Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika

ÚLOHY OPTIMÁLNEHO RIADENIA NA NEKONEČNOM ČASOVOM HORIZONTE

Diplomová práca

Diplomantka: Jana ŠTOROVÁ
Diplomová vedúca: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Bratislava 2001

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVEZRITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2001 Jana ŠTOROVÁ

Ďakujem všetkým, ktorí mi pomohli pri písaní diplomovej práce a špeciálne chcem poďakovať mojej diplomovej vedúcej Doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za cenné rady a pripomienky.

Obsah

1. Úlohy optimálneho riadenia na konečnom časovom horizonte

1.1 Autonómna úloha s voľným časom

Pod autonómnou úlohou optimálneho riadenia na konečnom časovom horizonte s voľným časom budeme rozumieť úlohu (AK)

$$\max\ J := \int_0^T f^0(x(t), u(t))dt \tag{1.1.1}$$

za podmienok

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \forall\ t\ \in [0, T], \quad T - \text{voľné} \tag{1.1.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{1.1.3}$$

$$x(T) \in C = \{x \mid g(x) = 0\} \tag{1.1.4}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\ t\ \in [0, T] \tag{1.1.5}$$

pričom predpokladáme, že $f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ sú dané spojite diferencovateľné funkcie, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je daný bod a $U \subset \mathbb{R}^m$ je daná množina.

Poznamenajme, že (1.1.3) je počiatočná podmienka a (1.1.4) je koncová podmienka. Funkcia J v (1.1.1) sa nazýva účelovou funkciou. Pod riadeniami rozumieme po čiastkach spojité funkcie $u(t)$ definované na konečných intervaloch typu $[0, T]$ (pre rôzne hodnoty koncového času T) s hodnotami v $\mathbb{R}^m$. Funkciu $x(t),\ t \in [0, T]$, ktorá spĺňa pre dané riadenie $u(t),\ t \in [0, T]$, podmienky (1.1.2) a (1.1.3) nazývame odozvou na riadenie $u(t)$. Riadenie $u(t)$ spĺňajúce (1.1.5), ktorého odozva spĺňa (1.1.4), nazývame prípustným riadením. Úloha (AK) teda znamená maximalizovať danú účelovú funkciu v triede všetkých prípustných riadení.

Nutnou podmienkou optimality pre (AK) je Pontrjaginov princíp maxima (PPM). K sformulovaniu vety zavedieme novú adjungovanú premennú $\psi \in \mathbb{R}^n$ a konštantu ψ^0. Pomocou nich definujeme tzv. *Hamiltonovu funkciu* (HF) :

$$H(x, u, \psi, \psi^0) = \psi^0 f^0(x, u) + \psi^T f(x, u). \tag{HF}$$

Veta 1: Pontrjaginov princíp maxima pre úlohu (AK). *Nech* $\hat{u}\,(t)\,,\ t \in [0,\hat{T}]$, *je optimálne riadenie pre úlohu (AK) a nech* $\hat{x}\,(t)$ *je jeho odozva. Potom existuje taká konštanta* $\psi^0 \geq 0$, *konštantný vektor* $\chi \in \mathbb{R}^l$ *a spojitá funkcia* $\psi(t) : [0,\hat{T}] \to \mathbb{R}^n$, *že sú splnené nasledovné podmienky:*

(i) $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0, \quad \psi^0 \geq 0,$

(ii) adjungovaná funkcia $\psi(t)$ *je riešením adjungovanej rovnice*

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T \psi(t) \tag{AR}$$

a podmienky transverzality

$$\psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \chi, \tag{PT}$$

(iii) pre každé $t \in [0,\hat{T}]$, *v ktorom je* $\hat{u}(t)$ *spojitá, spĺňa Hamiltonova funkcia (HF) podmienku maxima*

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = \max_{u \in U} H(\hat{x}(t), u, \psi(t), \psi^0) \tag{PM}$$

a podmienku stacionarity

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) \equiv 0. \tag{PS}$$

Dôkaz. Dôkaz tejto vety je náročný a dlhý. Je uvedený napr. v [01].

Poznámky.

(a) Všimnime si, že ak $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ spĺňajú PPM s adjungovanými premennými $(\psi^0, \psi(t))$, tak spĺňajú PPM aj s ich kladným násobkom $c(\psi^0, \psi(t))$, kde $c \geq 0$. Pretože podľa vety $\psi^0 \geq 0$, tak stačí uvažovať ψ^0 len s hodnotami 0 a 1.

(b) Množina C tu reprezentuje koncovú podmienku pre stavovú premennú x. V prípade, že $C = R^n$, hovoríme o úlohe s voľným koncom. Funkcia $g(x)$ sa identicky rovná nule a teda podmienka transverzality bude v tvare $\psi(\hat{T}) = 0$. Ak množina C pozostáva len z jedného bodu $C = x_T$, tak hovoríme o úlohe s pevným koncom. V takom prípade podmienka transverzality nedáva žiadnu informáciu, pretože má tvar $\psi(\hat{T}) = \chi$, pričom χ je neznáma konštanta z $\mathbb{R}^l$.

1.2 Neautonómna úloha s voľným časom

V časti (1.1) sme sa zaoberali úlohami, v ktorých funkcie f^0 a f nezáviseli explicitne od času t. Môžu sa ale vyskytnúť prípady, kedy bude úlohou nájsť extrém funkcie, v ktorej bude premenná t vystupovať ako ďalšia premenná. Takú úlohu nazývame neautonómnou.

Pod neautonómnou úlohou optimálneho riadenia na konečnom časovom horizonte s voľným časom budeme rozumieť maximalizačnú úlohu (NK)

$$\max\ J := \int_0^T f^0(t,x,u)dt \tag{1.2.1}$$

za podmienok

$$\dot{x} = f(t,x,u) \quad \forall\ t \in [0,T], \quad T - \text{voľné} \tag{1.2.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{1.2.3}$$

$$x(T) \in C = \{x \mid g(x) = 0\} \tag{1.2.4}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\ t \in [0,T] \tag{1.2.5}$$

Aj pre takéto úlohy platí Pontrjaginov princíp maxima. Ako uvidíme nižšie, jeho znenie možno odvodiť z Vety 1 pre autonómne úlohy. Použijeme k tomu zvyčajný trik a premennú t, ktorá spôsobuje neautonómnosť, označíme ako novú stavovú premennú

$$t = x^{n+1}.$$

Potom platí

$$\dot{x}^{n+1} = 1, \quad x^{n+1}(0) = 0$$

a úloha bude mať tvar

$$\max J := \int_0^T f^0(x^{n+1},x,u)dt \tag{1.2.6}$$

za podmienok

$$\dot{x} = f(x^{n+1},x,u) \quad \forall\ t \in [0,T], \quad T - \text{voľné}$$

$$\dot{x}^{n+1} = 1 = f^{n+1} \tag{1.2.7}$$

$$x(0) = x_0$$

$$x^{n+1}(0) = 0 \tag{1.2.8}$$

$$(x(T), x^{n+1}(T)) \in \tilde{C}, \quad \tilde{C} = \{(x, x^{n+1}) \mid x \in C,\ x^{n+1} \in R\} \tag{1.2.9}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{1.2.10}$$

Dostali sme vlastne štandardnú autonómnu úlohu, len o jednu dimenziu väčšiu. Preto aj adjungovaná premenná $\tilde{\psi}$ bude o jednu dimenziu väčšia, čiže

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná rovnica bude

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi}^{n+1} \end{pmatrix} = -\psi^0 \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial f^0}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T & \left(\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}} & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= -\psi^0 \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial f^0}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^{n+1} \end{pmatrix} \tag{1.2.11}$$

Úpravou tohto systému a rozpísaním po zložkách dostaneme dve diferenciálne rovnice

$$\dot{\psi} = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi \tag{1.2.12}$$

$$\dot{\psi}^{n+1} = -\psi^0 \frac{\partial f^0}{\partial x^{n+1}} - \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}} \psi \tag{1.2.13}$$

pričom rovnica (1.2.12) je taká istá ako adjungovaná rovnica (AR) a rovnica (1.2.13) je nová rovnica. Podmienka transverzality bude mať nasledovný tvar

$$\begin{pmatrix} \psi(\hat{T}) \\ \psi^{n+1}(\hat{T}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial g}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \chi. \tag{1.2.14}$$

Tak ako pri adjungovanej rovnici, aj tu úpravou dostaneme dve rovnice

$$\psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \chi \tag{1.2.15}$$

$$\psi^{n+1}(\hat{T}) = 0 \tag{1.2.16}$$

a taktiež prvá z nich, rovnica (1.2.15), je podmienka transverzality známa z autonómnej úlohy a rovnica (1.2.16) je nová rovnica.

Hamiltonova funkcia pre túto úlohu bude mať tvar

$$\tilde{H}(x^{n+1}, x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0 f^0(x^{n+1}, x, u) + \psi^T f(x^{n+1}, x, u) + \psi^{n+1}, \tag{1.2.17}$$

pretože $f^{n+1} = 1$. Podmienka maxima (PM) sa teda nezmení, pretože $\psi^{n+1}(t)$ nezávisí od premennej u

$$\tilde{H}(\hat{x}^{n+1}, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) = \max_{u \in U} \tilde{H}(\hat{x}^{n+1}, \hat{x}(t), u, \psi(t), \psi^0) \quad \forall\, t \in [0, \hat{T}]. \tag{1.2.18}$$

Nakoniec analyzujme podmienku stacionarity. Máme úlohu o jednu dimenziu väčšiu, než bola autonómna úloha a teda pribudla jedna diferenciálna rovnica pre ψ^{n+1}. Takže podmienka stacionarity bude

$$\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi^T(t) f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi^{n+1}(t) \equiv 0 \quad \forall\, t \in [0, \hat{T}]. \tag{1.2.19}$$

Použitím a dosadením vzťahu (1.2.16) do (1.2.19) dostaneme konečný tvar podmienky stacionarity

$$\psi^0 f^0(\hat{T}, x(\hat{T}), u(\hat{T})) + \psi^T(\hat{T}) f(\hat{T}, \hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T})) \equiv 0. \tag{1.2.20}$$

Odvodili sme nutné podmienky optimality pre (NK), ktoré môžeme sformulovať do nasledujúcej vety.

