tvare

Úlohu *(CCR I D)$_o$* zapíšeme v primárnom tvare pre testovaný útvar *DMU$_o$* ($o \in \{1,\dots,p\}$) nasledovne:

**(CCR I P)$_o$**

$$\min_{\Theta \in R, \lambda \in R^p} \quad \Theta$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \geq y_o$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j \leq \Theta x_o$$

$$\lambda \geq 0$$

kde $\lambda$ je $p$ rozmerný vektor a $\Theta$ je reálne číslo.

Symetricky k predchádzajúcim úloham môžeme zadefinovať úlohu pre výstupne orientovaný CCR model (*O* - output) v duálnom i primárnom tvare:

**(CCR O D)$_o$**

$$\min_{u \in R^m, v \in R^n} \quad u^T x_o$$

$$\text{za podmienok} \quad v^T y_o = 1$$

$$v^T y_j - u^T x_j \leq 0, \quad \forall\ j = 1,\dots,p$$

$$u \geq 0$$

$$v \geq 0$$

**(CCR O P)$_o$**

$$\max_{\Phi \in R, \lambda \in R^p} \quad \Phi$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \geq \Phi y_o$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j \leq x_o$$

$$\lambda \geq 0$$

Vo výstupne orientovaných modeloch mierou efektívnosti je prevrátená hodnota optimálnej hodnoty účelovej funkcie.

## 1.3 Aditívny model s váhami

Aditívny model s váhami tiež dostaneme úpravami z pôvodného modelu matematického programovania *(MP)*. V CCR modeli sme nahradili podmienky ostrých nerovností *(4)* neostrými nerovnosťami. Existuje však celá skupina modelov, v ktorých sa *(4)* nahrádza podmienkou:

$$\begin{aligned} &u \geq w^- \\ &v \geq w^+ \\ &0 < w^- \in R^m, \quad 0 < w^+ \in R^n \end{aligned} \tag{5}$$

Podmienku *(3)* upravíme na lineárny tvar podobne ako v CCR modeli, teda nahradíme ju rozdielom vážených výstupov a vstupov. Účelovú funkciu *(2)* upravíme odlišne. V aditívnom modeli sa maximalizuje rozdiel vážených výstupov a vážených vstupov.

Po prevedení predchádzajúcich úprav na modeli *(MP)* dostaneme aditívny model s váhami $w^+$ a $w^-$. Jeho použitie predpokladá riešiť pre $\forall\ o=1,...,p$ nasledovnú úlohu lineárneho programovania (v literatúre označovaný ako duálny aditívny model):

**(Ad D)$_o$**

$$\begin{aligned} \max_{u\in R^m, v\in R^n} \quad & v^T y_o - u^T x_o \\ \text{za podmienok} \quad & v^T y_j - u^T x_j \leq 0, \quad \forall\ j = 1,...,p \\ & u \geq w^- \\ & v \geq w^+. \end{aligned}$$

Príslušná úloha lineárneho programovania v primárnom tvare:

**(Ad P)$_o$**

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\lambda\in R^p,\\ s^+\in R^n, s^-\in R^m}} \quad & -\left(\left(w^+\right)^T s^+ + \left(w^-\right)^T s^-\right) \\ \text{za podmienok} \quad & \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j - s^+ = y_o \\ & \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j + s^- = x_o \\ & \lambda \geq 0,\ s^+ \geq 0,\ s^- \geq 0. \end{aligned}$$

Kde $s^-$ a $s^+$ sú *m*- resp. *n*- rozmerné vektory doplnkových vstupných a výstupných premenných. Model *(Ad D)* definuje efektívnosť $DMU_o$ nasledovne: nech $(u^*,v^*)$ je optimálne riešenie $(Ad\ D)_o$ a $E_o^*$ je optimálna hodnota účelovej funkcie. Potom $DMU_o$ je efektívny, ak $E_o^* = 0$. Inak je neefektívny a hodnota $E_o^* \in (-\infty,\ 0)$ je určitou mierou tejto neefektívnosti.

Zrejme, čím je $E_o^*$ väčšie, tým je príslušné $DMU_o$ hodnotené lepšie. Avšak takáto miera efektívnosti má určité nevýhody. Jej hlavným nedostatkom je, že je zdola neohraničená, čo spôsobuje ťažkosti pri porovnávaní takejto miery efektívnosti s mierou efektívnosti získanou pomocou iných modelov. Prirodzenou snahou je preškálovať mieru efektívnosti získanú pomocou aditívneho modelu tak, aby jej hodnoty boli z intervalu [0,1] (pre efektívne útvary $E_o^*=1$), čím by sa útvary dali porovnávať podľa percentuálnej hodnoty miery efektívnosti. Existuje viac spôsobov, ako uskutočniť takéto preškálovanie a s niektorými sa zaoberáme v 3. kapitole tejto práce, kde ukážeme aj ich výhody, nevýhody.

Vráťme sa k nerovnostiam *(5).* Ako voliť váhy $w^+$ a $w^-$? Z viacerých možností uvedieme nasledovné:

1) V základnom aditívnom modeli váhy $w^+$ a $w^-$ položíme rovné jednotkovým vektorom pozostávajúcich zo samých jednotiek (ozn. $e_n$, $e_m$), t.j.

$$\begin{aligned} w^- &= e_m \\ w^+ &= e_n \end{aligned} \tag{6}$$

2) Normalizované váhy volíme ako prevrátenú hodnotu štandardnej odchýlky, kde $\sigma_i^-$ je štandardná odchýlka $i$-teho vstupu a $\sigma_k^+$ je štandardná odchýlka $k$-teho výstupu.

$$\begin{aligned} w_i^- &= \frac{1}{\sigma_i^-}, \quad i = 1,\dots,m \\ w_k^+ &= \frac{1}{\sigma_k^+}, \quad k = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{7}$$

Poznamenajme, že štandardná odchýlka $i$-teho vstupu $\sigma_i^-$ pre $i=1,\dots,m$ je odmocnina z variancie $i$-teho vstupu, ktorú počítame pomocou nevychýleného odhadu variancie, čiže:

$$\sigma_i^- = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ji} - \bar{x}_i\right)^2}, \tag{VAR}$$

kde

$$\bar{x}_i = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} x_{ji}.$$

3) Váhy založené na minimálnych a maximálnych hodnotách vstupov a výstupov:

$$\begin{aligned} w_i^- &= \frac{1}{(m+n)R_i^-}, \quad i = 1,\dots,m \\ w_k^+ &= \frac{1}{(m+n)R_k^+}, \quad k = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{8}$$

kde $R_i^-$ a $R_k^+$ sú tzv. rozsahy definované nasledovne:

$$\begin{aligned} R_i^- &= \max_{j=1,\dots,p} x_{ji} - \min_{j=1,\dots,p} x_{ji}, \quad i = 1,\dots,m \\ R_k^+ &= \max_{j=1,\dots,p} y_{jk} - \min_{j=1,\dots,p} y_{jk}, \quad k = 1,\dots,n, \end{aligned}$$

t.j. $R_i^-$ $(i=1,\dots,m)$ predstavuje rozdiel medzi maximálnou a minimálnou hodnotou $i$-teho vstupu všetkých $DMU_j$ $(j=1,\dots,p)$ a $R_k^+$ $(k=1,\dots,n)$ predstavuje rozdiel medzi maximálnou a minimálnou hodnotou $k$-teho výstupu všetkých $DMU_j$ $(j=1,\dots,p)$.

## 1.4 Aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu

V klasickej mikroekonomickej teórii je zavedený pojem produkčnej funkcie pre opis vstupno - výstupných vzťahov vo firme. Produkčná funkcia udáva maximálne množstvo výstupu, ktoré môže byť dosiahnuté kombináciou daných množstiev vstupov. V prípade viacerých výstupov sa analogicky zavádza pojem množina technológií, ktorá opisuje možné produkcie pri daných vstupoch. DEA metóda nevyžaduje žiadne predpoklady funkcionálnej závislosti výstupov na vstupoch. Jediné, čo potrebujeme vedieť je, ako sa správajú jednotky vzhľadom na výnosy z rozsahu. Môžu byť konštantné, alebo variabilné výnosy z rozsahu. Táto informácia charakterizuje produkčnú funkciu. Ak je produkčná funkcia lineárne rastúca, hovoríme o konštantných výnosoch z rozsahu. V praxi to znamená, že ak zvýšime vstupy, proporcionálne sa zvýšia aj výstupy, bez ohľadu na to koľko už produkujeme. Častejšie však vystupuje produkčná funkcia, ktorá je konkávna alebo konvexná a vtedy hovoríme o variabilných výnosoch z rozsahu. Vtedy sa pri zmene vstupov menia výstupy v závislosti od hladiny vstupov. Zmena o jednotku pri nižšom vstupe sa viac odrazí na výstupe, ako zmena o jednotku pri vyššej hladine vstupu. Toto sa nazýva klesajúce výnosy z rozsahu a produkčná funkcia je konkávna. Podľa toho, aké výnosy z rozsahu predpokladáme u produkčnej funkcie, vyberáme model pre konštantné alebo variabilné výnosy z rozsahu.

Doteraz uvedené modely patria do skupiny konštantných výnosov z rozsahu. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že $(x,y)$ a $(\alpha x, \alpha y)$ sú tými modelmi rovnako ohodnotené, t.j. produkčná funkcia je lineárne rastúca.

Úlohu matematického programovania $(MP)_o$ možno ďalej modifikovať na tvar modelu s variabilnými výnosmi z rozsahu zavedením pomocnej premennej $z \in R$, akéhosi ocenenia neexistujúcich výstupov, ktorá "pokazí" linearitu produkčnej funkcie tým, že z $\alpha$ násobne zvýšených vstupov sa nevyrobí $\alpha$-krát viac výstupov, ale o tú premennú $z$ viac (či menej), pritom ak $z > 0$, model je s rastúcimi výnosmi z rozsahu, ak $z < 0$, model je s klesajúcimi výnosmi z rozsahu. Tejto premennej $z \in R$, prislúcha v primárnej úlohe rovnica:

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1,$$

ktorá má jasnú geometrickú interpretáciu, s ktorou sa však v tejto práci nezaoberáme.

Väčšinu modelov možno formulovať v dvoch alternatívach - pre variabilné a konštantné výnosy z rozsahu. V ďalšej kapitole sa zaoberáme s vlastnosťami aditívnych modelov, preto uvedieme príslušnú úlohu lineárneho programovania iba pre aditívne modely s variabilnými výnosmi z rozsahu. Analogicky sa môže zapísať aj CCR model.

Aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu (VRTS - variable return to scale) predpokladá riešiť pre pevne zvolené $o \in \{1,\dots,p\}$ nasledovnú úlohu lineárneho programovania v primárnom tvare:

**(Ad P VRTS)$_o$**

$$\min_{\substack{\lambda \in R^p, \\ s^+ \in R^n, s^- \in R^m}} -\left(\left(w^+\right)^T s^+ + \left(w^-\right)^T s^-\right)$$

za podmienok

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j - s^+ = y_o$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j + s^- = x_o$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

$$\lambda \geq 0, \; s^+ \geq 0, \; s^- \geq 0$$

Kde $s^-$ a $s^+$ sú $m$- resp. $n$- rozmerné vektory doplnkových vstupných a výstupných premenných. Vektory $w^-$ a $w^+$ sú $m$- resp. $n$- rozmerné váhy vstupov a výstupov, ktoré môžeme voliť rozlične podľa *(6)* až *(8)*.

Nech $E_o^*$ je optimálne riešenie účelovej funkcie. Potom $DMU_o$ je efektívny, ak $E_o^* = 0$, inak je neefektívny. Optimálna hodnota účelovej funkcie ako ukazovateľ miery efektívnosti má rovnaké nedostatky, ako pri aditívnom modeli s konštantnými výnosmi z rozsahu (str. 12-13).

Príslušná úloha lineárneho programovania pre aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu v duálnom tvare pre $\forall\, o=1,...,p$:

**(Ad D VRTS)$_\mathbf{o}$**

$$\begin{aligned} \max_{\substack{u\in R^m, v\in R^n \\ z\in R}} \quad & v^T y_o - u^T x_o + z \\ \text{za podmienok} \quad & v^T y_j - u^T x_j + z \le 0, \quad \forall\, j = 1,...,p \\ & u \ge w^-, \quad v \ge w^+ \end{aligned}$$

Premenná $z\in R$ prislúcha variabilným výnosom z rozsahu, ako sme to odôvodnili v predchádzajúcej časti. Váhy $w^-$ a $w^+$ sú rovnako volené, ako v primárnom modeli. Aj efektivitu skúmaného útvaru $DMU_o$ vysvetľuje tento duálny model rovnako ako primárny.

V druhej kapitole sa zaoberáme invariantnosťou vážených aditívnych modelov s konštantnými aj s variabilnými výnosmi z rozsahu, ktoré označíme špeciálne podľa mien autorov.

## Model Pastora a Lowella

V práci [7] J.T. Pastor a C.A.K. Lowell prvý krát popísali aditívny model s váhami, kde váhy $w^-$ a $w^+$ boli špeciálne volené pomocou vzťahov *(7)*. Takýto model budeme označovať ***(PL)*** spolu s ďalšími označeniami ako sme si už zvykli: *D* - duálny resp. *P* - primárny, *CRTS* - konštantné výnosy z rozsahu resp. *VRTS* - variabilné výnosy z rozsahu.

## Model Coopera a Pastora

V práci [4] W.W. Coopera a kol. je popísaný aditívny model s váhami, kde váhy sú špeciálne volené podľa vzťahov *(8)*. Pre ďalšiu analýzu tento model budeme označovať písmenkami podľa autorov Coopera a Pastora ***(CP)*** a ďalšími písmenami podľa typu úlohy: *D* - duálny resp. *P* - primárny, *CRTS* - konštantné výnosy z rozsahu resp. *VRTS* - variabilné výnosy z rozsahu.

# 2 Invariantnosť aditívnych modelov s váhami

Invariantnosť modelu znamená, že po nejakej zmene parametrov modelu výstup modelu ostáva nezmenený. Aké zmeny môžeme urobiť na vstupoch či výstupoch, aby sa nezmenilo optimálne riešenie a prečo to potrebujeme?

Je prirodzené žiadať, aby model, pomocou ktorého sa rozhoduje o tom, či niektorá pobočka banky pracuje efektívne alebo nie, nezávisel od toho, či počítame jej príjmy a výdavky v halieroch alebo v korunách. Vlastnosť, pri ktorej dáva model rovnaký výsledok pri vstupoch alebo výstupoch vyjadrených v zmenených jednotkách sa nazýva invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek (presná definícia je uvedená nižšie). To znamená, že v takomto modeli môžeme vstupy a výstupy vynásobiť kladnými konštantami a napriek tomu dostaneme rovnaké riešenie. Invarianciu vzhľadom na zmenu jednotiek s výhodou využívame pri numerickom riešení úloh, kde by veľké rozdiely vo veľkostiach jednotlivých ukazovateľov spôsobovali značné numerické ťažkosti. Poznamenajme, že invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek nie je samozrejmosťou u všetkých DEA modelov. Zatiaľ čo v prvej kapitole uvedené CCR modely spĺňajú túto vlastnosť (viď [1]), aditívne modely vo všeobecnosti túto vlastnosť nemajú. V tejto kapitole však ukážeme, že voľba váh $w^-$ a $w^+$ podľa vzťahov *(7)* a *(8)* zabezpečuje splnenie tejto vlastnosti aj pre aditívne modely.

Zatiaľ čo invariancia vzhľadom na zmenu jednotiek je veľmi dôležitou vlastnosťou, trochu iná situácia je s tzv. invarianciou vzhľadom na posun. Invariancia vzhľadom na posun znamená, že sa výsledok nemení, ak ku niektorému vstupu resp. výstupu pripočítame konštantu (presná definícia je nižšie). To znamená, že táto vlastnosť umožňuje použiť model aj pre záporné znamienka dát. Dáta so zápornými znamienkami sú však skôr výnimočným javom a preto invariancia vzhľadom na posun nie je až takou dôležitou vlastnosťou, ako invariancia vzhľadom na zmenu jednotiek. Napriek tomu sa však v niektorých situáciách môžu vyskytnúť dáta so zápornými údajmi a vtedy je potrebné vedieť, či príslušný model je invariantný vzhľadom na posun. Poznamenajme, že zatiaľ čo CCR modely túto vlastnosť nemajú (viď [1]), niektoré aditívne modely ju majú, ako uvidíme nižšie.

V tejto kapitole sa zaoberáme s invariantnosťou vážených aditívnych modelov s konštantnými aj s variabilnými výnosmi z rozsahu. Tým doplníme prácu [1], v ktorej sa autorka J. Petríková zaoberala invariantnosťou CCR, BCC modelov a aditívneho modelu bez váh, aj s modelmi, ktoré sú súčasne invariantné vzhľadom na posun aj na zmenu jednotiek. Úlohy lineárneho programovania odvodené v prvej kapitole na riešenie aditívnych modelov s váhami skúmame z dvoch hľadísk, či sú invariantné vo všeobecnosti, čiže v zmysle optimálneho riešenia aj optimálnej hodnoty účelovej funkcie, alebo iba v zmysle optimálnej hodnoty účelovej funkcie, pomocou ktorej sa rozhoduje o efektívnosti.

**Definícia 1.**

Model nazveme invariantný vzhľadom na transformáciu $F$, $G$ premenných $X,Y$, kde

$$F : R^m \to R^m,$$
$$G : R^n \to R^n,$$

ak príslušné úlohy lineárneho programovania na riešenie modelu so vstupnými parametrami *(X,Y)* a k nim prislúchajúce transformované úlohy lineárneho programovania podľa transformácie *(F(X),G(Y))* majú rovnaké optimálne riešenia a rovnakú optimálnu hodnotu účelovej funkcie.

**Definícia 2.**

Model je invariantný vzhľadom na posun, ak je invariantný vzhľadom na transformáciu:

$$F(X) = X + a,$$
$$G(Y) = Y + b,$$

kde $a \in R^m$, $b \in R^n$.

**Definícia 3.**

Model je invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek, ak je invariantný vzhľadom na transformáciu:

$$F(X) = CX,$$
$$G(Y) = DY,$$

kde $C$ je kladná diagonálna matica, čiže $C=diag(c_1,...,c_m)$ s prvkami $c_i > 0$, $i=1,...m$ a $D=diag(d_1,...,d_n)$, kde $d_k > 0$, $k=1,...,n$.

**Definícia 4.**

Model nazývame klasifikačne invariantný (*k - invariantný*), ak príslušné úlohy lineárneho programovania na riešenie modelu so vstupnými parametrami $(X,Y)$ a k nim prislúchajúce transformované úlohy lineárneho programovania podľa transformácie $(F(X),G(Y))$ majú rovnakú optimálnu hodnotu účelovej funkcie.

V praxi "vstupný parameter modelu: X resp. Y" sú vektory vstupov $x_i$ ($i=1,...,m$) resp. vektory výstupov $y_k$ ($k=1,...,n$). Pre všetky $DMU_j$, $j=1,...,p$ posúvame vstupy o reálne číslo $a_i$ ($i=1,...,m$) a výstupy o reálne číslo $b_k$ ($k=1,...,n$). Vstupy násobíme kladným číslom $c_i$ ($i=1,...,m$) a výstupy kladným číslom $d_k$ ($k=1,...,n$). Týmto zavedieme nové označenia pre jednotlivé zložky transformovaných premenných pri skúmaní invariantnosti vzhľadom na posun:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ji} &= x_{ji} + a_i \\ \tilde{y}_{jk} &= y_{jk} + b_k \\ i &= 1,...,m, \quad k = 1,...,n, \quad j = 1,...,p \end{aligned} \tag{9}$$

a vzhľadom na zmenu jednotiek:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ji} &= c_i x_{ji} \\ \hat{y}_{jk} &= d_k y_{jk} \\ i &= 1,...,m, \quad k = 1,...,n, \quad j = 1,...,p. \end{aligned} \tag{10}$$

Kvôli prehľadnosti teraz zapíšeme všetky úlohy, ktoré ideme analyzovať v zložkovom tvare pre $\forall o \in \{1,...,p\}$:

**(Ad P VRTS)$_o$**

$$\min_{\substack{\lambda \in R^p, \\ s^+ \in R^n, s^- \in R^m}} \quad -\left( \sum_{i=1}^{m} w_i^- s_i^- + \sum_{k=1}^{n} w_k^+ s_k^+ \right)$$

za podmienok

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{p} y_{jk} \lambda_j - s_k^+ = y_{ok}, \quad k = 1,...,n \\ &\sum_{j=1}^{p} x_{ji} \lambda_j + s_i^- = x_{oi}, \quad i = 1,...,m \\ &\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1 \\ &\lambda_j \ge 0, \quad j = 1,...,p \\ &s_k^+ \ge 0, \quad k = 1,...,n \\ &s_i^- \ge 0, \quad i = 1,...,m \end{aligned}$$

**(Ad D VRTS)$_o$**

$$\max_{\substack{u\in R^m, v\in R^n,\\ z\in R}} \quad \sum_{k=1}^{n} v_k y_{ok} - \sum_{i=1}^{m} u_i x_{oi} + z$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{k=1}^{n} v_k y_{jk} - \sum_{i=1}^{m} u_i x_{ji} + z \le 0, \quad \forall\ j = 1,\dots,p$$

$$u_i \ge w_i^-, \quad i = 1,\dots,m$$

$$v_k \ge w_k^+, \quad k = 1,\dots,n$$

**(Ad P CRTS)$_o$**

$$\min_{\substack{\lambda\in R,\\ s^+\in R^n, s^-\in R^m}} \quad -\left(\sum_{i=1}^{m} w_i^- s_i^- + \sum_{k=1}^{n} w_k^+ s_k^+\right)$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{j=1}^{p} y_{jk}\lambda_j - s_k^+ = y_{ok}, \quad k = 1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ji}\lambda_j + s_i^- = x_{oi}, \quad i = 1,\dots,m$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,p$$

$$s_k^+ \ge 0, \quad k = 1,\dots,n$$

$$s_i^- \ge 0, \quad i = 1,\dots,m$$

**(Ad D CRTS)$_o$**

$$\max_{u\in R^m, v\in R^n} \quad \sum_{k=1}^{n} v_k y_{ok} - \sum_{i=1}^{m} u_i x_{oi}$$

$$\text{za podmienok} \quad \sum_{k=1}^{n} v_k y_{jk} - \sum_{i=1}^{m} u_i x_{ji} \le 0, \quad \forall\ j = 1,\dots,p$$

$$u_i \ge w_i^-, \quad i = 1,\dots,m$$

$$v_k \ge w_k^+, \quad k = 1,\dots,n.$$

Pri dôkazoch invariantnosti vzhľadom na posun budeme vychádzať z transformovaných modelov, ktoré označíme: *(Ad P VRTS ~)*, *(Ad D VRTS ~)*, *(Ad P CRTS ~)*, *(Ad D CRTS ~)*, kde vstupy a výstupy sú definované podľa *(9)* a nové premenné

$$\tilde{u},\ \tilde{v},\ \tilde{z},\ \tilde{s}^+,\ \tilde{s}^-,\ \tilde{\lambda},$$

ako aj nové váhy $\tilde{w}^+,\ \tilde{w}^-$

dopočítame.

