



FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
BRATISLAVA

DIPLOMOVÁ PRÁCA



**Katedra Ekonomických a Finančných Modelov
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského
Bratislava**

**Stochastické modely úrokovej miery
a ich kalibrácia na trhové dáta**

(Diplomová práca)

Autor:
Školiteľ:

Martin Vojtek
Mgr. Igor Melicherčík, Ph.D.

2001

Čestne prehlasujem, že predkladanú diplomovú prácu som vypracoval samostatne a použil som len literatúru uvedenú v zozname.

Úprimne ďakujem svojmu školiteľovi Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, Ph.D., za cenné rady, pripomienky a podnety, ktoré výraznou mierou prispeli k skvalitneniu obsahu práce.

Obsah

1	Úvod	2
2	Základné definície a vzťahy	5
3	Modely úrokovej miery	8
3.1	Model Heath, Jarrow, Morton	8
3.2	Model Brace, Gatarek, Musiela	12
3.2.1	Diskrétny tenor	15
3.2.2	Spojité tenor	17
4	Deriváty úrokovej miery	22
4.1	Opcie na diskontné dlhopisy	22
4.1.1	Forwardová cena	22
4.1.2	Oceňovanie opcií	25
4.2	Capy	25
4.2.1	Oceňovanie capov pod BGM modelom	27
5	Kalibrácia BGM modelu na trhové dáta	31
6	Monte-Carlo simulácie	36
6.1	Algoritmus	37
7	Kalibrácia na trhové dáta	39
7.1	Dvojfaktorový model	41
7.2	Trojfaktorový model	43
8	Záver	46

Kapitola 1

Úvod

V osemdesiatych a deväťdesiatych rokoch sa množstvo a objem obchodovaných derivátov úrokovej miery prudko zvýšil. Bolo vyvinutých množstvo produktov, aby spĺňali potreby koncových užívateľov. Všeobecnou príčinou vzniku nových derivátov sa stala potreba hedgovania úrokových rizík investorov. Títo sa potrebovali zaistiť proti prílišnému poklesu, alebo nárastu týchto mier, resp. otočenia výnosovej krivky. Hlavnou úlohou pri modelovaní úrokovej miery je nájsť solídny, robustný model na oceňovanie a hedgovanie týchto produktov.

Deriváty úrokovej miery sú omnoho ťažšie oceniteľné ako deriváty akcií. Je to tak z mnohých príčin:

- Správanie úrokových mier je omnoho zložitejšie ako správanie cien akcií
- Pre oceňovanie mnohých produktov je treba vyvinúť modely opisujúce vývoj celej výnosovej krivky, na rozdiel od akcií, kde stačí popísať vývoj len jedného procesu
- Volatility rôznych bodov výnosovej krivky sú rôzne

Ako sme už spomenuli, začalo sa vyvíjať množstvo exotických produktov, ktorých hodnota závisí predovšetkým na nedokonalnej korelácii medzi rôznymi mierami. Keď sa uvedie na trh nová trieda derivátov, neexistuje žiadna smerodajná cena. Prvou úlohou obchodníka, alebo analytika je preto porozumieť, ktoré rysy dynamiky úrokových mier sú druhoradé, ktoré dôležité a ktoré absolútne základné v určovaní ceny nového cenného papiera.

Na oceňovanie najjednoduchších (najstarších) derivátov ako capov, floorov alebo európskych swaptions sa používal prístup analogický pôvodnému

Black-Scholesovmu modelu, keď sa odvodí na základe predpokladov o log-normálnom rozdelení forwardových úrokových mier cena európskej opcie na zero coupon bondy.

Tieto modely však majú svoje limity. Nerobia popis stochastického správania úrokových mier a cien bondov. V ekonomike neexistuje jednoduchá, rovnaká úroková miera a okrem toho, štruktúra úrokových mier je navzájom závislá. Úroková miera je vo všeobecnosti ovplyvňovaná množstvom faktorov a jeden z nich, ktorý je fundamentálny, je maturita. Vzťah medzi výnosom bondov s nulovým kupónom a maturitou budeme nazývať ako časová štruktúra úrokových mier. Jej preskúmanie v analýze od úrokových mier závislých derivátov je nevyhnutné a medzi jej použitia patrí:

- Analýza kontraktov s fixným výnosom s rozličnou maturitou - má najväčší vplyv na to, či portfólium bude výnosné, alebo stratové v prostredí s volatílnou úrokovou mierou
- Predpovedanie budúcich úrokových mier
- Oceňovanie dlhopisov a ďalších kontraktov s fixnými platbami - pri oceňovaní finančných obligácií je rozhodujúce, že sa berie ohľad na výnosy dostupné na alternatívnych investičných možnostiach s podobnou dĺžkou záväzku a výnosová krivka dáva informáciu o tom, aké sú tieto alternatívne výnosy
- Existuje veľký trh v oceňovaní opcií na cenné papiere s fixným výnosom. Oceňovanie takýchto prípadných práv vyžaduje modelovanie vývoja časovej štruktúry úrokových mier
- Možnosti arbitráže medzi dlhopismi rôznych maturít - analýza časovej štruktúry môže byť užitočná pri porovnávaní výnosov týchto dlhopisov
- Formovanie očakávaní o ekonomike - zdá sa, že tvar výnosovej krivky má vplyv na budúcu ekonomickú aktivitu, zahrňujúc investície a spotrebu a môže tiež zahŕňať užitočné predpovede o budúcej inflácii

Existuje niekoľko teórií vysvetľujúcich dynamiku časovej štruktúry úrokových mier, ako napríklad hypotéza oddelených trhov (market segmentation), hypotéza prémie za likviditu atď. V posledných rokoch sa vyvíja nový spôsob jej modelovania a nazýva sa *modelovanie časovej štruktúry pomocou stochastických procesov*. Tento prístup vyžaduje niekoľko predpokladov: výnosová

krivka a ceny bondov sú spojené s určitými stochastickými faktormi, predpokladá sa, že tieto základné faktory sa vyvíjajú počas času podľa osobitných hypotetických stochastických procesov a úrokové miery a ceny bondov, ktoré sú výsledkom, musia spĺňať nearbitrážne podmienky.

V našej práci sa budeme venovať tomuto prístupu. Jej cieľom je poskytnúť ucelený obraz o moderných postupoch modelovania úrokových mier a oceňovania ich derivátov. Okrem popísania súčasných modelov a odvodenia vzťahov pre rôzne deriváty v nej popíšeme aj metódu vhodnú na oceňovanie derivátov, ktoré vo všeobecnosti nemajú explicitnú formulu na ich ocenenie. Tieto deriváty treba oceniť rôznymi numerickými metódami a v druhej časti našej práce sa pokúsime uviesť metódu Monte-Carlo vhodnú na tento cieľ spolu s niekoľkými numerickými výsledkami.

Použitá terminológia vychádza z anglického názvoslovia pre túto oblasť, pretože slovenské buď neexistuje, alebo je málo používané. Preto sa v práci vyskytujú pojmy ako *numeraire* alebo *claim*, pre ktoré bohužiaľ neexistujú slovenské ekvivalenty.

Pre úplné pochopenie práce je dôležité poznať stochastický kalkulus, ako napríklad Itôv integrál a Itôvu lemu, Girsanovovu vetu, vetu o reprezentácii martingálov a pod. Pre čitateľa, ktorý nie je oboznámený s touto časťou matematiky, odporúčame ako vynikajúci úvod do tejto problematiky knihu od Baxtera a Rennieho s názvom *Financial Calculus*, alebo ktorúkoľvek z kníh uvedených v zozname použitej a odporúčanej literatúry.

Samotná práca bude členená nasledovne: V druhej kapitole uvedieme definície základných pojmov a niektoré základné vzťahy. V tretej kapitole sa budeme venovať dvom modelom úrokovej miery, a to konkrétne modelom Heath, Jarrow, Morton (HJM) a Brace, Gatarek, Musiela (BGM) a odvodíme dynamiku úrokových mier pod týmito modelmi. Štvrtá kapitola je venovaná derivátom úrokových mier, konkrétne oceneniu a odvodeniu explicitných vzorcov pre ceny niektorých derivátov, ako opcie a capy. Piata a šiesta kapitola sú venované samotnej implementácii BGM modelu, špeciálne kalibrácii na trhové dáta a Monte-Carlo simuláciám na ocenenie derivátov, pre ktoré neexistujú explicitné vzťahy. Konečne v siedmej kapitole uvedieme niekoľko numerických výsledkov ako ukážku aplikácie teórie uvedenej vyššie na vyvodenie cien derivátov z údajov dostupných na trhu.

Kapitola 2

Základné definície a vzťahy

Najzákladnejší kontrakt založený na úrokovej miere je dohoda o zaplatení určitej sumy teraz za výmenu o sľub o prijatí väčšej sumy neskôr. Vo všeobecnosti, hodnota takejto dohody závisí od kredibility dlžníka a iných faktorov rôznych od časovej hodnoty peňazí. V tejto práci však nie je našim záujmom venovať sa týmto otázkam, naopak, budeme predpokladať, že možnosť nesplatenia záväzku dlžníkom je vylúčená a budeme sa koncentrovať len na bezrizikové požíčovanie. Pristúpme teraz k definícii základných pojmov.

Nech $T^* > 0$ je fixný časový horizont v budúcnosti pre všetky aktivity na trhu. Pod *diskontným (bezakupónovým) dlhopisom s maturitou $T \leq T^*$* budeme rozumieť kontrakt, ktorý platí svojmu majiteľovi jednotku hotovosti v pevne stanovenom dátume T v budúcnosti. *Nominálnou hodnotou* tohto dlhopisu teda bude jedna koruna. Cenu diskontného dlhopisu v čase $t \leq T$ budeme označovať ako $P(t, T)$. Zrejme $P(T, T) = 1$. Cena diskontného dlhopisu je obyčajne nižšia ako je jeho nominálna hodnota. Je to tak z dôvodu toho, že hotovosť majiteľovi nenesie žiadne náklady a tak nemá žiadny dôvod investovať do diskontného dlhopisu viac ako je jeho nominálna hodnota.

Pre každú maturitu T budeme predpokladať, že cena dlhopisu $P(\cdot, T)$ bude sledovať stochastický, striktné pozitívny proces.

Cenný papier, ktorý zabezpečí svojmu majiteľovi dopredu daný cash flow, ak nastane určitý, presne špecifikovaný, stav sveta v budúcnosti, nazveme *claim*.

Krivka $P(t, \cdot)$ hovorí o cene celého spektra dlhopisov s rôznymi maturitami. Nehovorí však nič o tom, čo sa na trhu deje. Viac informatívnu mierou trhu je implikovaná priemerná úroková miera ponúkaná dlhopisom. Ak by úrokové miery boli konštantné na úrovni r , cena T dlhopisu v čase t

by bola $e^{-r(T-t)}$, ak predpokladáme spojité úročenie. Miera výnosu (úroková miera) r môže byť z tohto vyrátaná ako

$$r = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}.$$

Môžeme teda definovať proces $R(t, T)$, ktorý nazveme *výnos do splatnosti dlhopisu*. Formálne

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln P(t, T) \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle.$$

Pod *term structure* alebo *časovou štruktúrou úrokových mier* rozumieme funkciu, ktorá spája výnos $R(t, T)$ s maturitou T . Rozdielnosti vo výnosoch do rôznych maturít odrážajú názory trhu o budúcich úrokových výnosoch. Obyčajne je výnosová krivka rastúca (z dôvodu vyššej neistoty trhu pri vzdialenejších úrokových mierach), avšak ak súčasné úrokové miery sú príliš vysoké a trh očakáva ich pokles, tak výnosová krivka je invertovaná a výnosy dlhších dlhopisov budú nižšie ako kratších.

Predpokladajme *forwardový kontrakt*, t.j. dohodu uzatvorenú v čase t o zaplatení platby v neskoršom čase T_1 a prijatí platby naspäť v ešte neskoršom čase T_2 . Akú cenu máme za tento kontrakt zaplatiť? Tento claim môžeme replikovať v čase t kúpením T_2 dlhopisu a predaním k T_1 dlhopisov. Naše počiatočné náklady sú $P(t, T_2) - kP(t, T_1)$ v čase t , musíme zaplatiť sumu k v čase T_1 a prijmeme platbu v hodnote jedna koruna v čase T_2 . Aby sme dali tomuto kontraktu nulovú začiatočnú hodnotu, musíme k postaviť ako

$$k = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}.$$

Táto hodnota k je forwardová cena nákupu T_2 dlhopisu v čase T_1 . Zodpovedajúci výnos nazveme *forwardovou mierou pokrývajúcou periódu $\langle T_1, T_2 \rangle$* a označíme ako $f(t, T_1, T_2)$. Platí teda

$$\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} = e^{-f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)} \quad \forall t \leq T_1 \leq T_2,$$

alebo ekvivalentne

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

Ak teraz zvolíme T_1 a T_2 blízko pri sebe, napríklad $T_1 = T$ a $T_2 = T + \Delta t$ a necháme $\Delta t \rightarrow 0$, tak dostávame *okamžitú forwardovú mieru*

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T),$$

alebo ekvivalentne

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u) du\right) \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle. \quad (2.1)$$

Na rozdiel od cien dlhopisov, je okamžitá forwardová miera skôr len matematickou idealizáciou, ako naozaj pozorovanou veličinou na trhu. Stále však existuje široko akceptovaný prístup (Heath, Jarrow, Morton) k modelovaniu cien dlhopisov pomocou exogénnej špecifikácie mier $f(t, T)$, $t \leq T \leq T^*$.