Veta 2. *Oproti úlohe (AK) sa pre neautonómne úlohy s voľným časom zmení znenie PPM iba v (PS). To znamená namiesto podmienky*

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) \equiv 0, \quad \forall\, t \in [0, \hat{T}]$$

platí iba

$$H(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \psi^0, \psi(\hat{T})) \equiv 0.$$

1.3 Úlohy optimálneho riadenia s pevným časom

Pod neautonómnou úlohou optimálneho riadenia na konečnom časovom horizonte s pevným časom budeme rozumieť úlohu

$$\max\ J := \int_0^{T_d} f^0(t, x, u)\, dt \tag{1.3.1}$$

za podmienok

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad \forall\ t \in [0, T_d] \tag{1.3.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{1.3.3}$$

$$x(T_d) \in C = \{x \mid g(x) = 0\} \tag{1.3.4}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\ t \in [0, T_d] \tag{1.3.5}$$

Podobne ako pre neutonómne úlohy s voľným časom aj pre (ne)autonómne úlohy s pevným časom možno odvodiť Pontrjaginov princíp maxima. K tomu možno využiť postup z dôkazu Vety 2, kde sa zmení iba cieľová podmienka (1.2.9). V prípade úlohy s pevným časom bude cieľová množina $\tilde{C}$ zadaná nasledovným vzťahom

$$\tilde{C} = \{(x, x^{n+1}) \mid x \in C, x^{n+1} = T_d\}.$$

Potom zrejme podmienka transverzality pre ψ^{n+1} nedá žiadnu podmienku a teda ani z podmienky stacionarity (1.2.19) nedostaneme žiadnu podmienku. V prípade, že úloha s pevným časom je autonómna, dostaneme z rovnice (1.2.13), že $\psi(t)^{n+1}$ je konštantná funkcia a teda z podmienky stacionarity (1.2.19) dostaneme podmienku, čo možno sformulovať do nasledujúcej vety.

Veta 3. *Oproti úlohe (AK) sa pre neautonómne, resp. autonómne úlohy, s pevným časom zmení znenie PPM z Vety 1 iba v (PS). To znamená miesto podmienky*

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \psi^0) \equiv 0, \quad \forall\ t \in [0, \hat{T}]$$

neplatí pre neautonómne úlohy s pevným časom žiadna podmienka a pre autonómne úlohy s pevným časom platí

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) \equiv \mathit{konšt.}, \quad \forall\ t \in [0, T_d].$$

1.4 Diskontovaná úloha

Pod diskontovanou úlohou optimálneho riadenia s konečným časom (pevne zadaným alebo voľným) budeme rozumieť úlohu (DK)

$$\max J := \int_0^T e^{-rt} f^0(x(t), u(t)) dt \tag{1.4.1}$$

za podmienok

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \forall\, t\ \in [0, T], \tag{1.4.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{1.4.3}$$

$$x(T) = C, \quad C = \{x | g(x) = 0\} \tag{1.4.4}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\, t\ \in [0, T] \tag{1.4.5}$$

kde T je voľné pre úlohu s voľným časom, resp. $T = T_d$ pre úlohu s pevne zadaným časom. Vidíme, že ide o špeciálny typ neautonómnej úlohy, kde neautonómnosť spôsobuje iba diskontný faktor v účelovej funkcii. Je zrejmé, že táto neautonómnosť sa prenáša aj do adjungovanej rovnice, čo môže spôsobovať ťažkosti pri analýze vlastností riešení. Ako uvidíme nižšie, podmienky Pontrjaginovho princípu maxima možno upraviť do takého tvaru, aby príslušný systém adjungovaných rovníc bol autonómny. To uľahčuje trajektórovú analýzu v (x, ψ) priestore, pretože diferenciálne rovnice pre funkcie $(x(t), \psi(t))$ budú autonómne.

Nech $\hat{u}(t),\ t \in [0, \hat{T}]$ ($\hat{T} = T_d$, ak je úloha s pevne daným koncovým časom T_d) je optimálne riadenie, $\hat{x}(t)$ je jeho odozva, $\psi^0,\ \chi$ príslušné konštanty a $\psi(t)$ adjungovaná funkcia z Pontrjaginovho princípu maxima. Zrejme

$$H(x, u, \psi^0, \psi) = e^{-rt}\psi^0 f^0(x, u) + \psi^T f(x, u) =$$

$$= e^{-rt}\left(\psi^0 f^0(x, u) + e^{rt}\psi^T f(x, u)\right) \tag{1.4.6}$$

je Hamiltonova funkcia pre úlohu (DK). Adjungovaná rovnica bude mať tvar

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 e^{-rt}\left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)}{\partial x}\right)^T \psi(t) =$$

$$= -\left(\frac{\partial H(\hat{x}, \hat{u}, \psi^0, \psi)}{\partial x}\right)^T. \tag{1.4.7}$$

Podmienka transverzality je

$$\psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \chi. \tag{1.4.8}$$

Podmienka maxima je

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi(t)) = \max_{u \in U} H(\hat{x}(t), u, \psi^0, \psi(t)), \quad \forall\ t\ \in [0, \hat{T}]. \tag{1.4.9}$$

V prípade, že ide o úlohu s voľným časom, platí aj podmienka

$$H(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), \psi^0, \psi(\hat{T})) \equiv 0. \tag{1.4.10}$$

Aby sme odstránili neautonómnosť adjungovanej rovnice zaviedieme nasledujúce substitúcie

$$\begin{aligned} m(t) &= e^{rt}\psi(t) \\ \mathcal{H} &= e^{rt}H. \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Tým dostaneme nový tvar Hamiltonovej funkcie

$$\mathcal{H}(x, u, m^0, m) = m^0 f^0(x, u) + m^T f(x, u). \tag{1.4.12}$$

Adjungovaná rovnica nadobudne tvar

$$\dot{m}(t) = re^{rt}\psi(t) + e^{rt}\dot{\psi}(t) = rm(t) - e^{rt}\frac{\partial H(\hat{x}, \hat{u}, \psi^0, \psi)}{\partial x}. \tag{1.4.13}$$

Keďže platí (1.4.11), tak platí aj $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = e^{rt}\frac{\partial H}{\partial x}$, z čoho po dosadení do (1.4.13) dostaneme výsledný tvar adjungovanej rovnice

$$\dot{m} = rm - \frac{\partial \mathcal{H}(\hat{x}, \hat{u}, m^0, m)}{\partial x}. \tag{1.4.14}$$

Podmienka maxima sa nezmení, pretože diskontný faktor nezávisí od u, teda bude mať tvar

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), m^0, m(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{x}(t), u, m^0, m(t)), \quad \forall\ t\ \in [0, \hat{T}]. \tag{1.4.15}$$

Podmienka transverality po substitúcii nadobudne tvar

$$m(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \tilde{\chi}, \tag{1.4.16}$$

kde $\tilde{\chi} = e^{r\hat{T}}\chi$ a pre úlohu s voľným časom navyše platí

$$\mathcal{H}(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), m^0, m(\hat{T})) \equiv 0.$$

V pôvodnej formulácii H predstavuje súčastnú hodnotu Hamiltonovej funkcie, t.j. vzťahujúcu sa k časovému okamihu 0 a ψ predstavuje súčastnú hodnotu adjungovanej funkcie. Nová Hamiltonova funkcia $\mathcal{H}$ a nová adjungovaná premenná m predstavujú okamžitú hodnotu, t.j. vzťahujúcu sa k časovému okamihu t.

Sformulujme teda nutné podmienky optimality do vety.

Veta 4. *Nech $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ je jeho odozva pre úlohu (DK). Potom existuje taká konštanta $m^0 \geq 0$, konštantný vektor $\chi \in \mathbb{R}^l$ a spojitá funkcia $m(t) : [0, \hat{T}] \to \mathbb{R}^n$, že sú splnené nasledovné podmienky:*

(i) $(m^0, m(t)) \neq 0, \quad m^0 \geq 0,$

(ii) adjungovaná premenná $m(t)$ je riešením adjungovanej rovnice

$$\dot{m}(t) = rm - m^0 \left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)}{\partial x} \right)^T m(t)$$

a podmienky transverzality

$$m(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x} \right)^T \chi,$$

(iii) pre každé $t \in [0, \hat{T}]$,v ktorom je $\hat{u}(t)$ spojitá, splňa Hamiltonova funkcia

$$\mathcal{H}(x, u, m^0, m) = m^0 f^0(x, u) + m^T f(x, u)$$

podmienku maxima

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), m^0, m(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\hat{x}(t), u, m^0, m(t))$$

a podmienku stacionarity (ak sa jedná o úlohu s voľným časom)

$$\mathcal{H}(\hat{x}(\hat{T}), \hat{u}(\hat{T}), m^0, m(\hat{T})) \equiv 0.$$

1.5 Bolzova úloha s voľným časom

Pod Bolzovou úlohou rozumieme úlohu optimálneho riadenia s voľným časom, kde účelová funkcia obsahuje aj fukciu koncového stavu systému, teda je to úloha (BK)

$$\max J := \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt + \varphi(x(T)) \tag{1.5.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall\, t \in [0, T], \quad T - \text{voľné} \tag{1.5.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{1.5.3}$$

$$x(T) \in C \tag{1.5.4}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\, t \in [0, T], \tag{1.5.5}$$

kde $\varphi : R^n \to R$ je daná C^2 funkcia.

Pre túto úlohu odvodíme nutné podmienky optimality. Je zrejmé, že tieto podmienky budú rovnaké ako pre úlohu, kde ku J bude pripočítaná konštanta, t.j. účelovou funkciou bude

$$\tilde{J} = \int_0^T f^0(x,u)dt + \varphi(x(T)) - \varphi(x(0)). \tag{1.5.6}$$

Podmienky odvodíme tak, že $\tilde{J}$ prevedieme na Lagrangeov tvar:

$$\tilde{J} = \int_0^T f^0(x,u)dt + \int_0^T \frac{d}{dt}\varphi(x(t))dt = \int_0^T [f^0(x,u) + \varphi'(x)f(x,u)]dt. \tag{1.5.7}$$

To je už úloha v štandardnom tvare. Aplikujeme na ňu PPM z Vety 1. Dostaneme adjungovanú rovnicu

$$\dot{\psi} = -\psi^0 \left(\frac{\partial}{\partial x}(f^0 + \varphi' f)\right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi,$$

z čoho po úprave dostávame

$$\dot{\psi} = -\psi^0 \left[\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^T f - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T\right] - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi. \tag{1.5.8}$$

Podmienka transverzality je

$$\psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T \chi. \tag{1.5.9}$$

Hamiltonova funkcia

$$H(x,u,\psi^0,\psi) = \psi^0[f^0(x,u) + \varphi' f(x,u)] + \psi^T f(x,u) \tag{1.5.10}$$

spĺňa podmienku maxima

$$H(\hat{x}(t),\hat{u}(t),\psi^0,\psi(t)) = \max_{u\in U} H(\hat{x}(t),u,\psi^0,\psi(t)) \quad \forall\, t \in [0,\hat{T}]. \tag{1.5.11}$$

Úpravou Hamiltonovej funkcie dostávame

$$H = \psi^0 f^0 + \tilde{\psi}^T f, \tag{1.5.12}$$

kde sme označili

$$\tilde{\psi} := \psi + (\psi^0 \varphi')^T. \tag{1.5.13}$$

Odvoďme pre túto novú premennú diferenciálnu rovnicu

$$\dot{\tilde{\psi}} = \dot{\psi} + \frac{d}{dt}(\psi^0 \varphi')^T$$

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^T f\psi^0 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi + \psi^0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^T f =$$

$$= -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \left[(\varphi' \psi^0)^T + \psi\right] \tag{1.5.14}$$

Výraz v hranatej zátvorke je novozvolená premenná podľa (1.5.13). Rovnicu (1.5.14) možno teda napísať v tvare

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \tilde{\psi} \tag{1.5.15}$$

čo je adjungovaná rovnica v štandardnom tvare . Akú koncovú podmienku bude spĺňať $\tilde{\psi}$? Zrejme

$$\tilde{\psi}(\hat{T}) = \psi(\hat{T}) + \left(\frac{\partial \varphi(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \psi^0 = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \chi + \left(\frac{\partial \varphi(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \psi^0. \tag{1.5.16}$$

Vidíme, že jediné, čo sa zmenilo oproti prípadu z časti 1.1 je podmienka transverzality. Výsledok môžeme sformulovať do vety.