Analogické označenie platí pri dôkazoch invariantnosti vzhľadom na zmenu jednotiek, kde v transformovaných úlohách podľa *(10)* všetky premenné majú striešku.

Keďže tieto úlohy predpokladajú voľbu váh $w^-$, $w^+$ niektorým so spôsobov *(6)* až *(8)*, v nasledujúcom sa zaoberáme modelom s označením "**PL**" namiesto "Ad", ak ide o váhy *(7)*, t.j. podľa Pastora a Lowella, s označením "**CP**", ak volíme váhy podľa *(8)*, t.j. podľa Coopera a Pastora a "**ZA**" - základný aditívny model, t.j. s váhami *(6)*.

**Veta 1.**

*(PL D CRTS)* model je k-invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek.

**Dôkaz.**

Treba dokázať, že po transformácii úlohy *(PL D CRTS)$_o$* na úlohu *(PL D CRTS ^)$_o$*, čiže po vynásobení vstupov a výstupov kladnými reálnymi číslami sa nezmení optimálna hodnota účelovej funkcie príslušnej úlohy *(PL D CRTS)$_o$* lineárneho programovania pre $\forall\, o \in \{1,\ldots,p\}$.

Najprv ukážeme, že *(u,v)* je prípustné riešenie úlohy *(PL D CRTS)$_o$* vtedy a len vtedy, ak

$$\left(\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_m,\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n\right)=\left(\frac{u_1}{c_1},\ldots,\frac{u_m}{c_m},\frac{v_1}{d_1},\ldots,\frac{v_n}{d_n}\right) \tag{11}$$

je prípustným riešením úlohy *(PL D CRTS ^)$_o$*. O tom sa presvedčíme dosadením *(11)* do podmienok úlohy *(PL D CRTS ^)$_o$*, kde pre $\forall\, j \in \{1,\ldots,p\}$ platí:

$$\sum_{k=1}^{n}\hat{v}_k\hat{y}_{jk}-\sum_{i=1}^{m}\hat{u}_i\hat{x}_{ji}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{d_k}\hat{y}_{jk}-\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i}{c_i}\hat{x}_{ji}\le 0,$$

čo je vzhľadom na *(10)* ekvivalentné s prvou podmienkou pôvodnej úlohy *(PL D CRTS)$_o$*:

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{v_k}{d_k}d_k y_{jk}-\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i}{c_i}c_i x_{ji}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}v_k y_{jk}-\sum_{i=1}^{m}u_i x_{ji}\le 0.$$

Ďalšie podmienky

$$\hat{u}_i \ge \hat{w}_i^-,\quad \hat{v}_k \ge \hat{w}_k^+$$

sú ekvivalentné s

$$\frac{u_i}{c_i}\ge \hat{w}_i^-,\quad \frac{v_k}{d_k}\ge \hat{w}_k^+, \tag{12}$$

kde váhy

$$\hat{w}^-,\quad \hat{w}^+$$

sú prevrátené hodnoty štandardnej odchýlky *i*-teho vstupu a *k*-teho výstupu po transformácii podľa *(10)*.

Z definície nevychýleného odhadu variancie (*(VAR)* str. 13) dostávame:

$$\left(\hat{\sigma}_i^-\right)^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{p}\left(\hat{x}_{ji} - \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p}\hat{x}_{li}\right)^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{p}\left(c_i x_{ji} - \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p}c_i x_{li}\right)^2 =$$

$$= c_i^2\,\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ji} - \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p}x_{li}\right)^2 = \left(c_i\sigma_i^-\right)^2$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_i^- = c_i\sigma_i^-$$

Analogicky pre štandardnú odchýlku *k*-teho výstupu platí:

$$\hat{\sigma}_k^+ = d_k\sigma_k^+.$$

Teda štandardná odchýlka transformovaných vstupov (výstupov) podľa *(10)* je súčinom transformovacej konštanty a pôvodnej štandardnej odchýlky vstupov (výstupov). Po dosadení do vzorcov *(7)* pre váhy transformovanej úlohy dostávame, že nové váhy sú podielom pôvodných váh a kladnej transformovacej konštanty:

$$\hat{w}_i^- = \frac{1}{\hat{\sigma}_i^-} = \frac{1}{c_i\,\sigma_i^-} = \frac{w_i^-}{c_i}$$

$$\hat{w}_k^+ = \frac{1}{\hat{\sigma}_k^+} = \frac{1}{d_k\,\sigma_k^+} = \frac{w_k^+}{d_k}\ ,$$

čo spolu s *(12)* dokazuje poslednú podmienku úlohy *(PL D CRTS)$_o$*:

$$u_i \ge w_i^-,\quad v_k \ge w_k^+.$$

Teraz ukážeme, že hodnota účelovej funkcie tiež ostáva nezmenená. Po dosadení do účelovej funkcie úlohy *(PL D CRTS ^)$_o$* pre ľubovolné $o\in\{1,...,p\}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\hat{v}_k\hat{y}_{ok} - \sum_{i=1}^{m}\hat{u}_i\hat{x}_{oi}$$

podľa *(10)* a *(11)* skaláre $c_i$ a $d_k$ sa vykrátia a máme tú istú účelovú funkciu, ako pôvodná úloha *(PL D CRTS)$_o$*.

Týmto sme dostali, že pre úlohy *(PL D CRTS)$_o$* a *(PL D CRTS ^)$_o$* príslušné účelové funkcie nadobúdajú rovnaké hodnoty a teda aj ich optimálne hodnoty sú rovnaké, t.j. úloha *(PL D CRTS)$_o$* pre $\forall\ o\in\{1,...,p\}$ je k - invariantná. To implikuje, že aj model *(PL D CRTS)*, pre ktorý je potrebné riešiť príslušnú úlohu lineárneho programovania *(PL D CRTS)$_o$* pre všetky $o\in\{1,...,p\}$ je k - invariantný.

**Dôsledok.**

Našli sme bijektívne zobrazenie medzi množinami prípustných riešení oboch úloh, ozn.

$$f:\ \left(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n\right)\mapsto\left(\frac{u_1}{c_1},\dots,\frac{u_m}{c_m},\frac{v_1}{d_1},\dots,\frac{v_n}{d_n}\right)$$

také, že optimálne hodnoty účelových funkcií pôvodnej úlohy *(PL D CRTS)$_o$* a úlohy po transformácii *(PL D CRTS ^)$_o$* sú rovnaké, tým pádom sa nezmení klasifikácia útvarov na efektívne a neefektívne a nezmení sa ani miera efektivity počítaná podľa optimálnej hodnoty účelovej funkcie.

**Veta 2.**

*(PL D VRTS)* model je k-invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek.

**Dôkaz.**

Príslušná úloha lineárneho programovania pre tento model sa líši od úlohy *(PL D CRTS)$_o$* pripočítaním premennej $z\in R$ k účelovej funkcii a k prvej podmienke. Ak budeme postupovať ako v *Dôkaze Vety 1*, dostaneme, že premenná $z\in R$ v dôkaze nehrá žiadnu rolu. Teda úloha *(PL D VRTS)$_o$* ($o\in\{1,\dots,p\}$) sa zhoduje s úlohou *(PL D VRTS ^)$_o$*, t.j. s úlohou po transformácii premenných podľa *(10)*, po vykonaní bijektívneho zobrazenia medzi množinami prípustných riešení:

$$f:\ \left(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n,z\right)\mapsto\left(\frac{u_1}{c_1},\dots,\frac{u_m}{c_m},\frac{v_1}{d_1},\dots,\frac{v_n}{d_n},z\right).$$

Tým pádom aj model *(PL D VRTS)* je k-invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek.

**Veta 3.**

*(PL D VRTS)* model je k-invariantný vzhľadom na posun.

**Dôkaz.**

Treba dokázať, že po transformácii úlohy *(PL D VRTS)$_o$* na úlohu *(PL D VRTS ~)$_o$*, čiže po pričítaní reálnych čísel $a_i$ ($i=1,\dots,m$) ku vstupom a $b_k$ ($k=1,\dots,n$) k výstupom sa nezmení optimálna hodnota účelovej funkcie.

Najprv ukážeme, že *(u,v,z)* je prípustné riešenie úlohy *(PL D VRTS)$_o$* vtedy a len vtedy, ak

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_m,\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_n,\tilde{z}\right)=\\&\left(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n,z+a_1u_1+\dots+a_mu_m-b_1v_1-\dots-b_nv_n\right)\end{aligned}\tag{13}$$

je prípustným riešením transformovanej úlohy *(PL D VRTS ~)$_o$*. O tom sa presvedčíme dosadením do podmienok príslušnej úlohy *(PL D VRTS ~)$_o$*, kde pre $\forall j \in \{1,...,p\}$ platí:

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{v}_k \tilde{y}_{jk} - \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i \tilde{x}_{ji} + \tilde{z} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} v_k \tilde{y}_{jk} - \sum_{i=1}^{m} u_i \tilde{x}_{ji} + z + a_1 u_1 + ... + a_m u_m - b_1 v_1 - ... - b_n v_n \le 0,$$

čo je vzhľadom na *(9)* ekvivalentné s prvou podmienkou pôvodnej úlohy *(PL D VRTS)$_o$*:

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} v_k \left(y_{jk} + b_k\right) - \sum_{i=1}^{m} u_i \left(x_{ji} + a_i\right) + z + a_1 u_1 + ... + a_m u_m - b_1 v_1 - ... - b_n v_n \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} v_k y_{jk} + \sum_{k=1}^{n} v_k b_k - \sum_{i=1}^{m} u_i x_{ji} - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + z + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i - \sum_{k=1}^{n} v_k b_k \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} v_k y_{jk} - \sum_{i=1}^{m} u_i x_{ji} + z \le 0.$$

Ďalšie podmienky

$$\tilde{u}_i \ge \tilde{w}_i^-, \quad \tilde{v}_k \ge \tilde{w}_k^+$$

sú ekvivalentné s

$$u_i \ge \tilde{w}_i^-, \quad v_k \ge \tilde{w}_k^+, \tag{14}$$

kde váhy

$$\tilde{w}^-, \quad \tilde{w}^+$$

sú prevrátené hodnoty štandardnej odchýlky *i*-teho vstupu a *k*-teho výstupu po transformácii podľa *(9)*.

Z definície nevychýleného odhadu variancie (*(VAR)* str. 13) dostávame:

$$\left(\tilde{\sigma}_i^-\right)^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{p} \left( \tilde{x}_{ji} - \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p} \tilde{x}_{li} \right)^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{p} \left( \left(x_{ji} + a_i\right) - \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p} \left(x_{li} + a_i\right) \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{p} \left( x_{ji} + a_i - a_i - \frac{1}{p} \sum_{l=1}^{p} x_{li} \right)^2 = \left(\sigma_i^-\right)^2$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}_i^- = \sigma_i^-$$

Analogicky pre štandardnú odchýlku *k*-teho výstupu platí:

$$\tilde{\sigma}_k^+ = \sigma_k^+$$

Teda štandardná odchýlka transformovaných vstupov (výstupov) podľa *(9)* je totožná s pôvodnou štandardnou odchýlkou vstupov (výstupov). Po dosadení do vzorcov *(7)* pre váhy transformovanej úlohy dostávame, že aj nové váhy sú totožné s pôvodnými váhami:

$$\widetilde{w}_i^- = \frac{1}{\widetilde{\sigma}_i^-} = \frac{1}{\sigma_i^-} = w_i^-$$

$$\widetilde{w}_k^+ = \frac{1}{\widetilde{\sigma}_k^+} = \frac{1}{\sigma_k^+} = w_k^+,$$

čo spolu s *(14)* dokazuje poslednú podmienku úlohy *(PL D VRTS)*$_o$:

$$u_i \geq w_i^-, \quad v_k \geq w_k^+.$$

Teraz ukážeme, že hodnota účelovej funkcie tiež ostáva nezmenená. Po dosadení do účelovej funkcie úlohy *(PL D VRTS ~)*$_o$ pre ľubovolné $o \in \{1,...,p\}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{v}_k \widetilde{y}_{ok} - \sum_{i=1}^{m} \widetilde{u}_i \widetilde{x}_{oi} + \widetilde{z}$$

podľa *(9)* a *(13)* súčty súčinov $u_i a_i$ a $v_k b_k$ sa vynulujú podobne, ako pri dôkaze nemennosti prvej podmienky tejto úlohy a máme tú istú účelovú funkciu, ako pôvodná úloha *(PL D VRTS)*$_o$.

Týmto sme dostali, že pre úlohy *(PL D VRTS)*$_o$ a *(PL D VRTS ~)*$_o$ príslušné účelové funkcie nadobúdajú rovnaké hodnoty a teda aj ich optimálne hodnoty sú rovnaké, t.j. úloha *(PL D VRTS)*$_o$ pre $\forall\, o \in \{1,...,p\}$ je k - invariantná. To implikuje, že aj model *(PL D VRTS)*, pre ktorý je potrebné riešiť príslušnú úlohu lineárneho programovania *(PL D VRTS)*$_o$ pre $\forall\, o \in \{1,...,p\}$, je k - invariantný.

**Veta 4.**

*(CP D CRTS)* model je k-invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek.

**Veta 5.**

*(CP D VRTS)* model je k-invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek.

**Veta 6.**

*(CP D VRTS)* model je k-invariantný vzhľadom na posun.

**Veta 7.**

*(ZA D VRTS)* model je k-invariantný vzhľadom na posun.

**Dôkaz viet 4. - 7.**

Keďže tieto modely sú totožné s modelmi *(PL),* iba váhy $w^+$ a $w^-$ sa volia odlišne a to pri *(CP)* modeli podľa *(8)* a pri *(ZA)* modeli podľa *(6)*, stačí dokázať, že obe voľby váh transformované podľa *(9)* sú invariantné vzhľadom na posun (a aplikovať *Dôkaz Vety 3*) a váhy *(8)* transformované podľa *(10)* sú násobkom prevrátenej hodnoty skalára pri zmene jednotiek (a aplikovať *Dôkaz Vety 1*).

Úprava váh *(8)* po transformácii vstupov a výstupov podľa *(10)* pre *i=1,...,m, k=1,...,n.* Poznamenajme, že *max* cez *j* a *min* cez *j* sa vzťahuje na $j \in \{1,...,p\}$.

$$\hat{w}_i^- = \frac{1}{(m+n)\left(\max\limits_j \hat{x}_{ji} - \min\limits_j \hat{x}_{ji}\right)} = \frac{1}{(m+n)\left(c_i \max\limits_j x_{ji} - c_i \min\limits_j x_{ji}\right)} =$$

$$= \frac{1}{c_i (m+n)\left(\max\limits_j x_{ji} - \min\limits_j x_{ji}\right)} = \frac{w_i^-}{c_i}$$

$$\hat{w}_k^+ = \frac{1}{(m+n)\left(\max\limits_j \hat{y}_{jk} - \min\limits_j \hat{y}_{jk}\right)} = \frac{1}{(m+n)\left(d_k \max\limits_j y_{jk} - d_k \min\limits_j y_{jk}\right)} = \frac{w_k^+}{d_k}$$

Úprava váh *(8)* po transformácii vstupov a výstupov podľa *(9)* pre *i=1,...,m, k=1,...,n* a cez $j \in \{1,...,p\}$:

$$\tilde{w}_i^- = \frac{1}{(m+n)\left(\max\limits_j \tilde{x}_{ji} - \min\limits_j \tilde{x}_{ji}\right)} = \frac{1}{(m+n)\left(\max\limits_j x_{ji} + a_i - \left(\min\limits_j x_{ji} + a_i\right)\right)} = w_i^-$$

$$\tilde{w}_k^+ = \frac{1}{(m+n)\left(\max\limits_j \tilde{y}_{jk} - \min\limits_j \tilde{y}_{jk}\right)} = \frac{1}{(m+n)\left(\max\limits_j y_{jk} + b_k - \left(\min\limits_j y_{jk} + b_k\right)\right)} = w_k^+$$

Váhy *(6)* sú jednotkové vektory, teda nezávisia od vstupov a výstupov, tým pádom po transformácii vstupov a výstupov (podľa *(9)*) váhy *(6)* ostanú nezmenené, čo je potrebné k dôkazu *Vety 7*.

Tým sú *Vety 4* až *7* dokázané.

**Veta 8.**

*(PL D CRTS)* model nie je k-invariantný vzhľadom na posun.

**Veta 9.**

*(CP D CRTS)* model nie je k-invariantný vzhľadom na posun.

**Veta 10.**

*(ZA D CRTS)* model nie je k-invariantný vzhľadom na posun.

**Dôkaz viet 8. až 10.**

Na príklade ukážeme, že po posune vstupov a výstupov podľa *(9)* sa nezachovajú optimálne hodnoty účelových funkcií úloh $(PL\ D\ CRTS)_o$, $(CP\ D\ CRTS)_o$ a $(ZA\ D\ CRTS)_o$

Uvažujme 3 DMU s dvoma vstupmi a jedným výstupom:

| | vstup1 | vstup2 | výstup |
|---|---|---|---|
| $DMU_1$ | 2 | 5 | 1 |
| $DMU_2$ | 2 | 6 | 1 |
| $DMU_3$ | 7 | 2 | 2 |

Optimálne hodnoty účelových funkcií po aplikácii úloh lineárneho programovania ($o=1,2,3$) pre analyzované modely:

| | PL model | CP model | ZA model |
|---|---|---|---|
| $DMU_1$ | 0 | 0 | 0 |
| $DMU_2$ | -0.58 | -0.083 | -1.0 |
| $DMU_3$ | 0 | 0 | 0 |

Optimálne hodnoty účelových funkcií po posune *vstupu 1* pri všetkých útvaroch o 20 jednotiek:

| | PL model | CP model | ZA model |
|---|---|---|---|
| $DMU_1$ | -5.95 | -0.9 | -12.5 |
| $DMU_2$ | -6.54 | -0.98 | -13.5 |
| $DMU_3$ | 0 | 0 | 0 |

Optimálne hodnoty účelových funkcií útvarov $DMU_1$ a $DMU_2$ sa zmenili po posune vstupov pri všetkých modeloch, dokonca z efektívneho útvaru $DMU_1$ sa stal neefektívny, tým pádom ani jeden uvedený model nie je k - invariantný vzhľadom na posun.

**Veta 11.**

*(ZA D CRTS)* model <u>nie je k-invariantný</u> vzhľadom na zmenu jednotiek.

**Veta 12.**

*(ZA D VRTS)* model <u>nie je k-invariantný</u> vzhľadom na zmenu jednotiek.

**Dôkaz viet 11. a 12.**

Na príklade ukážeme, že po transformácii vstupov a výstupov podľa *(10)* sa nezachovajú optimálne hodnoty účelových funkcií úloh $(ZA\ D\ CRTS)_o$ a $(ZA\ D\ VRTS)_o$.

Uvažujme 2 DMU s jedným vstupom a jedným výstupom:

| | vstup | výstup |
|---|---|---|
| $DMU_1$ | 1 | 1 |
| $DMU_2$ | 10 | 1 |

Optimálne hodnoty účelových funkcií po aplikácii úloh lineárneho programovania pre analyzované modely:

| | ZA D CRTS | ZA D VRTS |
|---|---|---|
| $DMU_1$ | 0 | 0 |
| $DMU_2$ | -9 | -9 |

Optimálne hodnoty účelových funkcií po vynásobení *vstupu* pri oboch útvaroch číslom 2:

| | ZA D CRTS | ZA D VRTS |
|---|---|---|
| $DMU_1$ | 0 | 0 |
| $DMU_2$ | -18 | -18 |

Optimálna hodnota účelovej funkcie útvaru $DMU_2$ sa zmenila po vynásobení vstupu pri oboch modeloch, tým pádom ani jeden uvedený model, nie je k - invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek.

Poznamenajme, že pri týchto dvoch modeloch po zmene jednotiek efektívne útvary ostanú efektívnymi a nezmení sa klasifikácia útvarov na efektívne a neefektívne, ako je to čiastočne dokázané pre variabilné výnosy z rozsahu v práci [1, str. 28], kde na k - invariantnosť postačovala nezmenená klasifikácia, preto sú v tej práci tieto modely označené ako k - invariantné vzhľadom na zmenu jednotiek.

**Zhrnutie:**

Na začiatku sme hovorili, že modely budeme skúmať z dvoch hľadísk, či sú invariantné vo všeobecnosti, t.j. podľa *Definície 1*, alebo iba v zmysle optimálneho riešenia účelovej funkcie, t.j. či sú invariantné v zmysle *Definície 4*.

Dôsledok predvedených dôkazov *Viet 1.* až *12.* je, že ani jeden model, pri aplikovaní príslušnej duálnej úlohy lineárneho programovania na výpočet, nie je invariantný v zmysle *Definície 1*. To vyplýva z toho, že pri každej k - invariantnej úlohe optimálne riešenie *(u,v)* resp. *(u,v,z)* pôvodnej úlohy dáva vo všeobecnosti inú hodnotu účelovej funkcie transformovanej úlohy, alebo sme na kontrapríkladoch ukázali, že sa opti-málne hodnoty účelových funkcií zmenili.

