

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

Diplomová práca

MODELOVANIE GEOGRAFICKÉHO
ROZLOŽENIA EKONOMICKÝCH CENTIER

Diplomant: Milan Barančok

Vedúci diplomovej práce: Doc. Ján Boďa, PhD.

BRATISLAVA 2002

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO

MODELOVANIE GEOGRAFICKÉHO
ROZLOŽENIA EKONOMICKÝCH CENTIER

MILAN BARANČOK



UNIVERZITA KOMENSKÉHO BRATISLAVA

Čestne prehlasujem, že som túto prácu napísal
len s využitím vlastných vedomostí, literatúry
uvedenej v priloženom zozname
a s pomocou vedúceho diplomovej práce.

V Bratislave

.....

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať vedúcemu diplomovej práce,
pánovi Jánovi Boďovi, za odborné rady a pripomienky,
ktorými mi pomohol k napísaniu tejto práce.

Obsah

1. Úvod.....	1
2. Univerzalita a platnosť Zipfovho zákona.....	5
2.1. Výstavba modelu.....	5
2.2. Teoretické overenie modelu.....	6
3. Niektoré prístupy k riešeniu problematiky formovania mestských centier.....	9
3.1. Priestorová konkurencia.....	9
3.1.1. Základný model.....	9
3.1.2. Celoplošné náhodné pridávanie centier.....	11
3.1.3. Náhodné pridávanie centier na priamke.....	12
3.1.4. Formovanie cien.....	12
3.2. Zovšeobecnený model Lotka – Volterra.....	15
3.2.1. Teoretické pozadie.....	15
3.2.2. Výstavba modelu a numerické simulácie.....	16
4. Dvojkrokový difúzne – reakčný model	20
4.1. Teoretické pozadie modelu.....	20
4.2. Výstavba modelu.....	22
4.3. Analýza výsledkov.....	23
4.4. Hodnotenie modelu.....	30
5. Záver.....	32
Použitá literatúra.....	33
Prílohy.....	34

1. Úvod.

Univerzalita v správaní sa komplexných systémov sa často odhaľuje prostredníctvom škálovo invariantných rozdelení ktoré nie sú závislé na detailoch mikroskopickej dynamiky. Reprezentatívnym vzorom komplexného správania sa v prírode je kooperatívna evolúcia. Interakcia jedincov dáva podnet na rozvoj širokej škály prvkov kolektívneho fenoménu, ktorý sa silne odlišuje od individuálnej dynamiky - presne ako demografická evolúcia, kultúrny a technologický rozvoj a ekonomická aktivita. Výstižným príkladom vyššie zmieneného kolektívneho fenoménu je napr. formácia mestských aglomerácií, vznik a následný vývoj firiem (hromadenie statkov) a mnoho iných.

U sídiel na celom svete sú pozorovateľné podobné znaky, ktoré prenesené do všeobecných zákonov, popisujú ich formovanie a vývoj. Takmer celý svet prešiel v posledných desaťročiach explozívnym rastom mestskej populácie, pričom tento trend ešte neustal. Presnejšie, mnohé z miest, s ktorými sa v budúcnosti počíta ako s „megapolami“, t.j. mestskými centrami s počtom obyvateľov nad 10 miliónov, zaznamenajú v nasledujúcich desaťročiach 3%-nú ročnú mieru rastu populácie. Tento „problém“ sa týka hlavne krajín tretieho sveta, kde má podľa prognóz na základe súčasných údajov vzniknúť do roku 2025 ešte 13 takýchto centier pri ich súčasnom stave 14, z ktorých len 4 ležia vo vyspelých krajinách. Vo vyspelých krajinách už do roku 2025 nevznikne žiadne nové centrum s počtom obyvateľov nad 10 miliónov. Aj toto je dôvodom na spoznanie procesu vytvárania a formovania sa mestských centier. Existujú pokusy na modelovanie týchto procesov pomocou klasických ekonomických teórií ale neuspeli. Tým ekonómom zoskupených okolo P. Krugmana vytvoril veľmi komplexný model [8] ale výsledky neboli uspokojivé z hľadiska naplnenia známeho predpokladu, ktorým je fakt, že štruktúra sídiel na celom svete sa správa podľa tzv. Zipfovho zákona. Preto sme sa rozhodli zmapovať a zároveň aj prakticky vyskúšať niektoré prístupy založené na matematicko – fyzikálnych princípoch.