Veta 5: PPM pre Bolzovu úlohu:. *V znení PPM pre úlohu (BK) sa oproti Vete 1 mení iba podmienka transverzality, t.j. namiesto podmienky (PT) platí podmienka*

$$\psi(\hat{T}) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \chi + \left(\frac{\partial \varphi(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x}\right)^T \psi^0.$$

2. Úlohy optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte

2.1 Štandardná úloha optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte

Pod štandardnou úlohou optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte budeme rozumieť úlohu (N)

$$\max J := \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t))\, dt \tag{2.1.1}$$

za podmienok

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \forall\, t \in [0, \infty) \tag{2.1.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.1.3}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \in C \tag{2.1.4}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\, t \in [0, \infty) \tag{2.1.5}$$

Poznamenajme, že oproti úlohám na konečnom časovom horizonte žiadame, aby pre prípustné riadenie $\hat{u}(t)$ a jeho odozvu $\hat{x}(t)$ integrál $\int_0^\infty f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt$ konvergoval.

2.2 Pontrjaginov princíp maxima pre úlohu (N)

Pre úlohy s konečným časom platil Pontrjaginov princíp maxima ako nutná podmienka optimality. Sformulujme podobnú vetu pre úlohu na nekonečnom časovom horizonte a dokážme ju pomocou Vety 3 sformulovanej pre úlohy pevným časom.

Veta 6. [02] *Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ jeho odozva pre úlohu (N). Potom existuje konštanta $\psi^0 \in \mathbb{R}$ a spojitá funkcia $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ také, že*

(i) $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0, \quad \psi^0 \geq 0,$

(ii) $\psi(t)$ *rieši rovnicu*

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 \left(\frac{\partial f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T \psi^T,$$

(iii) pre každé $t \in [0, \infty)$, v ktorom je $\hat{u}(t)$ spojitá, platí

$$\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi^T f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u\in U} (\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), u) + \psi^T f(t, \hat{x}(t), u)).$$

Poznámka. V knihe [02], z ktorej je citovaná Veta 6, je iba naznačená myšlienka dôkazu tejto vety. Nižšie uvedený dôkaz je podrobným rozpracovaním uvedenej myšlienky.

Dôkaz. Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ jeho odozva pre úlohu (N). Zvoľme si postupnosť $\{T_k\} \to \infty$, pričom $T_k > 0$. Pre každé T_k definujme nasledovnú úlohu optimálneho riadenia na konečnom časovom horozinte s pevným časom T_k a pevným koncom určeným hodnotou $\hat{x}(T_k)$, t.j. úlohu (K_{T_k})

$$\max \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t))dt \tag{2.2.1}$$

za podmienok

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \forall\, t \in [0, T_k] \tag{2.2.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.2.3}$$

$$x(T) = \hat{x}(T_k) \tag{2.2.4}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\, t \in [0, T_k] \tag{2.2.5}$$

Uvažujme teraz jedno pevne zvolené T_k. Je zrejmé, že zúženie riadenia $\hat{u}(t)$ a jeho odozvy na interval $[0, T_k]$, je optimálne riadenie a odozva pre úlohu (K_{T_k}). Keby totiž neboli optimálne, existovalo by iné prípustné riadenia $\tilde{u}(t)$ a odozva $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, T_k]$, pre úlohu (K_{T_k}), pre ktoré by platilo

$$\int_0^{T_k} f^0(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))dt > \int_0^{T_k} f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt. \tag{2.2.6}$$

Zostrojme riadenie

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & t \in [0, T_k] \\ \hat{u}(t), & t \in [T_k, \infty) \end{cases}. \tag{2.2.7}$$

Jeho odozva bude mať tvar

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & t \in [0, T_k] \\ \hat{x}(t), & t \in [T_k, \infty) \end{cases}, \tag{2.2.8}$$

pretože koncová podmienka na stavovú premennú $x(T) = \hat{x}(T_k)$ nám zabezpečila, že akákoľvek odozva na prípustné riadenie sa musí dostať do bodu $\hat{x}(T_k)$ a ďalej sa musí správať ako optimálne $\hat{x}(t)$. Zrejme teda $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \infty)$ je prípustné riadenie pre úlohu (N) a pre hodnotu účelovej funkcie v tomto riadení platí

$$J(\tilde{u}) = \int_0^\infty f^0(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))dt = \int_0^{T_k} f^0(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t))dt + \int_{T_k}^\infty f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt >$$

$$> \int_0^{T_k} f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt + \int_{T_k}^\infty f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))dt = J(\hat{u}) \qquad (2.2.9)$$

kde sme využili vzťah (2.2.6). Dostali sme, že $J(\tilde{u}) > J(\hat{u})$, čo je spor s predpokladom, že $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie pre úlohu (N). Teda musí platiť, že príslušné zúženie $\hat{u}(t)$ je optimálne aj pre úlohu (K_{T_k}). Z optimality $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$, kde $t \in [0, T_k]$, pre úlohu (K_{T_k}) vyplýva, že pre túto úlohu platí Pontrjaginov princíp maxima (Veta 3). To znamená, že existuje taká konštanta $\psi_k^0 \in \mathbb{R}$ a spojitá funkcia $\psi_k(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, že platia nasledovné podmienky:

(i) $(\psi_k^0, \psi_k(t)) \neq 0, \quad \psi_k^0 \geq 0,$

(ii) $\psi_k(t)$ rieši diferenciálnu rovnicu

$$\dot{\psi}_k(t) = -\psi_k^0 \left(\frac{\partial f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T - \left(\frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x}\right)^T \psi_k^T,$$

(iii) pre každé $t \in [0, T_k]$, pre ktoré je $\hat{u}(t)$ spojitá platí

$$\psi_k^0 f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi_k^T f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) =$$

$$= \max_{u \in U} [\psi_k^0 f^0(t, \hat{x}(t), u) + \psi_k^T f(t, \hat{x}(t), u)] \equiv \text{konšt.}$$

Poznamenávame, že indexom k označujeme príslušné funkcie a konštanty prislúchajúce k úlohe (K_{T_k}). Označme si $\psi_k(0) = A_k$. Z podmienky (i) vyplýva, že $(\psi_k^0, A_k) \neq 0$. Pretože podmienky PPM sú jednoznačné až na multiplikatívnu konštantu, môžme predpokladať, že $\|(\psi_k^0, A_k)\| = 1$. Z postupnosti $\{(\psi_k^0, A_k)\}$ je teda možné vybrať konvergentnú podpostupnosť (kvôli jednoduchosti ju budeme označovať rovnako ako pôvodnú), ktorá konverguje k nejakému $(\psi^0, A) \neq 0$. Všimnime si, že adjungované funkcie rozšírené o nultú zložku $(\psi_k^0, \psi_k(t))$ prislúchajúce rozličným k spĺňajú tú istú homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi}^0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^0}{\partial x}\right)^T & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^0 \end{pmatrix} \qquad (2.2.10)$$

ibaže pre každé k je to na inom intevale $[0, T_k]$ a s inou počiatočnou podmienkou

$$\begin{pmatrix} \psi_k(0) \\ \psi_k^0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k \\ \psi_k^0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.11}$$

Označme $\Phi(t, t_0)$ fundamentálny systém riešení systému (2.2.10). Potom

$$\begin{pmatrix} \psi_k(t) \\ \psi_k^0 \end{pmatrix} = \Phi(t, 0) \begin{pmatrix} A_k \\ \psi_k^0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T_k] \tag{2.2.12}$$

Definujme funkciu

$$\begin{pmatrix} \psi(t) \\ \psi^0 \end{pmatrix} := \Phi(t, 0) \begin{pmatrix} A \\ \psi^0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty). \tag{2.2.13}$$

Zrejme takto definovaná adjungovaná funkcia je netriviálnym riešením (AR) pre každé $t \in [0, \infty)$. Navyše, vzhľadom na lineárnosť Hamiltonovej funkcie v premennej (ψ^0, ψ), zo splnenia podmienok

$$\psi_k^0 f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi_k^T(t) f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} [\psi_k^0 f^0(t, \hat{x}(t), u) + \psi_k^T(t) f(t, \hat{x}(t), u)]$$

pre každé $t \in [0, T_k]$ dostávame, že pre každé $t \in [0, \infty)$ platí podmienka

$$\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi^T(t) f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} (\psi^0 f^0(t, \hat{x}(t), u) + \psi^T(t) f(t, \hat{x}(t), u)).$$

Tým je veta dokázaná. $\square$

Poznámka. Veta 6 vo všeobecnosti nedáva dostatok podmienok na určenie optimálneho riadenia, pretože chýba podmienka transverzality. Tento nedostatok Vety 6 sa však neprejaví v prípade úloh, kde množina C z podmienky (2.1.4) pozostáva z jediného bodu, t.j. úloha je s pevným koncom. Jednu takúto úlohu budeme riešiť v nasledujúcej kapitole (3.1). Pretože tvrdenie Vety 6 sme dostali prevedením úlohy (N) na postupnosť úloh s pevným koncom, pre ktoré je podmienka transverzality prázdna (nedáva žiadnu informáciu o koncovom stave $\psi(\hat{T})$), vo Vete 6 sme nedostali žiadnu podmienku transverzality. Ako ukazuje nasledujúci príklad, táto podmienka vo všeobecnosti ani nemusí vždy platiť.