Nasledujúca tabuľka je zhrnutím toho, ktoré duálne modely sú invariantné (*áno*) a ktoré nie sú invariantné (*nie*) vzhľadom na zmenu jednotiek a na posun v zmysle *Definície 1 a Definície 4*. Pre lepšiu orientáciu uvedieme aj vety (*V1,...,V12*), ktoré sa zaoberajú s príslušnými tvrdeniami.

| | | podľa Definície 4 | | podľa Definície 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| model | | CRTS | VRTS | CRTS | VRTS |
| PL | posun | nie V8 | **áno** V3 | nie | nie |
| PL | zmena jednotiek | **áno** V1 | **áno** V2 | nie | nie |
| CP | posun | nie V9 | **áno** V6 | nie | nie |
| CP | zmena jednotiek | **áno** V4 | **áno** V5 | nie | nie |
| ZA | posun | nie V10 | **áno** V7 | nie | nie |
| ZA | zmena jednotiek | nie V11 | nie V12 | nie | nie |

Pre úplnosť sa teraz pozrime na primárne modely. Z teórie duality vieme, že optimálne hodnoty účelových funkcií primárnych a príslušných duálnych úloh sa rovnajú (ak existujú, ale to predpokladáme). Z toho vyplýva, že tie isté primárne modely budú k - invariantné, ktorých duálne úlohy sú k - invariantné. Ale ktoré sú pri k - invariantných modeloch príslušné bijektívne zobrazenia medzi prípustnými riešeniami pôvodných a transformovaných primárnych úloh?

Najprv analyzujeme k - invariantné modely vzhľadom na zmenu jednotiek, teda *(PL)* a *(CP)* model s konštantnými aj s variabilnými výnosmi z rozsahu. Účelová funkcia pri primárnych úlohách je:

$$\min_{\substack{\hat{\lambda}\in R^p,\\ \hat{s}^+\in R^n,\, \hat{s}^-\in R^m}} \; -\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{w}_i^- \hat{s}_i^- + \sum_{k=1}^{n} \hat{w}_k^+ \hat{s}_k^+\right).$$

Vieme, že jej optimálna hodnota musí byť rovnaká, ako pred tansformovaním vstupov a výstupov podľa *(10)* a pre váhy pri oboch voľbách či podľa *(7)* alebo *(8)* platí (pre $i=1,...,m$ a $k=1,...,n$):

$$\hat{w}_i^- = \frac{w_i^-}{c_i}, \quad \hat{w}_k^+ = \frac{w_k^+}{d_k},$$

tým pádom musíme prispôsobiť transformované doplnkové premenné tak, aby hodnota účelovej funkcie ostala nezmenená. Preto ich volíme nasledovne:

$$\hat{s}_i^- = c_i\, s_i^-, \quad \hat{s}_k^+ = d_k s_k^+ . \tag{15}$$

Ostáva ukázať, že *(15)* je prípustným riešením, t.j. že vyhovuje každej podmienke *(Ad P CRTS)* a *(Ad P VRTS)* pri voľbe váh podľa *(7)* a *(8)*.

Nech $o\in\{1,...,p\}$ je pevne zvolené. Vynásobme kladným skalárom $d_k$ ($k=1,...,n$) $k$ - tu rovnicu pôvodnej podmienky:

$$\sum_{j=1}^{p} y_{jk}\lambda_j - s_k^+ = y_{ok} \Big/ d_k$$

$$\sum_{j=1}^{p} d_k y_{jk}\lambda_j - d_k s_k^+ = d_k\, y_{ok} .$$

Z toho podľa *(10)* a *(15)* dostaneme nasledovné podmienky transformovanej úlohy pre $k=1,...,n$:

$$\sum_{j=1}^{p} \hat{y}_{jk}\lambda_j - \hat{s}_k^+ = \hat{y}_{ok} .$$

Z tejto rovnice vidno, že nielen *(15)* vyhovuje prvej podmienke transformovanej úlohy, ale premenné $\lambda_j$, $j=1,...,p$ ostanú nezmenené.

Po prevedení podobných úprav na podmienke pre $i=1,...,m$:

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ji}\lambda_j + s_i^- = x_{oi},$$

čiže vynásobením kladným skalárom $c_i$ ($i=1,...,m$) dostaneme ďalšiu podmienku transformovanej úlohy.

Keďže $\lambda_j$, $j=1,...,p$ ostali po transformácii nezmenené, tak spĺňajú podmienku pre variabilné výnosy z rozsahu:

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1.$$

Týmto sme našli nasledovné bijektívne zobrazenie medzi množinami prípustných riešení primárnych úloh také, že optimálne hodnoty účelových funkcií pôvodných úloh a transformovaných (podľa *(10)*) pre *(PL)* a *(CP)* modely sú rovnaké:

$$f:\quad \left(s_1^-,\dots,s_m^-,s_1^+,\dots,s_n^+,\lambda_1,\dots,\lambda_p\right)\mapsto\left(\frac{s_1^-}{c_1},\dots,\frac{s_m^-}{c_m},\frac{s_1^+}{d_1},\dots,\frac{s_n^+}{d_n},\lambda_1,\dots,\lambda_p\right).$$

Teraz hľadáme bijektívne zobrazenie medzi množinami prípustných riešení pre všetky primárne aditívne modely s variabilnými výnosmi z rozsahu, teda pre modely *(PL)*, *(CP)* a *(ZA)* tak, aby optimálne hodnoty účelových funkcií pôvodných úloh a transformovaných posunom, t.j. podľa *(9),* boli rovnaké. Účelová funkcia primárnej úlohy analyzovanej pri invariancii vzhľadom na posun je:

$$\min_{\substack{\tilde\lambda\in R^p,\\ \tilde s^+\in R^n,\tilde s^-\in R^m}} -\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde w_i^-\tilde s_i^- + \sum_{k=1}^{n}\tilde w_k^+\tilde s_k^+\right).$$

Vieme, že jej optimálna hodnota musí byť rovnaká, ako pred tansformovaním vstupov a výstupov podľa *(9)* a váhy pri všetkých voľbách (podľa *(6)*, *(7)* alebo *(8)*) sú invariantné vzhľadom na posun, t.j.:

$$\tilde w_i^- = w_i^-,\quad \tilde w_k^+ = w_k^+.$$

Preto hodnoty doplnkových premenných $s_i^-$ ($i=1,\dots,m$) a $s_k^+$ ($k=1,\dots,n$) ostanú nezmenené. Ako sa zmenia $\lambda_j$, $j=1,\dots,p$?

Do podmienok transformovanej úlohy *(Ad P VRTS ~)$_o$* pre $k=1,\dots,n$ a $i=1,\dots,m$:

$$\sum_{j=1}^{p}\tilde y_{jk}\tilde\lambda_j - s_k^+ = \tilde y_{ok}$$

$$\sum_{j=1}^{p}\tilde x_{ji}\tilde\lambda_j + s_i^- = \tilde x_{oi}$$

dosaďme podľa *(9)*:

$$\sum_{j=1}^{p}\left(y_{jk}+b_k\right)\tilde\lambda_j - s_k^+ = y_{ok}+b_k$$

$$\sum_{j=1}^{p}\left(x_{ji}+a_i\right)\tilde\lambda_j + s_i^- = x_{oi}+a_i$$

a upravme rovnice nasledovne:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{p} y_{jk}\tilde{\lambda}_j + \sum_{j=1}^{p} b_k\tilde{\lambda}_j - s_k^+ = y_{ok} + b_k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p} y_{jk}\tilde{\lambda}_j + b_k\sum_{j=1}^{p}\tilde{\lambda}_j - s_k^+ = y_{ok} + b_k\\&\sum_{j=1}^{p} x_{ji}\tilde{\lambda}_j + \sum_{j=1}^{p} a_i\tilde{\lambda}_j + s_i^- = x_{oi} + a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p} x_{ji}\tilde{\lambda}_j + a_i\sum_{j=1}^{p}\tilde{\lambda}_j + s_i^- = x_{oi} + a_i.\end{aligned} \tag{16}$$

Keďže riešime úlohy s variabilnými výnosmi z rozsahu, tak máme podmienku

$$\sum_{j=1}^{p}\tilde{\lambda}_j = 1,$$

ktorú keď dosadíme do rovníc *(16)*, môžeme zjednodušiť odčítaním $b_k$ a $a_i$. Tým dostaneme podmienky úlohy *(Ad P VRTS)$_o$*, ak aj premenné $\lambda_j$, $j=1,...,p$ ostanú nezmenené. Teda to hľadané bijektívne zobrazenie je samo do seba.

Týmto sme ukázali, že na rozdiel od duálnych úloh primárne úlohy s variabilnými výnosmi z rozsahu sú invariantné vzhľadom na posun v zmysle *Definície 1* t.j. aj optimálne riešenie aj optimálna hodnota účelovej funkcie sú invariantné vzhľadom na posun.

Nasledujúca tabuľka je zhrnutím toho, ktoré primárne úlohy na riešenie príslušných modelov sú invariantné (*áno*) a ktoré nie sú invariantné (*nie*) na zmenu jednotiek a na posun v zmysle *Definícií 1 a 4*.

| | | podľa Definície 4 | | podľa Definície 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| model | | CRTS | VRTS | CRTS | VRTS |
| PL | posun | nie | **áno** | nie | **áno** |
| PL | zmena jednotiek | **áno** | **áno** | nie | nie |
| CP | posun | nie | **áno** | nie | **áno** |
| CP | zmena jednotiek | **áno** | **áno** | nie | nie |
| ZA | posun | nie | **áno** | nie | **áno** |
| ZA | zmena jednotiek | nie | nie | nie | nie |

# 3 Meranie efektívnosti

V tejto kapitole diplomovej práce popíšeme rad experimentov s modelmi uvedenými v predchádzajúcich častiach. Najprv analyzujeme vstupne orientovaný CCR model, v druhej časti sa zaoberáme s aditívnymi modelmi s váhami. Pritom nás bude zaujímať, ako jednotlivé modely merajú efektívnosť. Modely aplikujeme na dáta, ktoré sú dostupné na internetovej stránke [5] a sú uvedené aj v prílohe v *Tabuľke I*. Sú to reálne dáta jednej slovenskej finančnej inštitúcie a jej 106 pobočiek. Pri každej pobočke sú dané 3 vstupy:

| | |
|---|---|
| OsobNakl | osobné náklady, |
| PrevNakl | celkové náklady spojené s prevádzkou filiálky, |
| OstatNakl | ostatné prevádzkové náklady, |

a 4 výstupy:

| | |
|---|---|
| Ucty | suma všetkých typov účtov, |
| PocUct | celkový počet všetkých účtov, |
| Vklady | suma zostatkov všetkých typov vkladov spolu ku koncu mesiaca, |
| PocVkl | počet všetkých typov účtov agendy vkladov spolu ku koncu mesiaca. |

Konkrétne výpočty boli uskutočnené pomocou programu [6], ktorý rieši úlohy pomocou Simplexovej metódy. Výhoda tohto programu je, že rieši aj úlohy väčšieho rozmeru. Ďalšia výhoda oproti voľne dostupným DEA riešiteľom je, že počíta pomocou vlastnej aritmetiky na toľko platných (desatinných) miest, koľko je potrebné pre najpresnejšie výsledky.

## 3.1 Vlastnosti *(CCR I D)* modelu

Pri experimentoch s výstupne orientovaným duálnym *(CCR I D)* modelom nás hlavne zaujímalo, aký počet útvarov má pri riešení programom [6] niektoré ceny pre vstupy alebo výstupy nulové a nakoľko je tento počet ovplyvnený zvolenou metódou riešenia (Simplexová metóda).

### 3.1.1 Analýza výsledkov pre *(CCR I D)* model

V prílohe v *Tabuľke II* sú uvedené optimálne hodnoty účelových funkcií pre všetkých 106 pobočiek v percentách, ktoré vyjadrujú tzv. technickú mieru efektívnosti. Kvôli prehľadnosti uvádzame iba tie ceny $u_1,...,u_3$ pre vstupy a $v_1,...,v_4$ pre výstupy, ktoré sú nulové. Niektoré nenulové ceny sú aj rádovo $10^{-6}$, z toho dôvodu by tá tabuľka bola neprehľadná a pre analýzu výsledkov ani nie je potrebné ich poznať.

Všimnime si, ako sme definovali efektívnosť a mieru efektívnosti po *(CCR I D)* modeli na str. 10: "testovaný útvar $DMU_o$ je efektívny, ak existuje také optimálne riešenie úlohy $(u^*,v^*)$, že $u^* > 0$, $v^* > 0$ a hodnota účelovej funkcie $E_o^*$ je rovná jednej. V prípade, že $E_o^*$ je menšia ako jedna a $u^*,v^*$ sú kladné, $E_o^*$ môžeme pokladať za mieru efektívnosti. Ak ale neexistuje kladné optimálne riešenie $(u^*,v^*)$ danej úlohy $(CCR\ I\ D)_o$, príslušné $E_o^*$ sa nedá interpretovať."

Z *tabuľky II* je vidieť, že iba 3 pobočky: č.7, č.60, č.68 môžeme podľa tohto vyhlásiť za efektívne a ďalších 10 optimálnych hodnôt účelových funkcií za miery efektívnosti a to pri pobočkách č.: 16, 21, 23, 24, 31, 32, 51, 54, 92, 94, lebo iba pre tieto útvary sú všetky zložky vektorov cien $u^*$ a $v^*$ kladné. Čo s ostatnými pobočkami? Ako určiť, či neexistuje pre ne iné, kladné optimálne riešenie $(u^*,v^*)$? Šancu nájsť optimálne riešenia s menším počtom nulových cien $u,v$ máme, pretože sme na riešenie použili Simplexovú metódu, ktorá poskytuje tzv. bázické riešenia, v ktorých je maximálny počet nulových zložiek. Z teórie lineárneho programovania však vieme, že ak úloha má nejednoznačné riešenie, potom okrem bázických riešení má aj riešenia s vyšším počtom nenulových zložiek, ako poskytuje bázické riešenie. Teda môže nastať situácia, že úloha má aj riešenia so všetkými zložkami kladnými, iba my sme to nenašli kvôli použitiu Simplexovej metódy. Preto sme navrhli dvojkrokovú metódu popísanú v ďalšej časti, ktorá v druhom kroku hľadá optimálne riešenie s kladnými zložkami riešenia (pomocou známej optimálnej hodnoty účelovej funkcie zistenej v prvom kroku).

### 3.1.2 Dvojkrokový *(CCR I D)* model

V predchádzajúcej časti sme dospeli k výsledku, že použitá metóda na riešenie *(CCR I D)* modelu je "neefektívna", t.j. zo 106 útvarov určil mieru efektivity objektívne (započítaním všetkých vstupov a výstupov pomocou kladných váh) pre 13 útvarov, to znamená, že iba pre 12% z nich. Pri ostatných pobočkách niektoré ceny $u_i$ $(i=1,2,3)$ a niektoré $v_k$ $(k=1,2,3,4)$ sú nulové. Nasledujúcim spôsobom môžeme zistiť, či neexistujú aj riešenia so všetkými zložkami kladnými.

Riešením úlohy $(CCR\ I\ D)_o$ ($o\in\{1,...,p\ (=106)\}$) dostaneme nejaké optimálne riešenie $(u^*,v^*)$. Označme optimálnu hodnotu účelovej funkcie pre toto optimálne riešenie $E_o^*$. Ďalej hľadáme iné optimálne riešenie úlohy také, aby ceny $u,v$ boli kladné, ak je to možné. Keďže sme v optime, tak hodnota účelovej funkcie sa nemení, preto $v^T y_o$ položíme rovné optimálnej hodnote $E_o^*$, ktorú sme našli v prvom kroku. Tým dostaneme ďalšiu podmienku. Ostatné podmienky úlohy $(CCR\ I\ D)_o$ sa nemenia. Novou účelovou funkciou sa snažíme maximalizovať minimálnu hodnotu z cien $u_i$ $(i=1,...,m)$ a $v_k$ $(k=1,...,n)$, t.j.

$$\max_{u,v}\left[\min\left(u_1,...,u_m,v_1,...,v_n\right)\right].$$

Tento zápis je ekvivalentný so zápisom prijateľným pre lineárne programovanie:

$$\begin{aligned}\max_{\Psi\in R}\quad & \Psi\\ & \Psi\le u_1,...,\Psi\le u_m\\ & \Psi\le v_1,...,\Psi\le v_n\,.\end{aligned}$$

Teda v druhom kroku riešime nasledovnú úlohu lineárneho programovania pre $\forall\ o\in\{1,...,p\}$:

**(Ψ)o**

$$\begin{aligned}\max_{\Psi\in R,\,u\in R^m,\,v\in R^n}\quad & \Psi\\ \text{za podmienok}\quad & \Psi e\le u\\ & \Psi e\le v\\ & v^T y_o = E_o^*\\ & u^T x_o = 1\\ & v^T y_j - u^T x_j \le 0,\quad \forall\ j=1,...,p.\end{aligned}$$

Ak optimálne riešenie $\Psi^*$ tejto úlohy je kladné, tak dostaneme aj kladné ceny $u,v$, ktoré sme hľadali, aby sme sa mohli rozhodnúť o tom, či optimálna hodnota účelovej funkcie úlohy $(CCR\ I\ D)_o$ udáva mieru efektívnosti pre útvar $DMU_o$. Ak optimálne $\Psi^* = 0$, tak úloha $(CCR\ I\ D)_o$ nemá kladné optimálne riešenie $u,v$. Z toho vyplýva, že neexistuje maximum pre úlohu $(CCR\ I\ D)_o$, v ktorej podmienky nezápornosti cien $u,v$ nahradíme ostrými nerovnosťami:

$$u > 0\,,\ v > 0\,,$$

aké vlastne hľadáme. Existuje iba suprémum.

Príslušná úloha lineárneho programovania na riešenie $(\Psi)$ modelu v primárnom tvare pre $\forall\ o \in \{1,\ldots,p\}$:

**$(\Psi\ P)_o$**

$$\min_{\substack{s^- \in R^m,\, s^+ \in R^n, \\ \lambda \in R^p,\, r \in R,\, q \in R}} \quad r + qE_o^*$$

za podmienok

$$e^T s^- + e^T s^+ = 1$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j + s^- = r x_o$$

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j - s^+ = -q y_o$$

$$s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0, \quad \lambda \geq 0,$$

kde $e^T$ je vektor jednotiek.

V prílohe v *Tabuľke III* sú uvedené výsledky tejto dvojkrokovej metódy. Takto sme dostali presné informácie o všetkých pobočkách, z ktorých iba pre 26 existujú kladné ceny. Z toho 14 DMU je efektívnych a pri 12 pobočkách môžeme povedať, že optimálna hodnota účelovej funkcie udáva presnú technickú mieru efektívnosti. V ostatných prípadoch je miera efektivity menšia, ako udaná hodnota, keďže niektoré vstupy alebo výstupy neboli brané do úvahy kvôli ich nulovej cene.

Zhodou okolností pre všetky pobočky s optimálnou hodnotou účelovej funkcie rovnou jednej, t.j. pre efektívne útvary vyšli nenulové ceny, ale to nie je samozrejmosťou, ako sa môžeme presvedčiť na nasledovnom príklade:

**Príklad 1.**

Uvažujme 2 DMU s dvoma vstupmi a jedným výstupom:

| | vstup1 | vstup2 | výstup |
|---|---|---|---|
| $DMU_1$ | 2 | 5 | 1 |
| $DMU_2$ | 2 | 6 | 1 |

Použitá úloha na riešenie *(CCR I D)* modelu určí pre obe pobočky optimálnu hodnotu účelovej funkcie rovnú jednej napriek tomu, že $DMU_2$ spotrebováva väčšie množstvo *vstupu 2* na vyprodukovanie rovnakého množstva výstupu ako $DMU_1$, teda by nemala byť efektívna. Prečo ohodnotí tento model evidentne neefektívny útvar ako efektívny? Problém je v podmienkach nezápornosti cien. *Vstupy 2* pre oba *DMU* sú s nulovou cenou:

| | u1 | u2 | v |
|---|---|---|---|
| $DMU_1$ | 0.5 | 0 | 1 |
| $DMU_2$ | 0.5 | 0 | 1 |

tým pádom tento výsledok nestačí na určenie efektivity. Pozrime sa na výsledky po vykonaní druhého kroku, t.j. riešime *(Ψ)* model.

| | u1 | u2 | v |
|---|---|---|---|
| $DMU_1$ | 0.14 | 0.14 | 1 |
| $DMU_2$ | 0.5 | 0 | 1 |

Naše očakávania sa splnili, $DMU_1$ je efektívna, lebo sa našli kladné ceny, ale pre $DMU_2$ neexistujú, tým pádom optimálna hodnota účelovej funkcie, ktorá ostala rovná jednej, neudáva efektívnosť pre ten útvar $DMU_2$, ale miera efektivity je menšia.

**Zhrnutie:**

Z výsledkov uvedenej analýzy *(CCR I D)* modelu vidieť, že tento model neumožňuje zmerať mieru efektívnosti pre všetky útvary, lebo pri nulových optimálnych cenách *u,v* je príslušná miera efektívnosti menšia, ako optimálna hodnota účelovej funkcie. Ani dvojkrokový model veľmi nepomohol, síce počet vhodne ohodnotených útvarov sa zdvojnásobil. Na našom súbore dát u 75,5% útvarov je efektívnosť zmeraná nedostatočne.

## 3.2 Porovnanie aditívnych modelov s váhami

V tejto podkapitole sa zaoberáme experimentmi s aplikáciou aditívnych modelov. V prvej kapitole (str. 13) sme uviedli, že aditívne modely vyžadujú preškálovanie získanej optimálnej hodnoty účelovej funkcie, resp. definovanie úplne novej miery efektívnosti pomocou získaných optimálnych riešení. V nasledujúcej časti uvedieme 3 spôsoby na výpočet miery efektívnosti. Následne porovnáme aditívne modely s váhami podľa rozličnej voľby váh.

### 3.2.1 Porovnanie z hľadiska merania miery efektívnosti

Pri riešení CCR modelov optimálna hodnota účelovej funkcie príslušnej úlohy lineárneho programovania priamo udáva mieru efektívnosti (resp. jej prevrátenú hodnotu), samozrejme iba vtedy, keď optimálne riešenie $(u^*,v^*)$ je kladné. Pri aditívnych modeloch percentuálnu hodnotu miery efektívnosti musíme dopočítať, keďže optimálna hodnota účelovej funkcie takúto informáciu priamo neposkytuje. Preto sa snažíme zvoliť také transformácie získanej optimálnej hodnoty účelovej funkcie alebo optimálnych riešení úloh, aby sme mieru efektívnosti pre neefektívne DMU dostali do intervalu $[0,1)$ a pre efektívne útvary rovné jednej.

Pozrieme sa na riešenie aditívnych modelov s váhami a s variabilnými výnosmi z rozsahu. Autori práce [3] navrhli tri rôzne spôsoby na výpočet miery efektívnosti podľa údajov získaných pri riešení modelu *(Ad VRTS)*. Prvá miera efektívnosti je počítaná pomocou optimálnej hodnoty účelovej funkcie, kým druhá resp. tretia metóda výpočtu miery efektívnosti nepoužíva optimálnu hodnotu účelovej funkcie, ale je počítaná pomocou optimálnych riešení primárnej resp. duálnej úlohy.