Rast populácie mesta pozostáva z dvoch základných mechanizmov :

- prvým je vnútorný rast, tzn. prevaha pôrodnosti nad úmrtnosťou (tiež známa ako prirodzený prírastok)
- tým druhým je migrácia.

Z tých menej dôležitých by som ešte mohol spomenúť predefinovanie hraníc sídiel, resp. spojenie viacerých z nich do mestského celku.

Kým prirodzený prírastok je dôležitým faktorom v neskorších obdobiach vývoja mesta, migrácia je základnou hybnou silou na jeho začiatku, pričom počas celého procesu formovania mesta prebieha presun populácie v rámci jeho hraníc, t.j. jednotlivci sa rozhodujú, v ktorej časti sa usadia a toto všetko formuje mikro aj makroskopické črty sídla. Pozorovateľ nachádzajúci sa vo vnútri mesta by nepochybne objavil kultúrne alebo politické rozdiely medzi mestami v Európe a mestami v Afrike. Napriek tomu ak sa preniesieme z tejto mierky do mierky globálneho demografického pohľadu zistíme, že tieto rozdiely sa stanú nepodstatnými a vyjdú na povrch ich vzájomné podobnosti a súvislosti medzi nimi.

Jeden z najznámejších zákonov popisujúcich princípy rastu mesta a morfológickú organizáciu je už spomenutý Zipfov zákon [1], ktorý hovorí, že zlomok miest $f(n)$ s n obyvateľmi sa správa podľa mocninového zákona, t.j.:

$$f(n) \propto n^{-r}, \text{ kde } r \approx 2.$$

V jeho pôvodnej forme tento zákon predstavuje populáciu miest $P(R)$ ako funkciu umiestnenia v hierarchii miest podľa počtu obyvateľov: tzn. $R = 1$ prislúcha najväčšiemu mestu, $R = 2$ druhému najväčšiemu atď. Na základe empirických poznatkov je známe, že pozorovaná závislosť $P(R) \approx R^{-1}$ nezávisí na kultúrnych, sociálnych alebo historických faktoroch, ani na krátko alebo dlhodobých politických resp. ekonomických cieľoch a plánoch. Svoje prvé pozorovania Zipf robil ohľadom frekvencie výskytu anglických slov v literatúre, pričom zistil, že slovo „the“, ktoré bolo prvé v poradí sa vyskytuje dvakrát častejšie ako slovo druhé v poradí „of“, atď. Na základe toho sa začal venovať viacerým oblastiam so zámerom potvrdiť alebo vyvrátiť platnosť jeho zákona v nich. Ohľadom výskumu v problematike rozloženia sídiel podľa ich veľkosti svoje tvrdenie podložil aj prakticky, a to analýzou rozloženia sídiel v USA s počtom obyvateľov viac ako 2500 v období od roku 1790 do roku 1930. V tom období bol rast populácie veľmi nerovnomerný – striedali sa obdobia s mimoriadne vysokým nárastom celkového počtu obyvateľov s obdobiami s jeho úplným útlmom. Napriek tomu profil funkcie $P(R)$ ostal zachovaný.

Taktiež rozloženie $f(a)$ zlomku miest s plochou a zreteľne reprezentuje všeobecný tvar

$$f(a) \propto a^{-s}, \text{ kde } s \approx 1,85 [2].$$

Toto pozorovanie sa môže dať do súvisu so Zipfovým zákonom ak uvažíme ako súvisí rast populácie mesta s rastom jeho plochy. V skutočnosti štúdie v teréne dokázali, že platí tzv. „populačno-plošný zákon“, ktorý hovorí, že $n \propto a^b$, kde $b \approx 1$, tzn., že plocha mesta rastie proporcionálne s jeho populáciou [2].

Pri zmene mierky štúdia problematiky je v každom meste pozorovateľný pokles hustoty osídlenia urbanizovaných oblastí $\sigma(\mathbf{d},t)$ s rastúcou vzdialenosťou \mathbf{d} od kompaktného jadra mesta. Toto jadro mesta s najvyššou hustotou populácie pôsobí priťahujúco pre populáciu ostatných častí mesta a zvyčajne sa nazýva *Central business district* (CBD).