Niektoré stochastické modely úrokovej miery sú založené na exogénnej špecifikácii krátkodobej úrokovej miery. Budeme používať označenie r_t pre *okamžitú úrokovú mieru* pre bezrizikové požíčavanie v čase t na infinitezimálny časový interval $\langle t, t + dt \rangle$. V prípade stochastického modelu, sa krátkodobá úroková miera modeluje ako stochastický proces a ak predpokladáme, že takmer všetky výberové cesty tohto procesu sú integrovateľné v Lebesguovom zmysle, môžeme definovať spojitý stochastický proces B :

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right) \quad \forall t \in \langle 0, T^* \rangle.$$

Ekvivalentne, funkcia B_t rieši diferenciálnu rovnicu $dB_t = r_t B_t dt$, so začiatočnou podmienkou $B_0 = 1$. Vo finančnej interpretácii, B_t reprezentuje hodnotu jednej koruny v čase t , spojite reinvestovanej pri úrokovej miere r_t . V ďalšom texte budeme funkciu B_t označovať ako *savings account*.

V prípade, že uvažujeme skôr jednoduché úročenie, ako spojité, môžeme analogicky definovať *diskrétnu forwardovú mieru nad intervalom* $\langle T_1, T_2 \rangle$, $F(t, T_1, T_2)$ ako

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{P(t, T_1)/P(t, T_2) - 1}{T_2 - T_1}.$$

Kapitola 3

Modely úrokovej miery

3.1 Model Heath, Jarrow, Morton

Skoršie modely term structure boli založené na explicitnom modelovaní vývoja okamžitej úrokovej miery. Tento prístup vznikol z potreby oceniť jednoduché deriváty term structure, ako napríklad opcie alebo swapy, ktoré záviseli na jednom "underlying" dlhopise. Prístup Heatha, Jarrova a Mortona k modelovaniu term structure, uverejnený v roku 1992 v článku [2], je naopak založený na explicitnom špecifikovaní dynamiky okamžitých forwardových mier $f(t, T)$. Tento postup je zovšeobecnením týchto jednoduchých modelov, ako je ukázané v [6].

Nech W je d -rozmerný Brownov pohyb daný na filtrovanom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Symbolom \cdot budeme označovať štandardný vektorový súčin. HJM model je potom založený na nasledujúcich predpokladoch.

(HJM.1) Pre ľubovoľnú fixnú maturitu $T \leq T^*$, sa forwardová miera $f(t, T)$ vyvíja nasledovne:

$$f(t, T) = \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) \cdot dW_s \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

alebo v diferenciálnom tvare

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) \cdot dW_t, \quad (3.2)$$

kde drift α a volatilita σ sú stochastické procesy s hodnotami v \mathbb{R} , resp. \mathbb{R}^d , formálne $\alpha : C \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : C \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, kde $C = \{(u, t); 0 \leq u \leq t \leq T^*\}$.

(HJM.2) Pre ľubovoľnú maturitu T , procesy $\alpha(\cdot, T)$ a $\sigma(\cdot, T)$ sú procesy také, že

$$\int_0^T |\alpha(u, T)| du + \int_0^T |\sigma(u, T)|^2 du < \infty \quad \mathbb{P}\text{-skoro všade}$$

Naša definícia forwardových mier $f(t, T)$ nám dovoľuje napísať rovnicu pre okamžitú úrokovú mieru $r_t = f(t, t)$. Potom, savings account spĺňa rovnicu

$$B_t = \exp\left(\int_0^t f(u, u) du\right) \quad \forall t \in \langle 0, T^* \rangle. \quad (3.3)$$

Nasledujúca lema nám hovorí o tom, aká je dynamika cien dlhopisov $P(t, T)$ pod aktuálnou (reálnou) pravdepodobnosťou \mathbb{P} .

Lema 1 *Ceny dlhopisov $P(t, T)$ spĺňajú vzťah*

$$dP(t, T) = P(t, T) (a(t, T)dt + b(t, T) \cdot dW_t), \quad (3.4)$$

kde a a b sú definované ako

$$a(t, T) = f(t, t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}|\sigma^*(t, T)|^2, \quad b(t, T) = -\sigma^*(t, T),$$

a pre ľubovoľné $t \in \langle 0, T \rangle$ je

$$\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, u) du, \quad \sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, u) du. \quad (3.5)$$

Dôkaz: Označme ako $I_t = \ln P(t, T)$. Z (2.1) a (3.1) dostávame

$$I_t = - \int_t^T f(0, u) du - \int_t^T \int_0^t \alpha(v, u) dv du - \int_t^T \int_0^t \sigma(v, u) \cdot dW_v du.$$

Z Fubiniho vety a technických podmienok HJM modelu vyplýva:

$$I_t = - \int_t^T f(0, u) du - \int_0^t \int_t^T \alpha(v, u) dv du - \int_0^t \int_t^T \sigma(v, u) \cdot dW_v du,$$

alebo ekvivalentne

$$I_t = - \int_0^T f(0, u) du - \int_0^t \int_v^T \alpha(v, u) dv du - \int_0^t \int_v^T \sigma(v, u) \cdot dW_v du + \\ + \int_0^t f(0, u) du + \int_0^t \int_v^t \alpha(v, u) dv du + \int_0^t \int_v^t \sigma(v, u) \cdot dW_v du.$$

Okamžitá úroková miera sa dá napísať ako

$$r_u = f(u, u) = f(0, u) + \int_0^u \alpha(v, u) dv + \int_0^u \sigma(v, u) \cdot dW_v \quad (3.6)$$

a s pomocou tohto vzťahu dostávame

$$I_t = I_0 + \int_0^t r_u du - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, v) dv du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, v) dv \cdot dW_u.$$

Berúc do úvahy (3.5) máme:

$$I_t = I_0 + \int_0^t r_u du - \int_0^t \alpha^*(u, T) du - \int_0^t \sigma^*(u, T) \cdot dW_u.$$

Na overenie dokazovaného tvrdenia nám už len stačí použiť na tento vzťah Itôvu vetu. \square

Fixujme teraz jednu konkrétnu maturitu T . Diskontovaný proces $Z(t, T) = B_t^{-1}P(t, T)$ potom zrejme spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dZ(t, T) = Z(t, T) (b(t, T) \cdot dW_t + (a(t, T) - r_t) dt),$$

resp.

$$dZ(t, T) = Z(t, T) \left(b(t, T) \cdot dW_t + \left(\frac{1}{2}b^2(t, T) - \alpha^*(t, T) \right) dt \right) \quad (3.7)$$

Definujeme proces γ_t ako takú zmenu driftu procesu $Z(t, T)$, aby sa stal martingál. Presnejšie

$$\gamma_t = \frac{1}{2}b(t, T) - \frac{1}{b(t, T)}\alpha^*(t, T). \quad (3.8)$$

Ak tento proces spĺňa technickú podmienku, že $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt]$ je konečná, tak podľa Girsanovovej vety existuje miera \mathbb{P}^* , ekvivalentná s reálnou mierou \mathbb{P} , taká, že $W_t^* = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ je \mathbb{P}^* -Brownov pohyb. Túto mieru nazveme *rizikovo-neutrálna*. Potom proces pre diskontovaný dlhopis je

$$dZ(t, T) = Z(t, T)b(t, T)dW_t^*.$$

Aby bol tento proces \mathbb{P}^* -martingál stačí, aby bola splnená exponenciálna martingálová podmienka $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp \frac{1}{2} \int_0^T b_t^2 dt] < \infty$. ([6])

Pod touto rizikovo-neutrálnou mierou je dynamika cien dlhopisov

$$dP(t, T) = P(t, T) (b(t, T)dW_t^* + r_t dt). \quad (3.9)$$

Predpokladajme teraz, že máme claim X , ktorý vypláca v čase $S < T$. Definujme proces E_t ako \mathbb{P}^* martingál:

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (B_S^{-1} X | \mathcal{F}_t).$$

Potom môžeme použiť vetu o reprezentácii martingálov, ktorá hovorí, že existuje \mathcal{F} -predvídateľný proces ϕ tak, že platí

$$E_t = E_0 + \int_0^t \phi_s dZ(s, T).$$

Zdefinujeme replikačné portfólium tvorené T -dlhopisom a saving accountom B_t tak, aby v čase S presne replikovalo claim X . Konkrétne, v čase t

- držíme ϕ_t jednotiek T -dlhopisu
- držíme $\psi_t = E_t - \phi_t Z(t, T)$ jednotiek saving accountu

Toto portfólium má v čase t hodnotu

$$\begin{aligned} V_t &= \phi_t P(t, T) + \psi_t B_t = \phi_t P(t, T) + (E_t - \phi_t Z(t, T)) B_t = B_t E_t \\ V_t &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (B_S^{-1} X | \mathcal{F}_t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Teda, ak X je výplata derivátu maturujúceho v čase S , tak jeho hodnota v čase t je

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) X | \mathcal{F}_t \right). \quad (3.11)$$

Avšak aj dlhopis maturujúci v čase S je jednoducho claim $X = 1$. Teda, ak sa chceme vyhnúť arbitráži, jeho hodnota musí byť podľa (3.11) $B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (B_S^{-1} | \mathcal{F}_t)$, resp.

$$P(t, S) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(\exp \left(- \int_t^S r_s ds \right) | \mathcal{F}_t \right) \quad t \leq S \leq T. \quad (3.12)$$

Diskontovaný S -dlhopis potom môžeme napísať ako

$$Z(t, S) = B_t^{-1} P(t, S) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (B_S^{-1} | \mathcal{F}_t),$$

teda aj proces $Z(t, S)$ je v miere \mathbb{P}^* martingál. Z toho vyplýva, že proces γ_t musí rovnaký pre všetky maturity a teda je rovnako ako miera \mathbb{P}^* nezávislý od T , inak bude na trhu možnosť arbitráže. Ak si prepíšeme definíciu procesu γ_t a využijeme, že $\frac{\partial \gamma_t}{\partial T} = 0$, dostávame:

$$\begin{aligned} \int_t^T \alpha(t, u) du &= \frac{1}{2} b^2(t, T) - b(t, T) \gamma_t \\ \alpha(t, T) &= \sigma(t, T) (\gamma_t - b(t, T)). \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali nasledujúcu vetu:

Veta 1 *Pre ľubovoľnú maturitu $T \leq T^*$, za predpokladu neexistencie arbitráže, dynamika ceny dlhopisu $B(t, T)$ pod rizikovo-neutrálnou mierou \mathbb{P}^* je*

$$dB(t, T) = B(t, T) (r_t dt - b(t, T)) \cdot dW_t^* \quad (3.13)$$

a forwardová miera $f(t, T)$ splňa

$$df(t, T) = \sigma(t, T) b(t, T) dt + \sigma(t, T) \cdot dW_t^*. \quad (3.14)$$

3.2 Model Brace, Gatarek, Musiela

Spoločnou črtou skorších modelov vývoja úrokových mier až po model HJM je fakt, že (explicitne alebo implicitne) v sebe obsahujú špecifikáciu stochastického správania nepozorovateľných finančných kvantít, ako napríklad okamžité forwardové miery. Kalibrácia týchto modelov na súbor trhových dát preto sama osebe vyžadovala transformáciu, cez "čiernu skrinku" poskytnutú samotným modelom, týchto dát, resp. dynamiky pozorovateľných veličín na dynamiku nepozorovateľných (popisovaných) veličín.

Tento obraz sa radikálne zmenil uvedením modelu BGM (Brace, Gatarek, Musiela) (viď [3]), ktorý popisuje priamo pozorovateľné trhové kvantily, ako diskkrétne LIBOR forwardové miery.

Majme dané fixné kladné reálne číslo δ . Podľa definície, forwardová δ -LIBOR miera $L(t, T)$ je diskrétna forwardová miera nad intervalom $\langle T, T + \delta \rangle$ a je daná vzťahom

$$1 + \delta L(t, T) = \frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle. \quad (3.15)$$

Teraz odvodíme dynamiku veličín $L(t, T)$ pod rizikovo-neutrálnou mierou. Výhodou modelu BGM je to, že miery $L(t, T)$ môžeme modelovať ako lognormálne, na rozdiel od HJM modelu, kde miery $f(t, T)$ nemožno vo všeobecnosti takto modelovať, ako je ukázané napríklad v [10].