Príklad 1. (Zadanie tohto príkladu je napr. v [04].)

$$\max J := \int_0^\infty (1 - x) u \, dt \tag{2.2.14}$$

za podmienok

$$\dot{x} = (1-x)u \tag{2.2.15}$$

$$x(0) = 0 \tag{2.2.16}$$

$$0 \leq u \leq 1 \tag{2.2.17}$$

Všimnime si, že $f = f^0$ a preto môžeme (2.2.14) napísať v tvare

$$J = \int_0^\infty \dot{x}\ dt = \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0) = \lim_{t\to\infty} x(t) =: x(\infty).$$

Teda optimálne riadenia budú tie, pre ktoré je hodnota $x(\infty)$ maximálna. Z rovníc (1.2.15) až (2.2.17) vidieť, že pre malé t je x rastúce a rastie pokiaľ $(1-x) > 0$. Položme $u(t) \equiv 1$. Je zrejmé, že toto riadenie zabezpečuje maximálny možný rast pre x, ale len za predpokladu, že x zostáva menšie ako 1. To znamená, že ak odozva pre toto riadenie spĺňa $x(t) < 1$, tak $u(t) \equiv 1$ je optimálne. Preverme splnenie podmienky $x(t) < 1$. Z (2.2.15) dostaneme, že $\dot{x} = (1-x)$ a teda z (2.2.16) vyplýva, že odozvou je $x(t) = 1 - e^{-t} < 1$, pre každé $t \in [0, \infty)$, pričom

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

Teda optimálne riadenie a optimálna hodnota účelovej funkcie je 1. Z toho máme, že každé riadenie, pre ktoré $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$, je optimálne. Všimnime si, že aj pre riadenie $u(t) \equiv \frac{1}{2}$ platí, že jeho odozva v limite sa blíži k 1 a teda aj toto riadenie je optimálne. Skutočne

$$\dot{x} = \frac{1}{2}(1-x)$$

a teda $x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$ a znova dostaneme, že $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$.

Pozrime sa, ako to je s PPM. Hamiltonova funkcia má tvar

$$H(x, u, \psi^0, \psi) = \psi^0(1-x)u + \psi(1-x)u = (1-x)u(\psi^0 + \psi). \tag{2.2.18}$$

H je lineárnou funkciou premennej u a existuje viac než jedno optimálne riadenie $\hat{u}(t)$, pri ktorom Hamiltonova funkcia nadobúda svoje maximum. Maximalizovaním (2.2.18) dostaneme

$$u = \begin{cases} 1 & (1-x)(\psi^0 + \psi) \geq 0 \\ 0 & (1-x)(\psi^0 + \psi) \leq 0 \\ (0,1) & (1-x)(\psi^0 + \psi) = 0 \end{cases} \tag{2.2.19}$$

Zoberme si prípad, $u = \frac{1}{2}$ .Podľa (2.2.19) musí byť $(1-x)(\psi^0+\psi) = 0$. Z toho máme, že buď $(1-x) = 0$ alebo $(\psi^0 + \psi) = 0$. Vieme , že $x(t) < 1$, z čoho vyplýva, že musí platiť druhá možnosť

$$\psi^0 + \psi = 0. \tag{2.2.20}$$

Podľa podmienky (i) z Vety 6 vieme, že jediným riešením rovnice (2.2.20) je

$$\psi^0 = 1 \quad \psi = -1$$

a teda pre optimálne riadenie $u(t) \equiv \frac{1}{2}$ nie je splnená podmienka transverzality. Tým sme ukázali, že podmienka transverzality $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$ nemusí vždy platiť.

Poznamenajme, že v práci [06] je uvedená veta, ktorá hovorí o tom, že existujú triedy úloh, pre ktoré platí aj podmienka transverzality v tvare $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Predpoklady vety sú však v takom tvare, že sa prakticky nedajú overiť a preto sa nimi nebudeme zaoberať. V ďalšej časti uvedieme jeden typ úloh, pre ktoré možno odvodiť aspoň určitú limitnú podmienku pre Hamiltonovu funkciu.

2.3 Úlohy s diskontným faktorom

Ako sme uviedli v predchádzajúcej časti, Veta 6 nedáva dostatok podmienok na určenie optimálneho riadenia pre úlohy s voľným alebo čiastočne koncovým stavom. V tejto časti sa budeme zaoberať špeciálnym typom úloh s voľným koncom. Pôjde o úlohy autonómne, až na diskontný faktor v účelovej funkcii (podobné úlohy, ale na konečnom časovom horizonte sme analyzovali v časti 1.4). Takéto úlohy sa veľmi často vyskytujú v mikro a makro ekonómii. Štandardný tvar takejto úlohy s diskontným faktorom (DN) bude

$$\max J := \int_0^\infty e^{-rt} f^0(x(t), u(t))\, dt \tag{2.3.1}$$

pri podmienkach

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall\, t \in [0, \infty) \tag{2.3.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.3.3}$$

$$u(t) \in U, \quad \forall\, t \in [0, \infty). \tag{2.3.4}$$

Pre túto úlohu platia nasledovné nutné podmienky optimality.

Veta 7. *Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ jeho odozva pre úlohu (DN). Potom existujú konštanta $\psi^0 \in \mathbb{R}$ a spojitá funkcia $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ také, že platí:*

(i) $(\psi^0, \psi(t)) \neq 0, \quad \psi^0 \geq 0,$

(ii) $\psi(t)$ *rieši rovnicu*

$$\dot{\psi}(t) = -\psi^0 e^{-rt} \left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T \psi(t),$$

(iii) pre každé $t \in [0, \infty)$, v ktorom je $\hat{u}(t)$ spojitá, platí

$$\psi^0 e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi^T(t) f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$$

$$= \max_{u \in U} (\psi^0 f^0(\hat{x}(t), u) + \psi^T(t) f(\hat{x}(t), u) = q(t),$$

kde

$$q(t) = -r\psi^0 \int_t^\infty e^{-rs} f^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s)) \, ds$$

Dôsledok.

$$\lim_{t \to \infty} H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi^0, \psi) = 0.$$

Poznámka: Znenie tejto vety je uvedené v [02] chybne. V dolnej hranici pre integrál definujúci funkciu $q(t)$ je v tejto knihe namiesto t uvedená 0. V knihe je však veta uvedená bez dôkazu a dôkaz sa nedal zrekonštruovať podobným postupom ako vo Vete 6. V knihe je uvedený odkaz na článok [06], v ktorom je uvedený dôkaz tejto vety pomocou postupnosti úloh Bolzového typu. Tento dôkaz je však zbytočne komplikovaný, navyše niektoré formulácie v ňom sú veľmi nepresné a mätúce. Nižšie uvedený dôkaz je novým variantom dôkazu tejto vety.

Dôkaz Vety 7. Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ je jeho odozva pre úlohu (DN), kde $t \in [0, \infty)$. Zvoľme si postupnosť $\{T_k\}$, kde $T_k > 0$ a $T_k \to \infty$. Pre každé T_k si zadefinujme nasledovnú neautonómnu Bolzovu úlohu s voľným časom a a s pevným koncom určeným bodom $\hat{x}(T_k)$ pre zvolené T_k. Úlohu označíme (BK_{T_k})

$$\max J := \left[\int_0^T e^{-rt} f^0(x(t), u(t)) \, dt + \varphi(T - T_k) \right],$$

kde

$$\varphi(\tau) = e^{-r\tau} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt \tag{2.3.5}$$

pri podmienkach

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall\, t \in [0, T], \quad T - \text{voľné} \tag{2.3.6}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.3.7}$$

$$x(T) = \hat{x}(T_k) \tag{2.3.8}$$

$$u(t) \in U, \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{2.3.9}$$

Postupujme podobne ako pri dôkaze Vety 6. Najprv sporom ukážeme, že $\hat{u}(t)$ a $\hat{x}(t)$ pre $t \in [0, \hat{T}]$, kde $\hat{T} = T_k$, je optimálne riešenie aj pre úlohu (BK_{T_k}). Teda predpokladajme, že by $\hat{u}(t)$ a $\hat{x}(t)$ neboli optimálne pre úlohu (BK_{T_k}). Potom by muselo existovať iné prípustné riadenie $\tilde{u}(t)$ a odozva $\tilde{x}(t)$ pre $t \in [0, \tilde{T}]$, kde $\tilde{T} > 0$, ktoré by dávalo väčšiu hodnotu účelovej funkcie ako $\hat{u}(t), \hat{x}(t)$ pre $t \in [0, T_k]$. To znamená, že

$$J(\tilde{u}) = \int_0^{\tilde{T}} e^{-rt} f^0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\, dt + e^{-r(\tilde{T} - T_k)} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt >$$

$$> \int_0^{T_k} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt + e^{-r(T_k - T_k)} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt. \tag{2.3.10}$$

Pravá strana nerovnosti je vlastne

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt$$

Úpravou ľavej strany nerovnosti (2.3.10) použitím substitúcie $s = t + \tilde{T} - T_k$ dostaneme

$$\int_0^{\tilde{T}} e^{-rt} f^0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\, dt + \int_{\tilde{T}}^{\infty} e^{-rs} f^0(\hat{x}(s - \tilde{T} + T_k), \hat{u}(s - \tilde{T} + T_k))\, ds \tag{2.3.11}$$

Dosadením (2.3.11) do (2.3.10) máme

$$\int_0^{\tilde{T}} e^{-rt} f^0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\, dt + \int_{\tilde{T}}^{\infty} e^{-rs} f^0(\hat{x}(s - \tilde{T} + T_k), \hat{u}(s - \tilde{T} + T_k))\, ds >$$

$$> \int_0^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt = J(\hat{u}) \tag{2.3.12}$$

Zostrojme riadenie $\tilde{u}(t)$

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & t \in [0, \tilde{T}] \\ \hat{u}(t - \tilde{T} + T_k), & t \in [\tilde{T}, \infty) \end{cases}.$$

Odozvou pre takéto riadenie bude

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & t \in [0, \tilde{T}] \\ \hat{x}(t - \tilde{T} + T_k), & t \in [\tilde{T}, \infty) \end{cases}.$$

Je to prípustné riadenie a dáva nám väčšiu hodnotu účelovej funkcie J ako optimálne riadenie $\hat{u}(t)$ pre úlohu (DN), čím dostávame spor. Z toho vyplýva, že $\hat{u}(t)$, $\hat{x}(t)$ a T_k musia byť optimálne aj pre (BK_{T_k}).