Skutočné údaje poukazujú na závislosť tvaru :

$$\sigma(\mathbf{d},t) \propto e^{-\mathbf{d} \lambda(t)}$$

kde funkcia $\lambda(t)$ sa mení s časom, prinajmenšom v ranných štádiách vývoja mesta, pokiaľ toto nedosiahne viac-menej stabilnú populáciu. Vo všeobecnosti platí, že $\sigma(\mathbf{d},t)$ klesá rýchlejšie pri nižších hodnotách t a jeho pokles sa spomaľuje v neskorších štádiách vývoja. Tento pokles sa dá interpretovať ako sklon k decentralizácii, ktorý sprevádza rast mesta .

V rámci mesta je pozorovateľná ešte jedna črta : morfológia vonkajšieho obvodu mestskej hranice je fraktálna s dimenziou D , ktorá bola vo väčšine prípadov vyčíslená na 1,2 až 1,4 [2].

Všetky tieto pozorovania koherentných makroskopických vzorov v demografii a práca G.K.Zipfa viedli k vytvoreniu niekoľkých teoretických prístupov k modelovaniu vývoja miest a k porozumeniu ako rastú a formujú sa v čase. Všetky z nich bez ohľadu na ich rozdiely obsahujú spoločný kľúčový predpoklad : mestá priťahujú ľudí. Toto je črta ktorá vedie k pozitívnej spätnej väzbe v dynamike mestských sídiel. Navyiac je v nich obsiahnutá ešte jedna spoločná charakteristika: mestá rastú na dvojrozmernej priestorovej základni kde prebiehajú difúzne a tiež agregáčné procesy.

Najrannejšie pokusy o modelovanie [3] vychádzali z jednoduchého a všeobecného mechanizmu multiplikatívnej povahy kde sa rozdeľovali mestá podľa počtu obyvateľov alebo okrem iného aj vedci podľa počtu publikovaných prác.

Vo všeobecnosti sa dnes na predikáciu vývoja objemu a hlavne štruktúry rozmiestnenia populácie uplatňujú nasledujúce modely:

- 1.) model korelovaných perkolácií za prítomnosti gradientu hustoty – zaoberá sa hlavne morfológiou miest a rozložením plochy podzhlukov v mestskom systéme
- 2.) stochastický model generujúci prerušované priestorové štruktúry a predikuje rozdelenie populácie v súhlase s empirickými pozorovaniami
- 3.) model založený na vstupe premenných odhadujúcich interakcie medzi jedincami žijúcimi v meste, ktorí sú prepojení určitým množstvom spoločných črt, ktoré v konečnom dôsledku definujú samotný koncept mesta.

V nasledujúcom texte by som chcel popísať moje praktické skúsenosti s reprodukciou výstavby modelu vychádzajúceho z prístupu vyššie označeného poradovým číslom 2, navyše podrobnejšie popísať aj ostatné z nich a taktiež iné práce vo vzťahu k tejto problematike. Osobitnú časť budem tiež venovať podrobnému popisu jedného z vyššie spomenutých ranných prístupov k čomu taktiež prispejem praktickými skúsenosťami s výstavbou modelu na ňom založenom.

2. Univerzalita a platnosť Zipfovho zákona.

2.1. Výstavba modelu.

Nasledujúci model [4] je pravdepodobne najjednoduchší model reprodukovajúci Zipfov zákon a teda zároveň potvrdzujúci jeho platnosť. Vlastne bol jeho autormi skonštruovaný vyslovene s týmto cieľom. Poňatím časového vývoja modelu ako náhodného pohybu ďalej teoreticky vysvetlíme prečo tento model reprodukuje Zipfov zákon, a ukážeme, že jeho správanie je veľmi robustné a univerzálne.

Zipfov zákon je založený na pozorovaní, že frekvencia P výskytu rozličných udalostí sa správa podľa inverzného mocninového zákona $P(>s) \sim s^{-1}$, kde hodnota s je podmienená zostupne usporiadaným poradím frekvencií každej udalosti. Jeho platnosť bola ukázaná vo viacerých oblastiach vrátane populácie miest, čomu sa budeme venovať neskôr a rozdelenia spoločností podľa objemu ich aktív. Napríklad, pre rozdelenie príjmov potvrdzuje, že veľkosť a počet spoločností sú navzájom v inverznom vzťahu, tzn. že počet spoločností s viac ako desať- násobným objemom aktív je desať- krát menej ako spoločností so základným objemom a od nich väčších. Tento model sa dá považovať aj za model popisujúci časový vývoj rozdelenia spoločností podľa objemu aktív a taktiež pre nás dôležitejší časový vývoj rozdelenia populácie v mestách.