**I.** Miery efektívnosti založené na optimálnych hodnotách účelovej funkcie.

Označme optimálnu hodnotu účelovej funkcie pre $o$-ty ($o\in\{1,...,p\}$) útvar $E_o^*$. $DMU_o$ je efektívny, ak $E_o^*=0$. Pre neefektívne útvary $E_o^* < 0$. Mieru efektívnosti $M1(\varepsilon)_o$[2)] pre útvar $o$ dopočítame pomocou vzťahu:

$$M1(\varepsilon)_o = 1+\varepsilon E_o^*,$$

[2)] označenie: M - miera efektívnosti, 1 - uvedená ako prvá v poradí, ε - parameter výpočtu kde $\varepsilon > 0$ je škálovací parameter zvolený tak, aby $M1(\varepsilon)_o \in [0,1]$ pre $\forall\, DMU_o$, napr.:

$$\varepsilon = \frac{1}{\left|\min\left(E_1^*,\ldots,E_p^*\right)\right|}. \tag{17}$$

Nami navrhnutá transformácia optimálnej hodnoty účelovej funkcie do požadovaného intervalu $[0,1]$ je pomocou exponenciálnej funkcie. Tento výpočet miery efektívnosti bol zovšeobecnený v práci [3] pomocou tzv. funkcie kontrastu ozn. $f(r)$. Funkcia kontrastu pre $r \geq 0$ má vlastnosti:

$$f(0) = 1, \quad f(r) > 0, \quad f'(r) < 0, \quad f''(r) > 0, \quad \lim_{r\to\infty} f(r) = 0,$$

ktoré spĺňajú nasledovné konkrétne funkcie:

$$f(r) = \exp(-\beta r),$$

$$f(r) = \frac{1}{1+\gamma r^2},$$

kde $\beta > 0$, $\gamma > 0$ sú tzv. parametre kontrastu.

Ak $E_o^*$ je optimálna hodnota účelovej funkcie útvaru $DMU_o$, potom ďalšie dve možné miery efektívnosti podľa konkrétnych funkcií kontrastu počítame:

$$M2(\beta)_o = \exp\left(\beta E_o^*\right),$$

$$M3(\gamma)_o = \frac{1}{1+\gamma\left(E_o^*\right)^2}.$$

**II.** Miera efektívnosti založená na optimálnych riešeniach primárneho modelu.

Označme optimálne riešenie úlohy $(Ad\ P\ VRTS)_o$: $(\lambda^*, s^{*-}, s^{*+})$. Pomocou $\lambda^*$ zaveďme tzv. virtuálny útvar $DMU_f$, ktorého vstupy a výstupy dopočítame:

$$x_f = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* x_j, \quad y_f = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* y_j.$$

Podľa podmienok úlohy $(Ad\ P\ VRTS)_o$ dostávame:

$$x_f = x_o - s^{*-}, \quad y_f = y_o + s^{*+}.$$

Mieru efektívnosti $DMU_o$ určíme z miery efektívnosti virtuálneho útvaru $DMU_f$. Ak sú vstupy a výstupy $DMU_o$ kladné, potom spolu s podmienkou nezápornosti doplnkových premenných implikujú:

$$x_{fi} \leq x_{oi}, \quad i = 1,\ldots,m$$

$$y_{fk} \geq y_{ok}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Pomery:

$$E_i^x = \frac{x_{fi}}{x_{oi}}, \quad i = 1,\dots,m$$

$$E_k^y = \frac{y_{ok}}{y_{fk}}, \quad k = 1,\dots,n$$

nazývame parciálnou zlomkovou efektívnosťou prislúchajúcou vstupom resp. výstupom $DMU_o$. Tieto hodnoty sú v intervale *[0,1]*. V prípade, že vstupy $x_{oi}$ sú nulové, $E_i^x$ položíme rovné jednej a ak výstupy $y_{ok}$ sú nulové, $E_k^y$ položíme rovné nule. Váženú agregovanú mieru efektívnosti pomocou váh $\mu_i > 0$ ($i=1,...,m$) a $\eta_k > 0$ ($k=1,...,n$) definujeme:

$$M4(\mu,\eta)_o = \sum_{i=1}^{m} \mu_i E_i^x + \sum_{k=1}^{n} \eta_k E_k^y .$$

Podmienku:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{k=1}^{n} \eta_k = 1,$$

ktorá zabezpečí, aby miera efektívnosti $M4(\mu,\eta)_o$ patrila do intervalu [0,1], s ohraničeniami pre $i=1,...,m$ a $k=1,...,n$:

$$\mu_i > 0, \quad \eta_k > 0,$$

spĺňajú nasledovné voľby váh $\mu_i$, $\eta_k$:

i) $$\mu_i = \eta_k = \frac{1}{m+n}, \tag{18}$$

kde $m$ ($n$) je počet vstupov (výstupov),

ii) $$\mu_i = \frac{w_i^-}{\sum_{l=1}^{m} w_l^- + \sum_{k=1}^{n} w_k^+}, \quad \eta_k = \frac{w_k^+}{\sum_{i=1}^{m} w_i^- + \sum_{l=1}^{n} w_l^+}, \tag{19}$$

kde $w_i^-$, $w_k^+$ sú definované podľa vzorcov *(7)*, *(8)*:

**III.** Miera efektívnosti založená na optimálnych riešeniach duálneho modelu.

Označme optimálne riešenie úlohy *(Ad D VRTS)*$_o$ trojicou *(u,v,z)*, pomocou ktorej mieru efektívnosti $M5_o$ pre $o$ - ty útvar definujeme:

$$M5_o = \begin{cases} \dfrac{v^T y_o + z}{u^T x_o}, & z \geq 0 \\ \dfrac{v^T y_o}{u^T x_o - z}, & z < 0 \end{cases}.$$

V prílohe v *Tabuľke IV* sú uvedené optimálne hodnoty účelových funkcií a výsledky všetkých výpočtov pre miery efektívnosti (*M1* až *M5* v percentách) pre model *(PL VRTS)*, čiže pre aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu a pomocou váh *(7)*. Hodnoty parametrov výpočtu pre príslušné miery efektívnosti sú v druhom riadku *Tabuľky IV* uvedené buď podľa číselného označenia vzorca, podľa ktorého sa počítali (*(17), (18), (19)*), alebo je doplnená konkrétna hodnota ($\beta$=1, $\gamma$=1). Poznamenajme, že vo vzorci *(19)* váhy $w^+$ a $w^-$ boli počítané podľa *(7)*, keďže ide o *(PL)* model. Čísla (typu bold) napravo od hodnôt účelovej funkcie a mier efektívností v *Tabuľke IV* udávajú rating (***R***) pobočiek, t.j. poradové číslo útvaru pri zostupnom usporiadaní podľa príslušného výpočtu miery efektívnosti. Keďže 34 pobočiek je vždy efektívnych (účelová funkcia je nulová a miera efektivity je 100%), tie majú ratingy rovné jednej a pre ďalšie pobočky sú ratingy od 35 do 106.

Je zrejmé, že ratingy útvarov pri mierach *M1(ε), M2(β)*, *M3(γ)* sú rovnaké pre akúkoľvek voľbu parametrov $\varepsilon$, $\beta$, $\gamma$ a rovnajú sa aj ratingom pobočiek podľa optimálnej hodnoty účelovej funkcie, lebo sú monotónnou transformáciou práve tej hodnoty. Miery *M4* (oba spôsoby) a *M5* však poskytujú úplne iné ratingy pre jednotlivé útvary.[3)]

Výsledky predchádzajúcich výpočtov kvôli ľahšiemu porovnaniu jednotlivých mier efektívnosti zhrnieme v nasledujúcej tabuľke, kde:

1. riadok: počet efektívnych útvarov, t.j. s efektivitu rovnou 100%,
2. riadok: najmenšia dosiahnutá miera efektívnosti (v %),
3. riadok: aritmetický priemer mier efektivít neefektívnych útvarov (v %),
4. riadok: počet neefektívnych útvarov s mierou efektivity nad 50%,
5. riadok: percentuálny počet neefektívnych útvarov, ktorých miera efektivity je nad 50%.

| miera efektivity: | M1(ε) | M2(β) | M3(γ) | M4($\mu,\eta$) | M4($\mu,\eta$) | M5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| parametre výpočtu M: | ε ↔(17) | β=1 | γ=1 | $\mu,\eta$ ↔ (18) | $\mu,\eta$ ↔ (19) | |
| počet efektívnych | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 |
| najmenšia miera ef. v % | 0 | 1 | 4 | 39 | 16 | 14 |
| priemer neefektívnych v % | 78 | 43 | 55 | 70 | 78 | 60 |
| počet (50% < M < 100%) | 66 | 27 | 40 | 66 | 59 | 47 |
| v % počet nad 50% z neef. | 92 | 38 | 56 | 92 | 82 | 65 |

[3)] S ratingmi sa podrobnejšie zaoberáme v ďalšej podkapitole pri porovnávaní aditívnych modelov z hľadiska voľby váh.

Aké sú nedostatky jednotlivých mier efektivity?

Ako prvé si všimnime, do akého intervalu patria miery efektivity. Predpokladali sme hodnoty z intervalu *[0,1]* (v percentách od 0% do 100%). Z tohto hľadiska najhoršie výsledky dáva výpočet $M4(\mu,\eta)$ s parametrami výpočtu $\mu,\eta$ zvolené podľa *(18)*, kde najmenšia miera efektivity je 39%. Tento nedostatok je ale ľahko odstrániteľný pomocou ďalšej transformácie, kde pre všetky $DMU_o$ ($o=1,...,p$) prepočítame miery efektivity $M_o$ nasledovne:

$$M_o^{new} = \frac{M_o - \min(M_1,...,M_p)}{\max(M_1,...,M_p) - \min(M_1,...,M_p)}, \tag{20}$$

čím všetky miery efektivity zmenšíme, okrem efektívnych útvarov, t.j. ktoré majú efektivitu rovnú 100%, lebo tie hodnoty po tejto transformácii ostanú nezmenené. Je zrejmé, že transformácia resp. preškálovanie *(20)* je tiež monotónna operácia. To znamená, že nezmení poradie testovaných útvarov pri ich usporiadaní podľa príslušnej miery efektívnosti.

Ďalší nedostatok výpočtov je vidieť v predchádzajúcej tabuľke z tretieho až piateho riadku. Čísla uvedené v týchto riadkoch udávajú, ako nerovnomerne sú rozdelené miery efektívnosti neefektívnych útvarov. Napríklad pri výpočte miery efektívnosti $M1(\varepsilon)$ až 66 útvarov zo 72 neefektívnych (t.j. 92%) má vyše 50% - nú mieru efektivity, preto je aj aritmetický priemer mier efektívnosti neefektívnych útvarov taký vysoký (78%). A keďže iba podľa tohto výpočtu je dosiahnutá predpokladaná dolná hranica intervalu miery efektivity (najmenšia miera efektivity je 0), tak ani transformáciou *(20)* to nevylepšíme.

Rovnomerné rozdelenie mier efektivít všetkých útvarov cez celý interval *[0,1]* chceme dosiahnuť z toho dôvodu, aby sa dali ľahšie porovnávať pobočky medzi sebou. Tie výsledky neodzrkadľujú to, akou efektivitou pracuje tá ktorá pobočka, čiže ako využíva svoje vstupy na vyprodukovanie výstupov vo všeobecnosti, ale slúžia jedine na porovnanie útvarov medzi sebou, s ktorými pracujeme. Preto nie sú výhodné také výsledky, podľa ktorých by všetky pobočky mali mieru efektivity nad nejakým percentom (napr. tých 39%), lebo vo všeobecnosti sme si mohli myslieť, že to nie je až taký zlý výsledok, aj keď v porovnaní s ostatnými tá pobočka je na poslednom mieste. Preto ten interval od 39% do 100% rozťahujeme až k nule. Nerovnomerné rozdelenie nevyhovuje z podobného dôvodu, aj keď najmenšia miera efektivity je nula, ale ak 92% neefektívnych útvarov má mieru efektivity nad 50%, tak ani tie útvary nie sú medzi sebou vhodne porovnané.

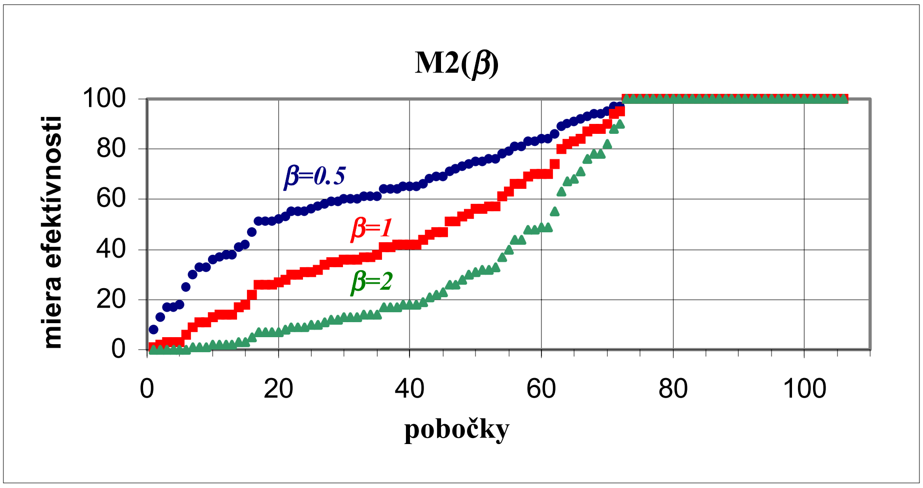
Z tejto analýzy vyplýva, že jednoznačne najlepšie výsledky dávajú výpočty podľa funkcií kontrastu (t.j. miery $M2(\beta)$, $M3(\gamma)$). Pýtame sa prečo? Všimnime si, že ich parametre $\beta$ a $\gamma$ môžeme zvoliť ľubovolne a pomocou nich môžeme dosiahnuť rozloženie mier efektívnosti ako nám vyhovuje. Pri týchto konkrétnych výpočtoch pre *(PL VRTS)* model:

- pre $\beta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1)$ dostaneme veľa vysokých mier efektívnosti,
- pre $\beta > 1$, $\gamma > 1$ opačne, čiže malé miery efektivity,
- pre $\beta = 1$, $\gamma = 1$ je pomerne rovnomerné rozdelenie výsledkov.

Pre $\beta = 0.5$, $\beta = 1$, $\beta = 2$ a $\gamma = 0.5$, $\gamma = 1$, $\gamma = 2$ príslušné miery efektívnosti sú v prílohe v *Tabuľke V*. Hodnoty sú zoradené podľa mier efektívnosti, aby sme ich mohli prehľadnejšie znázorniť v nasledujúcich *Grafoch I* a *II* .

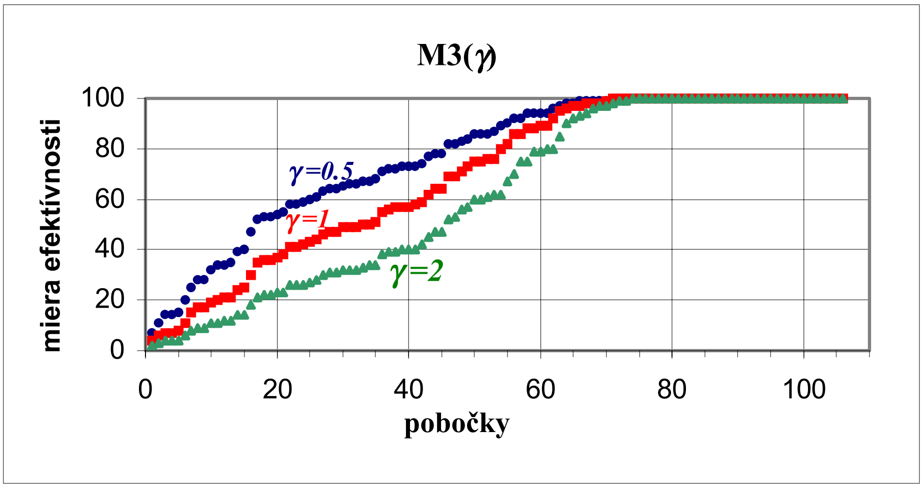
Na *Grafe I* vidíme na vodorovnej osi vynesený počet pobočiek (0 až 106), ale kvôli prehľadnosti útvary sú zoradené podľa mier efektívnosti. Na zvislej osi sú miery efektivity $M2(\beta)$ (v percentách) pre $\beta = 0.5$, $\beta = 1$, $\beta = 2$.
Neefektívnych útvarov je 72, z toho pri $\beta = 0.5$ od sedemnásteho v poradí majú útvary nad 50% mieru efektivity, pre $\beta = 2$ od 62 - ho útvaru v poradí majú len nad 50% mieru efektivity, čo je iba 10 útvarov s mierou efektivity nad 50%. Pre $\beta = 1$ je to približne rovnomerne rozdelené.

**Graf I**



Podobné údaje sú v *Grafe II* pre mieru $M3(\gamma)$, kde $\gamma=0.5$, $\gamma=1$ a $\gamma=2$:

**Graf II**




Nasledujúca tabuľka znázorňuje zhrnutie hodnôt mier efektívnosti po odstránení prvého nedostatku, čiže po vykonaní transformácie *(20)*, t.j. miery efektívnosti sme previedli na celý interval *[0,1]*. Príslušná tabuľka s prevedenými hodnotami mier efektívnosti je v prílohe ako *Tabuľka VI*.

| miera efektivity: | M1(ε) | M2(β) | M3(γ) | M4(μ,η) | M4(μ,η) | M5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| parametre výpočtu M: | ε ↔(17) | β=1 | γ=1 | μ,η ↔ (18) | μ,η ↔ (19) | |
| počet efektívnych | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 |
| najmenšia miera ef. v % | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| priemer neefektívnych v % | 78 | 43 | 54 | 51 | 74 | 53 |
| počet (50% < M < 100%) | 66 | 26 | 36 | 43 | 56 | 44 |
| v % počet nad 50% z neef. | 92 | 36 | 50 | 60 | 78 | 61 |

Ako si môžeme všimnúť, aj druhý nedostatok, čiže nerovnomerné rozdelenie mier efektívnosti sa zlepšil a to najviac pre mieru $M4(\mu,\eta)$ s parametrami podľa *(18)*. Tým pádom aj táto metóda na výpočet miery efektívnosti sa stala porovnateľná s metódami výpočtov podľa funkcií kontrastu.

### 3.2.2 Porovnanie z hľadiska voľby váh

V 2. kapitole sme ukázali, že aditívne modely s váhami $w^-$ a $w^+$ volené podľa *(6)*, nie sú k – invariantné vzhľadom na zmenu jednotiek a preto nie sú vhodné na použitie. Ale ak sú váhy volené podľa vzorcov *(7)* resp. *(8)*, tak takéto modely sú k – invariantné vzhľadom na zmenu jednotiek. Navyše v prípade, že používame modely s variabilnými výnosmi z rozsahu, sú k – invariantné aj na posun, čo rozširuje možnosti ich použitia. V predchádzajúcej časti sme popísali niekoľko mier efektívnosti, ktoré umožňujú porovnávať výsledky získané pre aditívne modely pri rozličnej voľbe váh podľa *(7)* (model Pastora a Lowella) a *(8)* (model Coopera a Pastora).

V prílohe v *Tabuľke VII* sú uvedené optimálne hodnoty účelovej funkcie a miery efektívnosti *M1* až *M5* pre všetky pobočky pre model *(CP VRTS)* podobne ako v *Tabuľke IV* pre *(PL VRTS)* model. Uvádzame aj ratingy pobočiek. Parametre výpočtu mier efektívnosti $M2(\beta)$ a $M3(\gamma)$ sme zvolili tak, aby bolo požadované rovnomerné rozdelenie mier efektívnosti splnené. Preto $\beta$ = 30 a $\gamma$ = 1700. Ten veľký rozdiel vo voľbe parametra kontrastu $\gamma$ pri rôznych modeloch je z toho dôvodu, že optimálne hodnoty účelových funkcií pri *(PL)* modeli sú z intervalu (-5, 0], kým pri *(CP)* modeli sú rádovo $10^{-2}$ a pri výpočte podľa vzorca $M3(\gamma)$ pre vhodné výsledky treba parameter, ktorým sa násobí kvadratická hodnota účelovej funkcie voliť kompenzujúco. Pri výpočte miery efektívnosti $M4(\mu,\eta)$ pomocou vzorca *(19)* sme počítali váhy $w^+$ a $w^-$ podľa *(8)*, keďže analyzujeme *(CP)* model.

Pre ľahšie porovnanie uvádzame podobnú súhrnnú tabuľku aj pre *(CP)* model, akú vidíme pre *(PL)* model na str. 41.

| miera efektivity: | M1(ε) | M2(β) | M3(γ) | M4($\mu,\eta$) | M4($\mu,\eta$) | M5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| parametre výpočtu M: | ε ↔(17) | β=30 | γ=1700 | $\mu,\eta$ ↔(18) | $\mu,\eta$ ↔(19) | |
| počet efektívnych | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 |
| najmenšia miera ef. v % | 0 | 3 | 4 | 43 | 16 | 14 |
| priemer neefektívnych v % | 78 | 53 | 57 | 72 | 76 | 61 |
| počet (50% < M < 100%) | 66 | 39 | 40 | 69 | 58 | 50 |
| v % počet nad 50% z neef. | 92 | 54 | 56 | 96 | 81 | 70 |

Aj tieto výpočty majú rovnaké nedostatky, ako pri (*PL)* modeli, preto aj tieto hodnoty transformujeme pomocou *(20)* na požadovaný interval (*Tabuľka VIII* v prílohe) a uvádzame zhrnutie výsledkov:

| miera efektivity: | M1(ε) | M2(β) | M3(γ) | M4($\mu,\eta$) | M4($\mu,\eta$) | M5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| parametre výpočtu M: | ε ↔(17) | β=30 | γ=1700 | $\mu,\eta$ ↔(18) | $\mu,\eta$ ↔(19) | |
| počet efektívnych | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 | 34 |
| najmenšia miera ef. v % | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| priemer neefektívnych v % | 78 | 52 | 55 | 51 | 72 | 54 |
| počet (50% < M < 100%) | 66 | 36 | 38 | 41 | 56 | 46 |
| v % počet nad 50% z neef. | 92 | 50 | 53 | 57 | 78 | 64 |

Najvýraznejšie zlepšenie nastalo tiež pri počítaní miery efektívnosti pomocou vzorca *M4*($\mu,\eta$), kde parametre $\mu,\eta$ volíme podľa *(18)*.