Z (3.15) a (2.1) dostávame:

$$L(t, T) = \frac{\exp\left(\int_T^{T+\delta} f(t, u) du\right) - 1}{\delta}. \quad (3.16)$$

V (3.14) chceme zvoliť volatilitu $\sigma(t, T)$ tak, aby sme dostali rovnicu pre $L(t, T)$ v nasledujúcom tvare:

$$dL(t, T) = (\dots)dt + L(t, T)\gamma(t, T) \cdot dW_t^*$$

pre nejaké $\gamma(t, T)$. Z (3.14) postupne dostávame:

$$\begin{aligned} d \int_T^{T+\delta} f(t, u) du &= \int_T^{T+\delta} df(t, u) du = & (3.17) \\ &= \int_T^{T+\delta} \sigma(t, u)b(t, u) du + \int_T^{T+\delta} \sigma(t, u) dW_t^* = \\ &= \int_T^{T+\delta} \frac{1}{2} \frac{\partial b^2(t, u)}{\partial u} du + [b(t, T) - b(t, T + \delta)] dW_t^* = \\ &= \frac{1}{2} [b^2(t, T) - b^2(t, T + \delta)] dt + [b(t, T + \delta) - b(t, T)] dW_t^*. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
dL(t, T) &= d \frac{\exp\left(\int_T^{T+\delta} f(t, u) du\right) - 1}{\delta} & (3.18) \\
&= \frac{1}{\delta} \exp\left(\int_T^{T+\delta} f(t, u) du\right) d \int_T^{T+\delta} f(t, u) du + \\
&\quad + \frac{1}{2\delta} \exp\left(\int_T^{T+\delta} f(t, u) du\right) \left(d \int_T^{T+\delta} f(t, u) du\right)^2 = \\
&\stackrel{(3.17)}{=} \frac{1}{\delta} [1 + \delta L(t, T)] \left[\frac{1}{2} [b^2(t, T + \delta) - b^2(t, T)] dt + \right. \\
&\quad \left. + [b(t, T) - b(t, T + \delta)] dW_t^* + \frac{1}{2} [b(t, T) - b(t, T + \delta)]^2 dt \right] \\
&= \frac{1}{\delta} [1 + \delta L(t, T)] [b(t, T) - b(t, T + \delta)] [-b(t, T + \delta) dt + dW_t^*].
\end{aligned}$$

Ak teraz definujeme proces $\lambda(t, T)$ nasledovne:

$$\lambda(t, T)L(t, T) = \frac{1}{\delta} [1 + \delta L(t, T)] [b(t, T) - b(t, T + \delta)], \quad (3.19)$$

tak dostávame

$$dL(t, T) = -\lambda(t, T)L(t, T)b(t, T + \delta)dt + \lambda(t, T)L(t, T)dW_t^*, \quad (3.20)$$

resp.

$$dL(t, T) = \lambda(t, T)L(t, T) [-b(t, T + \delta)dt + dW_t^*]. \quad (3.21)$$

Ak teraz skombinujeme predchádzajúci vzťah s Girsanovovou vetou, tak dostávame

$$dL(t, T) = \lambda(t, T)L(t, T)dW_t^{T+\delta}, \quad (3.22)$$

kde pre každé $t \in \langle 0, T + \delta \rangle$

$$W_t^{T+\delta} = W_t^* - \int_0^{T+\delta} b(u, T + \delta) du. \quad (3.23)$$

Proces $W_t^{T+\delta}$ je Brownov pohyb pod mierou $\mathbb{P}_{T+\delta} \sim \mathbb{P}^*$, definovanou pomocou Radon-Nikodýmovo derivátu

$$\frac{d\mathbb{P}_{T+\delta}}{d\mathbb{P}^*} = \exp\left(\int_0^{T+\delta} b(u, T + \delta) \cdot dW_u^* - \frac{1}{2} \int_0^{T+\delta} |b(u, T + \delta)|^2 du\right). \quad (3.24)$$

Aby sme dostali viac informácií o miere $\mathbb{P}_{T+\delta}$, upravíme predchádzajúci vzťah do nasledujúcej podoby:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}_{T+\delta}}{d\mathbb{P}^*} &= \frac{\exp\left(\int_0^{T+\delta} r_u du + \int_0^{T+\delta} b(u, T+\delta) dW_u^* - \frac{1}{2} \int_0^{T+\delta} |b(u, T+\delta)|^2 du\right)}{\exp\left(\int_0^{T+\delta} r_u du\right)} = \\ &= \frac{P(T+\delta, T+\delta)}{B_{T+\delta} P(0, T+\delta)} = \\ &= \frac{1}{B_{T+\delta} P(0, T+\delta)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

príčom sme využili fakt, že čitateľ zlomku v prvej rovnosti je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice 3.9, ak v nej nahradíme T výrazom $T + \delta$. Mieru $\mathbb{P}_{T+\delta}$ nazveme ako *forwardová miera spojená s maturitou $T + \delta$* . V knihe [7] je ukázané, že cena nejakého obchodovateľného assetu (ktorý neplatí žiadne dividendy ani kupóny), vyjadrená v jednotkách $P(t, T)$ je pod mierou \mathbb{P}_T martingál, teda v tejto miere je ako numeraire braná cena dlhopisu maturujúceho v čase T .

V ďalšej časti skonštruujeme model forwardových LIBOR mier (najskôr pre prípad diskrétného tenoru a potom pre prípad spojitého tenoru maturít) založený na nasledujúcich predpokladoch.

(LR.1) Pre ľubovoľnú maturitu $T \leq T^* - \delta$ máme danú ohraničenú, deterministickú funkciu $\lambda(\cdot, T) \in \mathbb{R}^d$, ktorá reprezentuje volatilitu procesu forwardovej miery $L(\cdot, T)$.

(LR.2) Predpokladáme existenciu ostro klesajúcej a kladnej začiatočnej term structure $P(0, T), T \in \langle 0, T^* \rangle$ a teda aj počiatočnej krivky $L(0, T)$ forwardových mier

$$L(0, T) = \delta^{-1} \left(\frac{P(0, T)}{P(0, T+\delta)} - 1 \right) \quad \forall T \in \langle 0, T^* - \delta \rangle.$$

3.2.1 Diskrétny tenor

Pre jednoduchosť zápisu, predpokladajme, že časový horizont T^* je násobok δ , povedzme $T^* = M\delta$ pre nejaké prirodzené M . V tejto časti sa budeme koncentrovať na forwardové LIBOR miery so splatnosťami v diskrétnom časovom tenore $\{0, T_{(M-1)\delta}, T_{(M-2)\delta}, \dots, T_\delta, T^*\}$, kde $T_{m\delta} = T^* - m\delta$ pre $m = 1, 2, \dots, M-1$. Tento postup je založený na spätnej indukcii, keď začneme s definíciou forwardovej miery LIBOR s najdlhšou maturitou $L(t, T_\delta)$.

Budeme predpokladať, že máme špecifikované lognormálne volatily forwardových LIBOR mier $\lambda(t, T_{m\delta})$ pre $m = 1, 2, \dots, M - 1$.

Postulujeme, že miera $L(t, T_\delta)$ je pod pravdepodobnostnou mierou \mathbb{P}_{T^*} riadená nasledujúcou stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dL(t, T_\delta) = L(t, T_\delta)\lambda(t, T_\delta) \cdot dW_t^{T^*}, \quad (3.26)$$

s počiatočnou podmienkou

$$dL(0, T_\delta) = \delta^{-1} \left(\frac{P(0, T_\delta)}{P(0, T^*)} - 1 \right). \quad (3.27)$$

Pretože počiatočná term structure je ostro klesajúca, je zrejme $L(t, T_\delta)$ kladné a pre pevné $t \leq T^* - \delta$ má náhodná premenná $L(t, T_\delta)$ lognormálne rozdelenie pod \mathbb{P}_{T^*} . Týmto sme definovali dynamiku LIBOR miery s maturitou v poslednom dátume nášho tenoru.

V ďalšom kroku definujeme forwardovú mieru LIBOR pre dátum $T_{2\delta}^*$ použitím vzťahu (3.19), kde $T = T_\delta$, teda

$$\begin{aligned} \lambda(t, T_\delta) &= \frac{1 + \delta L(t, T_\delta)}{\delta L(t, T_\delta)} [b(t, T_\delta) - b(t, T^*)] \\ \mu(t, T_\delta, T^*) &= \frac{\delta L(t, T_\delta)}{1 + \delta L(t, T_\delta)} \lambda(t, T_\delta), \end{aligned} \quad (3.28)$$

kde sme ako $\mu(t, T, T + \delta)$ označili $b(t, T) - b(t, T + \delta)$. Zavedieme teraz proces $W_t^{T_\delta}$, ktorý bude korešpondovať s dátumom T_δ

$$W_t^{T_\delta} = W_t^{T^*} - \int_0^t \mu(u, T_\delta, T^*) du \quad \forall t \in \langle 0, T_\delta \rangle. \quad (3.29)$$

Tento proces je späť s dátumom T_δ na základe rovnice(3.23), ktorá hovorí o vzťahu medzi Brownovými pohybmi pod mierami $\mathbb{P}_{T+\delta}$ a \mathbb{P}^* . Dvojnásobným použitím tohto vzťahu dostaneme horeuvedené tvrdenie.

Keďže $\mu(t, T_\delta, T^*)$ je ohraničený, tak existencia tohoto procesu a k nemu asociovanej pravdepodobnostnej miery $\mathbb{P}_{T_\delta} \sim \mathbb{P}_{T^*}$, pod ktorou je proces W_{T_δ} Brownov pohyb a ktorá je daná Radon-Nikodýmovým derivátom

$$\frac{d\mathbb{P}_{T_\delta}}{d\mathbb{P}_{T^*}} = \exp \left(\int_0^{T_\delta} \mu(u, T + \delta) \cdot dW_u^{T^*} - \frac{1}{2} \int_0^{T_\delta} |\mu(u, T + \delta)|^2 du \right),$$

je zrejmá z Girsanovovej vety. Z (3.24) vidíme, že ide o forwardovú mieru spojenú s maturitou T_δ . Teraz môžeme špecifikovať dynamiku LIBOR miery pre maturitu $T_{2\delta}$ pod mierou \mathbb{P}_{T_δ} . Analogicky ako v (3.26) položíme

$$dL(t, T_{2\delta}) = L(t, T_{2\delta})\lambda(t, T_{2\delta}) \cdot dW_t^{T_\delta}, \quad (3.30)$$

s počiatočnou podmienkou

$$L(0, T_{2\delta}) = \delta^{-1} \left(\frac{P(0, T_{2\delta})}{P(0, T_\delta)} - 1 \right). \quad (3.31)$$

Z (3.19) opäť inverziou dostaneme hodnotu potrebnej zmeny Brownovho pohybu $W_t^{T_\delta}$ na to, aby sme sa dostali k hodnotám spojeným s dátumom $T_{2\delta}$

$$\mu(t, T_{2\delta}, T_\delta) = \frac{\delta L(t, T_{2\delta})}{1 + \delta L(t, T_{2\delta})} \lambda(t, T_{2\delta}) = b(t, T_{2\delta}) - b(t, T_\delta)$$

Keď máme definovaný proces $\mu(t, T_{2\delta}, T_\delta)$, môžeme definovať pár $(W^{T_{2\delta}}, \mathbb{P}_{T_{2\delta}})$ zodpovedajúci maturite $T_{2\delta}$ atď. Spätnou indukciou k prvému relevantnému dátumu $T_{(M-1)\delta}$ skonštruujeme triedu forwardových LIBOR mier $L(t, T_{m\delta})$, $m = 1, \dots, M-1$. Týmto postupom sme zabezpečili aj lognormálne rozdelenie každého procesu $L(t, T_{m\delta})$ pod zodpovedajúcou forwardovou pravdepodobnostnou mierou $\mathbb{P}_{T_{(m-1)\delta}}$. Skutočne, pre každé $m = 1, \dots, M-1$ máme

$$dL(t, T_{m\delta}) = L(t, T_{m\delta})\lambda(t, T_{m\delta}) \cdot dW_t^{T_{(m-1)\delta}}, \quad (3.32)$$

kde $dW_t^{T_{(m-1)\delta}}$ je Brownov pohyb pod $\mathbb{P}_{T_{(m-1)\delta}}$.