Predpoklady modelu sú nasledujúce:

Uvažujme množinu kladných hodnôt x_i s $i = 1, \dots, N$ prvkami. Tieto kladné hodnoty môžu predstavovať populáciu N miest. Pre zjednodušenie uvažujme všetky hodnoty x_i s rovnakými hodnotami.

Následne za týchto predpokladov opakujme nasledujúce procesy v T iteráciách :

- 1.) Náhodne vyberieme poradie prvku i z danej množiny pre $1 \leq i \leq N$
- 2.) Pre $i > 1$ presunieme z $(i - 1)$ - vého prvku do i - teho prvku objem αx_{i-1} ,

kde α je konštantný parameter z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Inými slovami:

$$x_{i-1} \rightarrow (1 - \alpha) \cdot x_{i-1} \quad (1)$$

$$x_i \rightarrow x_i + \alpha \cdot x_{i-1} \quad (2)$$

3.) Pre $i = 1$ zvýšime všetky hodnoty x_i o rovnaký objem $x_0 \cdot \alpha / N$.

4.) Znovu zoradíme všetky prvky zostupne podľa veľkosti

Táto procedúra sa dá považovať za zjednodušené znázornenie pohybu medzi dvoma mestami resp. obchodu medzi dvoma firmami.

2.2. Teoretické overenie modelu.

Predpokladajme, že $N \rightarrow \infty$. Potom hodnota i – toho prvku je takmer rovnaká ako $(i - 1)$ – vého prvku, teda $x_i \approx x_{i-1}$. Preto môžeme množinu premenných x_i považovať za spojitú premennú x . Teraz sa zamerajme na časový vývoj pravdepodobnostného rozdelenia x . Z výrazov (1) a (2) dostávame:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow (1 - \alpha) \cdot x \\x &\rightarrow x + \alpha \cdot x = (1 + \alpha) \cdot x\end{aligned}$$

Evolučná rovnica funkcie $P(x)$ je potom nasledujúca:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -2\gamma \cdot P(x, t) + \frac{\gamma}{1 - \alpha} \cdot P\left(\frac{x}{1 - \alpha}, t\right) + \frac{\gamma}{1 + \alpha} \cdot P\left(\frac{x}{1 + \alpha}, t\right) \quad (3)$$

kde $P(x, t)$ je pravdepodobnostná funkcia premennej x v čase t a γ je nejaká konštanta. Prvý výraz na pravej strane je tok z bodu x do bodov $(1 - \alpha)x$ a $(1 + \alpha)x$, kým druhý a tretí výraz predstavujú tok z bodov $x/(1 - \alpha)$ resp. $x/(1 + \alpha)$ do bodu x . Koeficienty $1/(1 - \alpha)$ a $1/(1 + \alpha)$ sú v rovnici (3) potrebné na zachovanie pravdepodobnosti. Aby sme si to overili integrujme (3) podľa x :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} P(x, t) dx = -2\gamma \int_0^{\infty} P(x, t) dx + \frac{\gamma}{1 - \alpha} \int_0^{\infty} P\left(\frac{x}{1 - \alpha}, t\right) dx + \frac{\gamma}{1 + \alpha} \int_0^{\infty} P\left(\frac{x}{1 + \alpha}, t\right) dx \quad (4)$$

$$\text{Nech } y = \frac{x}{1 - \alpha} \text{ a } z = \frac{x}{1 + \alpha}.$$

Po tejto substitúcii premenných môžeme zapísať (4) ako:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} P(x, t) dx = -2\gamma \int_0^{\infty} P(x, t) dx + \gamma \int_0^{\infty} P(y, t) dy + \gamma \int_0^{\infty} P(z, t) dz = 0$$

preto celková pravdepodobnosť je zachovaná.