Vráťme sa k ratingom pobočiek.[4)] Kvôli prehľadnosti a ľahšiemu porovnávaniu oboch aditívnych modelov (s rôznymi voľbami váh) podľa toho, aké poradové čísla priradia jednotlivým pobočkám, v *Tabuľke IX* sú uvedené iba ratingy pobočiek. Keďže pre optimálnu hodnotu účelovej funkcie a miery efektívnosti počítané pomocou nej sú ratingy rovnaké, v *Tabuľke IX* sú tie hodnoty uvedené iba raz. Ďalšie ratingy sú počítané podľa mier efektívnosti *M4* (dva spôsoby) a *M5*. Zmeny v ratingu pri použití *(PL)* a *(CP)* modelu sú zhrnuté do nasledujúcej tabuľky.

1. riadok: počet útvarov, kde nastala zmena v ratingu podľa rôzneho modelu (pri danej miere efektívnosti)
2. riadok: maximálny rozdiel v ratingu zo všetkých 106 pobočiek medzi výsledkami *(PL)* modelu a *(CP)* modelu
3. riadok: priemerný rozdiel v ratingu podľa rôznej voľby modelu pre všetky neefektívne útvary

4) Po zoradení útvarov podľa mier efektívnosti sme si všimli, že pre dve krát dve pobočky sú miery efektívnosti rovnaké a to pri pobočkách č.19 a č.98, druhá dvojica pobočiek č.20 a č.99, preto tie dvojice majú rovnaké poradové čísla. Až potom sme zistili, že aj dáta (všetky vstupy a výstupy) pri týchto pobočkách sú rovnaké.

| | M1-M3 | M4,(18) | M4,(19) | M5 |
|---|---|---|---|---|
| počet zmenených | 48 | 64 | 62 | 47 |
| maximálny rozdiel | 6 | 15 | 25 | 8 |
| priem. rozdiel všetkých neef. | 1.3 | 3.5 | 3.8 | 1.4 |

Ďalšia tabuľka udáva počet útvarov, pri ktorých je zmena v ratingu o 0,1,2 atď. až 25 miest. Prázdne miesta a chýbajúce stĺpce pri zmene v ratingu sú s nulovým počtom.

| zmena o | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 13 | 15 | 21 | 22 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M1-M3 | 24 | 24 | 10 | 9 | 2 | 1 | 2 | | | | | | | | | |
| M4,(18) | 8 | 13 | 13 | 11 | 7 | 4 | 6 | 3 | 1 | 3 | 1 | | 2 | | | |
| M4,(19) | 10 | 13 | 10 | 9 | 15 | 5 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| M5 | 25 | 25 | 10 | 4 | 4 | 2 | | 1 | 1 | | | | | | | |

Z uvedených tabuliek je vidieť, že zmeny v ratingu pri použití *(PL)* resp.*(CP)* modelu pri výpočte miery efektívnosti podľa *M1*, *M2*, *M3* a *M*5 sú bezvýznamné. Priemerná zmena v ratingu je menej ako 1.5 poradia. Pritom je pravdepodobné, že zmena o 1 či 2 miesta je spôsobená tými pár útvarmi, pri ktorých je zmena o trošku väčšia. V *Tabuľke IX* sú zvýraznené tie útvary, kde sú najväčšie zmeny. Zaujímavé je, že útvary, u ktorých dochádza k väčším zmenám v ratingu, majú lepší rating v modeli *(CP)* ako v *(PL)* pri všetkých použitých mierach s výnimkou miery *M4* počítanej podľa *(19)*. Keďže tie útvary s veľkou zmenou v ratingu pri rôznych modeloch sú odlišné, nadarmo by sme hľadali v pôvodných dátach nijaké nápaditosti.

# Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo porovnať niektoré DEA modely z hľadiska merania miery efektívnosti, prípadne navrhnúť nové miery, pritom jednotlivé miery efektívnosti otestovať na veľkom dátovom súbore. Kvôli správnemu použitiu modelov sme v 2. kapitole dokázali ich invariantnosť resp. neinvariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek a na posun. V 3. kapitole sme najprv analyzovali jeden z najjednoduchších DEA modelov, vstupne orientovaný CCR model. Žiaľ výsledky pre tento model ukázali, že je nepoužiteľný. Pre vyše tri štvrtiny útvarov CCR model zmeral efektívnosť nedostatočne. Ani nami navrhnutá dvojkroková metóda na zlepšenie výsledkov nepomohla, keďže také optimálne riešenie, aké model žiada z definície miery efektívnosti jednoducho neexistuje. Aditívne modely z tohto hľadiska sú rozumnejšie definované, hlavnému cieľu DEA modelov, t.j. určeniu miery efektívnosti vždy vyhovejú. Jediným nedostatkom tejto metódy je, že z riešenia úlohy lineárneho programovania pre príslušné aditívne modely miery efektívnosti priamo nevyplývajú. Získané optimálne hodnoty treba nejakým spôsobom preškálovať alebo pretransformovať. Takýchto možností je však viac, ktoré sme aj my doplnili jedným spôsobom výpočtu miery efektívnosti ($M2(\beta)$). Z výsledkov vyplýva, že naša miera efektívnosti je aj jednou z najlepších. Hlavným nedostatkom niektorých výpočtov miery efektívnosti bolo nerovnomerné rozdelenie výsledkov. Totiž DEA metódou hľadáme pre jednotlivé útvary takú mieru efektívnosti v rámci danej skupiny skúmaných útvarov, ktorá odzrkadľuje ako efektívne pracuje tá ktorá pobočka v danej skupine. Nehľadáme mieru efektívnosti vo všeobecnosti, čiže ako premení útvar svoje vstupy na výstupy, iba porovnávame útvary medzi sebou. Teda výsledkom DEA metódy by predovšetkým malo byť poradové číslo (rating) pobočiek. V poslednej podkapitole tejto práci sme však dospeli k výsledku, že aj to poradové číslo závisí od typu modelu a aj od zvoleného výpočtu miery efektívnosti.

# LITERATÚRA


[1] J. Petríková: *DEA s invariantnou hranicou*, Diplomová práca, MFF UK 2000

[2] M. Halická: *Úvod do DEA modelov*, seminár 1999

[3] D. Ševčovič, M. Halická and P. Brunovský: *DEA Analysis for a Large Structured Bank Branch Network*, 2001, working paper, www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/publications.html

[4] W. W. Cooper, R. G. Thompson and R. M. Thrall: *Extensions and new developments in DEA*, Annals of Operations Research 66, Introductions - Chapter 1, 1996, 3-45

[5] D. Ševčovič, M. Halická and P. Brunovský: *Data Envelopment Analýza efektívnosti útvarov peňažných inštitúcií*, www.iam.fmph.uniba.sk/dea/data.html

[6] M. Jandačka: *DEA Solver* - software na riešenie rôznych DEA modelov väčšieho rozmeru

[7] C. A. K. Lowell and J. T. Pastor: *Units invariant and translation invariant DEA models*, Operations Research Letters 18 (3), 1995, 147-151

# PRÍLOHA

**TABUĽKA I**
*(vstupné dáta)*

| pobočka | OsobNakl | PrevNakl | OstatNakl | Ucty | PocUct | Vklady | PocVkl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2582618 | 2530099 | 37027.4 | 34359033 | 8381 | 281921703 | 37523 |
| 2 | 1122877 | 1244833 | 28099.8 | 20602647 | 3061 | 71228122 | 9630 |
| 3 | 32082.1 | 24944.4 | 1038.01 | 171113 | 37 | 4446894 | 642 |
| 4 | 48123.4 | 34386.4 | 1502.1 | 304461 | 95 | 12570405 | 1178 |
| 5 | 80205.5 | 76182.4 | 1643.12 | 1462297 | 679 | 9691587 | 1840 |
| 6 | 80205.5 | 79774.2 | 2182.01 | 1108206 | 334 | 17472629 | 2057 |
| 7 | 80205.5 | 56588.8 | 1474.09 | 907319 | 386 | 15499026 | 2107 |
| 8 | 48123.4 | 35339.7 | 1290.43 | 138017 | 67 | 12539199 | 1263 |
| 9 | 16041.2 | 13198.7 | 491.152 | 22776.1 | 5 | 2916802 | 370 |
| 10 | 894722 | 1259935 | 399901 | 22656464 | 4823 | 171343585 | 23935 |
| 11 | 492620 | 641552 | 151323 | 7261338 | 2455 | 82077207 | 12708 |
| 12 | 70684.2 | 118807 | 31297.8 | 610384 | 249 | 20859214 | 3540 |
| 13 | 52235.9 | 60675 | 13449.9 | 550215 | 156 | 8617529 | 1498 |
| 14 | 25732.2 | 32304.3 | 11110.6 | 1370037 | 102 | 8200879 | 1701 |
| 15 | 44915.4 | 59379.8 | 23196.2 | 2013678 | 321 | 17556491 | 1855 |
| 16 | 52992.5 | 73335.7 | 24723.4 | 1032907 | 288 | 19428458 | 2459 |
| 17 | 31744.7 | 27648.7 | 6507.53 | 418417 | 125 | 4175177 | 846 |
| 18 | 145382 | 337408 | 50611.3 | 2177445 | 841 | 22489604 | 3443 |
| 19 | 25686.7 | 63907.4 | 19909.3 | 96924.7 | 32 | 13545322 | 1119 |
| 20 | 27618.5 | 53217 | 1037.05 | 54396.9 | 18 | 9875785 | 1034 |
| 21 | 1323045 | 1826462 | 392794 | 18993263 | 5112 | 178836421 | 26161 |
| 22 | 157023 | 402344 | 87853.5 | 1637349 | 700 | 45061978 | 7009 |
| 23 | 687750 | 936786 | 200217 | 9884102 | 2443 | 94985470 | 14031 |
| 24 | 494860 | 916414 | 165839 | 7996342 | 2099 | 46837951 | 7974 |
| 25 | 97842.7 | 242870 | 57614.1 | 1010954 | 445 | 32136525 | 4687 |
| 26 | 177342 | 163293 | 31194.4 | 1341089 | 467 | 11789708 | 2450 |
| 27 | 61410.3 | 214859 | 50293 | 1107863 | 345 | 22065391 | 3304 |
| 28 | 70598.9 | 182710 | 32467.6 | 2185990 | 645 | 11144099 | 1643 |
| 29 | 61953.6 | 162020 | 31512.7 | 1079633 | 415 | 11917309 | 1715 |
| 30 | 21087.4 | 92946.5 | 14642.3 | 595595 | 222 | 4101715 | 787 |
| 31 | 23697.5 | 69391.6 | 9867.61 | 318495 | 133 | 3934960 | 564 |
| 32 | 76454.2 | 168386 | 25464.8 | 1136600 | 416 | 9464850 | 1361 |
| 33 | 72255.1 | 199899 | 39788.7 | 1488032 | 524 | 12559071 | 1637 |
| 34 | 909619 | 1101674 | 426335 | 14779263 | 3851 | 132103913 | 14928 |
| 35 | 2718794 | 1702806 | 1037737 | 51570192 | 10700 | 288629172 | 38055 |
| 36 | 63873 | 55623.7 | 29435.1 | 847128 | 544 | 13548352 | 2637 |
| 37 | 73810.7 | 150671 | 46796.3 | 864620 | 436 | 30472886 | 3538 |
| 38 | 59871.5 | 94412.6 | 20563.1 | 1123746 | 439 | 8602447 | 1344 |
| 39 | 49718.7 | 99104.2 | 30312.7 | 567637 | 170 | 7518404 | 1166 |
| 40 | 12206.9 | 35713.1 | 8899.31 | 5376.7 | 5 | 6685698 | 800 |
| 41 | 50776.5 | 127117 | 31223.7 | 184447 | 134 | 6453338 | 948 |
| 42 | 51432.8 | 85556 | 25446.3 | 86206.8 | 86 | 5600404 | 894 |
| 43 | 61288.7 | 134941 | 28723 | 5403.44 | 11 | 22269971 | 2200 |
| 44 | 64305.9 | 86897.6 | 21173.7 | 419495 | 200 | 3556432 | 642 |
| 45 | 42745.8 | 117585 | 23192.7 | 147077 | 110 | 1638183 | 429 |
| 46 | 460913 | 801479 | 162701 | 5062784 | 2270 | 62188974 | 11500 |
| 47 | 176630 | 337056 | 109941 | 1522207 | 546 | 33314664 | 4676 |
| 48 | 200121 | 332936 | 121891 | 2242495 | 1003 | 42618608 | 6603 |
| 49 | 88235.5 | 133476 | 20320.6 | 648557 | 281 | 11989221 | 1939 |
| 50 | 10345.1 | 146138 | 2628.28 | 769734 | 540 | 85870.7 | 23 |
| 51 | 114146 | 131232 | 17790.3 | 500385 | 212 | 10496355 | 1482 |
| 52 | 152702 | 194423 | 48359 | 4444498 | 1525 | 24811310 | 5237 |
| 53 | 409533 | 876475 | 153744 | 8418839 | 3311 | 65393661 | 10510 |
| 54 | 68326.2 | 172584 | 39209.9 | 1525115 | 388 | 22852472 | 3398 |
| 55 | 345601 | 349121 | 106899 | 5256143 | 1561 | 64054017 | 8727 |
| 56 | 57518.3 | 96080.1 | 36913 | 652260 | 251 | 23370309 | 3179 |
| 57 | 10326 | 8122.36 | 9760.34 | 41640 | 33 | 6757539 | 1021 |
| 58 | 7612.7 | 8156.52 | 7990.85 | 30462.5 | 23 | 7027801 | 922 |

**TABUĽKA I - pokračovanie**
*(vstupné dáta)*

| pobočka | OsobNakl | PrevNakl | OstatNakl | Ucty | PocUct | Vklady | PocVkl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | 4390.77 | 16055.6 | 5407.73 | 6830.15 | 11 | 3998370 | 648 |
| 60 | 3595.31 | 4239.79 | 5581.91 | 106717 | 8 | 4685010 | 625 |
| 61 | 10223.2 | 10045 | 6953.31 | 17286.7 | 13 | 5673869 | 766 |
| 62 | 4604.03 | 6489.92 | 3632.84 | 2325.54 | 1 | 2886547 | 476 |
| 63 | 162856 | 262891 | 27114 | 4098769 | 981 | 40615219 | 5280 |
| 64 | 1243541 | 621928 | 122549 | 40241029 | 5727 | 89524115 | 14131 |
| 65 | 147187 | 100648 | 12326.6 | 415063 | 143 | 22819414 | 5079 |
| 66 | 909333 | 506115 | 154984 | 13156110 | 3129 | 131592895 | 17211 |
| 67 | 897953 | 668424 | 139945 | 15529368 | 3461 | 60421316 | 8700 |
| 68 | 85262.5 | 45907.3 | 9179.42 | 541100 | 254 | 34135633 | 5386 |
| 69 | 1209774 | 680372 | 138646 | 18636275 | 5162 | 163443722 | 22253 |
| 70 | 142205 | 134649 | 14987.9 | 1645612 | 368 | 33425539 | 5195 |
| 71 | 582873 | 650767 | 176475 | 6988834 | 2750 | 77281684 | 13270 |
| 72 | 182433 | 181321 | 98877.6 | 1163065 | 457 | 60548946 | 8647 |
| 73 | 139345 | 170156 | 48443.9 | 952486 | 367 | 23553302 | 3567 |
| 74 | 111724 | 24833.6 | 29146 | 638883 | 235 | 20045301 | 2240 |
| 75 | 138712 | 55052.3 | 21597 | 573429 | 188 | 10816977 | 2089 |
| 76 | 420908 | 688309 | 121278 | 4600941 | 680 | 7716152 | 1182 |
| 77 | 218820 | 319895 | 47059.6 | 915525 | 388 | 15928236 | 3203 |
| 78 | 96927.9 | 81282.3 | 34303.3 | 192752 | 138 | 17613428 | 2696 |
| 79 | 331658 | 467898 | 162839 | 3303239 | 1337 | 52259928 | 7797 |
| 80 | 399903 | 937983 | 291966 | 7326081 | 3032 | 98481679 | 15247 |
| 81 | 157392 | 540962 | 150765 | 2417783 | 1010 | 35933922 | 5184 |
| 82 | 125511 | 248643 | 92439.4 | 873407 | 402 | 17843942 | 2729 |
| 83 | 70959.5 | 181281 | 31495.5 | 645054 | 282 | 11700928 | 1888 |
| 84 | 72476 | 146713 | 49460.9 | 1143105 | 418 | 25632900 | 2990 |
| 85 | 68476.1 | 111020 | 24337.7 | 507851 | 245 | 10721896 | 1677 |
| 86 | 46789 | 23554.3 | 9716.73 | 185461 | 12 | 7317749 | 1041 |
| 87 | 16812.8 | 11817.9 | 1145.92 | 99421 | 42 | 26436.3 | 23 |
| 88 | 16814.7 | 19412.4 | 3427.56 | 157212 | 58 | 1358510 | 268 |
| 89 | 59505.8 | 124566 | 49233.3 | 755461 | 272 | 20002855 | 2650 |
| 90 | 60901.3 | 161392 | 31244.3 | 460308 | 198 | 11346222 | 1922 |
| 91 | 700580 | 1132447 | 89056.4 | 8740505 | 1584 | 123930183 | 15170 |
| 92 | 777476 | 1038393 | 87793.7 | 10427844 | 2447 | 129825303 | 16993 |
| 93 | 59429.4 | 110211 | 1635.79 | 479038 | 208 | 33851615 | 3242 |
| 94 | 365804 | 375990 | 62984.9 | 3506427 | 1347 | 56348759 | 8116 |
| 95 | 71155 | 76666.8 | 3327.93 | 1995699 | 1071 | 926437 | 145 |
| 96 | 67292.3 | 104677 | 3182.78 | 690798 | 321 | 4128497 | 816 |
| 97 | 39395.3 | 47784 | 1462.63 | 120269 | 51 | 20537580 | 1510 |
| 98 | 25686.7 | 63907.4 | 19909.3 | 96924.7 | 32 | 13545322 | 1119 |
| 99 | 27618.5 | 53217 | 1037.05 | 54396.9 | 18 | 9875785 | 1034 |
| 100 | 63552.5 | 154477 | 2920.81 | 1661330 | 452 | 19819657 | 3529 |
| 101 | 427301 | 639949 | 201148 | 9066166 | 2330 | 83283649 | 12392 |
| 102 | 156177 | 170471 | 41366.3 | 2761633 | 854 | 25434093 | 3499 |
| 103 | 337642 | 654059 | 133294 | 6604983 | 1835 | 44328135 | 7553 |
| 104 | 377148 | 455522 | 184802 | 7779614 | 2296 | 86963697 | 11150 |
| 105 | 329378 | 561379 | 151210 | 6742462 | 1925 | 58425886 | 8412 |
| 106 | 57671.4 | 146919 | 10868.7 | 608040 | 163 | 6164547 | 1083 |

**TABUĽKA II**
*(výsledky (CCR I D) modelu)*

| pobočka | úč. fcia v% | u1 | u2 | u3 | v1 | v2 | v3 | v4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | | 0 | | | 0 | | 0 |
| 2 | 92 | | 0 | | | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 59 | | | | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 94 | 0 | | | | 0 | | 0 |
| 5 | 100 | | | | | | 0 | |
| 6 | 94 | | | | | 0 | | 0 |
| **7** | **100** | | | | | | | |
| 8 | 93 | 0 | | | 0 | | | |
| 9 | 68 | 0 | | | 0 | 0 | | |
| 10 | 61 | | | 0 | | | | |
| 11 | 53 | | | | | | 0 | |
| 12 | 59 | | | | 0 | | 0 | |
| 13 | 48 | | | | | | 0 | |
| 14 | 100 | | | 0 | | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 100 | | | 0 | | | | 0 |
| **16** | 71 | | | | | | | |
| 17 | 56 | | | | | | 0 | |
| 18 | 47 | | | | | | 0 | |
| 19 | 57 | | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| 20 | 67 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | |
| **21** | 43 | | | | | | | |
| 22 | 50 | | | | 0 | | 0 | |
| **23** | 43 | | | | | | | |
| **24** | 39 | | | | | | | |
| 25 | 52 | | | | 0 | | 0 | |
| 26 | 33 | | | | | | 0 | |
| 27 | 51 | | 0 | | | | 0 | |
| 28 | 69 | | | 0 | | | | |
| 29 | 48 | | | | | | 0 | |
| 30 | 59 | | | 0 | | | 0 | |
| **31** | 41 | | | | | | | |
| **32** | 42 | | | | | | | |
| 33 | 50 | | | 0 | | | | |
| 34 | 44 | | | 0 | | | | 0 |
| 35 | 65 | | | 0 | | | | 0 |
| 36 | 95 | | | 0 | 0 | | 0 | |
| 37 | 64 | | | | 0 | | | 0 |
| 38 | 58 | | | | | | 0 | |
| 39 | 32 | | | | | | 0 | |
| 40 | 60 | | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| 41 | 23 | | | | 0 | | 0 | |
| 42 | 22 | | | | 0 | | 0 | |
| 43 | 46 | | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| 44 | 25 | | | | 0 | | 0 | |
| 45 | 17 | | | | 0 | | 0 | |
| 46 | 46 | | | | | | 0 | |
| 47 | 32 | | | | | | 0 | |
| 48 | 46 | | | | 0 | | 0 | |
| 49 | 39 | | | | | | 0 | |
| 50 | 100 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 |
| **51** | 26 | | | | | | | |
| 52 | 89 | | | | | | 0 | |
| 53 | 59 | | | | | | 0 | |

| pobočka | úč. fcia v% | u1 | u2 | u3 | v1 | v2 | v3 | v4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **54** | 61 | | | | | | | |
| 55 | 56 | | | | | | | 0 |
| 56 | 61 | | | | 0 | | | |
| 57 | 99 | | | 0 | 0 | | 0 | |
| 58 | 94 | | | | 0 | | | 0 |
| 59 | 99 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| **60** | **100** | | | | | | | |
| 61 | 70 | | | | 0 | 0 | | |
| 62 | 90 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | |
| 63 | 82 | | | | | | | 0 |
| 64 | 100 | | | | | 0 | 0 | 0 |
| 65 | 62 | | | | 0 | 0 | 0 | |
| 66 | 70 | | | | | | | 0 |
| 67 | 54 | | | | | | | 0 |
| **68** | **100** | | | | | | | |
| 69 | 78 | 0 | | | | | | 0 |
| 70 | 70 | | | | | 0 | | |
| 71 | 48 | | | | | | 0 | |
| 72 | 53 | | | | 0 | | 0 | |
| 73 | 38 | | | | | | 0 | |
| 74 | 100 | | | | | | 0 | |
| 75 | 44 | 0 | | | | | 0 | |
| 76 | 24 | | | | | | 0 | 0 |
| 77 | 25 | | | | | | 0 | |
| 78 | 35 | | | | 0 | | 0 | |
| 79 | 38 | | | | 0 | | 0 | |
| 80 | 56 | | | 0 | 0 | | 0 | |
| 81 | 41 | | | 0 | | | 0 | |
| 82 | 27 | | | | 0 | | 0 | |
| 83 | 37 | | | | | | 0 | |
| 84 | 56 | | | | 0 | | | 0 |
| 85 | 39 | | | | 0 | | 0 | |
| 86 | 41 | 0 | | | | 0 | | 0 |
| 87 | 27 | 0 | | 0 | | | 0 | |
| 88 | 38 | | | | | | 0 | |
| 89 | 46 | | | | 0 | | | |
| 90 | 37 | | | | 0 | | 0 | |
| 91 | 48 | | | | | | | 0 |
| **92** | 54 | | | | | | | |
| 93 | 100 | | | | | | | 0 |
| **94** | 49 | | | | | | | |
| 95 | 100 | | | | | | 0 | 0 |
| 96 | 44 | | | | 0 | | 0 | |
| 97 | 100 | | | | | 0 | | 0 |
| 98 | 57 | | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| 99 | 67 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | |
| 100 | 100 | | | | | 0 | | 0 |
| 101 | 55 | | | 0 | | | | |
| 102 | 60 | | | | | | | 0 |
| 103 | 48 | | | 0 | | | 0 | |
| 104 | 61 | | | 0 | | | | |
| 105 | 53 | | | 0 | | | | |
| 106 | 33 | | | | | | 0 | |