Týmto sme dokončili odvodenie lognormálneho modelu forwardových LIBOR mier v rámci diskretného tenoru. Na záver ešte uvedieme explicitný vzťah medzi Brownovými pohybmi spojenými so susednými maturitami, ktorý vychádza zo vzťahu (3.29):

$$W_t^{T_{(m-1)\delta}} = W_t^{T_{m\delta}} + \int_0^t \frac{\delta L(u, T_{m\delta})}{1 + \delta L(u, T_{m\delta})} \lambda(u, T_{m\delta}) du. \quad (3.33)$$

3.2.2 Spojitý tenor

Model diskretného tenoru prezentovaný v predchádzajúcej časti kompletne špecifikuje dynamiku len pre LIBOR miery maturujúce v dátumoch v danom tenore. V dôsledku toho, finančné inštrumenty, ktorých platby sa uskutočňujú

v medzi dátumami diskretného tenora nie je možné pomocou tohto modelu oceniť. Rozšírenie modelu do spojitého tenora zaistí, že hodnota numeraire je korektne definovaná (alebo determinovaná) v každom časovom bode a určuje dynamiku mier pre všetky maturity medzi dátumami z tenora.

Pod *modelom spojitého tenora* budeme rozumieť model, v ktorom sú špecifikované všetky LIBOR miery $L(t, T)$, $T \in \langle 0, T^* \rangle$. Ak je daný model diskretného tenora z predchádzajúcej sekcie, stačí vyplniť medzery medzi diskretnými dátumami, aby sme dostali spojitý model. Tento cieľ uskutočníme v troch krokoch. V prvom skonštruujeme diskretný model pomocou metódy popísanej vyššie. V druhom kroku sa zameriame na úrokové miery s časom do maturity menšom ako δ a v konečnom treťom kroku na interpoláciu dlhopisov s časom do maturity väčším ako δ .

Predpokladajme teda, že máme daný tenor

$$\mathbb{T} = \{T_0, \dots, T_M\} \quad (3.34)$$

a dynamiku mier $L(\cdot, T_i)$, $1 \leq i < M$. Ďalej, definujme funkciu

$$\eta(t) : \langle 0, T^* \rangle \rightarrow \{0, \dots, M\}$$

ako

$$\eta(t) = \max\{i \in \{1, \dots, N\} | T_{i-1} < t\},$$

teda, funkcia $\eta(t)$ nám vyberie z diskretného tenora najmenšiu maturitu väčšiu ako t . Pre všetky dlhopisy $P(t_1, t_2)$ maturojúce pred ďalším budúcim dátumom z tenora (3.34), teda $t_1 \leq t_2 \leq T_{\eta(t_1)}$, budeme predpokladať, že volatilita sa rovná nule, teda, že ceny týchto dlhopisov sa vyvíjajú deterministicky. V dôsledku toho, v čase T_i je cena bodu maturojúceho v T_{i+1} daná ako

$$P(T_i, T_{i+1}) = (1 + \delta L(T_i, T_i))^{-1}$$

a jej dynamika je deterministická po tomto dátume. Pretože sú tieto ceny deterministické, interpolácia úrokových mier s časom do maturity menej ako δ , je rovnaká úloha ako špecifikácia dynamiky cien dlhopisov $P(t, T_{i+1})$, $T_i < t < T_{i+1}$, s podmienkou $P(T_{i+1}, T_{i+1}) = 1$. Toto znamená definovať spojitú okamžitú úrokovú mieru ako nejakú kladnú funkciu $r(s, L(T_{\eta(s)-1}, T_{\eta(s)-1}))$ tak, že

$$\exp\left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} r(s, L(T_{\eta(s)-1}, T_{\eta(s)-1})) ds\right) = 1 + \delta L(T_i, T_i) \quad \forall i < M. \quad (3.35)$$

Potom

$$P(t, T_{\eta(t)}) = \exp \left(- \int_t^{T_{\eta(t)}} r(s, L(T_{\eta(s)-1}, T_{\eta(s)-1})) ds \right). \quad (3.36)$$

Vo všeobecnosti je dynamika premennej r nespojitá v každom bode T_i , avšak ľubovoľná úroková miera s periódou väčšou ako nula, má spojitú dynamiku v tomto modeli.

Veta 2 *V modeli úrokových mier s nulovou volatilitou pre diskontné dlhopisy $P(t, T_{\eta(t)})$ pre každé $T_0 \leq t \leq T_M$, sú rizikovo-neutrálne a rolling-spot LIBOR miery identické a interpolácia okamžitej (short rate) miery r (3.35) je bezarbitrážna.*

Dôkaz: Rizikovo-neutrálna miera je definovaná ako miera, kde ako numeraire uvažujeme savings account, teda pod ňou sú všetky ceny dlhopisov diskontované týmto procesom martingály. Savings account v našom prípade s interpoláciou (3.35) short rate miery r , definovaný ako

$$\begin{aligned} B_t &= \exp \left(\int_0^t r(s, L(T_{\eta(s)-1}, T_{\eta(s)-1})) ds \right) = \\ &= \left(\prod_{i=0}^{\eta(t)-2} (1 + \delta L(T_i, T_i)) \right) \exp \left(\int_{T_{\eta(t)-1}}^t r(s, L(T_{\eta(s)-1}, T_{\eta(s)-1})) ds \right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

Pre rolling-spot LIBOR mieru \mathbb{P}^L je numeraire definovaný ako proces roll-over stratégie, ktorá začína v čase 0 s jednotkou hotovosti investovanou do diskontného dlhopisu končiaceho v T_1 a výnos je potom reinvestovaný v každom dátume T_j do dlhopisov končiacich o periódu neskôr, teda T_{j+1} . Proces pre numeraire je v tomto prípade zrejme

$$G_t = P(t, T_{\eta(t)}) \prod_{i=0}^{\eta(t)-1} P(T_i, T_{i+1})^{-1},$$

čo sa dá napísať ako

$$G_t = \left(\prod_{i=0}^{\eta(t)-2} (1 + \delta L(T_i, T_i)) \right) \frac{P(t, T_{\eta(t)})}{P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})}.$$

Z (3.36) dostávame:

$$\frac{P(t, T_{\eta(t)})}{P(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)})} = \exp \left(\int_{T_{\eta(t)-1}}^t r(s, L(T_{\eta(t)-1}, T_{\eta(t)-1})) ds \right) \quad \forall t \in \langle T_i, T_{i+1} \rangle.$$

Z toho už priamo dostávame, že procesy oboch numeraire sú identické, z čoho vyplýva, že aj obe miery sú identické.

Interpolácia (3.35) je bezarbitrážna, ak saving account definovaný pomocou (3.37) diskontovaný numeraire je martingál pod mierou spojenou s touto numeraire. Zrejme toto stačí ukázať pre jednu mieru a vďaka vyššie uvede-
ným skutočnostiam je to triviálne splnené pre rolling-spot mieru, pretože pod touto mierou je diskontovaný proces (3.37) identicky rovný konštante. \square

V treťom kroku sa zameriame na dlhopisy a úrokové miery so splatnosťou väčšou ako δ . Ako hovorí nasledujúca veta, v tejto časti už nemáme veľa voľnosti:

Veta 3 *Majme daný model diskrétného tenoru a interpoláciu short rate, ako je uvedené vyššie. Potom je už model spojitého tenoru úplne určený.*

Dôkaz: Uvažujme dva ľubovoľne určené časové body $t_1, t_2, 0 \leq t_1 < t_2 \leq T^*$. Cena t_2 -dlhopisu v čase t_1 je daná ako

$$P(t_1, t_2) = P(t_1, T_{\eta(t_1)}) \left(\prod_{i=\eta(t_1)}^{\eta(t_2)-1} (1 + \delta L(t_1, T_i))^{-1} \right) \frac{P(t_1, t_2)}{P(t_1, T_{\eta(t_2)})}, \quad (3.38)$$

(pretože ak investujeme čiastku do dlhopisu $P(t_1, T_{\eta(t_1)})$ a výnos potom reinvestujeme na LIBOR trhu, musíme na základe predpokladu o neexistencii arbitráže dostať rovnakú hodnotu, ako keď rovno investujeme do $P(t_1, T_{\eta(t_2)})$), kde cena dlhopisu $P(t_1, T_{\eta(t_1)})$ je daná pomocou interpolácie a podiel cien dlhopisov na pravej strane rovnosti je daný nearbitážnou podmienkou

$$\frac{P(t_1, t_2)}{P(t_1, T_{\eta(t_2)})} = \mathbb{E} [P(t_2, T_{\eta(t_2)})^{-1} | \mathcal{F}_{t_1}].$$

Ak máme danú interpoláciu (3.35), môžeme napísať cenu dlhopisu $P(t_2, T_{\eta(t_2)})$ ako deterministickú funkciu $L(T_{\eta(t_2)-1}, T_{\eta(t_2)-1})$. \square

Príklad: Ak definujeme short rate implicitne ako

$$\exp \left(\int_t^{T_{i+1}} r(s, L(T_{\eta(s)-1}, T_{\eta(s)-1})) ds \right) = 1 + (T_{i+1} - t) L(T_i, T_i) \quad \forall t \in \langle T_i, T_{i+1} \rangle,$$

teda

$$r(s, L(T_i, T_i)) = \frac{L(T_i, T_i)}{1 + (T_{i+1} - s)L(T_i, T_i)}.$$

Potom vieme cenu dlhopisu vyjadriť nasledovne

$$P(t_1, T_{\eta(t_1)}) = (1 + (T_{\eta(t_1)} - t_1)L(T_{\eta(t_1)-1}, T_{\eta(t_1)-1}))^{-1}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{P(t_1, t_2)}{P(t_1, T_{\eta(t_2)})} &= \mathbb{E} [P(t_2, T_{\eta(t_2)})^{-1} | \mathcal{F}_{t_1}] = \\ &= 1 + (T_{\eta(t_2)} - t_2) \mathbb{E} [L(T_{\eta(t_2)-1}, T_{\eta(t_2)-1}) | \mathcal{F}_{t_1}] = \\ &= 1 + (T_{\eta(t_2)} - t_2)L(t_1, T_{\eta(t_2)-1}). \end{aligned}$$

Kapitola 4

Deriváty úrokovej miery

4.1 Opcie na diskontné dlhopisy

Opcia je kontrakt, ktorý nám dáva právo, nie povinnosť, spraviť niečo v budúcnosti. Konkrétne, *Európska call opcia na aktívum* je právo kúpiť toto aktívum za pevne určenú sumu (*strike*) v pevne určenom dátume (*expiračný čas*), *Európska put opcia* je právo toto aktívum predať. V tejto časti sa budeme zaoberať oceňovaním takéhoto kontraktu, kde ako aktívum bude vystupovať diskontný dlhopis. Budeme postupovať podľa klasického postupu pánov Blacka a Scholesa, ktorí odvodili vzorec pre Európsku call opciu na akcie (tento postup je popísaný napr. v [6]). Odvodíme vzorec pre Európske opcie za predpokladov modelu HJM, spolu s predpokladom, že volatilita forwardových mier je deterministická.

4.1.1 Forwardová cena

Forwardový kontrakt je dohoda, uzavretá v čase $t < T$, zaplatiť alebo prijať v čase T dopredu dohodnutý payoff X za dohodnutú forwardovú cenu. Musíme zdôrazniť, že v čase t nie je žiadna výmena hotovosti, forwardová cena sa dohodne tak, aby mal kontrakt nulovú hodnotu v tomto čase. Teda, forwardový kontrakt vypísaný v čase t na claim X môže byť sumarizovaný do nasledujúcich 2 bodov:

- Hodnota X bude prijatá v čase T na výmenu za dohodnutú sumu $F_X(t, T)$

- Čiastka $F_X(t, T)$ by mala byť predeterminovaná v čase t takým spôsobom (pričom sa berú do úvahy informácie dostupné do času t), aby bola arbitrážna cena tohto kontraktu rovná nule v čase t

Formálne môžeme forwardový kontrakt definovať nasledovne:

Definícia 1 *Majme pevné $0 \leq t \leq T \leq T^*$. Forward kontrakt vypísaný v čase t na claim X matujúci v čase T je reprezentovaný claimom $G_T = X - F_X(t, T)$ matujúcim v čase T , ktorý spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. $F_X(t, T)$ je \mathcal{F}_t merateľná náhodná premenná;
2. arbitrážna cena claimu G_T v čase t sa rovná nule, teda $\pi_t(G_T) = 0$.

Budeme označovať arbitrážnu cenu claimu X ako $\pi_t(X)$. V predchádzajúcej kapitole sme odvodili, že

$$\pi_t(X) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t) \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle, \quad (4.1)$$

kde \mathbb{P}^* je rizikovo neutrálna miera.

Náhodnú premennú $F_X(t, T)$ nazývame *forwardová cena* claimu X .

Nasledujúca lema nám vyjadruje forwardovú cenu pomocou arbitrážnej ceny a diskontného dlhopisu, ktorý matuje v čase T .