Môžeme teda na túto úlohu aplikovať Pontrjaginov princíp maxima. Úloha (BK_{T_k}) je Bolzovou úlohou optimálneho riadenia. Takýmito úlohami sme sa zaoberali v časti 1.5. Tam však Bolzova úloha bola autonómna, čo nie je prípad úlohy (BK_{T_k}), kde vystupuje neautonómnosť vo funkcii koncového stavu, t.j. vo funkcii φ. Aby sme mohli na túto aplikovať tvrdenie Vety 5, prevedieme ju na autonómnu Bolzovu úlohu vyššej dimenzie. Označme t ako novú stavovú premennú

$$t =: x^{n+1}.$$

Dostaneme úlohu v tvare

$$\max \int_0^T e^{-rx^{n+1}} f^0(x(t), u(t))\, dt + \varphi(x^{n+1}(T) - T_k) \tag{2.3.13}$$

za podmienok

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad \forall\, t \in [0, T], \quad T - \text{ voľné}$$

$$\dot{x}^{n+1}(t) = 1 \tag{2.3.14}$$

$$x(0) = x_0$$

$$x^{n+1}(0) = 0 \tag{2.3.15}$$

$$x(T) = \hat{x}(T_k)$$

$$x^{n+1}(T) - \text{ voľné} \tag{2.3.16}$$

Pre túto úlohu platí Pontrjaginov princíp maxima (Veta 5), ktorý hovorí, že existujú také konštanty ψ_k^0 a χ_k a také spojité funkcie $\psi_k(t)$ a $\psi_k^{n+1}(t)$, že platí:

(i)

$$(\psi_k^0, \psi_k) \neq 0, \quad \psi_k^0 \geq 0, \tag{2.3.17}$$

(ii) $\psi_k(t)$, $\psi_k^{n+1}(t)$ riešia diferenciálnu rovnicu

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi}^{n+1} \end{pmatrix} = -\psi^0 \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial e^{-rx^{n+1}} f^0}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial e^{-rx^{n+1}} f^0}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T & \left(\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}} & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^{n+1} \end{pmatrix} \tag{2.3.18}$$

s podmienkami

$$\begin{pmatrix} \psi_k(T_k) \\ \psi_k^{n+1}(T_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x - \hat{x}(T_k))}{\partial x} \\ \frac{\partial(x - \hat{x}(T_k))}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \chi_k + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^T \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \psi_k^0 \tag{2.3.19}$$

(iii)

$$\psi_k^0 e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi_k^T(t) f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \psi_k^{n+1}(t) =$$

$$= \max_{u \in U} \left[\psi_k^0 e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), u) + \psi_k^T(t) f(\hat{x}(t), u) + \psi_k^{n+1}(t)\right] \equiv 0. \tag{2.3.20}$$

Adjungovanú rovnicu (2.3.18) možno upraviť nasledovne

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi}^{n+1} \end{pmatrix} = -\psi^0 \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial e^{-rx^{n+1}} f^0}{\partial x}\right)^T \\ -re^{-rx^{n+1}} f^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^{n+1} \end{pmatrix}$$

a keď to rozpíšeme po zložkách, dostaneme dve diferenciálne rovnice

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -e^{-rt} \frac{\partial f^0}{\partial x} \psi^0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \psi \\ \dot{\psi}^{n+1} &= re^{-rt} f^0 \psi^0. \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Podmienky (2.3.19) upravíme do tvaru

$$\begin{pmatrix} \psi_k(T_k) \\ \psi_k^{n+1}(T_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \chi_k + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix} \psi_k^0$$

a rozpíšeme po zložkách, čím dostaneme dve rovnice

$$\psi_k(T_k) = \chi_k \tag{2.3.22}$$

$$\psi_k^{n+1}(T_k) = \psi_k^0 \frac{\partial \varphi(T - T_k)}{\partial T}\Big|_{T=T_k}. \tag{2.3.23}$$

Poďme sa ďalej pozrieť na rovnicu (2.3.23). Použitím vzťahu (2.3.5), ktorý definuje funkciu φ môžeme napísať, že

$$\psi_k^{n+1}(T_k) = \psi_k^0 \left(\frac{\partial e^{-r(T-T_k)}}{\partial T} \right)_{T=T_k} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt =$$

$$= -\psi_k^0 r e^{-r(T_k - T_k)} \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt = -\psi_k^0 r \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt. \tag{2.3.24}$$

V podmienke maxima (2.3.20) môžeme rovnosť k nule odôvodniť tým, že sa jedná o autonómnu úlohu s voľným časom, pri ktorej podmienka stacionarity hovorí, že Hamiltonova funkcia v optimálnom bode sa rovná nule pre každé $t \in [0, T_k]$.
Ďalej použijeme vzťahy (2.3.21) a (2.3.24). Integrovaím rovnice (2.3.21) dostaneme

$$\psi_k^{n+1}(T_k) - \psi_k^{n+1}(t) = \psi_k^0 \int_t^{T_k} r e^{-rs} f^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s))\, ds \tag{2.3.25}$$

a dosadíme to do rovnice (2.3.24), čo nám dá

$$\psi_k^{n+1}(t) = -r\psi_k^0 \int_{T_k}^{\infty} e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt - \psi_k^0 \int_t^{T_k} r e^{-rs} f^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s))\, ds =$$

$$= -r\psi_k^0 \int_t^{\infty} e^{-rs} f^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s))\, ds. \tag{2.3.26}$$

Existenciu konštanty ψ^0 a funkcie $\psi(t)$ zo znenia vety teraz dostaneme limitným prechodom analogicky ako v predchádzajúcej vete. Zo vzťahu (2.3.26) dostaneme v limite

$$\psi^{n+1}(t) = -r\psi^0 \int_t^{\infty} e^{-rs} f^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s))\, ds$$

a keď položíme

$$q(t) = \psi^{n+1}(t)$$

dostaneme zostávajúce tvrdenie vety. $\square$

Poznámka. Veta 7 sa vzťahuje k úlohám s diskontným faktorom. V kapitole 1.4 sme uviedli substitúciu, pomocou ktorej sme získali autonómnu úlohu optimálneho riadenia. Tú istú transformáciu môžeme použiť aj v prípade úloh na nekonečnom časovom horizonte a Veta 7 by potom znela nasledovne.

Veta 8. *Nech $\hat{u}(t)$ je optimálne riadenie a $\hat{x}(t)$ jeho odozva pre úlohu (DN). Potom existujú konštanta $m^0 \in \mathbb{R}$ a spojitá funkcia $m(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ také, že platí*

(i) $(m^0, m(t)) \neq 0, \quad m^0 \geq 0,$

(ii) *$m(t)$ rieši rovnicu*

$$\dot{m}(t) = rm - m^0 \left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T m(t),$$

(iii) *pre každé $t \in [0, \infty)$, v ktorom je $\hat{u}(t)$ spojitá, platí*

$$m^0 f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + m^T(t) f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$$

$$= \max_{u \in U} (m^0 f^0(\hat{x}(t), u) + m^T(t) f(\hat{x}(t), u)) = q(t),$$

kde

$$q(t) = -rm^0 \int_t^\infty e^{(t-s)r} f^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s))\, ds.$$

3. Riešenie úloh

3.1 Úloha s pevným koncom

Príklad 1. Úloha o optimálnej spotrebe. Našou úlohou je maximalizovať spotrebu

$$\max \int_0^\infty e^{-\delta t} \ln C(t)\; dt \tag{3.1.1}$$

keď máme danú zmenu kapitálu

$$\dot{K} = iK - C \tag{3.1.2}$$

počiatočný stav kapitálu

$$K(0) = K_0 > 0 \tag{3.1.3}$$

a ďalej vieme, že kapitál musíme na konci spotrebovať

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = 0. \tag{3.1.4}$$

Je to autonómna úloha s diskontným faktorom a platí pre ňu Veta 6. Napíšme si podmienky Pontrjaginovho princípu maxima pre túto diskontovanú úlohu.
Adjungovaná rovnica má tvar

$$\dot{\psi}(t) = -i\psi(t). \tag{3.1.5}$$

Vyriešením tejto diferenciálnej rovnice dostaneme, že

$$\psi(t) = Ae^{-it}, \quad \text{kde } A \text{ je konštanta.} \tag{3.1.6}$$

Hamiltonova funkcia

$$H(K, C, m^0, m) = \psi^0 e^{-\delta t} \ln C + \psi(iK - C) \tag{3.1.7}$$

by mala spĺňať podmienku maxima, z ktorej vyplýva, že

$$\psi^0 e^{-\delta t} \frac{1}{\hat{C}} - \psi(t) = 0.$$

Z toho vidíme, že $\psi^0 = 1$ a

$$\hat{C}(t) = \frac{1}{A} e^{(i-\delta)t}, \tag{3.1.8}$$

pričom $A \neq 0$. Dosadíme vzťah (3.1.8) do rovnice (3.1.2)

$$\dot{K} = iK - \frac{1}{A}e^{(i-\delta)t}. \tag{3.1.9}$$

Túto diferenciálnu rovnicu riešime pomocou variácie konštánt

$$K(t) = e^{it}K_0 - \frac{1}{A}\int_0^t e^{i(t-s)}e^{(i-\delta)s}ds = e^{it}K_0 - \frac{1}{A}e^{it}\int_0^t e^{-\delta s}ds.$$

Vypočítaním integrálu dostaneme konečný výsledok pre $K(t)$

$$\hat{K}(t) = e^{it}(K_0 - \frac{1}{A\delta}(1 - e^{-\delta t})). \tag{3.1.10}$$

Ďalej má platiť koncová podmienka pre stavovú premennú

$$\lim_{t\to\infty} \hat{K}(t) = 0.$$

Aby naozaj platila, musí $K_0 - \frac{1}{A\delta}(1 - e^{-\delta t})$ konvergovať k nule rýchlejšie, než rastie e^{it}. Najprv nájdime A, pre ktoré uvedený výraz konverguje k nule. Nech A_t spĺňa

$$K_0 - \frac{1}{A_t\delta}(1 - e^{-\delta t}) = 0, \tag{3.1.11}$$

z čoho dostávame, že

$$A_t = \frac{1}{K_0\delta}(1 - e^{-\delta t}). \tag{3.1.12}$$

a teda

$$A = \lim_{t\to\infty} A_t = \frac{1}{K_0\delta} \tag{3.1.13}$$

Keď to dosadíme do (3.1.10) dostaneme, že

$$\hat{K}(t) = K_0e^{(i-\delta)t}. \tag{3.1.14}$$

A aby platila koncová podmienka pre stavovú premennú, musí byť $i < \delta$. Na záver ešte určme optimálnu spotrebu, ktorú získame dosadením (3.1.13) do (3.1.8)

$$\hat{C}(t) = K_0\delta e^{(i-\delta)t}. \tag{3.1.15}$$

Ukázali sme si, že keď poznáme nielen počiatočnú ale aj koncovú podmienku na stavovú premennú, máme z Vety 6 dostatok informácií na určenie jediného kandidáta na optimálne riešenie.