Aby sme videli rovnosť (3) z iného uhla pohľadu urobíme substitúciu $v = \ln(x)$. Funkcia rozdelenia pravdepodobnosti je potom transformovaná na:

$$P(x, t)dx = P(e^v, t)e^v \cdot dv \equiv P'(v, t)dv$$

Inými slovami definujeme:

$$P'(v, t) = P(x, t)x = P(e^v, t)e^v \quad (5)$$

Nasledovným prepísaním P pomocou P' :

$$P(x, t) = e^{-v} \cdot P'(v, t) = (1/x) \cdot P'(\ln(x), t)$$

$$P(x/(1 + \alpha), t) = (1 + \alpha)/x \cdot P'(\ln(x/(1 + \alpha)), t) = (1 + \alpha)/x \cdot P'(v - \ln(1 + \alpha), t)$$

sa rovnosť (3) pretransformuje na :

$$\frac{\partial}{\partial t} P'(v, t) = -2\gamma \cdot P'(v, t) + \gamma \cdot P'(v + \beta_+, t) + \gamma \cdot P'(v - \beta_-, t) \quad (6)$$

kde $\beta_+ = -\ln(1 - \alpha) > 0$ a $\beta_- = \ln(1 + \alpha) > 0$.

Rovnica (6) sa dá chápať ako náhodný posun z v do $(v + \beta_+)$ a $(v - \beta_-)$ t.j. náhodný posun s fixovanou veľkosťou kroku. Aj keď sa rovnica (6) dá riešiť exaktne, je zrejmé, že jej stacionárny stav je v $P'(v, t) = \text{konšt.}$ keď $t \rightarrow \infty$. Spätnou zamenou premenných k $x = e^v$, dostávame $P(x, t) \propto x^{-1}$ keď $t \rightarrow \infty$, čo je Zipfov zákon.

Ako bolo vyššie ukázané, výsledné rozdelenie vždy spĺňa Zipfov zákon pokiaľ difúzia prvkov x je rovnomerná v logaritmickej mierke. Preto môžeme zovšeobecniť model spomenutý v prvej podkapitole. V ňom sme predpokladali, že nejaký prvok odovzdá časť svojho obsahu prvku umiestnenému o jedno miesto poradia nad ním, Ale po overení teoretického pozadia modelu už to nie je nutné. Model bude reprodukovat' Zipfov zákon, pokiaľ bude tok αx_i proporcionálny jeho veľkosti.

Tak napríklad nasledujúca procedúra bude tiež reprodukovat' Zipfov zákon:

1.) Náhodne vyberieme poradie prvku i z danej množiny pre $1 \leq i \leq N$

2.) Pridá, alebo sa odoberie množstvo αx_i z vybraného prvku:

$$x_i \rightarrow x_i + \alpha \cdot x_i, \text{ alebo}$$

$$x_i \rightarrow x_i - \alpha \cdot x_i$$

Dokonca v tejto procedúre ani nie je nutné, aby bola hodnota α fixovaná. Jej náhodným výberom v každom kroku z intervalu $\langle 0, 0.99 \rangle$ dostaneme podobné výsledky ako s fixovanou hodnotou α . V tomto prípade je však nutné obmedziť difúziu v prvkoch \mathbf{x} , lebo ináč $P(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ pri $t \rightarrow \infty$. Doporučené obmedzenie je $10^{-4} \leq x \leq 1$ [4].

Numerické demonštrácie faktu ktorý, sme tu podopreli teoreticky sa dajú nájsť vo viacerých prácach. Výsledky týchto ako aj našich numerických simulácií, v neskorších kapitolách popísaných, indikujú, že súčasné vysvetlenie Zipfovho zákona je aplikovateľné v širokej škále problematik, ako sociálnej tak aj prírodnej povahy.

3. Niektoré prístupy k riešeniu problematiky formovania mestských centier.

3.1. Priestorová konkurencia.^[5]

3.1.1. Základný model.

Tento model pracuje na 2-dimenzionálnej matici typu $L \times L$ s periodickými hraničnými podmienkami. Jej prvky sú očíslované $i = 1, \dots, N$. Každý z nich na začiatku predstavuje vlastne samostatné centrum označené $c(i)$, a teda $c(i) = i$ a navyše centier je na začiatku N .