Lema 2 *Forwardová cena $F_X(t, T)$ v čase $t \leq T$ claimu X je rovná*

$$F_X(t, T) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1} | \mathcal{F}_t)} = \frac{\pi_t(X)}{P(t, T)}. \quad (4.2)$$

Dôkaz: Podľa (4.1) dostávame

$$\begin{aligned} \pi_t(G_T) &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(G_T B_T^{-1} | \mathcal{F}_t) \\ &= B_t ((X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t) - F_X(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1} | \mathcal{F}_t)) = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde posledná rovnosť je z časti (b) z definície forwardového kontraktu. Toto dokazuje prvú rovnosť, druhá je z toho, že podľa (4.1) je

$$P(t, T) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_T^{-1} | \mathcal{F}_t) \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle.$$

□

Ak ako underlying asset berieme dlhopis s maturitou $U \geq T$, potom (4.2) sa stáva

$$F(t, U, T) := F_{P(t,U)}(t, T) = \frac{P(t, U)}{P(t, T)} \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle. \quad (4.4)$$

Proces $F(t, U, T)$ spĺňa podľa Itôvej lemy

$$dF(t, U, T) = F(t, U, T) (b(t, U) - b(t, T)) \cdot dW_t^T \quad (4.5)$$

s podmienkou $F(T, U, T) = P(T, U)$.

Ďalšia lema nám hovorí o tom, že forwardová cena Európskych claimov sa dá ľahko vyjadriť ako podmienená očakávaná hodnota pod forwardovou mierou.

Lema 3 *Forwardová cena v čase t claimu X maturujúceho v čase T sa rovná*

$$F_X(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}(X | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle. \quad (4.6)$$

Dôkaz: Podľa stochastickej verzie Bayesovho pravidla (viď [musiela]) dostávame

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}(X | \mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\eta_T X | \mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\eta_T | \mathcal{F}_t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\eta_T \eta_t^{-1} X | \mathcal{F}_t), \quad (4.7)$$

kde

$$\eta_T = \frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*} = \frac{1}{B_T P(0, T)}$$

a $\eta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\eta_T | \mathcal{F}_t)$. Kombináciou horeuvedeného vzťahu s (4.2) dostávame tvrdenie lemy. \square

Posledná lema v tomto odstavci nám hovorí o arbitrážnej cene claimu X vyjadrenej pomocou podmienenej očakávanej hodnoty pod forwardovou mierou.

Lema 4 *Arbitrážna cena v čase t pre claim X maturujúci v čase T sa rovná*

$$\pi_t(X) = P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}(X | \mathcal{F}_t) \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle. \quad (4.8)$$

Dôkaz: Dokazovaná rovnosť je okamžitým dôsledkom toho, že $P(t, T)$ je numeraire pre túto mieru. \square

4.1.2 Oceňovanie opcií

V expiračnom čase T je payoff Európskej call opcie na diskontný dlhopis, ktorý maturuje v čase $U \geq T$, so strike K rovný

$$C_T = (P(T, U) - K)^+. \quad (4.9)$$

Nasledujúca veta nám dáva explicitnú formulu pre arbitrážnu cenu Európskej call opcie na dlhopis. Jej dôkaz je analogický dôkazu lemy o oceňovaní capletov, ktorý uvidíme neskôr.

Veta 4 *Predpokladajme, že volatility cien dlhopisov $b(\cdot, T)$ a $b(\cdot, U)$ sú ohraňované deterministické funkcie. Arbitrážna cena v čase $t \in \langle 0, T \rangle$ Európskej call opcie s expiračným dátumom T a strike cenou K , vypísaná na dlhopis s nulovým kupónom, ktorý maturuje v čase $U \geq T$ sa rovná*

$$C_t = P(t, U)N(h_1(P(t, U), t, T)) - KP(t, T)N(h_2(P(t, U), t, T)), \quad (4.10)$$

kde

$$h_{1,2}(b, t, T) = \frac{\ln(b/K) - \ln(P(t, T)) \pm \frac{1}{2}v_U^2(t, T)}{v_U(t, T)} \quad (4.11)$$

pre $(b, t) \in \mathbb{R}^+ \times \langle 0, T \rangle$,

$$v_U^2(t, T) = \int_t^T |b(u, U) - b(u, T)|^2 du, \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle, \quad (4.12)$$

a

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Arbitrážna cena zodpovedajúcej Európskej put opcie sa rovná

$$P_t = KP(t, T)N(-h_2(P(t, U), t, T)) - P(t, U)N(-h_1(P(t, U), t, T)).$$

4.2 Capy

Predpokladajme, že si požičiavame za floating rate a chceme sa poistiť proti príliš vysokým úrokovým platbám. Ak robíme platby v časoch $T_i = T_0 + i\delta$, $i \in$

$\{1, \dots, n\}$, tak platíme v čase T_i δ -forwardovú úrokovú mieru "nastavenú" v čase T_{i-1}

$$L(T_{i-1}, T_{i-1}) = \delta^{-1} \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right).$$

Kontrakt nazývaný *cap* nám platí rozdiel medzi touto LIBOR sadzbou a sadzbou k dohodnutou pri uzatváraní kontraktu

$$\delta(L(T_{i-1}, T_{i-1}) - k)^+$$

v každom čase T_i . Jednotlivá platba, uskutočnená v čase T_i sa nazýva *caplet*. Caplet môžeme prepísať ako

$$X = (1 + k\delta)P(T_{i-1}, T_i)^{-1}(K - P_i)^+,$$

kde $K = (1 + k\delta)^{-1}$. Hodnota tohto claimu v čase t je $B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(B_{T_i}^{-1} X | \mathcal{F}_t)$, čo sa rovná

$$(1 + k\delta)B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(B_{T_{i-1}}^{-1} (K - P(T_{i-1}, T_i)) | \mathcal{F}_t \right).$$

Toto je presne hodnota $(1 + k\delta)$ put opcií na T_i -dlhopis, s expiračnou dobou T_{i-1} a strike cenou K .

Túto ekvivalencia medzi capletom a put opciou na dlhopis s nulovým kupónom je možné vysvetliť aj intuitívne. Na tento účel stačí preskúmať dve základné vlastnosti oboch kontraktov: payoff hodnota a množina udalostí, kedy sa oba využijú. Predpokladajme j -ty caplet. Tento caplet využijeme, ak $L(T_{j-1}, T_{j-1}) > k$, resp.

$$P(T_{j-1}, T_j)^{-1} = 1 + L(T_{j-1}, T_{j-1})(T_j - T_{j-1}) > 1 + k\delta = K^{-1}$$

Táto nerovnosť platí, ak $P(T_{j-1}, T_j) < K$, teda oba kontrakty expirujú v rovnakých podmienkach. Ak je caplet expirovaný, platí $\delta(L(T_{j-1}, T_{j-1}) - k)$ v čase T_j , alebo ekvivalentne

$$\delta P(T_{j-1}, T_j)(L(T_{j-1}, T_{j-1}) - k) = 1 - K^{-1}P(T_{j-1}, T_j) = K^{-1}(K - P(T_{j-1}, T_j))$$

v čase T_{j-1} , čo je payoff spomínanej opcie. Táto vlastnosť nám umožňuje pod HJM modelom oceniť caplety pomocou vety 4.

4.2.1 Oceňovanie capov pod BGM modelom

Hlavnou motiváciou pre vznik BGM modelu bola trhová prax oceňovania capov pomocou výrazov typu Black-Scholes. Umožňuje to lognormálne rozdelenie mier $L(t, T)$ pod forwardovou mierou. Výhodou tohoto modelu je to, že ceny derivátov pod ním sa do značnej miery zhodujú s praxou obchodníkov na trhu (viď [7]).

Vo všeobecnom rámci modelov stochastických úrokových mier je cena capu v čase $t < T_0$ rovná

$$\mathbf{C}_t = \sum_{j=1}^n \mathbf{Cpl}_t^j, \quad (4.13)$$

kde \mathbf{Cpl}_t^j je cena j -teho capletu v čase $t < T_0$. Podľa lemy 4 je cena tohto capletu

$$\mathbf{Cpl}_t^j = P(t, T_j) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_j}} \left((L(T_{j-1}, T_{j-1}) - k)^+ \delta | \mathcal{F}_t \right)$$

pre každé $j = 1, \dots, n$. Ako sme odvodili v sekcii venovanej BGM modelu forward LIBOR mier, LIBOR miera $L(t, T_{j-1})$ pod forwardovou pravdepodobnostnou mierou \mathbb{P}_{T_j} má dynamiku

$$dL(t, T_{j-1}) = L(t, T_{j-1}) \lambda(t, T_{j-1}) \cdot dW_t^{T_j}, \quad (4.14)$$

kde W^{T_j} je d -rozmerný Brownov pohyb pod mierou \mathbb{P}_{T_j} a $\lambda(\cdot, T_{j-1})$ je deterministická funkcia. Payoff capletu pri jeho expirácii v čase T_j je

$$\mathbf{Cpl}_{T_j} = \delta (L(T_{j-1}, T_{j-1}) - k)^+,$$

čo sa dá napísať ako

$$\mathbf{Cpl}_{T_j} = \delta L(T_{j-1}, T_{j-1}) I_D - \delta k I_D,$$

kde

$$D = \{L(T_{j-1}, T_{j-1}) > k\}.$$

Nasledujúca lema nám dáva vzorec pre cenu capletu.

Lema 5 Cena v čase t capletu so strike k , maturujúceho v čase T , sa rovná:

$$\mathbf{Cpl}_t = \delta P(t, T + \delta) (L(t, T)N(e_1(t, T)) - kN(e_2(t, T))), \quad (4.15)$$

kde

$$e_{1,2}(t, T) = \frac{\ln(L(t, T)/k) \pm \frac{1}{2}v_0^2(t, T)}{v_0(t, T)}$$

a

$$v_0^2(t, T) = \int_t^T |\lambda(u, T)|^2 du.$$

Dôkaz: Podľa všeobecnej oceňovacej formuly (4.8) je jasné, že musíme vyčísliť podmienenú strednú hodnotu

$$C_t = \delta P(t, T + \delta) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T+\delta}}(L(T, T))I_D | \mathcal{F}_t) - k\delta P(t, T + \delta) \mathbb{P}_{T+\delta}\{D | \mathcal{F}_t\} = I_1 - I_2.$$

Podľa (4.14) vieme, že dynamika $L(t, T)$ pod $\mathbb{P}_{T+\delta}$ je

$$L(T, T) = L(t, T) \exp \left(\int_t^T \lambda(u, T) \cdot dW_u^{T+\delta} - \frac{1}{2} \int_t^T |\lambda(u, T)|^2 du \right).$$

Toto môžeme prepísať ako

$$L(T, T) = L(t, T) \exp \left(\zeta(t, T) - \frac{1}{2}v_0^2(t, T) \right),$$

kde $L(t, T)$ je \mathcal{F}_t -merateľná veličina a $\zeta(t, T) = \int_t^T \lambda(u, T) \cdot dW_u^{T+\delta}$ je pod $\mathbb{P}_{T+\delta}$ náhodná premenná s normálnym rozdelením so strednou hodnotou nula a disperziou $v_0^2(t, T)$, nezávislá od \mathcal{F}_t . Množinu D vieme napísať ako

$$\begin{aligned} D &= \{L(T, T) - k\} = \{L(t, T) \exp \left(\zeta(t, T) - \frac{1}{2}v_0^2(t, T) \right) > k\} \\ &= \left\{ \zeta(t, T) - \frac{1}{2}v_0^2(t, T) > \ln(k/L(t, T)) \right\} \\ &= \left\{ -\zeta(t, T) < \ln(L(t, T)/k) - \frac{1}{2}v_0^2(t, T) \right\}. \end{aligned}$$

Z horeuvedených vlastností procesu $\zeta(t, T)$ dostávame, že

$$\mathbb{P}_T\{D | \mathcal{F}_t\} = \mathbb{P}_T\left\{ -\frac{\zeta(t, T)}{v_0(t, T)} < \frac{\ln(L(t, T)/k) - \frac{1}{2}v_0^2(t, T)}{v_0(t, T)} \right\},$$

a teda

$$I_2 = k\delta P(t, T + \delta)N \left(\frac{\ln(L(t, T)/k) - \frac{1}{2}v_0^2(t, T)}{v_0(t, T)} \right).$$

Na vyčíslenie I_1 zavedieme pomocnú pravdepodobnostnú mieru $\tilde{\mathbb{P}}_{T+\delta} \sim \mathbb{P}_{T+\delta}$ tak, že

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T}{\mathbb{P}_T} = \exp \left(\int_0^T \lambda(u, T) \cdot dW_u^{T+\delta} - \frac{1}{2} \int_0^T |\lambda(u, T)|^2 du \right) \stackrel{def}{=} \tilde{\eta}_T.$$

Podľa Girsanovovej vety, proces

$$\tilde{W}_t^{T+\delta} = W_t^{T+\delta} - \int_0^t \lambda(u, T) du$$

je Brownov pohyb pod $\tilde{\mathbb{P}}_T$. Potom

$$L(T, T) = L(t, T) \exp \left(\int_t^T \lambda(u, T) \cdot d\tilde{W}_u^{T+\delta} + \frac{1}{2} \int_t^T |\lambda(u, T)|^2 du \right),$$

teda

$$L(T, T) = L(t, T) \exp \left(\tilde{\zeta}(t, T) + \frac{1}{2}v_0^2(t, T) \right),$$

kde $\tilde{\zeta}(t, T) = \int_t^T \lambda(u, T) \cdot d\tilde{W}_u^{T+\delta}$. Táto náhodná premenná má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a disperziou $v_0^2(t, T)$ a je nezávislá od \mathcal{F}_t . Teraz dostávame:

$$\begin{aligned} I_1 &= \delta P(t, T + \delta) \times \\ &\times \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T+\delta}} \left[L(t, T) I_D \exp \left(\int_t^T \lambda(u, T) \cdot dW_u^{T+\delta} - \frac{1}{2} \int_t^T |\lambda(u, T)|^2 du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

a z toho

$$I_1 = \delta P(t, T + \delta) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T+\delta}} (\tilde{\eta}_T \tilde{\eta}_t^{-1} L(t, T) I_D | \mathcal{F}_t).$$

Podľa (4.7) dostávame $I_1 = \delta P(t, T + \delta) L(t, T) \tilde{\mathbb{P}}_T \{D | \mathcal{F}_t\}$. Podobným postupom, ako v prvej časti dôkazu prideme k tomu, že

$$I_1 = \delta P(t, T + \delta) L(t, T) N \left(\frac{\ln(L(t, T)/k) + \frac{1}{2}v_0^2(t, T)}{v_0(t, T)} \right).$$

Tým je dôkaz skončený. \square

Hlavným výsledkom tohto odstavca je nasledujúca veta, ktorá je okamžitým dôsledkom lemy 5 a vzťahu (4.13).