3.2 Úloha s voľným koncom

Príklad 2. (Zadanie príkladu je z [05], kde je uvedené v kapitole 9 ako cvičenie.) Našou úlohou je

$$\max J := \int_0^\infty e^{-rt}(-\frac{u^2}{2} + xu - \frac{x^2}{2})dt \tag{3.2.1}$$

pri podmienkach

$$\dot{x} = u \tag{3.2.2}$$

$$x(0) = x_0 > 0 \tag{3.2.3}$$

$$r > 1. \tag{3.2.4}$$

Je to maximalizačná úloha s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte. Pre stavovú premennú x máme danú len počiatočnú podmienku a riadenie u nemáme ohraničené.

Túto úlohu vieme triviálne vyriešiť. Z (3.2.1) vidieť, že

$$J = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-rt}(u-x)^2 dt \leq 0, \tag{3.2.5}$$

Z toho vidíme, že maximálna možná hodnota pre J je nula. A ak nájdeme také riadenie, ktoré nám dá maximálne J, tak bude optimálne. Jediná možnosť ako dosiahnuť $J = 0$ je položiť $u(t) = x(t)$. Keď to dosadíme do (3.2.2), dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

čoho riešením je

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x_0 e^t \\ \hat{u}(t) &= x_0 e^t. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Ukážme si, že aj pomocou nutných podmienok optimality z Vety 8 dospejeme k rovnakému výsledku.

Napíšme si najprv Hamiltonovu funkciu.

$$\mathcal{H}(x,u,m^0,m) = m^0(-\frac{u^2}{2} + xu - \frac{x^2}{2}) + mu = -m^0\frac{(u-x)^2}{2} + mu \qquad (3.2.8)$$

Podľa vety by mala Hamiltonova funkcia spĺňať podmienku maxima, ktorá hovorí, že

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \qquad (3.2.9)$$

Dosaďme teda (3.2.8) do (3.2.9) a dostaneme

$$-m^0(\hat{u} - \hat{x}) + m = 0. \qquad (3.2.10)$$

Vieme, že vektor (m^0, m) má byť rôzny od nuly, z čoho pre tento príklad vyplýva, že $m^0 = 1$ a

$$m = \hat{u} - \hat{x} \qquad (3.2.11)$$

Pozrime sa na adjungovanú rovnicu, ktorá využitím faktu, že $m^0 = 1$ a dosadením rovnice (3.2.11) nadobúda tvar

$$\dot{m} = rm - (\hat{u} - \hat{x}) = (r-1)m. \qquad (3.2.12)$$

Z (3.2.11) vidno, že $\hat{u} = m + \hat{x}$, čo môžeme dosadiť do (3.2.2) a následne spolu s (3.2.12) dostávame homogénny systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{x} + m \\ \dot{m} &= (r-1)m \end{aligned} \qquad (3.2.13)$$

Všeobecné riešenie pre tento systém je

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= Ae^{w_1 t} + Be^{w_2 t} \\ m(t) &= Ce^{w_1 t} + De^{w_2 t} \end{aligned} \qquad (3.2.14)$$

kde A, B, C, D sú konštanty a w_1, w_2 sú korene charakteristickej rovnice pre systém (3.2.13), ktorá má tvar

$$w^2 - rw + r - 1 = 0. \qquad (3.2.15)$$

Vyriešením tejto kvadratickej rovnice získame hodnoty koreňov w_1 a w_2, pričom

$$w_1 = 1 \qquad w_2 = r - 1 \tag{3.2.16}$$

Nás zaujíma tvar premennej $x(t)$ a riadenie $u(t)$ a teda potrebujeme určiť konštanty A a B. Použitím počiatočnej podmienky (3.2.3) dostaneme, že

$$x_0 = x(0) = A + B$$

a teda

$$B = x_0 - A. \tag{3.2.17}$$

Keď dosadíme (3.2.16), (3.2.17) do (3.2.14) máme

$$\hat{x}(t) = Ae^{(r-1)t} + (x_0 - A)e^t. \tag{3.2.18}$$

Tvar riadenia $\hat{u}(t)$ zistíme z (3.2.2), pretože

$$\hat{u} = \dot{\hat{x}} = A(r-1)e^{(r-1)t} + (x_0 - A)e^t \tag{3.2.19}$$

Aby boli riadenie $\hat{u}(t)$ a odozva $\hat{x}(t)$ prípustné, musí navyše od úloh na konečnom časovom horizonte $\int_0^\infty e^{-rt}(-\frac{\hat{u}^2}{2} + \hat{x}\hat{u} - \frac{\hat{x}^2}{2})dt$ konvergovať. To znamená, že musí existovať konečná limita funkcie $F(K)$ pre K idúce do nekonečna, kde $F(K) = \int_0^K e^{-rt} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt$. Pozrime sa na tento integrál. Môžeme ho upraviť

$$F(K) = -\frac{1}{2}\int_0^K e^{-rt}(\hat{u} - \hat{x})^2 dt = -\frac{1}{2}\int_0^K e^{-rt} A^2 e^{2(r-1)t}(r-2)^2 dt \tag{3.2.20}$$

Vyčíslením integrálu dostaneme

$$F(K) = -\frac{1}{2}A^2(r-2)[e^{(r-2)K} - 1] = \frac{1}{2}A^2(r-2) - \frac{1}{2}A^2(r-2)e^{(r-2)K}. \tag{3.2.21}$$

Nás zaujíma funkcia $F(K)$ v limite pre K idúce do nekonečna

$$\lim_{K\to\infty} F(K) = \frac{1}{2}A^2(r-2) - \frac{1}{2}A^2(r-2)\lim_{K\to\infty} e^{(r-2)K}. \tag{3.2.22}$$

Z rovnice (3.2.22) môžeme vidieť, že ak $1 < r < 2$, $F(K)$ konverguje pre ľubovoľnú konštantu A a ak $r > 2$, musí byť A=0. Ak by bolo $r = 2$, tak z rovnice (3.2.18) dostaneme, že

$$\hat{x}(t) = x_0 e^t \tag{3.2.23}$$

Riadenie by v tomto prípade malo ten istý tvar ako jeho odozva

$$\hat{u}(t) = x_0 e^t \tag{3.2.24}$$

a po dosadení do účelovej funkcii by sme dostali $J = 0$.

A nakoniec sa pozrime na poslednú časť vety, ktorá hovorí, že súčastná hodnota Hamiltonovej funkcie pre optimálne riadenie a jeho odozvu sa má rovnať funkcii $q(t)$, kde

$$q(t) = -m^0 r \int_t^\infty e^{(t-s)r}(-\frac{\hat{u}^2}{2} + \hat{x}\hat{u} - \frac{\hat{x}^2}{2})ds. \tag{3.2.25}$$

Z toho dostávame, že

$$e^{-rt}\mathcal{H}(\hat{x}, \hat{u}, m^0, m) = \frac{r}{2}\int_t^\infty e^{-rs}(\hat{u} - \hat{x})^2 ds. \tag{3.2.26}$$

Dosadením riadenia (3.2.19) a jeho odozvy (3.2.18) do Hamiltonovej funkcie dostaneme na ľavej strane rovnice (3.2.26) výraz

$$e^{-rt}\left[-\frac{1}{2}[(A(r-1)e^{(r-1)t} + (x_0 - A)e^t)^2 - (Ae^{(r-1)t} + (x_0 - A)e^t)^2]\right],$$

ktorý môžeme upraviť do tvaru

$$-A^2\frac{(r-2)r}{2}e^{(r-2)t} - A(x_0 - A)(r-2) \tag{3.2.27}$$

Na pravej strane rovnice (3.2.26) máme

$$\frac{r}{2}\int_t^\infty e^{-rs}[A^2(r-2)^2 e^{2(r-1)s}]ds = \frac{r(r-2)^2}{2}A^2\int_t^\infty e^{(r-2)s}ds$$

a po vyčíslení integrálu dostaneme

$$-\frac{r(r-2)}{2}A^2 e^{(r-2)t}. \tag{3.2.28}$$

Dosaďme (3.2.27) a (3.2.28) do rovnice (3.2.26)

$$A^2\frac{(r-2)r}{2}e^{(r-2)t} + A(x_0 - A)(r-2) = \frac{r(r-2)}{2}A^2 e^{(r-2)t} \tag{3.2.29}$$

Vidíme, že musí platiť

$$A(x_0 - A)(r-2) = 0$$

Kedže možnosť $r = 2$ sme rozobrali vyššie, dostaneme tu dve možnosti, buď $A = 0$ alebo $A = x_0$. Pre $A = 0$ je

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x_0 e^t \\ u(t) &= x_0 e^t \\ J &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Pre $A = x_0$ dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= x_0 e^{(r-1)t} \\ \hat{u}(t) &= x_0 (r-1) e^{(r-1)t} \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Riešenie (3.2.31) však nie je optimálne.

$$J = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-rt} x_0^2 (r-2)^2 e^{2(r-1)t} dt = \frac{1}{2} x_0^2 (r-2) < 0,$$

pretože ak A je ľubovoľné, tak musí byť $r < 2$. Dostali sme $J < 0$ a teda toto riešenie nemôžeme považovať za optimálne, keď existuje iné riadenie $u(t)$,pre ktoré $J = 0$. Teda jediným riešením tejto úlohy je riešenie (3.2.30).

3.3 Ekonomická úloha

Ako sme uviedli, mnohé ekonomické úlohy sa dajú naformulovať a následne riešiť ako úlohy optimálneho riadenia. Na nasledujúcom príklade (ktorý ako neriešená úloha je uvedený v [05]) si ukážeme, ako ekonomickú úlohu možno riešiť pomocou teórie optimálneho riadenia.

Príklad 3. Nech $P(x)$ je zisk, ktorý môže firma dosiahnuť pri hodnote kapitálu x. O funkcii $P(x)$ vieme, že $P'(0) > 0$ a $P'' < 0$. Kapitál je znehodnocovaný mierou $b \geq 0$. Nech $C(u)$ je hodnota investičných nákladov pre inestície veľkosti u. Predpokladáme, že $C' > 0$, $C'' > 0$ a $C'(0) = 0$. Úlohou je maximalizovať súčastnú hodnotu čistého zisku, t.j. po odpočítaní investičných nákladov. Uvažujme veľmi dlhý časový horizont a položme $T = \infty$.