## TABUĽKA III
*(výsledky dvojkrokového (CCR I D) modelu)*

| pobočka | úč.fcia v % | u1 | u2 | u3 | v1 | v2 | v3 | v4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **100** | | | | | | | |
| 2 | 92 | | 0 | | | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 59 | | | | 0 | 0 | 0 | |
| 4 | 94 | 0 | | | | 0 | | 0 |
| **5** | **100** | | | | | | | |
| 6 | 94 | | | | | 0 | | 0 |
| **7** | **100** | | | | | | | |
| 8 | 93 | 0 | | | 0 | | | |
| 9 | 68 | 0 | | | 0 | 0 | | |
| 10 | 61 | | | 0 | | | | |
| 11 | 53 | | | | | | 0 | |
| 12 | 59 | | | | 0 | | 0 | |
| 13 | 48 | | | | | | 0 | |
| **14** | **100** | | | | | | | |
| **15** | **100** | | | | | | | |
| **16** | 71 | | | | | | | |
| 17 | 56 | | | | | | 0 | |
| 18 | 47 | | | | | | 0 | |
| 19 | 57 | | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| 20 | 67 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | |
| **21** | 43 | | | | | | | |
| 22 | 50 | | | | 0 | | 0 | |
| **23** | 43 | | | | | | | |
| **24** | 39 | | | | | | | |
| 25 | 52 | | | | 0 | | 0 | |
| 26 | 33 | | | | | | 0 | |
| 27 | 51 | | 0 | | | | 0 | |
| 28 | 69 | | | 0 | | | | |
| 29 | 48 | | | | | | 0 | |
| 30 | 59 | | | 0 | | | 0 | |
| **31** | 41 | | | | | | | |
| **32** | 42 | | | | | | | |
| 33 | 50 | | | 0 | | | | |
| 34 | 44 | | | 0 | | | | 0 |
| 35 | 65 | | | 0 | | | | 0 |
| 36 | 95 | | | 0 | 0 | | 0 | |
| 37 | 64 | | | | 0 | | | 0 |
| 38 | 58 | | | | | | 0 | |
| 39 | 32 | | | | | | 0 | |
| 40 | 60 | | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| 41 | 23 | | | | 0 | | 0 | |
| 42 | 22 | | | | 0 | | 0 | |
| 43 | 46 | | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| 44 | 25 | | | | 0 | | 0 | |
| 45 | 17 | | | | 0 | | 0 | |
| 46 | 46 | | | | | | 0 | |
| 47 | 32 | | | | | | 0 | |
| 48 | 46 | | | | 0 | | 0 | |
| 49 | 39 | | | | | | 0 | |
| **50** | **100** | | | | | | | |
| **51** | 26 | | | | | | | |
| 52 | 89 | | | | | | 0 | |
| 53 | 59 | | | | | | 0 | |

| pobočka | úč.fcia v % | u1 | u2 | u3 | v1 | v2 | v3 | v4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **54** | 61 | | | | | | | |
| 55 | 56 | | | | | | | 0 |
| 56 | 61 | | | | 0 | | | |
| 57 | 99 | | | 0 | 0 | | 0 | |
| 58 | 94 | | | | 0 | | | 0 |
| 59 | 99 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| **60** | **100** | | | | | | | |
| 61 | 70 | | | | 0 | 0 | | |
| 62 | 90 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | |
| 63 | 82 | | | | | | | 0 |
| **64** | **100** | | | | | | | |
| 65 | 62 | | | | 0 | 0 | 0 | |
| 66 | 70 | | | | | | | 0 |
| 67 | 54 | | | | | | | 0 |
| **68** | **100** | | | | | | | |
| 69 | 78 | 0 | | | | | | 0 |
| 70 | 70 | | | | | 0 | | |
| 71 | 48 | | | | | | 0 | |
| 72 | 53 | | | | 0 | | 0 | |
| 73 | 38 | | | | | | 0 | |
| **74** | **100** | | | | | | | |
| 75 | 44 | 0 | | | | | 0 | |
| 76 | 24 | | | | | | 0 | 0 |
| 77 | 25 | | | | | | 0 | |
| 78 | 35 | | | | 0 | | 0 | |
| **79** | 38 | | | | | | | |
| **80** | 56 | | | | | | | |
| 81 | 41 | | | 0 | | | 0 | |
| 82 | 27 | | | | 0 | | 0 | |
| 83 | 37 | | | | | | 0 | |
| 84 | 56 | | | | 0 | | | 0 |
| 85 | 39 | | | | 0 | | 0 | |
| 86 | 41 | 0 | | | | 0 | | 0 |
| 87 | 27 | 0 | | 0 | | | 0 | |
| 88 | 38 | | | | | | 0 | |
| 89 | 46 | | | | 0 | | | |
| 90 | 37 | | | | 0 | | 0 | |
| 91 | 48 | | | | | | | 0 |
| **92** | 54 | | | | | | | |
| **93** | **100** | | | | | | | |
| **94** | 49 | | | | | | | |
| **95** | **100** | | | | | | | |
| 96 | 44 | | | | 0 | | 0 | |
| **97** | **100** | | | | | | | |
| 98 | 57 | | 0 | | 0 | 0 | | 0 |
| 99 | 67 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | |
| **100** | **100** | | | | | | | |
| 101 | 55 | | | 0 | | | | |
| 102 | 60 | | | | | | | 0 |
| 103 | 48 | | | 0 | | | 0 | |
| 104 | 61 | | | 0 | | | | |
| 105 | 53 | | | 0 | | | | |
| 106 | 33 | | | | | | 0 | |

**TABUĽKA IV**
*(výsledky všetkých odvodených mier efektívnosti pre (PL VRTS) model a rating pobočiek)*

| pob | úč. fcia | | M1(ε) | | M2(β) | | M3(γ) | | M4($\mu,\eta$) | | M4($\mu,\eta$) | | M5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_o^*$ | R | ε ↔(17) | R | β=1 | R | γ=1 | R | $\mu,\eta$ ↔ (18) | R | $\mu,\eta$ ↔ (19) | R | | R |
| 1 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 2 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 3 | -0.13933 | 40 | 97.3 | 40 | 87.0 | 40 | 98.1 | 40 | 78.4 | 54 | 47.8 | 95 | 72.0 | 57 |
| 4 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 5 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 6 | -0.17214 | 41 | 96.6 | 41 | 84.2 | 41 | 97.1 | 41 | 91.8 | 36 | 69.7 | 87 | 86.2 | 40 |
| 7 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 8 | -0.06255 | 36 | 98.8 | 36 | 93.9 | 36 | 99.6 | 36 | 84.8 | 42 | 68.1 | 89 | 92.4 | 35 |
| 9 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 10 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 11 | -0.99237 | 73 | 80.6 | 73 | 37.1 | 73 | 50.4 | 73 | 89.5 | 37 | 99.8 | 35 | 87.7 | 37 |
| 12 | -0.60916 | 58 | 88.1 | 58 | 54.4 | 58 | 72.9 | 58 | 74.9 | 67 | 95.4 | 53 | 66.9 | 64 |
| 13 | -0.63288 | 59 | 87.6 | 59 | 53.1 | 59 | 71.4 | 59 | 71.0 | 74 | 87.2 | 70 | 46.7 | 85 |
| 14 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 15 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 16 | -0.22924 | 44 | 95.5 | 44 | 79.5 | 44 | 95.0 | 44 | 86.9 | 39 | 96.2 | 51 | 83.3 | 42 |
| 17 | -0.36380 | 48 | 92.9 | 48 | 69.5 | 48 | 88.3 | 48 | 81.1 | 48 | 85.7 | 77 | 62.5 | 70 |
| 18 | -1.35865 | 90 | 73.5 | 90 | 25.7 | 90 | 35.1 | 90 | 69.0 | 79 | 91.8 | 61 | 56.8 | 79 |
| 19 | -0.35408 | 46 | 93.1 | 46 | 70.2 | 46 | 88.9 | 46 | 58.5 | 92 | 45.0 | 98 | 57.6 | 77 |
| 20 | -0.12718 | 38 | 97.5 | 38 | 88.1 | 38 | 98.4 | 38 | 73.0 | 71 | 40.9 | 100 | 83.2 | 43 |
| 21 | -3.38873 | 102 | 33.8 | 102 | 3.4 | 102 | 8.0 | 102 | 86.0 | 41 | 92.3 | 59 | 86.0 | 41 |
| 22 | -1.03022 | 77 | 79.9 | 77 | 35.7 | 77 | 48.5 | 77 | 79.2 | 51 | 99.4 | 40 | 81.1 | 47 |
| 23 | -2.80109 | 101 | 45.3 | 101 | 6.1 | 101 | 11.3 | 101 | 78.2 | 55 | 86.8 | 73 | 72.0 | 56 |
| 24 | -3.56419 | 104 | 30.4 | 104 | 2.8 | 104 | 7.3 | 104 | 69.8 | 76 | 94.8 | 54 | 54.4 | 81 |
| 25 | -0.88958 | 70 | 82.6 | 70 | 41.1 | 70 | 55.8 | 70 | 74.7 | 68 | 96.6 | 49 | 66.0 | 65 |
| 26 | -1.72557 | 92 | 66.3 | 92 | 17.8 | 92 | 25.1 | 92 | 55.6 | 96 | 62.4 | 90 | 37.0 | 95 |
| 27 | -0.67040 | 60 | 86.9 | 60 | 51.2 | 60 | 69.0 | 60 | 78.6 | 52 | 98.2 | 44 | 68.2 | 63 |
| 28 | -0.56204 | 55 | 89.0 | 55 | 57.0 | 55 | 76.0 | 55 | 77.6 | 59 | 90.5 | 62 | 72.7 | 55 |
| 29 | -0.75491 | 63 | 85.3 | 63 | 47.0 | 63 | 63.7 | 63 | 70.5 | 75 | 89.3 | 63 | 59.2 | 74 |
| 30 | -0.29957 | 45 | 94.1 | 45 | 74.1 | 45 | 91.8 | 45 | 74.5 | 69 | 92.6 | 58 | 61.9 | 71 |
| 31 | -0.40988 | 50 | 92.0 | 50 | 66.4 | 50 | 85.6 | 50 | 68.5 | 80 | 86.8 | 74 | 44.4 | 87 |
| 32 | -1.05233 | 78 | 79.4 | 78 | 34.9 | 78 | 47.5 | 78 | 65.7 | 82 | 86.0 | 76 | 48.9 | 83 |
| 33 | -0.89928 | 71 | 82.4 | 71 | 40.7 | 71 | 55.3 | 71 | 69.7 | 77 | 88.3 | 67 | 58.7 | 75 |
| 34 | -4.11895 | 105 | 19.6 | 105 | 1.6 | 105 | 5.6 | 105 | 80.3 | 49 | 93.8 | 57 | 71.8 | 58 |
| 35 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 36 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 37 | -0.41141 | 51 | 92.0 | 51 | 66.3 | 51 | 85.5 | 51 | 82.1 | 44 | 98.9 | 42 | 82.3 | 45 |
| 38 | -0.55721 | 54 | 89.1 | 54 | 57.3 | 54 | 76.3 | 54 | 77.0 | 61 | 88.4 | 66 | 64.5 | 66 |
| 39 | -0.86882 | 68 | 83.0 | 68 | 41.9 | 68 | 57.0 | 68 | 62.4 | 88 | 87.0 | 71 | 38.5 | 94 |
| 40 | -0.18984 | 42 | 96.3 | 42 | 82.7 | 42 | 96.5 | 42 | 52.3 | 98 | 26.3 | 104 | 56.5 | 80 |
| 41 | -1.09057 | 80 | 78.7 | 80 | 33.6 | 80 | 45.7 | 80 | 49.4 | 101 | 76.7 | 84 | 24.8 | 103 |
| 42 | -1.02177 | 75 | 80.0 | 75 | 36.0 | 75 | 48.9 | 75 | 42.3 | 105 | 50.5 | 93 | 22.5 | 104 |
| 43 | -0.86802 | 67 | 83.0 | 67 | 42.0 | 67 | 57.0 | 67 | 43.3 | 104 | 16.1 | 106 | 46.4 | 86 |
| 44 | -1.16291 | 82 | 77.3 | 82 | 31.3 | 82 | 42.5 | 82 | 58.0 | 94 | 82.9 | 79 | 25.9 | 102 |
| 45 | -1.06030 | 79 | 79.3 | 79 | 34.6 | 79 | 47.1 | 79 | 44.2 | 103 | 72.6 | 86 | 14.2 | 106 |
| 46 | -2.24584 | 99 | 56.1 | 99 | 10.6 | 99 | 16.5 | 99 | 78.0 | 56 | 99.5 | 39 | 72.9 | 54 |
| 47 | -1.95405 | 95 | 61.8 | 95 | 14.2 | 95 | 20.8 | 95 | 61.2 | 89 | 78.5 | 83 | 48.2 | 84 |
| 48 | -1.33132 | 88 | 74.0 | 88 | 26.4 | 88 | 36.1 | 88 | 76.2 | 62 | 98.7 | 43 | 70.2 | 60 |
| 49 | -1.20342 | 84 | 76.5 | 84 | 30.0 | 84 | 40.8 | 84 | 64.9 | 84 | 87.0 | 72 | 39.5 | 93 |
| 50 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 51 | -1.51398 | 91 | 70.4 | 91 | 22.0 | 91 | 30.4 | 91 | 50.9 | 100 | 49.1 | 94 | 28.3 | 101 |
| 52 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 53 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 54 | -0.46087 | 52 | 91.0 | 52 | 63.1 | 52 | 82.5 | 52 | 82.0 | 45 | 97.9 | 47 | 77.4 | 50 |
| 55 | -0.78029 | 64 | 84.8 | 64 | 45.8 | 64 | 62.2 | 64 | 87.2 | 38 | 98.0 | 45 | 86.5 | 38 |
| 56 | -0.36708 | 49 | 92.8 | 49 | 69.3 | 49 | 88.1 | 49 | 81.6 | 46 | 97.4 | 48 | 77.3 | 51 |
| 57 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 58 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |

**TABUĽKA IV - pokračovanie**

*(výsledky všetkých odvodených mier efektívnosti pre (PL VRTS) model a rating pobočiek)*

| pob | úč. fcia | | M1(ε) | | M2(β) | | M3(γ) | | M4($\mu,\eta$) | | M4($\mu,\eta$) | | M5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_o^*$ | R | ε ↔(17) | R | β=1 | R | γ=1 | R | $\mu,\eta$ ↔ (18) | R | $\mu,\eta$ ↔ (19) | R | | R |
| 59 | -0.05443 | 35 | 98.9 | 35 | 94.7 | 35 | 99.7 | 35 | 74.9 | 66 | 99.8 | 36 | 86.3 | 39 |
| 60 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 61 | -0.10038 | 37 | 98.0 | 37 | 90.4 | 37 | 99.0 | 37 | 67.8 | 81 | 52.7 | 91 | 69.5 | 62 |
| 62 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 63 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 64 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 65 | -0.85964 | 66 | 83.2 | 66 | 42.3 | 66 | 57.5 | 66 | 69.4 | 78 | 40.5 | 102 | 60.2 | 73 |
| 66 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 67 | -3.52171 | 103 | 31.2 | 103 | 3.0 | 103 | 7.5 | 103 | 75.5 | 64 | 82.6 | 80 | 64.3 | 68 |
| 68 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 69 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 70 | -0.49319 | 53 | 90.4 | 53 | 61.1 | 53 | 80.4 | 53 | 81.4 | 47 | 74.3 | 85 | 78.5 | 49 |
| 71 | -1.76457 | 93 | 65.5 | 93 | 17.1 | 93 | 24.3 | 93 | 82.6 | 43 | 99.5 | 38 | 80.6 | 48 |
| 72 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 73 | -1.33148 | 89 | 74.0 | 89 | 26.4 | 89 | 36.1 | 89 | 58.6 | 90 | 69.6 | 88 | 49.3 | 82 |
| 74 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 75 | -1.28309 | 86 | 74.9 | 86 | 27.7 | 86 | 37.8 | 86 | 56.9 | 95 | 51.9 | 92 | 34.9 | 98 |
| 76 | -5.12052 | 106 | 0.0 | 106 | 0.6 | 106 | 3.7 | 106 | 38.7 | 106 | 32.8 | 103 | 20.0 | 105 |
| 77 | -2.42245 | 100 | 52.7 | 100 | 8.9 | 100 | 14.6 | 100 | 47.6 | 102 | 45.2 | 97 | 31.3 | 100 |
| 78 | -1.17770 | 83 | 77.0 | 83 | 30.8 | 83 | 41.9 | 83 | 51.3 | 99 | 45.6 | 96 | 41.3 | 92 |
| 79 | -2.24541 | 98 | 56.1 | 98 | 10.6 | 98 | 16.6 | 98 | 71.3 | 73 | 96.1 | 52 | 61.6 | 72 |
| 80 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 81 | -2.03990 | 97 | 60.2 | 97 | 13.0 | 97 | 19.4 | 97 | 73.6 | 70 | 96.2 | 50 | 58.7 | 76 |
| 82 | -1.98780 | 96 | 61.2 | 96 | 13.7 | 96 | 20.2 | 96 | 53.4 | 97 | 81.4 | 81 | 35.1 | 97 |
| 83 | -1.13795 | 81 | 77.8 | 81 | 32.0 | 81 | 43.6 | 81 | 63.6 | 86 | 88.2 | 68 | 42.9 | 89 |
| 84 | -0.57599 | 56 | 88.8 | 56 | 56.2 | 56 | 75.1 | 56 | 79.7 | 50 | 94.7 | 55 | 74.6 | 52 |
| 85 | -0.97620 | 72 | 80.9 | 72 | 37.7 | 72 | 51.2 | 72 | 65.0 | 83 | 87.4 | 69 | 43.5 | 88 |
| 86 | -0.57864 | 57 | 88.7 | 57 | 56.1 | 57 | 74.9 | 57 | 58.6 | 91 | 16.1 | 105 | 35.6 | 96 |
| 87 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 88 | -0.20166 | 43 | 96.1 | 43 | 81.7 | 43 | 96.1 | 43 | 78.4 | 53 | 86.4 | 75 | 64.4 | 67 |
| 89 | -0.67275 | 61 | 86.9 | 61 | 51.0 | 61 | 68.8 | 61 | 74.9 | 65 | 94.2 | 56 | 62.7 | 69 |
| 90 | -1.02282 | 76 | 80.0 | 76 | 36.0 | 76 | 48.9 | 76 | 63.5 | 87 | 89.3 | 64 | 42.2 | 91 |
| 91 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 92 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 93 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 94 | -1.30518 | 87 | 74.5 | 87 | 27.1 | 87 | 37.0 | 87 | 77.4 | 60 | 89.1 | 65 | 74.4 | 53 |
| 95 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 96 | -0.87729 | 69 | 82.9 | 69 | 41.6 | 69 | 56.5 | 69 | 75.9 | 63 | 85.4 | 78 | 42.2 | 90 |
| 97 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 98 | -0.35408 | 46 | 93.1 | 46 | 70.2 | 46 | 88.9 | 46 | 58.5 | 92 | 45.0 | 98 | 57.6 | 77 |
| 99 | -0.12718 | 38 | 97.5 | 38 | 88.1 | 38 | 98.4 | 38 | 73.0 | 71 | 40.9 | 100 | 83.2 | 43 |
| 100 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 101 | -0.74531 | 62 | 85.4 | 62 | 47.5 | 62 | 64.3 | 62 | 92.9 | 35 | 99.8 | 37 | 90.6 | 36 |
| 102 | -0.82891 | 65 | 83.8 | 65 | 43.7 | 65 | 59.3 | 65 | 77.7 | 58 | 92.0 | 60 | 70.0 | 61 |
| 103 | -1.93826 | 94 | 62.1 | 94 | 14.4 | 94 | 21.0 | 94 | 78.0 | 57 | 99.3 | 41 | 70.2 | 59 |
| 104 | 0.00000 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 | 100.0 | 1 |
| 105 | -1.20786 | 85 | 76.4 | 85 | 29.9 | 85 | 40.7 | 85 | 86.3 | 40 | 97.9 | 46 | 81.4 | 46 |
| 106 | -0.99691 | 74 | 80.5 | 74 | 36.9 | 74 | 50.2 | 74 | 64.7 | 85 | 80.0 | 82 | 31.7 | 99 |