Veta 5 *Majme interest rate cap so strike úroňou k , s výplatnými časmi $T_j, j = 1, \dots, n$. Za predpokladu lognormálneho modelu LIBOR mier, cena capu v čase $t \in \langle 0, T_0 \rangle$ sa rovná*

$$\mathbf{C}_t = \delta \sum_{j=1}^n P(t, T_j) \left(L(t, T_{j-1}) N(e_1^j(t)) - k N(e_2^j(t)) \right), \quad (4.16)$$

kde

$$e_{1,2}^j(t) = \frac{\ln(L(t, T_{j-1})/k) \pm \frac{1}{2}v_j^2(t)}{v_j(t)}$$

a

$$v_j^2(t, T) = \int_t^{T_{j-1}} |\lambda(u, T_{j-1})|^2 du.$$

Kapitola 5

Kalibrácia BGM modelu na trhové dáta

V ďalšej kapitole rozvineme metódu vhodnú na kalibráciu viacfaktorového modelu lognormálnych forwardových mier. V teoretickej časti popísanej v kapitolách 3 a 4 vystupovali ako neznáme, na trhu nepozorované, veličiny volatility jednotlivých LIBOR mier a pri oceňovaní rôznych exotických derivátov, závislých na pohyboch viacerých forwardových sadziieb, podobne vystupujú korelačné koeficienty medzi jednotlivými mierami. Ak má byť model schopný produkovať ceny derivátov konzistentné s cenami na trhu, tieto veličiny musia byť korektné odvodené z cien obchodovaných assetov alebo úrokových mier platných na trhu. Obrovskou výhodou modelu BGM oproti iným používaným modelom je to, že v ňom priamo vystupujú veličiny priamo pozorované na trhu, teda forwardové LIBOR miery.

Pri sadzbách úrokových mier daných na trhu, trh poskytuje obchodované ceny capletov alebo Európskych opcí na swapy (swaption). Z týchto možno priamo vypočítať (pomocou inverzie formúl uvedených v predchádzajúcej kapitole) hodnoty priemernej variancie príslušnej lognormálnej forwardovej miery. Ako neskôr uvedieme, toto determinuje integrál druhej mocniny okamžitej volatility, ktorá vystupuje v dynamike ktorej-tej forwardovej miery.

Problém kalibrácie v rámci BGM modelu je vhodné rozdeliť na tri body:

- vybranie najvhodnejšieho počtu faktorov pri danom oceňovacom probléme
- vybranie vhodnej časovej závislosti pre okamžitú volatilitu

- rozdelenie váh medzi časovo závislé volatility rôznych faktorov, inými slovami, vybranie ako veľký má byť príspevok volatility k -tého faktora $a_{ik}^2(t)$ do $\sigma_i^2(t)$ (viď rovnicu (5.3) nižšie)

Prvému bodu sa v tejto práci nebudeme venovať, v knihe [5] je popísaná metóda Principal Component Analysis, ktorá je vhodná na zistenie počtu faktorov v danej úlohe oceňovania. V tejto časti popíšeme, ako možno kalibrovať model simultánne na volatility a korelačnú maticu jednotlivých forwardových mier.

Dynamiku jednotlivých forwardových LIBOR mier s s faktormi budeme modelovať na základe predchádzajúcich kapitol vzťahom

$$\frac{dL(t, T_i)}{L(t, T_i)} = \mu_i(t)dt + \sum_{k=1}^s a_{ik}(t)dW_t^k, \quad (5.1)$$

resp.

$$L(T_i, T_i) = L(0, T_i) \exp\left(\int_0^{T_i} \mu(t) - \frac{1}{2}\sigma_i^2(t, T_i)dt\right) \exp\left(\int_0^{T_i} \sum_{k=1}^s a_{ik}(t)dW_t^k\right), \quad (5.2)$$

pričom

$$\sum_{k=1}^s a_{ik}^2(t) = \sigma_i^2(t, T_i). \quad (5.3)$$

$\sigma_i^2(t, T_i)$ je okamžitá volatility i -tej miery $L(t, T_i)$ s maturitou T_i .

Z trhových dát capov (resp. capletov) môžeme dostať hodnoty implikovanej priemernej volatility. Pre i -tu mieru označíme túto implikovanú volatility ako $\sigma_{impl}^i(T_i)$. Táto hodnota je spojená s okamžitou volatility v čase T vzťahom

$$\int_0^T \sigma_i^2(u, T_i)du = \sigma_{impl}^i(T_i)^2 T. \quad (5.4)$$

Budeme predpokladať, že

$$\mathbb{E}(dW_t^i dW_t^j) = \delta_{ij} dt. \quad (5.5)$$

V prípade, že to tak nie je, rotáciou premenných môžeme vždy zaistiť ortogonalitu faktorov.

Je zrejmé, že ak sme vo forwardovej pravdepodobnostnej miere spojenej s maturitou T , tak pre LIBOR mieru spojenú s touto mierou platí, že nutná a postačujúca podmienka pre to, aby jej okamžitá volatilita bola schopná produkovať správne ceny pre caplety je, že nepodmienená variancia forwardovej miery v čase T by mala byť rovná

$$\text{var}(\ln(L(T, T))) = \sigma_{impl}^i(T)^2 T = \int_0^T \sigma_i^2(u, T) du.$$

Tento vzťah nebude platiť v inej miere, pretože nepodmienená variancia pre inú mieru závisí na drifte, ktorý je vo všeobecnosti iný. Predchádzajúci vzťah však môže byť použitý na určité ohraničenie na volatilitu faktorov, aby produkovali správne ceny capletov, ako o tom hovorí nasledujúca veta.

Veta 6 *Majme danú funkciu $\sigma(t)$ tak, aby bola splnená rovnica (5.4). Potom postačujúca a nutná podmienka na to, aby proces (5.2) produkoval ceny capletov konzistentné s implikovanou volatilitou $\sigma_{impl}(T_i)$ je*

$$a_{ik}(t) = b_{ik}(t)\sigma_i(s, T_i),$$

kde

$$b_{ik}(t) = \begin{cases} \cos(\theta_{ik}(t)) \prod_{j=1}^{k-1} \sin(\theta_{ij}(t)) & \text{ak } k = 1, \dots, s-1, \\ \prod_{j=1}^{k-1} \sin(\theta_{ij}(t)) & \text{ak } k = s. \end{cases} \quad (5.6)$$

Dôkaz:

$$\text{var}(\ln(L(T_i, T_i))) = \mathbb{E}(\ln^2 L(T_i, T_i)) - \mathbb{E}(\ln L(T_i, T_i))^2$$

Definujme $L(0, T_i) \exp\left(\int_0^{T_i} \mu_i(u) - \frac{1}{2}\sigma_i^2(u, T_i) du\right) =: L(0, T_i)^*$. Potom využitím vlastností strednej hodnoty dostávame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ln L(T_i, T_i)) &= \ln L(0, T_i)^* \\ \mathbb{E}(\ln^2 L(T_i, T_i)) &= (\ln L(0, T_i)^*)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^{T_i} \sum_{k=1}^s a_{ik}(u) dW_u^k \int_0^{T_i} \sum_{m=1}^s a_{im}(u) dW_u^m\right)^2 \\ &= (\ln L(0, T_i)^*)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^{T_i} \sum_{k=1}^s a_{ik}^2(u) (dW_u^k)^2\right) \\ &= (\ln L(0, T_i)^*)^2 + \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u, T_i) \sum_{k=1}^s b_{ik}^2(u) du. \end{aligned}$$

Keďže koeficienty b_{ij} sú polárne súradnice bodu na $(s + 1)$ rozmernej guli s jednotkovým polomerom, platí $\sum_{k=1}^s b_{ik}^2(u) = 1$ a preto

$$\mathbb{E}(\ln^2 L(T_i, T_i)) = (\ln L(0, T_i)^*)^2 + \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u, T_i) du$$

a

$$\text{var}(\ln(L(T_i, T_i))) = \int_0^{T_i} \sigma_i^2(u, T_i) du = \sigma_{impl}^i(t)^2 T.$$

□

Ako sme ukázali v predchádzajúcej vete, implementácia BGM modelu je plne špecifikovaná maticou $\{b_{ik}\}$. Vo všeobecnosti, ľubovoľná korelačná funkcia nemusí byť reprodukovateľná pomocou s ortogonálnych funkcií, a teda sme vystavení úlohe určenia prvkov matice $\{b_{ik}\}$ tak, že

1. suma druhých mocnín koeficientov $\{b_{jk}\}$ cez faktory je rovná 1 (n je počet modelovaných mier):

$$\sum_{k=1}^s b_{jk}^2 = 1 \quad \forall j \leq n;$$

2. rozdiely medzi implikovanou (modelovou) a trhovou korelačnou maticou sú minimalizované.

Podmienka 1. zaisťuje v predchádzajúcej vete korektné získanie volatilit a podmienka 2. hovorí o čo najväčšom priblížení sa k modelovej korelačnej matici. Toto vo všeobecnosti je komplikovaná záležitosť, avšak veta 6 nám výrazne uľahčuje situáciu.

Teraz môžeme pristúpiť k samotnej simultánnej kalibrácii na trhové volatility a korelačnú maticu. Začneme najskôr s maticou b_{jk} takou, že je splnená podmienka 1. Toto dosiahneme ľubovoľnou voľbu uhlov θ pomocou vzťahu (5.6). Teraz začneme meniť uhly θ tak, aby sa suma druhých mocnín medzi modelovou a trhovou korelačnou maticou bola minimalizovaná. Vďaka vete 6 vieme ako kalibrovať presne na variancie rôznych LIBOR forwardových mier, kalibrácia na korelačnú maticu je to, čo nám zostáva na to, aby sme mali špecifikovaný kompletný model. Avšak táto úloha je tiež jednoduchá, nakoľko modelová korelačná matica je daná maticou \mathbf{BB}^\top , čo sa ľahko dokáže, keď si rozpíšeme definíciu korelácie.

Teda, vďaka vete 6, parametrizácia najvšeobecnejšieho BGM modelu forwardových mier môže byť završená rýchlym a numericky efektívnym spôsobom tak, že

1. môže byť získaná ľubovoľná množina daných okamžitých volatilit
2. ak sú tieto volatility konzistentné s (5.3), tak aj implikované volatility sú korektne odhadnuté v rámci modelu (a teda všetky caplety sú korektne ocenené)
3. najlepší odhad danej trhovej korelačnej matice vieme ľahko nájsť

V každom kroku je korelačná matica chrakterizovaná $n \times n$ prvkami. Napriek tomu, že matica \mathbf{B} má $n \times s$ prvkov, v skutočnosti najviac $n \times (s - 1)$ prvkov môže byť takých, že sa presne zhodujú s trhovou korelačnou maticou (ak máme takú oceňovaciu úlohu, napr. pri oceňovaní swapcií môže byť užitočný lepší fit na niektoré časti matice ako na iné). Toto je zrejmé z toho, že vieme meniť iba $n \times (s - 1)$ uhlov. V prípade potreby teda môžeme kalibrovať určitú časť korelačnej matice presne na trh.