Úlohu budeme riešiť pre $P(x) = ax - \frac{x^2}{2}$ a $C(u) = cu^2$, kde konštanty a, c sú kladné.

Taktiež predpokladáme, že $u \geq 0$.

Túto úlohu možno sformulovať ako úlohu optimálneho riadenia

$$\max_u \int_0^\infty e^{-rt}[P(x) - C(u)]\ dt \tag{3.3.1}$$

pri podmienkach

$$\dot{x} = u - bx \tag{3.3.2}$$

$$x(0) = x_0 > 0 \tag{3.3.3}$$

$$u \geq 0 \tag{3.3.4}$$

kde $P(x) = ax - \frac{x^2}{2}, \quad C(u) = cu^2, \quad a > 0, \quad c > 0.$

Ide o úlohu (DN) a teda platí pre ňu Veta 8. Adjungovaná rovnica má tvar

$$\dot{m} = (r + b)m + m^0(\hat{x} - a). \tag{3.3.5}$$

Hamiltonova funkcia je

$$\mathcal{H}(x, u, m^0, m) = m^0(ax - \frac{x^2}{2} - cu^2) + m(u - bx) \tag{3.3.6}$$

Podľa podmienky (ii) Vety 8 chceme nájsť

$$\max_{u\geq 0}[-m^0cu^2 + mu] \tag{3.3.7}$$

Musíme uvažovať dve možnosti pre m^0.

(a) Ak $m^0 = 0$, tak pre $m < 0$ je jediným riešením

$$\tilde{u} \equiv 0 \tag{3.3.8}$$

a pre $m > 0$ (3.3.7) nemá riešenie. Pre $\tilde{u} \equiv 0$ dostaneme, že $\dot{\tilde{x}} = -b\tilde{x}$ a z toho máme

$$\tilde{x}(t) = x_0e^{-bt} \tag{3.3.9}$$

Z adjungovanej rovnice (3.3.5) dostaneme, že

$$m(t) = k_1e^{(r+b)t}, \tag{3.3.10}$$

kde k_1 je záporná konštanta (aby platilo $m < 0$). Aby sme mohli o riadení $\tilde{u}$ povedať, že je prípustné, tak musí integrál $\int_0^\infty e^{-rt}[a\tilde{x} - \frac{\tilde{x}^2}{2} - c\tilde{u}]\, dt$ konvergovať. Po dosadení (3.3.8) a (3.3.9) do integrálu dostaneme

$$ax_0 \int_0^\infty e^{-(r+b)t} dt - \frac{x_0^2}{2} \int_0^\infty e^{-(r+2b)t} dt \tag{3.3.11}$$

a keďže $r > 0$ a $b \geq 0$, tak oba integrály v (3.3.11) konvergujú. Podmienka (iii) Vety 8 hovorí, že má platiť nasledujúca rovnosť

$$e^{-rt}[m^0(a\tilde{x} - \frac{\tilde{x}^2}{2} - c\tilde{u}^2) + m(\tilde{u} - b\tilde{x})] = -rm^0 \int_t^\infty e^{-rs} \left[a\tilde{x}(s) - \frac{\tilde{x}^2(s)}{2} - c\tilde{u}^2(s) \right] ds. \tag{3.3.12}$$

Po dosadení a úprave dostaneme

$$-bk_1x_0 = 0. \tag{3.3.13}$$

Ale keďže $k_1 < 0$ a $x_0 > 0$, tak rovnica (3.3.13) je splnená len pre $b = 0$. V takom prípade dostaneme kandidáta na optimálne riešenie v tvare

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &\equiv 0 \\ \tilde{x}(t) &\equiv x_0. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Z ekonomického hľadiska to znamená, že by sme nič neinvestovali a kapitál by bol stále na konštantnej počiatočnej úrovni x_0. Celkový zisk by potom bol

$$\tilde{J} = \frac{ax_0}{r} - \frac{x_0^2}{2r}. \tag{3.3.15}$$

Môžeme teda povedať, že pre $m^0 = 1$ sme našli jediné riešnie tejto úlohy dané vzťahmi (3.3.14) a (3.3.15), pričom konštanta $b = 0$. Pre $b > 0$ nemá táto úloha riešenie.

(b) Teraz rozoberme prípad $m^0 = 1$. Z (3.3.7) dostaneme $-cu^2 + mu$, čo je konkávna funkcia premennej u a teda $\hat{u}$ je riešením podmienky maxima vtedy a len vtedy, keď

$$m(t) = 2c\hat{u}(t). \tag{3.3.16}$$

Adjungovaná rovnica má tvar

$$\dot{m} = (r + b)m + \hat{x} - a. \tag{3.3.17}$$

Keď dosadíme (3.3.16) do (3.3.2), dostaneme spolu s rovnicou (3.3.17) nehomogénny sytém diferenciálnych rovníc

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & \frac{1}{2c} \\ 1 & r+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \tag{3.3.18}$$

Všeobecné riešenie tohto sytému rozpísané po zložkách je

$$\hat{x}(t) = Ae^{w_1 t} + Be^{w_2 t} + x_s \tag{3.3.19}$$

$$m(t) = De^{w_1 t} + Ee^{w_2 t} + m_s \tag{3.3.20}$$

pričom w_1 a w_2 sú korene charakteristickej rovnice pre systém (3.3.18)

$$w^2 - rw - b(r+b) - \frac{1}{2c} = 0 \tag{3.3.21}$$

z ktorej dostaneme

$$w_1 = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + b(r+b) + \frac{1}{2c}} \tag{3.3.22}$$

$$w_2 = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + b(r+b) + \frac{1}{2c}} \tag{3.3.23}$$

x_s a m_s sú stacionárne riešenia systému, ktoré dostaneme položením $\dot{x} = 0$ a $\dot{m} = 0$ v systéme (3.3.18)

$$x_s = \frac{a}{1 + 2bc(r+b)} \tag{3.3.24}$$

$$m_s = \frac{2abc}{1 + 2bc(r+b)} \tag{3.3.25}$$

Z rovnice (3.3.16) určíme riadenie

$$\hat{u}(t) = \frac{m(t)}{2c} = Ke^{w_1 t} + Le^{w_2 t} + y \tag{3.3.26}$$

kde sme si označili $K = \frac{D}{2c}$, $L = \frac{E}{2c}$ a $y = \frac{m_s}{2c} = bx_s$. Aby sme mohli považovať riadenie $\hat{u}(t)$ a jeho odozvu $\hat{x}(t)$ za prípustné, musia okrem počiatočnej podmienky (3.3.3) spĺňať podmienku, že integrál $\int_0^\infty e^{-rt}[a\hat{x} - \frac{\hat{x}^2}{2} - c\hat{u}]dt$ konverguje. To znamená, že musí existovať konečná limita $\int_0^N e^{-rt}[a\hat{x} - \frac{\hat{x}^2}{2} - c\hat{u}^2]dt$ pre N idúce do nekonečna. Počítajme

$$\int_0^N e^{-rt}[a\hat{x} - \frac{\hat{x}^2}{2} - c\hat{u}^2]\, dt =$$

$$= \int_0^N e^{(w_1-r)t}[aA - \frac{1}{2}A^2e^{w_1t} - Ax_s - cK^2e^{w_1t} - 2Kyc] +$$

$$+ e(w_2-r)t[aB - \frac{1}{2}B^2e^{w_2t} - Bx_s - cL^2e^{w_2t} - 2cLy] +$$

$$+ e^{(w_1+w_2-r)t}[-AB - 2KLc] + e^{-rt}[ax_s - \frac{1}{2}x_s^2 - cy^2]dt \tag{3.3.27}$$

Pozrime sa teraz bližšie na konštanty w_1 a w_2. Z nerovnosti $\frac{r}{2} < \sqrt{\frac{r^2}{4} + b(r+b) + \frac{1}{2c}}$ vyplýva, že $w_1 > 0 > w_2$. A následne z toho platí aj

$$\begin{aligned} w_1 - r &= -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + b(r+b) + \frac{1}{2c}} > 0 \\ w_2 - r &= -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + b(r+b) + \frac{1}{2c}} < 0 \\ w_1 + w_2 - r &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Z toho vidíme, že pre konvergenciu (3.3.27) robí jediný problém výraz

$$e^{(w_1-r)t}[aA - \frac{1}{2}a^2e^{w_1t} - Ax_s - cK^2e^{w_1t} - 2Kyc], \tag{3.3.29}$$

pretože $w_1 - r > 0$. Môžme ho upraviť na tvar

$$e^{(w_1-r)t}[aA - Ax_s - 2Kcy] - e^{(2w_1-r)t}[\frac{1}{2}A^2 + cK^2]. \tag{3.3.30}$$

Aby sme dosiahli prípustnosť riadenia $\hat{u}(t)$ a jeho odozvy $\hat{x}(t)$, musí platiť

$$\begin{aligned} aA - Ax_s - 2Kcy &= 0 \\ \frac{1}{2}A^2 + cK^2 &= 0 \end{aligned}$$

čo je možné len pre $K = A = 0$. Keď dosadíme získanú informáciu do (3.3.26) a (3.3.19), dostaneme

$$\hat{u}(t) = Le^{w_2t} + y \tag{3.3.31}$$

$$\hat{x}(t) = Be^{w_2t} + x_s \tag{3.3.32}$$

Dosadením počiatočnej podmienky (3.3.3) do odozvy (3.3.32) dostaneme tvar konštanty B

$$B = x_0 - x_s. \tag{3.3.33}$$

Z podmienky (3.3.2) a odozvy (3.3.32) určime konštantu L.

$$\dot{x} = u - bx = Le^{w_2 t} + y - bBe^{w_2 t} - bx_s = e^{w_2 t}[L - bB] \tag{3.3.34}$$

pretože $y = bx_s$. Z (3.3.32) dostaneme

$$\dot{x} = w_2 Be^{w_2 t} \tag{3.3.35}$$

Spojením (3.3.33),(3.3.34) a (3.3.35) máme, že

$$L = (x_0 - x_s)(w_2 + b). \tag{3.3.36}$$

Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= (x_0 - x_s)(w_2 + b)e^{w_2 t} + bx_s \\ \hat{x}(t) &= (x_0 - x_s)e^{w_2 t} + x_s \end{aligned} \tag{3.3.37}$$

kde x_s je dané vzťahom (3.3.24) a $w_2 < 0$ je dané vzťahom (3.3.23). A teraz sa pozrieme na poslednú podmienku Vety 8, ktorá hovorí , že

$$e^{-rt}\mathcal{H}(\hat{x}, \hat{u}, m^0, m) = rm^0 \int_t^\infty e^{-rs}[a\hat{x}(s) - \frac{\hat{x}^2(s)}{2} - c\hat{u}^2(s)]ds \tag{3.3.38}$$