## TABUĽKA V

*(zoradené miery efektívnosti M2(β) a M3(γ) pre model (PL VRTS) pre rôzne hodnoty parametrov β a γ)*

| poradové číslo | β = 0.5 | β = 1 | β = 2 | γ = 0.5 | γ = 1 | γ = 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 1 | 0 | 7 | 4 | 2 |
| 2 | 13 | 2 | 0 | 11 | 6 | 3 |
| 3 | 17 | 3 | 0 | 14 | 7 | 4 |
| 4 | 17 | 3 | 0 | 14 | 7 | 4 |
| 5 | 18 | 3 | 0 | 15 | 8 | 4 |
| 6 | 25 | 6 | 0 | 20 | 11 | 6 |
| 7 | 30 | 9 | 1 | 25 | 15 | 8 |
| 8 | 33 | 11 | 1 | 28 | 17 | 9 |
| 9 | 33 | 11 | 1 | 28 | 17 | 9 |
| 10 | 36 | 13 | 2 | 32 | 19 | 11 |
| 11 | 37 | 14 | 2 | 34 | 20 | 11 |
| 12 | 38 | 14 | 2 | 34 | 21 | 12 |
| 13 | 38 | 14 | 2 | 35 | 21 | 12 |
| 14 | 41 | 17 | 3 | 39 | 24 | 14 |
| 15 | 42 | 18 | 3 | 40 | 25 | 14 |
| 16 | 47 | 22 | 5 | 47 | 30 | 18 |
| 17 | 51 | 26 | 7 | 52 | 35 | 21 |
| 18 | 51 | 26 | 7 | 53 | 36 | 22 |
| 19 | 51 | 26 | 7 | 53 | 36 | 22 |
| 20 | 52 | 27 | 7 | 54 | 37 | 23 |
| 21 | 53 | 28 | 8 | 55 | 38 | 23 |
| 22 | 55 | 30 | 9 | 58 | 41 | 26 |
| 23 | 55 | 30 | 9 | 58 | 41 | 26 |
| 24 | 55 | 31 | 9 | 59 | 42 | 26 |
| 25 | 56 | 31 | 10 | 60 | 43 | 27 |
| 26 | 57 | 32 | 10 | 61 | 44 | 28 |
| 27 | 58 | 34 | 11 | 63 | 46 | 30 |
| 28 | 59 | 35 | 12 | 64 | 47 | 31 |
| 29 | 59 | 35 | 12 | 64 | 47 | 31 |
| 30 | 60 | 36 | 13 | 65 | 49 | 32 |
| 31 | 60 | 36 | 13 | 66 | 49 | 32 |
| 32 | 60 | 36 | 13 | 66 | 49 | 32 |
| 33 | 61 | 37 | 14 | 67 | 50 | 33 |
| 34 | 61 | 37 | 14 | 67 | 50 | 34 |
| 35 | 61 | 38 | 14 | 68 | 51 | 34 |
| 36 | 64 | 41 | 17 | 71 | 55 | 38 |
| 37 | 64 | 41 | 17 | 72 | 56 | 39 |
| 38 | 64 | 42 | 17 | 72 | 57 | 39 |
| 39 | 65 | 42 | 18 | 73 | 57 | 40 |
| 40 | 65 | 42 | 18 | 73 | 57 | 40 |
| 41 | 65 | 42 | 18 | 73 | 58 | 40 |
| 42 | 66 | 44 | 19 | 74 | 59 | 42 |
| 43 | 68 | 46 | 21 | 77 | 62 | 45 |
| 44 | 69 | 47 | 22 | 78 | 64 | 47 |
| 45 | 69 | 47 | 23 | 78 | 64 | 47 |
| 46 | 71 | 51 | 26 | 82 | 69 | 52 |
| 47 | 72 | 51 | 26 | 82 | 69 | 53 |
| 48 | 73 | 53 | 28 | 83 | 71 | 56 |
| 49 | 74 | 54 | 30 | 84 | 73 | 57 |
| 50 | 75 | 56 | 31 | 86 | 75 | 60 |
| 51 | 75 | 56 | 32 | 86 | 75 | 60 |
| 52 | 76 | 57 | 32 | 86 | 76 | 61 |
| 53 | 76 | 57 | 33 | 87 | 76 | 62 |
| 54 | 78 | 61 | 37 | 89 | 80 | 62 |
| 55 | 79 | 63 | 40 | 90 | 82 | 67 |
| 56 | 81 | 66 | 44 | 92 | 86 | 70 |
| 57 | 81 | 66 | 44 | 92 | 86 | 75 |
| 58 | 83 | 69 | 48 | 94 | 88 | 75 |
| 59 | 83 | 70 | 48 | 94 | 88 | 79 |
| 60 | 84 | 70 | 49 | 94 | 89 | 79 |
| 61 | 84 | 70 | 49 | 94 | 89 | 80 |
| 62 | 86 | 74 | 55 | 96 | 92 | 80 |
| 63 | 89 | 80 | 63 | 97 | 95 | 85 |
| 64 | 90 | 82 | 67 | 98 | 96 | 90 |
| 65 | 91 | 83 | 68 | 98 | 97 | 92 |
| 66 | 92 | 84 | 71 | 99 | 97 | 93 |
| 67 | 93 | 87 | 76 | 99 | 98 | 94 |
| 68 | 94 | 88 | 78 | 99 | 98 | 96 |
| 69 | 94 | 88 | 78 | 99 | 98 | 97 |
| 70 | 95 | 90 | 82 | 99 | 99 | 97 |
| 71 | 97 | 94 | 88 | 100 | 100 | 98 |
| 72 | 97 | 95 | 90 | 100 | 100 | 99 |
| 73 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 99 |
| 74 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 75 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 76 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 77 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 78 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 79 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 80 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 81 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 82 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 83 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 84 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 85 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 86 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 87 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 88 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 89 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 90 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 91 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 92 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 93 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 94 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 95 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 96 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 97 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 98 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 99 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 101 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 102 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 103 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 104 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 105 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 106 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |

**TABUĽKA VI**
*(miery efektívnosti pre (PL VRTS) model podľa transformácie (20))*

| pobočka | M1(ε) | M2(β) | M3(γ) | M4($\mu,\eta$) | M4($\mu,\eta$) | M5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ε ↔(17) | β=1 | γ=1 | $\mu,\eta \leftrightarrow$ (18) | $\mu,\eta \leftrightarrow$ (19) | |
| 1 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 2 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 3 | 97.3 | 86.9 | 98.0 | 64.7 | 37.9 | 67.4 |
| 4 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 5 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 6 | 96.6 | 84.1 | 97.0 | 86.6 | 64.0 | 83.9 |
| 7 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 8 | 98.8 | 93.9 | 99.6 | 75.3 | 62.0 | 91.2 |
| 9 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 10 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 11 | 80.6 | 36.7 | 48.5 | 82.9 | 99.8 | 85.7 |
| 12 | 88.1 | 54.1 | 71.9 | 59.0 | 94.5 | 61.4 |
| 13 | 87.6 | 52.8 | 70.3 | 52.7 | 84.7 | 38.0 |
| 14 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 15 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 16 | 95.5 | 79.4 | 94.8 | 78.6 | 95.5 | 80.6 |
| 17 | 92.9 | 69.3 | 87.9 | 69.1 | 83.0 | 56.3 |
| 18 | 73.5 | 25.3 | 32.7 | 49.4 | 90.3 | 49.7 |
| 19 | 93.1 | 70.0 | 88.4 | 32.3 | 34.4 | 50.6 |
| 20 | 97.5 | 88.0 | 98.3 | 56.0 | 29.5 | 80.4 |
| 21 | 33.8 | 2.8 | 4.5 | 77.1 | 90.8 | 83.7 |
| 22 | 79.9 | 35.3 | 46.5 | 66.1 | 99.3 | 77.9 |
| 23 | 45.3 | 5.5 | 7.9 | 64.4 | 84.2 | 67.4 |
| 24 | 30.4 | 2.2 | 3.8 | 50.8 | 93.8 | 46.9 |
| 25 | 82.6 | 40.7 | 54.1 | 58.7 | 96.0 | 60.4 |
| 26 | 66.3 | 17.3 | 22.3 | 27.6 | 55.2 | 26.6 |
| 27 | 86.9 | 50.9 | 67.8 | 65.1 | 97.8 | 63.0 |
| 28 | 89.0 | 56.7 | 75.1 | 63.4 | 88.7 | 68.2 |
| 29 | 85.3 | 46.7 | 62.3 | 51.8 | 87.2 | 52.5 |
| 30 | 94.1 | 74.0 | 91.5 | 58.4 | 91.2 | 55.6 |
| 31 | 92.0 | 66.2 | 85.1 | 48.6 | 84.2 | 35.3 |
| 32 | 79.4 | 34.5 | 45.4 | 44.1 | 83.3 | 40.5 |
| 33 | 82.4 | 40.3 | 53.6 | 50.5 | 86.0 | 51.9 |
| 34 | 19.6 | 1.0 | 2.0 | 67.9 | 92.7 | 67.1 |
| 35 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 36 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 37 | 92.0 | 66.1 | 85.0 | 70.9 | 98.7 | 79.3 |
| 38 | 89.1 | 57.0 | 75.4 | 62.4 | 86.2 | 58.7 |
| 39 | 83.0 | 41.6 | 55.3 | 38.6 | 84.5 | 28.3 |
| 40 | 96.3 | 82.6 | 96.4 | 22.2 | 12.3 | 49.3 |
| 41 | 78.7 | 33.2 | 43.6 | 17.4 | 72.2 | 12.4 |
| 42 | 80.0 | 35.6 | 47.0 | 5.8 | 41.0 | 9.7 |
| 43 | 83.0 | 41.6 | 55.4 | 7.5 | 0.0 | 37.5 |
| 44 | 77.3 | 30.8 | 40.3 | 31.5 | 79.7 | 13.7 |
| 45 | 79.3 | 34.2 | 45.1 | 9.0 | 67.4 | 0.0 |
| 46 | 56.1 | 10.0 | 13.4 | 64.1 | 99.4 | 68.4 |
| 47 | 61.8 | 13.7 | 17.7 | 36.6 | 74.3 | 39.6 |
| 48 | 74.0 | 26.0 | 33.6 | 61.2 | 98.5 | 65.3 |
| 49 | 76.5 | 29.6 | 38.6 | 42.7 | 84.5 | 29.5 |
| 50 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 51 | 70.4 | 21.5 | 27.7 | 19.9 | 39.4 | 16.5 |
| 52 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 53 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 54 | 91.0 | 62.9 | 81.8 | 70.6 | 97.5 | 73.7 |
| 55 | 84.8 | 45.5 | 60.7 | 79.2 | 97.6 | 84.3 |
| 56 | 92.8 | 69.1 | 87.7 | 70.0 | 96.9 | 73.6 |
| 57 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 58 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |

**TABUĽKA VI - pokračovanie**
*(miery efektívnosti pre (PL VRTS) model podľa transformácie (20))*

| pobočka | M1(ε) | M2(β) | M3(γ) | M4($\mu,\eta$) | M4($\mu,\eta$) | M5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ε ↔(17) | β=1 | γ=1 | $\mu,\eta$ ↔ (18) | $\mu,\eta$ ↔ (19) | |
| 59 | 98.9 | 94.7 | 99.7 | 59.0 | 99.8 | 84.1 |
| 60 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 61 | 98.0 | 90.4 | 99.0 | 47.5 | 43.7 | 64.4 |
| 62 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 63 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 64 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 65 | 83.2 | 42.0 | 55.9 | 50.0 | 29.1 | 53.6 |
| 66 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 67 | 31.2 | 2.4 | 3.9 | 60.0 | 79.3 | 58.4 |
| 68 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 69 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 70 | 90.4 | 60.8 | 79.7 | 69.7 | 69.4 | 75.0 |
| 71 | 65.5 | 16.6 | 21.4 | 71.6 | 99.5 | 77.4 |
| 72 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 73 | 74.0 | 26.0 | 33.6 | 32.4 | 63.8 | 40.9 |
| 74 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 75 | 74.9 | 27.3 | 35.4 | 29.7 | 42.7 | 24.1 |
| 76 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 20.0 | 6.8 |
| 77 | 52.7 | 8.3 | 11.3 | 14.6 | 34.7 | 19.9 |
| 78 | 77.0 | 30.4 | 39.7 | 20.5 | 35.2 | 31.6 |
| 79 | 56.1 | 10.1 | 13.4 | 53.1 | 95.3 | 55.3 |
| 80 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 81 | 60.2 | 12.5 | 16.3 | 56.9 | 95.5 | 51.8 |
| 82 | 61.2 | 13.2 | 17.2 | 24.0 | 77.9 | 24.4 |
| 83 | 77.8 | 31.6 | 41.4 | 40.7 | 85.9 | 33.5 |
| 84 | 88.8 | 56.0 | 74.1 | 66.8 | 93.6 | 70.5 |
| 85 | 80.9 | 37.3 | 49.3 | 43.0 | 85.0 | 34.2 |
| 86 | 88.7 | 55.8 | 74.0 | 32.4 | 0.0 | 25.0 |
| 87 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 88 | 96.1 | 81.6 | 95.9 | 64.8 | 83.8 | 58.5 |
| 89 | 86.9 | 50.7 | 67.7 | 59.1 | 93.0 | 56.5 |
| 90 | 80.0 | 35.6 | 46.9 | 40.4 | 87.2 | 32.6 |
| 91 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 92 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 93 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 94 | 74.5 | 26.7 | 34.6 | 63.2 | 87.0 | 70.1 |
| 95 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 96 | 82.9 | 41.2 | 54.9 | 60.6 | 82.6 | 32.7 |
| 97 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 98 | 93.1 | 70.0 | 88.4 | 32.3 | 34.4 | 50.6 |
| 99 | 97.5 | 88.0 | 98.3 | 56.0 | 29.5 | 80.4 |
| 100 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 101 | 85.4 | 47.1 | 62.9 | 88.5 | 99.7 | 89.0 |
| 102 | 83.8 | 43.3 | 57.7 | 63.6 | 90.5 | 65.0 |
| 103 | 62.1 | 13.9 | 18.0 | 64.1 | 99.1 | 65.3 |
| 104 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 105 | 76.4 | 29.5 | 38.4 | 77.6 | 97.5 | 78.3 |
| 106 | 80.5 | 36.5 | 48.3 | 42.4 | 76.2 | 20.4 |

**TABUĽKA VII**

*(výsledky všetkých odvodených mier efektívnosti pre (CP VRTS) model a rating pobočiek)*

| pob | úč. fcia | | M1(ε) | | M2(β) | | M3(γ) | | M4($\mu,\eta$) | | M4($\mu,\eta$) | | M5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_o^*$ | R | ε ↔(17) | R | β=30 | R | γ=1700 | R | $\mu,\eta$ ↔(18) | R | $\mu,\eta$ ↔(19) | R | | R |
| 1 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 2 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 3 | -0.00351 | **40** | 97.1 | **40** | 90.0 | **40** | 98.0 | **40** | 78.4 | **61** | 48.4 | **94** | 71.9 | **57** |
| 4 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 5 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 6 | -0.00417 | **41** | 96.5 | **41** | 88.3 | **41** | 97.1 | **41** | 91.8 | **36** | 70.2 | **86** | 87.1 | **37** |
| 7 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 8 | -0.00145 | **36** | 98.8 | **36** | 95.8 | **36** | 99.6 | **36** | 84.8 | **44** | 69.2 | **88** | 92.7 | **35** |
| 9 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 10 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 11 | -0.02284 | **73** | 81.1 | **73** | 50.4 | **73** | 53.0 | **73** | 90.7 | **38** | 99.9 | **35** | 87.0 | **38** |
| 12 | -0.01400 | **57** | 88.4 | **57** | 65.7 | **57** | 75.0 | **57** | 75.0 | **68** | 95.0 | **50** | 69.3 | **64** |
| 13 | -0.01598 | **62** | 86.7 | **62** | 61.9 | **62** | 69.7 | **62** | 71.0 | **77** | 86.0 | **66** | 46.7 | **86** |
| 14 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 15 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 16 | -0.00510 | **43** | 95.8 | **43** | 85.8 | **43** | 95.8 | **43** | 87.0 | **41** | 95.8 | **46** | 85.1 | **43** |
| 17 | -0.00944 | **50** | 92.2 | **50** | 75.3 | **50** | 86.8 | **50** | 81.1 | **54** | 84.5 | **72** | 63.8 | **70** |
| 18 | -0.03236 | **90** | 73.2 | **90** | 37.9 | **90** | 36.0 | **90** | 73.6 | **72** | 89.8 | **59** | 57.5 | **80** |
| 19 | -0.00804 | **48** | 93.3 | **48** | 78.6 | **48** | 90.1 | **48** | 61.8 | **92** | 44.9 | **96** | 61.5 | **73** |
| 20 | -0.00312 | **38** | 97.4 | **38** | 91.1 | **38** | 98.4 | **38** | 73.0 | **73** | 42.2 | **100** | 83.8 | **44** |
| 21 | -0.07304 | **102** | 39.4 | **102** | 11.2 | **102** | 9.9 | **102** | 86.0 | **42** | 92.5 | **56** | 85.8 | **41** |
| 22 | -0.02237 | **71** | 81.4 | **71** | 51.1 | **71** | 54.0 | **71** | 79.2 | **57** | 99.4 | **37** | 80.5 | **48** |
| 23 | -0.06093 | **101** | 49.4 | **101** | 16.1 | **101** | 13.7 | **101** | 83.0 | **46** | 76.3 | **82** | 72.4 | **55** |
| 24 | -0.07890 | **103** | 34.5 | **103** | 9.4 | **103** | 8.6 | **103** | 74.6 | **71** | 79.9 | **76** | 56.7 | **81** |
| 25 | -0.01935 | **65** | 83.9 | **65** | 56.0 | **65** | 61.1 | **65** | 75.2 | **67** | 96.2 | **45** | 69.2 | **65** |
| 26 | -0.04226 | **93** | 64.9 | **93** | 28.1 | **93** | 24.8 | **93** | 63.6 | **90** | 59.3 | **90** | 37.2 | **96** |
| 27 | -0.01419 | **58** | 88.2 | **58** | 65.3 | **58** | 74.5 | **58** | 78.8 | **58** | 98.6 | **41** | 72.1 | **56** |
| 28 | -0.01365 | **55** | 88.7 | **55** | 66.4 | **55** | 75.9 | **55** | 78.5 | **59** | 90.5 | **57** | 73.0 | **54** |
| 29 | -0.01792 | **64** | 85.1 | **64** | 58.4 | **64** | 64.7 | **64** | 71.0 | **78** | 88.9 | **60** | 60.6 | **76** |
| 30 | -0.00715 | **45** | 94.1 | **45** | 80.7 | **45** | 92.0 | **45** | 75.8 | **66** | 91.8 | **55** | 63.2 | **72** |
| 31 | -0.01029 | **52** | 91.5 | **52** | 73.4 | **52** | 84.7 | **52** | 71.5 | **76** | 85.4 | **67** | 44.7 | **87** |
| 32 | -0.02615 | **79** | 78.3 | **79** | 45.6 | **79** | 46.2 | **79** | 66.6 | **83** | 84.8 | **71** | 49.1 | **84** |
| 33 | -0.02131 | **70** | 82.3 | **70** | 52.8 | **70** | 56.4 | **70** | 70.1 | **80** | 87.7 | **62** | 60.0 | **77** |
| 34 | -0.08505 | **105** | 29.4 | **105** | 7.8 | **105** | 7.5 | **105** | 82.5 | **48** | 78.8 | **79** | 71.5 | **58** |
| 35 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 36 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 37 | -0.00788 | **47** | 93.5 | **47** | 78.9 | **47** | 90.5 | **47** | 82.1 | **50** | 98.9 | **39** | 86.2 | **40** |
| 38 | -0.01389 | **56** | 88.5 | **56** | 65.9 | **56** | 75.3 | **56** | 77.0 | **63** | 87.3 | **63** | 64.6 | **68** |
| 39 | -0.02086 | **68** | 82.7 | **68** | 53.5 | **68** | 57.5 | **68** | 62.4 | **91** | 85.6 | **69** | 38.9 | **94** |
| 40 | -0.00454 | **42** | 96.2 | **42** | 87.3 | **42** | 96.6 | **42** | 55.3 | **100** | 26.2 | **104** | 58.5 | **78** |
| 41 | -0.02621 | **80** | 78.3 | **80** | 45.6 | **80** | 46.1 | **80** | 50.7 | **103** | 74.7 | **81** | 25.7 | **103** |
| 42 | -0.02487 | **76** | 79.4 | **76** | 47.4 | **76** | 48.7 | **76** | 43.2 | **106** | 49.4 | **93** | 23.2 | **104** |
| 43 | -0.02030 | **67** | 83.2 | **67** | 54.4 | **67** | 58.8 | **67** | 43.5 | **105** | 17.1 | **106** | 48.9 | **85** |
| 44 | -0.02914 | **85** | 75.8 | **85** | 41.7 | **85** | 40.9 | **85** | 59.1 | **94** | 81.1 | **75** | 26.3 | **102** |
| 45 | -0.02597 | **78** | 78.4 | **78** | 45.9 | **78** | 46.6 | **78** | 46.3 | **104** | 70.2 | **85** | 14.2 | **106** |
| 46 | -0.05125 | **99** | 57.5 | **99** | 21.5 | **99** | 18.3 | **99** | 81.3 | **53** | 96.3 | **43** | 69.8 | **62** |
| 47 | -0.04231 | **94** | 64.9 | **94** | 28.1 | **94** | 24.7 | **94** | 64.8 | **86** | 69.0 | **87** | 51.9 | **82** |
| 48 | -0.02747 | **82** | 77.2 | **82** | 43.9 | **82** | 43.8 | **82** | 77.9 | **62** | 96.1 | **44** | 71.4 | **59** |
| 49 | -0.03021 | **87** | 74.9 | **87** | 40.4 | **87** | 39.2 | **87** | 65.8 | **84** | 85.5 | **68** | 39.3 | **93** |
| 50 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 51 | -0.03794 | **91** | 68.5 | **91** | 32.0 | **91** | 29.0 | **91** | 56.9 | **96** | 47.1 | **95** | 28.3 | **101** |
| 52 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 53 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 54 | -0.01004 | **51** | 91.7 | **51** | 74.0 | **51** | 85.4 | **51** | 82.3 | **49** | 98.7 | **40** | 79.9 | **49** |
| 55 | -0.01681 | **63** | 86.0 | **63** | 60.4 | **63** | 67.5 | **63** | 90.7 | **37** | 93.3 | **54** | 85.6 | **42** |
| 56 | -0.00747 | **46** | 93.8 | **46** | 79.9 | **46** | 91.3 | **46** | 81.7 | **51** | 97.2 | **42** | 81.5 | **46** |
| 57 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 58 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |

## TABUĽKA VII - pokračovanie

*(výsledky všetkých odvodených mier efektívnosti pre (CP VRTS) model a rating pobočiek)*

| pob | úč. fcia | | M1(ε) | | M2(β) | | M3(γ) | | M4($\mu,\eta$) | | M4($\mu,\eta$) | | M5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_o^*$ | R | ε ↔(17) | R | β=30 | R | γ=1700 | R | $\mu,\eta$ ↔(18) | R | $\mu,\eta$ ↔(19) | R | | R |
| 59 | -0.00132 | **35** | 98.9 | **35** | 96.1 | **35** | 99.7 | **35** | 74.9 | **70** | 99.7 | **36** | 87.0 | **39** |
| 60 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 61 | -0.00246 | **37** | 98.0 | **37** | 92.9 | **37** | 99.0 | **37** | 70.9 | **79** | 51.3 | **92** | 70.6 | **60** |
| 62 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 63 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 64 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 65 | -0.02094 | **69** | 82.6 | **69** | 53.4 | **69** | 57.3 | **69** | 69.4 | **81** | 41.7 | **102** | 61.5 | **75** |
| 66 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 67 | -0.08049 | **104** | 33.2 | **104** | 8.9 | **104** | 8.3 | **104** | 79.7 | **55** | 78.4 | **80** | 65.4 | **67** |
| 68 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 69 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 70 | -0.01190 | **53** | 90.1 | **53** | 70.0 | **53** | 80.6 | **53** | 81.7 | **52** | 74.6 | **84** | 79.3 | **50** |
| 71 | -0.03931 | **92** | 67.4 | **92** | 30.7 | **92** | 27.6 | **92** | 87.1 | **40** | 95.3 | **49** | 78.6 | **51** |
| 72 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 73 | -0.03104 | **88** | 74.2 | **88** | 39.4 | **88** | 37.9 | **88** | 66.9 | **82** | 63.3 | **89** | 51.2 | **83** |
| 74 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 75 | -0.03189 | **89** | 73.5 | **89** | 38.4 | **89** | 36.6 | **89** | 56.9 | **97** | 51.6 | **91** | 35.2 | **98** |
| 76 | -0.12051 | **106** | 0.0 | **106** | 2.7 | **106** | 3.9 | **106** | 51.2 | **102** | 29.4 | **103** | 20.0 | **105** |
| 77 | -0.05768 | **100** | 52.1 | **100** | 17.7 | **100** | 15.0 | **100** | 56.0 | **99** | 42.3 | **99** | 32.4 | **99** |
| 78 | -0.02824 | **84** | 76.6 | **84** | 42.9 | **84** | 42.5 | **84** | 54.7 | **101** | 44.4 | **98** | 42.9 | **91** |
| 79 | -0.04671 | **98** | 61.2 | **98** | 24.6 | **98** | 21.2 | **98** | 76.2 | **64** | 79.0 | **78** | 63.8 | **71** |
| 80 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 81 | -0.04329 | **96** | 64.1 | **96** | 27.3 | **96** | 23.9 | **96** | 73.0 | **75** | 95.2 | **48** | 58.3 | **79** |
| 82 | -0.04491 | **97** | 62.7 | **97** | 26.0 | **97** | 22.6 | **97** | 56.8 | **98** | 74.3 | **83** | 37.4 | **95** |
| 83 | -0.02750 | **83** | 77.2 | **83** | 43.8 | **83** | 43.8 | **83** | 63.7 | **89** | 86.9 | **64** | 44.2 | **89** |
| 84 | -0.01223 | **54** | 89.8 | **54** | 69.3 | **54** | 79.7 | **54** | 79.7 | **56** | 94.2 | **51** | 78.3 | **52** |
| 85 | -0.02401 | **74** | 80.1 | **74** | 48.7 | **74** | 50.5 | **74** | 65.3 | **85** | 86.1 | **65** | 44.5 | **88** |
| 86 | -0.01461 | **60** | 87.9 | **60** | 64.5 | **60** | 73.4 | **60** | 58.6 | **95** | 16.1 | **105** | 36.0 | **97** |
| 87 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 88 | -0.00523 | **44** | 95.7 | **44** | 85.5 | **44** | 95.6 | **44** | 78.4 | **60** | 84.9 | **70** | 64.4 | **69** |
| 89 | -0.01451 | **59** | 88.0 | **59** | 64.7 | **59** | 73.6 | **59** | 75.0 | **69** | 93.6 | **52** | 66.5 | **66** |
| 90 | -0.02447 | **75** | 79.7 | **75** | 48.0 | **75** | 49.6 | **75** | 63.8 | **88** | 88.2 | **61** | 43.9 | **90** |
| 91 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 92 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 93 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 94 | -0.02937 | **86** | 75.6 | **86** | 41.4 | **86** | 40.5 | **86** | 83.0 | **45** | 84.9 | **74** | 74.6 | **53** |
| 95 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 96 | -0.02271 | **72** | 81.2 | **72** | 50.6 | **72** | 53.3 | **72** | 75.9 | **65** | 83.7 | **73** | 42.3 | **92** |
| 97 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 98 | -0.00804 | **48** | 93.3 | **48** | 78.6 | **48** | 90.1 | **48** | 61.8 | **92** | 44.9 | **96** | 61.5 | **73** |
| 99 | -0.00312 | **38** | 97.4 | **38** | 91.1 | **38** | 98.4 | **38** | 73.0 | **73** | 42.2 | **100** | 83.8 | **44** |
| 100 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 101 | -0.01568 | **61** | 87.0 | **61** | 62.5 | **61** | 70.5 | **61** | 93.4 | **35** | 98.9 | **38** | 90.6 | **36** |
| 102 | -0.02012 | **66** | 83.3 | **66** | 54.7 | **66** | 59.2 | **66** | 85.6 | **43** | 90.0 | **58** | 70.2 | **61** |
| 103 | -0.04277 | **95** | 64.5 | **95** | 27.7 | **95** | 24.3 | **95** | 82.9 | **47** | 93.3 | **53** | 69.7 | **63** |
| 104 | 0.00000 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** | 100.0 | **1** |
| 105 | -0.02640 | **81** | 78.1 | **81** | 45.3 | **81** | 45.8 | **81** | 87.6 | **39** | 95.6 | **47** | 80.7 | **47** |
| 106 | -0.02527 | **77** | 79.0 | **77** | 46.9 | **77** | 48.0 | **77** | 64.7 | **87** | 78.6 | **77** | 31.4 | **100** |

**TABUĽKA VIII**
*(miery efektívnosti pre (CP VRTS) model podľa transformácie (20))*

| pobočka | M1(ε) | M2(β) | M3(γ) | M4($\mu,\eta$) | M4($\mu,\eta$) | M5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ε ↔(17) | β=30 | γ=1700 | $\mu,\eta \leftrightarrow$ (18) | $\mu,\eta \leftrightarrow$ (19) | |
| 1 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 2 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 3 | 97.1 | 89.7 | 97.9 | 61.9 | 38.1 | 67.2 |
| 4 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 5 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 6 | 96.5 | 87.9 | 97.0 | 85.6 | 64.2 | 84.9 |
| 7 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 8 | 98.8 | 95.6 | 99.6 | 73.3 | 62.7 | 91.5 |
| 9 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 10 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 11 | 81.1 | 49.0 | 51.1 | 83.6 | 99.9 | 84.9 |
| 12 | 88.4 | 64.8 | 74.0 | 56.0 | 94.0 | 64.2 |
| 13 | 86.7 | 60.9 | 68.5 | 49.0 | 83.1 | 37.9 |
| 14 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 15 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 16 | 95.8 | 85.4 | 95.6 | 77.1 | 95.0 | 82.6 |
| 17 | 92.2 | 74.7 | 86.3 | 66.6 | 81.4 | 57.8 |
| 18 | 73.2 | 36.2 | 33.4 | 53.5 | 87.8 | 50.5 |
| 19 | 93.3 | 78.0 | 89.7 | 32.7 | 33.9 | 55.1 |
| 20 | 97.4 | 90.8 | 98.3 | 52.5 | 30.6 | 81.1 |
| 21 | 39.4 | 8.7 | 6.3 | 75.3 | 91.0 | 83.4 |
| 22 | 81.4 | 49.8 | 52.2 | 63.4 | 99.3 | 77.2 |
| 23 | 49.4 | 13.8 | 10.2 | 70.0 | 71.6 | 67.8 |
| 24 | 34.5 | 6.9 | 4.9 | 55.2 | 75.8 | 49.5 |
| 25 | 83.9 | 54.7 | 59.5 | 56.3 | 95.4 | 64.2 |
| 26 | 64.9 | 26.2 | 21.7 | 35.9 | 51.1 | 26.8 |
| 27 | 88.2 | 64.4 | 73.5 | 62.6 | 98.4 | 67.5 |
| 28 | 88.7 | 65.5 | 75.0 | 62.1 | 88.6 | 68.6 |
| 29 | 85.1 | 57.3 | 63.2 | 48.9 | 86.6 | 54.1 |
| 30 | 94.1 | 80.2 | 91.7 | 57.3 | 90.2 | 57.1 |
| 31 | 91.5 | 72.7 | 84.1 | 49.8 | 82.5 | 35.6 |
| 32 | 78.3 | 44.1 | 44.1 | 41.2 | 81.8 | 40.7 |
| 33 | 82.3 | 51.5 | 54.7 | 47.3 | 85.2 | 53.4 |
| 34 | 29.4 | 5.2 | 3.8 | 69.2 | 74.5 | 66.8 |
| 35 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 36 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 37 | 93.5 | 78.4 | 90.1 | 68.5 | 98.7 | 84.0 |
| 38 | 88.5 | 65.0 | 74.3 | 59.5 | 84.8 | 58.8 |
| 39 | 82.7 | 52.2 | 55.8 | 33.7 | 82.7 | 28.8 |
| 40 | 96.2 | 86.9 | 96.5 | 21.2 | 11.4 | 51.6 |
| 41 | 78.3 | 44.0 | 43.9 | 13.1 | 69.6 | 13.4 |
| 42 | 79.4 | 46.0 | 46.7 | 0.0 | 39.3 | 10.5 |
| 43 | 83.2 | 53.1 | 57.1 | 0.5 | 0.5 | 40.5 |
| 44 | 75.8 | 40.1 | 38.5 | 28.0 | 77.2 | 14.1 |
| 45 | 78.4 | 44.4 | 44.4 | 5.3 | 64.2 | 0.0 |
| 46 | 57.5 | 19.3 | 15.0 | 67.1 | 95.6 | 64.8 |
| 47 | 64.9 | 26.1 | 21.7 | 37.9 | 62.7 | 43.9 |
| 48 | 77.2 | 42.3 | 41.5 | 61.1 | 95.4 | 66.6 |
| 49 | 74.9 | 38.8 | 36.7 | 39.8 | 82.6 | 29.3 |
| 50 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 51 | 68.5 | 30.2 | 26.1 | 24.1 | 33.5 | 16.4 |
| 52 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 53 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 54 | 91.7 | 73.3 | 84.8 | 68.8 | 98.4 | 76.6 |
| 55 | 86.0 | 59.3 | 66.2 | 83.7 | 92.0 | 83.2 |
| 56 | 93.8 | 79.4 | 91.0 | 67.7 | 96.6 | 78.5 |
| 57 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 58 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |

**TABUĽKA VIII - pokračovanie**
*(miery efektívnosti pre (CP VRTS) model podľa transformácie (20))*

| pobočka | M1(ε) | M2(β) | M3(γ) | M4($\mu,\eta$) | M4($\mu,\eta$) | M5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ε ↔(17) | β=30 | γ=1700 | $\mu,\eta \leftrightarrow$ (18) | $\mu,\eta \leftrightarrow$ (19) | |
| 59 | 98.9 | 96.0 | 99.7 | 55.8 | 99.7 | 84.8 |
| 60 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 61 | 98.0 | 92.7 | 98.9 | 48.8 | 41.6 | 65.7 |
| 62 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 63 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 64 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 65 | 82.6 | 52.1 | 55.6 | 46.1 | 30.1 | 55.1 |
| 66 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 67 | 33.2 | 6.4 | 4.6 | 64.2 | 74.1 | 59.6 |
| 68 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 69 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 70 | 90.1 | 69.1 | 79.8 | 67.7 | 69.6 | 75.9 |
| 71 | 67.4 | 28.8 | 24.6 | 77.2 | 94.4 | 75.0 |
| 72 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 73 | 74.2 | 37.7 | 35.4 | 41.7 | 55.9 | 43.2 |
| 74 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 75 | 73.5 | 36.7 | 34.1 | 24.1 | 41.8 | 24.4 |
| 76 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 14.1 | 15.2 | 6.7 |
| 77 | 52.1 | 15.4 | 11.6 | 22.6 | 30.7 | 21.2 |
| 78 | 76.6 | 41.3 | 40.1 | 20.3 | 33.3 | 33.5 |
| 79 | 61.2 | 22.5 | 18.0 | 58.1 | 74.8 | 57.8 |
| 80 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 81 | 64.1 | 25.3 | 20.8 | 52.4 | 94.2 | 51.4 |
| 82 | 62.7 | 23.9 | 19.4 | 23.8 | 69.2 | 27.1 |
| 83 | 77.2 | 42.3 | 41.5 | 36.0 | 84.3 | 35.0 |
| 84 | 89.8 | 68.4 | 78.9 | 64.2 | 93.0 | 74.7 |
| 85 | 80.1 | 47.2 | 48.5 | 38.8 | 83.3 | 35.3 |
| 86 | 87.9 | 63.5 | 72.3 | 27.0 | 0.0 | 25.4 |
| 87 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 88 | 95.7 | 85.1 | 95.4 | 62.0 | 81.8 | 58.5 |
| 89 | 88.0 | 63.7 | 72.6 | 55.9 | 92.3 | 61.0 |
| 90 | 79.7 | 46.6 | 47.5 | 36.3 | 85.8 | 34.6 |
| 91 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 92 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 93 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 94 | 75.6 | 39.8 | 38.1 | 70.0 | 81.9 | 70.4 |
| 95 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 96 | 81.2 | 49.2 | 51.4 | 57.5 | 80.4 | 32.7 |
| 97 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 98 | 93.3 | 78.0 | 89.7 | 32.7 | 33.9 | 55.1 |
| 99 | 97.4 | 90.8 | 98.3 | 52.5 | 30.6 | 81.1 |
| 100 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 101 | 87.0 | 61.4 | 69.3 | 88.4 | 98.7 | 89.0 |
| 102 | 83.3 | 53.4 | 57.6 | 74.6 | 88.0 | 65.3 |
| 103 | 64.5 | 25.7 | 21.3 | 69.8 | 91.9 | 64.7 |
| 104 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 105 | 78.1 | 43.8 | 43.6 | 78.1 | 94.8 | 77.5 |
| 106 | 79.0 | 45.4 | 45.8 | 37.8 | 74.3 | 20.0 |

**TABUĽKA IX**

*(ratingy pobočiek podľa modelov (PL VRTS) a (CP VRTS) pri rôznych výpočtoch miery efktívnosti)*

| pob | M1-M3 | | M4,(18) | | M4,(19) | | M5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | PL | CP | PL | CP | PL | CP | PL | CP |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 40 | 40 | **54** | **61** | 95 | 94 | 57 | 57 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 41 | 41 | 36 | 36 | 87 | 86 | 40 | 37 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 36 | 36 | 42 | 44 | 89 | 88 | 35 | 35 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 73 | 73 | 37 | 38 | 35 | 35 | 37 | 38 |
| 12 | 58 | 57 | 67 | 68 | 53 | 50 | 64 | 64 |
| 13 | 59 | 62 | 74 | 77 | 70 | 66 | 85 | 86 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 16 | 44 | 43 | 39 | 41 | 51 | 46 | 42 | 43 |
| 17 | 48 | 50 | 48 | 54 | 77 | 73 | 70 | 70 |
| 18 | 90 | 90 | **79** | **72** | 61 | 59 | 79 | 80 |
| 19 | 46 | 48 | 92 | 92 | 98 | 96 | 77 | 73 |
| 20 | 38 | 38 | 71 | 73 | 100 | 100 | 43 | 44 |
| 21 | 102 | 102 | 41 | 42 | 59 | 55 | 41 | 41 |
| 22 | **77** | **71** | 51 | 57 | 40 | 37 | 47 | 48 |
| 23 | 101 | 101 | **55** | **46** | **73** | **81** | 56 | 55 |
| 24 | 104 | 103 | 76 | 71 | **54** | **76** | 81 | 81 |
| 25 | **70** | **65** | 68 | 67 | 49 | 44 | 65 | 65 |
| 26 | 92 | 93 | 96 | 90 | 90 | 90 | 95 | 96 |
| 27 | 60 | 58 | 52 | 58 | 44 | 41 | **63** | **56** |
| 28 | 55 | 55 | 59 | 59 | 62 | 57 | 55 | 54 |
| 29 | 63 | 64 | 75 | 78 | 63 | 60 | 74 | 76 |
| 30 | 45 | 45 | 69 | 66 | 58 | 56 | 71 | 72 |
| 31 | 50 | 52 | 80 | 76 | 74 | 69 | 87 | 87 |
| 32 | 78 | 79 | 82 | 83 | 76 | 72 | 83 | 84 |
| 33 | 71 | 70 | 77 | 80 | 67 | 62 | 75 | 77 |
| 34 | 105 | 105 | 49 | 48 | **57** | **78** | 58 | 58 |
| 35 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 36 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 37 | **51** | **47** | 44 | 50 | 42 | 39 | **45** | **40** |
| 38 | 54 | 56 | 61 | 63 | 66 | 63 | 66 | 68 |
| 39 | 68 | 68 | 88 | 91 | 71 | 67 | 94 | 94 |
| 40 | 42 | 42 | 98 | 100 | 104 | 104 | 80 | 78 |
| 41 | 80 | 80 | 101 | 103 | 84 | 82 | 103 | 103 |
| 42 | 75 | 76 | 105 | 106 | 93 | 93 | 104 | 104 |
| 43 | 67 | 67 | 104 | 105 | 106 | 105 | 86 | 85 |
| 44 | 82 | 85 | 94 | 94 | 79 | 75 | 102 | 102 |
| 45 | 79 | 78 | 103 | 104 | 86 | 85 | 106 | 106 |
| 46 | 99 | 99 | 56 | 53 | 39 | 43 | **54** | **62** |
| 47 | 95 | 94 | 89 | 86 | 83 | 87 | 84 | 82 |
| 48 | **88** | **82** | 62 | 62 | 43 | 45 | 60 | 59 |
| 49 | 84 | 87 | 84 | 84 | 72 | 68 | 93 | 93 |
| 50 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 51 | 91 | 91 | 100 | 96 | 94 | 95 | 101 | 101 |
| 52 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 53 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| pob | M1-M3 | | M4,(18) | | M4,(19) | | M5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | PL | CP | PL | CP | PL | CP | PL | CP |
| 54 | 52 | 51 | 45 | 49 | **47** | **40** | 50 | 49 |
| 55 | 64 | 63 | 38 | 37 | **45** | **53** | 38 | 42 |
| 56 | 49 | 46 | 46 | 51 | **48** | **42** | **51** | **46** |
| 57 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 58 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 59 | 35 | 35 | 66 | 70 | 36 | 36 | 39 | 39 |
| 60 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 61 | 37 | 37 | 81 | 79 | 91 | 92 | 62 | 60 |
| 62 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 63 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 64 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 65 | 66 | 69 | 78 | 81 | 102 | 102 | 73 | 75 |
| 66 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 67 | 103 | 104 | **64** | **55** | 80 | 80 | 68 | 67 |
| 68 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 69 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 70 | 53 | 53 | 47 | 52 | 85 | 83 | 49 | 50 |
| 71 | 93 | 92 | 43 | 40 | **38** | **48** | 48 | 51 |
| 72 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 73 | 89 | 88 | **90** | **82** | 88 | 89 | 82 | 83 |
| 74 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 75 | 86 | 89 | 95 | 97 | 92 | 91 | 98 | 98 |
| 76 | 106 | 106 | 106 | 102 | 103 | 103 | 105 | 105 |
| 77 | 100 | 100 | 102 | 99 | 97 | 99 | 100 | 99 |
| 78 | 83 | 84 | 99 | 101 | 96 | 98 | 92 | 91 |
| 79 | 98 | 98 | **73** | **64** | **52** | **77** | 72 | 71 |
| 80 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 81 | 97 | 96 | 70 | 75 | 50 | 49 | 76 | 79 |
| 82 | 96 | 97 | 97 | 98 | 81 | 84 | 97 | 95 |
| 83 | 81 | 83 | 86 | 89 | 68 | 64 | 89 | 89 |
| 84 | 56 | 54 | 50 | 56 | 55 | 51 | 52 | 52 |
| 85 | 72 | 74 | 83 | 85 | 69 | 65 | 88 | 88 |
| 86 | 57 | 60 | 91 | 95 | 105 | 106 | 96 | 97 |
| 87 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 88 | 43 | 44 | **53** | **60** | 75 | 71 | 67 | 69 |
| 89 | 61 | 59 | 65 | 69 | 56 | 52 | 69 | 66 |
| 90 | 76 | 75 | 87 | 88 | 64 | 61 | 91 | 90 |
| 91 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 92 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 93 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 94 | 87 | 86 | **60** | **45** | **65** | **74** | 53 | 53 |
| 95 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 96 | 69 | 72 | 63 | 65 | 78 | 74 | 90 | 92 |
| 97 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 98 | 46 | 48 | 92 | 92 | 98 | 96 | 77 | 73 |
| 99 | 38 | 38 | 71 | 73 | 100 | 100 | 43 | 44 |
| 100 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 101 | 62 | 61 | 35 | 35 | 37 | 38 | 36 | 36 |
| 102 | 65 | 66 | **58** | **43** | 60 | 58 | 61 | 61 |
| 103 | 94 | 95 | **57** | **47** | **41** | **54** | 59 | 63 |
| 104 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 105 | **85** | **81** | 40 | 39 | 46 | 47 | 46 | 47 |
| 106 | 74 | 77 | 85 | 87 | 82 | 79 | 99 | 100 |