Kapitola 6

Monte-Carlo simulácie

Model BGM je vďaka svojej konštrukcii veľmi výhodný pre oceňovanie niektorých derivátov úrokovej miery, pre ktoré poskytuje explicitné vzorce, na druhej strane však existuje veľa derivátov, ktoré môžu byť oceňované len približne, rôznymi aproximáciami explicitných formúl alebo numerickými metódami. Veľmi často sa používajú Monte-Carlo simulácie ako metóda numerického oceňovania. Aj tu, ako v iných numerických schémach, aj v tomto prípade je potrebné si zvoliť kompromis medzi presnosťou a výpočtovou rýchlosťou, závislý na požiadavkách užívateľa: obchodník na burze môže byť spokojný s presnosťou jedného základného bodu, pokiaľ výsledok dostane v priebehu pár sekúnd, kým človek s vedeckými úmyslami bude pravdepodobne viac trpezlivý, keď požaduje väčšiu presnosť.

Zmyslom tejto kapitoly bude naznačiť simulačný algoritmus pre BGM model. Predpokladajme, že máme prípad diskrétného tenoru, teda uvažujeme, že všetky LIBOR miery končia v dátumoch $T_j, j \in \{0, 1, \dots, n\}$. V čase t máme dané forwardové LIBOR miery definované ako

$$L(t, T_{j-1}) = \delta^{-1} \left(\frac{P(t, T_{j-1})}{P(t, T_j)} - 1 \right) \quad \forall t \leq T_{j-1}.$$

Podľa (3.32) dynamika týchto mier je pod mierou \mathbb{P}_{T_j}

$$dL(t, T_{j-1}) = L(t, T_{j-1})\lambda(t, T_{j-1}) \cdot dW_t^{T_j}.$$

V tomto vzťahu je dynamika každej LIBOR miery špecifikovaná pomocou rôznych Brownových pohybov. Ak chceme oceniť produkt závislý na viacerých LIBOR mierach, tak všetky musia byť modelované pod rovnakou pravdepodobnostnou mierou. Vzťah medzi rôznymi Brownovými pohybmi je daný

podľa (3.33) ako

$$dW_T^{T_{j+1}} = dW_t^{T_j} + \frac{\delta L(t, T_j)}{1 + \delta L(t, T_j)} \lambda(t, T_j) dt \quad (6.1)$$

a umožňuje nám transformovať prírastky jedného Brownovho pohybu do korešpondujúcich prírastkov pod ostatnými mierami.

6.1 Algoritmus

Samotný algoritmus je iteračný proces, ktorý používa diskretnú verziu rovnice (6.1) na výpočet zodpovedajúcich prírastkov Brownových pohybov a z týchto pomocu (3.32) simulovaných mier.

m	$L(m\Delta t, T_0)$	$L(m\Delta t, T_k)$	$L(m\Delta t, T_{k+1}) \cdots L(m\Delta t, T_{n-1})$
$m-1$	$\frac{\Delta W^{T_1}((m-1)\Delta t)}{L((m-1)\Delta t, T_0)}$	$\frac{\Delta W^{T_{k+1}}((m-1)\Delta t)}{L((m-1)\Delta t, T_k)}$	$\frac{\Delta W^{T_{k+2}}((m-1)\Delta t) \cdots \Delta W^{T_n}((m-1)\Delta t)}{L((m-1)\Delta t, T_{k+1}) \cdots L((m-1)\Delta t, T_{n-1})}$
i	$\frac{\Delta W^{T_1}(i\Delta t)}{L(i\Delta t, T_0)}$	$\frac{\Delta W^{T_i}((m-1)\Delta t)}{L(i\Delta t, T_k)}$	$\frac{\Delta W^{T_i}((m-1)\Delta t) \cdots \Delta W^{T_n}(i\Delta t)}{L(i\Delta t, T_{k+1}) \cdots L(i\Delta t, T_{n-1})}$
$i-1$	$\frac{\Delta W^{T_1}((i-1)\Delta t)}{L((i-1)\Delta t, T_0)}$	$\frac{\Delta W^{T_{k+1}}((i-1)\Delta t)}{L((i-1)\Delta t, T_k)}$	$\frac{\Delta W^{T_{k+2}}((i-1)\Delta t) \cdots \Delta W^{T_n}((i-1)\Delta t)}{L((i-1)\Delta t, T_{k+1}) \cdots L((i-1)\Delta t, T_{n-1})}$
1	$\frac{\Delta W^{T_1}(\Delta t)}{L(\Delta t, T_0)}$	$\frac{\Delta W^{T_{k+1}}(\Delta t)}{L(\Delta t, T_k)}$	$\frac{\Delta W^{T_{k+2}}(\Delta t) \cdots \Delta W^{T_n}(\Delta t)}{L(\Delta t, T_{k+1}) \cdots L(\Delta t, T_{n-1})}$
0	$\frac{\Delta W^{T_1}(0)}{L(0, T_0)}$	$\frac{\Delta W^{T_{k+1}}(0)}{L(0, T_k)}$	$\frac{\Delta W^{T_{k+2}}(0) \cdots \Delta W^{T_n}(0)}{L(0, T_{k+1}) \cdots L(0, T_{n-1})}$
i/j	$j = 0$	$j = k$	$j = k+1 \cdots j = n-1$

Uvažujme horeuvedenú tabuľku. $\Delta W_{T_{j+1}}(i\Delta t)$ označuje nárast Brownovho pohybu pod $\mathbb{P}_{T_{j+1}}$ počas intervalu $\langle i\Delta t, i\Delta t + \Delta t \rangle$, vo všeobecnosti $\Delta W^{T_{j+1}}(i\Delta t)$ je vektor. Posledný riadok je daný pomocou počiatočných mier $L(0, \cdot)$ a v každom časovom kroku je nárast Brownovho pohybu ΔW^{k+1} pod forwardovou mierou vybranou pre simuláciu normálne rozdelená náhodná veličina s očakávanou hodnotou 0 a varianciou Δt . Začnúc od $j = k+1$, postupne vypočítame nárasty Brownových pohybov pod pravdepodobnostnou mierou $\mathbb{P}_{T_{j+1}}$ pre všetky j až po $n-1$ pomocou

$$\Delta W^{j+1}(i\Delta t) = \Delta W^j(i\Delta t) + \frac{\delta L(i\Delta t, T_j)}{1 + \delta L(i\Delta t, T_j)} \lambda(i\Delta t, T_j) \Delta t. \quad (6.2)$$

Po vypočítaní týchto nárastov prearanžujeme rovnicu (6.2), aby sme mohli vypočítať späť pre $j = k-1$ po 0

$$\Delta W^j(i\Delta t) = \Delta W^{j+1}(i\Delta t) - \frac{\delta L(i\Delta t, T_j)}{1 + \delta L(i\Delta t, T_j)} \lambda(i\Delta t, T_j) \Delta t. \quad (6.3)$$

Teraz máme všetky Brownove nárasty potrebné k výpočtu realizácie LIBOR mier pre nasledujúci časový úsek. Aby sme predišli problémom spojeným s možnosťou, že miery budú záporné, budeme diskretizovať riešenie (3.32), teda

$$L((i+1)\Delta t, T_j) = L(i\Delta t, T_j) \exp \left(\lambda(i\Delta t, T_j) \cdot dW^{T_{j+1}}(i\Delta t) - \frac{1}{2} |\lambda(i\Delta t, T_j)|^2 \Delta t \right).$$

Toto dopĺňa kalkuláciu pre i -ty krok a ďalej opakujeme celú procedúru pre všetky časové kroky, vyplňujúc tabuľku po riadkoch.

Aby sme dostali správnu Monte-Carlo hodnotu, treba brať do úvahy aj ocenenie výplat pod správnu mierou. Všeobecný spôsob na toto je predeliť každý payoff hodnotou numeraire spojenou s mierou, v ktorej robíme simuláciu. Pre forwardovú pravdepodobnostnú mieru spojenú s T_j ide o diskontný dlhopis končiaci v T_j . Pokiaľ neuvažujeme interpoláciu v našej implementácii (pohybujeme sa v rámci diskrétného tenoru), tak hodnota numeraire je dostupná len v dátumoch v danom tenore. Za simulačnú mieru sme zvolili tú mieru, ktorá je spojená s dátumom T_{k+1} , teda numeraire je dlhopis $P(\cdot, T_k)$. Jeho hodnotu dostaneme zo vzťahu

$$P(T_j, T_{k+1}) = \prod_{i=j}^k (1 + \delta L(T_j, T_i))^{-1}.$$

Príslušný payoff sa potom pretransformuje do simulačnej miery pre násobením číslom $\frac{P(0, T_{k+1})}{P(\cdot, T_{k+1})}$, aby sme dostali správny Monte-Carlo odhad.

Ak robíme interpoláciu a teda uvažujeme spojitý tenor, tak na základe kapitoly 3.2.2 aproximujeme dlhopis so splatnosťou v najbližšom čase, teda $P(t, T_{\eta(t)})$ a potom máme numeraire daný ako

$$P(t, T_{k+1}) = P(t, T_{\eta(t)}) \prod_{i=\eta(t)}^k (1 + \delta L(t, T_i))^{-1}.$$

Kapitola 7

Kalibrácia na trhové dáta

V tejto časti sa budeme venovať numerickým výsledkom, konkrétne aplikácii postupov z predchádzajúcich kapitol na trhové dáta. Všetky použité dáta pochádzajú zo systému Bloomberg © a sú z konca novembra 2000 . Všetky numerické výpočty sú na dátach z obchodovania s menou EURO a boli prevádzané pomocou systému Mathematica 3.0

Uvedieme dve aplikácie kalibrácie: na dvojfaktorový a trojfaktorový model. V oboch prípadoch potom prevedieme Monte-Carlo simulácie na cenu derivátov. Kalibrovať budeme na volatility a korelácie odhadnuté z vývoja trojmesačných LIBOR mier. Na odhad historickej volatility použijeme nasledujúci postup:

Definujme: $n + 1$: počet pozorovaní, L_i : Libor miera na konci i -teho intervalu, τ : dĺžka intervalu v rokoch. Nech

$$u_i = \ln \left(\frac{L_i}{L_{i-1}} \right) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Pretože $L_i = L_{i-1}e^{u_i}$, u_i je spojitá úročená miera návratnosti v i -tom intervale (ak by sme brali LIBOR miery ako ceny). Volatilita môže byť definovaná ako štandardná odchýlka spojitě úročeného "výnosu" LIBOR miery počas jedného roka. Preto použijeme odhad štandardnej odchýlky u_i

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2},$$

kde \bar{u} je priemer hodnôt u_i . Dá sa ukázať, že štandardná odchýlka u_i ([Hull]) je $\sigma\sqrt{\tau}$, teda hodnota s je odhadom $\sigma\sqrt{\tau}$. Potom, volatilita σ môže byť

odhadnutá ako

$$\sigma^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Ak dĺžka periódy je jeden obchodný deň a že za rok je v priemere 252 obchodných dní, tak potom $\tau = 1/252$.

Ako dáta sme zobrali časový vývoj 10 forwardových trojmesačných LIBOR mier maturujúcich v marci 2001 až júni 2003 za 6 mesiacov od 30.5.2000 do 30.11.2000. Volatility týchto mier sú v tabuľke 7.1:

maturita	Mar 01	Jun 01	Sep 01	Dec 01	Mar 02	Jun 02
volatilita	0.1256	0.1249	0.1214	0.1162	0.1128	0.1081

maturita	Sep 02	Dec 02	Mar 03	Jun 03	Sep 03	Dec 03
volatilita	0.1118	0.1022	0.1023	0.0974	0.0970	0.0954

Tabuľka 7.1: historické volatility

Odhad historických korelácií sme robili na rovnakom základe, ako odhad historickej volatility. Získané hodnoty sú v tabuľke 7.2:

1	0.98741	0.96762	0.94672	0.92295	0.91212	0.86285	0.87428	0.86602	0.83669
0.98741	1	0.99024	0.97631	0.95685	0.94601	0.89569	0.91090	0.90388	0.87902
0.96762	0.99024	1	0.99241	0.98053	0.97121	0.9185	0.94331	0.93704	0.91496
0.94672	0.97632	0.99242	1	0.99307	0.98597	0.92852	0.96212	0.95627	0.93680
0.92295	0.95685	0.98053	0.99306	1	0.99419	0.94106	0.97640	0.96984	0.95497
0.91212	0.94601	0.97121	0.98597	0.99419	1	0.94593	0.98607	0.98053	0.96635
0.86285	0.89569	0.9185	0.92852	0.94106	0.94593	1	0.94218	0.93074	0.92545
0.87428	0.9109	0.94332	0.96212	0.97641	0.98608	0.94218	1	0.99498	0.98311
0.86602	0.90388	0.93704	0.95626	0.96984	0.98053	0.93074	0.99498	1	0.98954
0.83669	0.87902	0.91496	0.936806	0.95497	0.96636	0.92545	0.98311	0.98954	1