Na ľavej strane po dosadení riadenia $\hat{u}(t)$, odozvy $\hat{x}(t)$ a adjungovanej premennej $m(t)$ z (3.3.6) do Hamiltonovej funkcie (3.3.5) dostaneme

$$\begin{gathered} e^{(w_2 - r)t}[aB - x_s B + 2cyB(w_2 + b) - 2bBcy - 2cB(w_2 + b)y] + \\ +e^{(2w_2 - r)t}[-\frac{1}{2}B^2 + cL^2 - 2bBc(b + w_2)] + e^{-rt}[-\frac{1}{2}x_s^2 + ax_s - cy^2] \end{gathered} \tag{3.3.39}$$

Na pravej strane rovnice (3.3.38) po integrovaní bude

$$\begin{gathered} \frac{r}{r - 2w_2} e^{(2w_2 - r)t}[-\frac{1}{2}B^2 - cL^2] + \\ +\frac{r}{r - w_2} e^{(w_2 - r)t}[aB - x_s B - 2cyB(w_2 + b)] + e^{-rt}[ax_s - \frac{1}{2}x_s^2 - cy^2]. \end{gathered} \tag{3.3.40}$$

Keďže rovnice (3.3.39) a (3.3.40) sa majú rovnať, tak vidíme, že členy v zátvorke za e^{-rt} nám vypadnú. Jednoduchou úpravou dostaneme

$$e^{(w_2 - r)t} Bw_2[w_2(x_s - a) + 2cyw_2(r + b)] +$$

$$+e^{(2w_2-r)t}2cB^2w_2[\frac{1}{2c}+b(r+b)+w_2r-w_2^2]=0 \qquad (3.3.41)$$

Výraz v prvej hranatej zátvorke je rovný nule a taktiež výraz v druhej hranatej zátvorke je rovný nule. Tým sme ukázali, že prípustné riadenie $\hat{u}(t)$ a jeho odozva $\hat{x}(t)$ dané vzťahmi (3.3.37) spĺňajú Vetu 8, t.j. spĺňajú nutné podmienky optimality. Dosaďme získané optimálne hodnoty riadenia a odozvy do účelovej funkcie a počítajme

$$\begin{aligned}\hat{J} = &\left[ax_s - \frac{1}{2}x_s^2 - cb^2x_s^2\right]\int_0^\infty e^{-rt}dt \; + \\ &+ [(a - x_s - 2bcx_s(w_2+b))(x_0-x_s)]\int_0^\infty e^{(w_2-r)t}dt \; + \\ &+ \left[-\frac{1}{2}(x_0-x_s)^2 - c(x_0-x_s)^2(w_2+b)^2\right]\int_0^\infty e^{(2w_2-r)t}dt.\end{aligned} \qquad (3.3.42)$$

Po vyčíslení integrálov dostaneme konečnú hodnotu čistétho zisu v tvare

$$\begin{aligned}\hat{J} = &\frac{ax_s - \frac{1}{2}x_s^2 - cb^2x_s^2}{r} + \\ &+ \frac{(a - x_s - 2bcx_s(w_2+b))(x_0-x_s)}{r-w_2} + \\ &+ \frac{-\frac{1}{2}(x_0-x_s)^2 - c(x_0-x_s)^2(w_2+b)^2}{r-2w_2}.\end{aligned} \qquad (3.3.43)$$

Napriek tomu, že nám chýbala podmienka transverzality, dospeli sme použitím Vety 8 pre $m^0 = 1$ k jednoznačnému riešeniu. Chýbajúcu podmienku nahradil predpoklad, že účelová funkcia musí v optimálnom bode konvergovať. Riešenie tejto úlohy je dané vzťahmi (3.3.37) a hodnotu účelovej funkcie dáva vzťah (3.3.43).

Keďže máme ohraničenie na riadenie, dostali sme riešením tohto príkladu dve riešenia. Pre prípad $m^0 = 0$, ktorý sme rozobrali v časti a tohto príkladu, je riešením

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &\equiv 0 \\ \tilde{x}(t) &= x_0 \\ \tilde{J} &= \frac{ax_0}{r} - \frac{x_0^2}{2r}\end{aligned} \qquad (3.3.44)$$

Pre $m^0 = 1$, čo sme analyzovali v časti b tohto príkladu, je riešením

$$\begin{aligned}\hat{u}(t) &= (x_0-x_s)(w_2+b)e^{w_2t} + bx_s \\ \hat{x}(t) &= (x_0-x_s)e^{w_2t} + x_s.\end{aligned} \qquad (3.3.45)$$

Hodnota účelovej funkcie je daná vťahom (3.3.43). Stacionárny bod x_s je daný vzťahom

$$x_s = \frac{a}{1 + 2bc(r+b)}.$$

V prípade, že $m^0 = 1$, môžeme získané riadenie považovať za prípustné len pre jednu konkrétnu hodnotu konštanty b, a to pre $b = 0$. Pozrime sa, ako sa bude správať riešenie (3.3.45) pre hodnotu $b = 0$. Stacionárny bod x_s bude rovný konštante a. Riadenie a odozva budú v tvare

$$\hat{u}(t) = (x_0 - a)w_2 e^{w_2 t}$$

$$\hat{x}(t) = (x_0 - a)e^{w_2 t} + a.$$

Hodnota účelovej funkcie bude

$$\hat{J} = \frac{a^2}{2r} + \frac{(x_0 - a)^2(-\frac{1}{2} - cw_2^2)}{r - 2w - 2} = \frac{a^2(r - 2w_2) + 2r(x_0 - a)^2(\frac{1}{2} - cw_2^2)}{2r(r - 2w_2)}. \qquad (3.3.46)$$

Porovnajme hodnoty účelových funkcií $\hat{J}$ a $\tilde{J}$. Počítajme

$$\hat{J} - \tilde{J} = \frac{a^2(r - 2w_2) + 2r(x_0 - a)^2(\frac{1}{2} - cw_2^2)}{2r(r - 2w_2)} - \frac{2ax_0 - x_0^2}{2r}. \qquad (3.3.47)$$

Po úprave dostaneme, že

$$\hat{J} - \tilde{J} = \frac{-2w_2(x_0 - a)^2(1 + crw_2)}{2r(r - 2w_2)}.$$

Vieme, že $r > 0$, $r - 2w_2 > 0$, z čoho vyplýva, že menovateľ je kladný. Ak by platila rovnosť $x_0 = a$, hodnoty účelových funkcií by sa rovnali a obe riešenia by boli rovnaké. Pre $x_0 \neq a$ je čitateľ kladný, pretože $w_2 < 0$ a $(1 + crw) > 0$. Takže sme z (3.3.47) dostali, že pre $b = 0$ platí

$$\hat{J} > \tilde{J}$$

a teda riadenie $\tilde{u} \equiv 0$ nemôže byť optimálne, lebo existuje iné, ktoré dá väčšiu hodnotu účelovej funkcie.

Tým sme ukázali, že Veta 8 nám dala jediného kandidáta na optimálne riešenie a tým je (3.3.45).

Poznámka.

Pozrime sa na podmienku transverzality. Ako sme ukázali v kapitole 2.2, táto podmienka nemusí vždy platiť. V tomto príklade má adjungovaná premenná $\psi(t)$ tvar

$$\psi(t) = e^{-rt}m(t) = 2c(x_0 - x_s)(w_2 + b)e^{(w_2-r)t} + e^{-rt}2bcx_s.$$

Vieme, že $r > 0$ a $w_2 - r < 0$. Z toho vyplýva, že

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 2c(x_0 - x_s)(w_2 + b) \lim_{t\to\infty} e^{(w_2-r)t} + 2bcx_s \lim_{t\to\infty} e^{-rt} = 0.$$

A teda vidíme, že podmienka transverzality tu platí.

V literatúre sa často uvádza, že optimálna odozva $\hat{x}(t)$ a adjungovaná premenná $\psi(t)$ konvergujú pre t idúce do nekonečna k stacionárnemu riešniu. Táto podmienka veľakrát nahrádza chýbajúcu podmienku trasverzality. V našom príklade obe premenné konvergujú odozvy k stacionárnemu riešeniu, teda platí

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{x}}(t) = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{\psi}}(t) = 0.$$

Prvú rovnosť môžeme odôvodniť tým, že platí $w_2 < 0$ a po dosadení vzťahu (3.3.45) dostaneme pre odozvu

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{x}}(t) = \lim_{t\to\infty} (x_0 - x_s)w_2e^{w_2t} = 0.$$

Podobne je to aj s adjungovanou premennou ψ. Platí

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\psi}(t) = \lim_{t\to\infty} [2c(x_0 - x_s)(w_2 + b)(w_2 - r)e^{(w_2-r)t} - 2bcx_sre^{-rt}] = 0,$$

kedže $w_2 - r < 0$ a $r > 0$. Ukázali sme si, že v špeciálnych prípadoch môže platiť aj podmienka transverzality a aj konvergencia odozvy a adjungovanej premennej k stacionárnemu riešeniu.

Použitá literatúra

[01] BRUNOVSKÝ, P., *Matematická teória optimálneho riadenia*, Alfa Bratislava, 1980.

[02] FEICHTINGER, G., HARTL, R.F., *Optimale Kontrolle Ökonomischer Prozesse*, W. Gruyter,, Berlin - New York, 1986.

[03] HALICKÁ, M., *Teória optimálneho riadenia 2 , učebný text k prednáškam optimálneho riadenia pre 4.ročník EFM.*

[04] HALKIN, H., *Necessary Conditions for Optimal Problems with Infinite Horizons*, Econometrica **42** (1974), 267 – 272.

[05] KAMIEN, M.I., SCHWARTZ, N.L, *Dynamic Optimization : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Managment*, Elsevier, Amsterdam, 1991.

[06] MICHEL, P., *On the Transverzality Condition in Infinite Horizon Optimal Problems*, Econometrica **50** (1982), 975 – 985.

[07] PONTRJAGIN, L.S., BOLŤANSKIJ, V.G., GAMKRELIDZE, R.V., MIŠČENKO, E.F. , *The Mathematical Theory of Optimal processes*, Wiley-Interscience, New York, 1962.