Tabuľka 7.2: historická korelačná matica

Kalibráciu budeme robiť na ceny capov, teda budeme odhadovať volatilitu z cien capov. Pretože sme nemali k dispozícii ceny samotných capletov, len ceny ročných a viacročných capov, pri odhadovaní implikovanej volatility jednotlivých LIBOR mier sme museli použiť nasledovný postup. Budeme predpokladať, že LIBOR miery, ktoré ovplyvňujú cenu capu s maturitou jeden rok, majú rovnakú volatilitu. Potom môžeme inverziou vzorca z vety 5 odhadnúť túto volatilitu. Týmto sme získali volatilitu pre LIBOR miery s

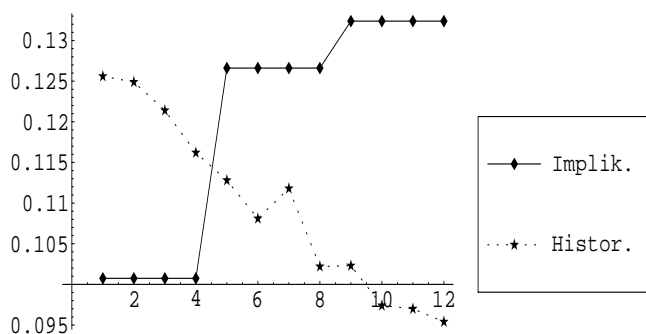
maturitami 0.25 až 1 rok. V ďalšom kroku budeme predpokladať, že miery s maturitami 1.25 až 2 roky majú rovnakú volatilitu. S použitím už odhadnutej volatility prvých štyroch mier získame volatilitu pre ďalšie 4 miery a nakoniec pre posledné 4. Získané výsledky sú v tabuľke 7.3:

maturita	Mar 01	Jun 01	Sep 01	Dec 01	Mar 02	Jun 02
implikovaná volatilita	0.1007	0.1007	0.1007	0.1007	0.1266	0.1266

maturita	Sep 02	Dec 02	Mar 03	Jun 03	Sep 03	Dec 03
implikovaná volatilita	0.1266	0.1266	0.1324	0.1324	0.1324	0.1324

Tabuľka 7.3: implikovaná volatilita

Porovnanie historických a implikovaných volatilit je na obrázku (7.1)



Obr. 7.1: Porovnanie volatilit

7.1 Dvojfaktorový model

V tomto prípade sme kalibrovali model s dvoma faktormi, pre zjednodušenie výpočtov sme modelovali 10 mier s maturitami od marca 2001 do júna 2003. Výsledky kalibrácie korelačnej matice sú v tabuľke (7.4) a matica B z kapitoly 5 v tabuľke (7.5).

1.	0.99601	0.98444	0.97048	0.94673	0.92748	0.83263	0.87473	0.86377	0.82776
0.99601	1.	0.99618	0.98812	0.97167	0.95712	0.87869	0.91445	0.90526	0.87449
0.98444	0.99618	1.	0.99776	0.98858	0.97874	0.91693	0.94627	0.93887	0.91347
0.97048	0.98812	0.99776	1.	0.99645	0.99027	0.94162	0.96578	0.9598	0.93864
0.94673	0.97167	0.98858	0.99645	1.	0.99847	0.96662	0.98418	0.98002	0.96434
0.92748	0.95712	0.97874	0.99027	0.99847	1.	0.97931	0.99247	0.98952	0.97750
0.83263	0.87869	0.91699	0.94162	0.96662	0.97931	1.	0.99671	0.99826	0.99996
0.87473	0.91445	0.94627	0.96578	0.98418	0.99247	0.99671	1.	0.99975	0.99597
0.86378	0.90526	0.93887	0.9598	0.98002	0.98952	0.99826	0.99975	1.	0.99771
0.82776	0.87449	0.91347	0.93864	0.96434	0.97750	0.99996	0.99597	0.99771	1.

Tabuľka 7.4: modelová korelačná matica-2 faktory

0.944193	0.329394
0.9698	0.243901
0.98738	0.158366
0.995762	0.0919629
0.99997	0.00780468
0.998872	-0.0474924
0.968594	-0.248649
0.985542	-0.169434
0.981545	-0.191229
0.966385	-0.257099

Tabuľka 7.5: matica na výpočet volatilit faktorov

Ako posledný krok pri kalibrácii musíme zistiť hodnoty volatilit jednotlivých faktorov pri každej LIBOR miere. Podľa vety 6 z 5. kapitoly, na toto potrebujeme maticu B a časový priebeh okamžitej volatility $\sigma_i(t, T_i)$.

Tento si môžeme zvoliť ľubovoľne až na podmienku (5.4). Pre jednoduchosť sme zvolili túto volatilitu rovnú konštante. Potom hodnoty volatilit jednotlivých faktorov sú v ďalšej tabuľke (tabuľke (7.6)).

Ako príklad modelovania Monte-Carlo uvedieme určenie hodnoty Európskej call opcie na par bond. Toto je kupónový dlhopis, kde veľkosť kupónu sa určí tak, aby jeho hodnota pri emitovaní bola rovná 100.

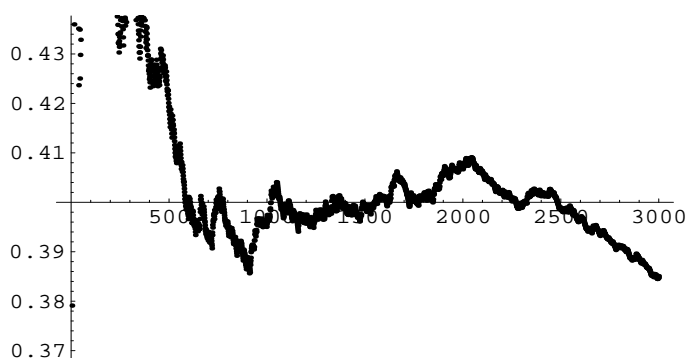
Pre par bond pri simulácii sme predpokladali ako dátum emisie 1. december 2000, splatnosť v júni 2003, kupóny vyplácané štvrtročne. Kupón sme dorátali na základe LIBOR krivky aktuálnej k dátumu emisie ako 1.33% face value. Potom sme modelovali vývoj LIBOR mier ovplyvňujúcich cenu tohto dlhopisu po dobu 1 roka a pre každú simuláciu sme zisťovali súčasnú hodnotu (k decembru 2000) Európskej call opcie s expiračným dátumom december 2001 a strike cenou 100. Ako cenu tejto opcie sme brali aritmetický priemer vyrátaných súčasných hodnôt. Celkovo sme uskutočnili 3000 simulácii. Na obrázku (7.2) je na osi x poradové číslo simulácie a na osi y je

maturita	1. faktor	2. faktor
mar-01	0.0951227	0.0331848
jun-01	0.0977025	0.0245718
sep-01	0.0994736	0.0159546
dec-01	0.100318	0.0092648
mar-02	0.126607	0.000988158
jun-02	0.126468	0.00601306
sep-02	0.122635	0.0314817
dec-02	0.12478	0.0214522
mar-03	0.129944	0.0253162
jun-03	0.127937	0.0340366

Tabuľka 7.6: volatily faktorov

priemerná hodnota opcie po danú simuláciu. Ako vidíme, ku koncu simulovania sa hodnota opcie priblížila k 0,38, presnejšie po simulácii s poradovým číslom 3000 jej hodnota bola

$$PV_{opcia} = 0.385$$



Obr. 7.2: cena opcie počas simulovania - 2 faktory

7.2 Trojfaktorový model

Kalibrácia korelačnej matice pre tento prípad je v tabuľke (7.7).

Volatility jednotlivých faktorov sú v tabuľke (7.8). Vidíme, že tretí faktor má najmenší vplyv, čo aj je výsledok, ktorý by sme čakali na základe

1.	0.99577	0.98241	0.96373	0.93662	0.91724	0.86254	0.86780	0.85782	0.82394
0.99577	1.	0.99538	0.98398	0.96480	0.94992	0.89517	0.90974	0.90119	0.87238
0.98241	0.99538	1.	0.99647	0.98556	0.97531	0.91848	0.94524	0.93861	0.91524
0.96373	0.98398	0.99647	1.	0.99582	0.98917	0.92585	0.96803	0.96379	0.94502
0.93662	0.96480	0.98556	0.99582	1.	0.99839	0.94211	0.98678	0.98328	0.97019
0.91724	0.94992	0.97531	0.98917	0.99839	1.	0.95160	0.99384	0.99027	0.98065
0.86254	0.89517	0.91848	0.92585	0.94211	0.95160	1.	0.94439	0.92807	0.92337
0.86780	0.90974	0.94524	0.96803	0.98678	0.99384	0.94439	1.	0.99890	0.99614
0.85782	0.90119	0.93861	0.96379	0.98328	0.99027	0.92807	0.99890	1.	0.99793
0.82394	0.87238	0.91524	0.94502	0.97019	0.98065	0.92337	0.99614	0.99793	1.

Tabuľka 7.7: modelová korelačná matica-3 faktory

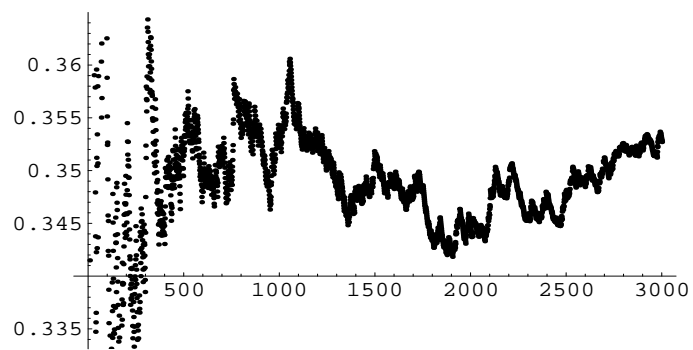
maturita	1. faktor	2. faktor	3. faktor
Mar-01	0.0988626	0.0169638	0.00937944
Jun-01	0.100127	0.00977566	0.00535066
Sep-01	0.100731	0.00160053	0.000532865
Dec-01	0.100542	0.00567338	0.00293093
Mar-02	0.123475	0.0239314	0.0145429
Jun-02	0.123203	0.0288394	0.00443187
Sep-02	0.120516	0.0346253	0.0175295
Dec-02	0.120792	0.0359369	0.0121757
Mar-03	0.122865	0.0483139	0.00980991
Jun-03	0.121974	0.0493828	0.0144876

Tabuľka 7.8: volatilitity faktorov

Principal Components Analysis. Aj v tomto prípade sme robili Monte-Carlo simuláciu rovnako, ako je popísané v predchádzajúcej sekcii. Výsledky sú na obrázku (7.3). Cena opcie po simulácii s číslom 3000 je v tomto prípade

$$PV_{opcia} = 0.352706.$$

Z obrázkov (7.2) a (7.3) je vidno, že dvojfaktorový model má pravdepodobne sklon cenu opcie nahodnotiť. Pre lepšiu analýzu tohto faktu by sme museli robiť už aj Principal Component Analysis, čo už je však nad rámec našej práce.



Obr. 7.3: cena opcie počas simulovania - 3 faktory

Kapitola 8

Záver

Diplomová práca bola venovaná moderným metódam modelovania úrokových mier. Konkrétne sme popísali a kompletne odvodili model BGM lognormálnych forwardových LIBOR úrokových mier, pre ktorý sme súčasne uviedli metódu vhodnú na jeho kalibráciu na trhové dáta.

Takisto sme ukázali príklad použitia tejto kalibrácie v praxi - metódu Monte-Carlo vhodnú na oceňovanie derivátov, pre ktoré neexistuje vzorec v explicitnom tvare. Túto metódu sme aplikovali na ocenenie európskej call opcie na par bond na Euro trhu. Využitie tejto práce vidíme nielen všade tam, kde vzniká potreba oceňovania derivátov úrokovej miery, ale aj tam, kde vznikla - na akademickej pôde ako úvod do štúdia stochastických modelov úrokových mier

V budúcnosti sa dá uvažovať o rozšírení tohto modelu aj o foreign exchange, aby bolo možné oceňovať aj deriváty v cudzej mene.

Literatúra

- [1] J.C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice-Hall, fourth edition, 2000.
- [2] D.C. Heath R.A. Jarrow A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claim valuation. *Econometrica*, (60):77–105, 1992.
- [3] A. Brace D. Gatarek M. Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Math. Finance*, (7):127–154, 1997.
- [4] R. Rebonato. *Interest-Rate Option Models*. John Wiley and sons, second edition, 1998.
- [5] R. Rebonato. On the simultaneous calibration of multifactor lognormal interest rate models to black volatilities and to the correlation matrix. *Journal of Computational Finance*, 2(4):6–27, Summer 1999.
- [6] M.W. Baxter A.J.O. Rennie. *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [7] M. Musiela M. Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modeling*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [8] A. Brace M. Musiela E. Schloegl. A simulation algorithm based on measure relationships in the lognormal market models. December 1998.
- [9] E. Schloegl. Some remarks on arbitrage free term structure interpolation in the lognormal interest rate market models. July 1999.
- [10] S. Shreve. Stochastic calculus and finance. Technical report, Carnegie Mellon University, 1997.