Dynamika systému je taká, že v každom časovom kroku sa náhodne vyberie centrum $c(i)$, vymaže sa a toto prázdne miesto sa zaberie okolitými centrami. Presnejšie povedané: najskôr vyberieme i od 1 po N , potom, pokiaľ ešte existuje centrum s týmto poradovým číslom, tak sa vymažú všetky bunky ním obsadené – ďalej si ich budeme označovať ako „mŕtve“. Potom necháme okolité centrá, aby zabrali plochu mŕtvych buniek. Ináč povedané, mŕtve bunky si náhodne vyberú svojho suseda a ak je tento aktívny, teda nie mŕtvy, tak si priradia jeho číslo centra a tým sa k nemu pridajú. Tento proces sa opakuje znova a znova v rámci jedného časového kroku, pokiaľ neostanú žiadne mŕtve bunky. Až potom sa prejde do ďalšieho časového kroku a je vybraté ďalšie centrum pre vymazanie jeho obsahu.

Vo fyzike sa tento postup nazýva „domain coarsening scheme“ teda „postup zdrsňovania oblasti“. Zdôrazňujeme, že vyššie popísaný proces sa deje v rámci úplnej separácie časových úsekov, tzn., že ďalšie centrum sa vymaže až keď sa priradí posledný mŕtvy prvok matice. Ďalej budeme centrum s nenulovou (a teda > 0) veľkosťou nazývať aktívnym. Všimnime si, že pre vymazanie môže byť vybraté centrum ktoré už raz vymazané bolo, alebo tento takt môžeme vylúčiť.

Na základe tohoto môžeme uvažovať dve rôzne definície času v tomto systéme:

- 1.) **Prirodzený čas t** – v každom časovom kroku je pravdepodobnosť vybratia ktoréhokoľvek centra na vymazanie konštantná – $1/N$, kde $N = L \times L$ je

veľkosť systému. Tzn., že je možné vybrať centrum veľkosti 0. V tom prípade sa so systémom nedeje nič, len sa posunie čas z t do $t + 1$.

- 2.) Neprirodzený čas t'** – na vymazanie sa môžu vyberať len aktívne centrá. Potom v každom časovom kroku je pravdepodobnosť ktoréhokoľvek centra na vymazanie $1/n(t')$, kde $n(t') = N - t'$ je počet zostávajúcich aktívnych centier v systéme.

Aj keď dynamika takéhoto systému môže byť prirodzenejšie popísaná časom t' , autori tohoto modelu uprednostňujú použitie času t .

V každom konkrétnom časovom kroku je nejaká typická veľkosť centra. V prípade času t' , keďže je v systéme $n(t')$ aktívnych centier, je priemerná veľkosť centra $S(t') = N/n(t')$. Keď sa veľkosť centier spriemerovala pre všetky časové kroky objavil sa mocninový zákon [5]. Pre neprirodzený čas bol numericky blízko k $n(s) \approx s^{-3}$, resp. pre kumulovanú štatistiku $n(>s) \approx s^{-2}$, kde s je veľkosť centra, $n(s)$ je počet centier veľkosti s a $n(>s)$ je počet centier veľkosti väčšej ako s . V prípade, že berieme do úvahy prirodzený čas t , sú veľké zhľuky stabilnejšie, lebo čas sa pohybuje pomalšie smerom k skončeniu procesu zdrsňovania. Výsledkom je znova mocninový zákon, avšak s exponentmi v oboch prípadoch zväčšenými o 1. Tzn. $n(s) \approx s^{-2}$, resp. $n(>s) \approx s^{-1}$.

Dôležité je ale uvedomiť si, že toto nie je výsledok v stabilnom stave, ale je dosiahnutý spriemerovaním cez celú časovú evolúciu, začínajúcu s N centrami veľkosti 1 a končiacu s jedným centrom veľkosti N .

3.1.2. Celoplošné náhodné pridávanie centier.

Z pohľadu evolúcie, napríklad v ekonómii alebo biológii, by bolo priblížením sa k realite keby sa k procesom pôvodného modelu pridalo aj náhodné vsúvanie nových centier. Z hľadiska demografického vývoja by sa to dalo interpretovať ako vznikanie nových miest v priebehu času vďaka migrácii. Ide teda o možnosť pridávať ich na náhodné pozície v systéme. Takže v každom časovom kroku, pred vymazaním nejakého centra ako to bolo opísané vyššie, s pravdepodobnosťou p sa vyberie náhodná bunka (prvok matice) s číslom i a pridá sa do nej centrum veľkosti 1. Tzn., že preznačíme $c(i)$ v i . Tento krok bude nasledovaný klasickým vymazaním nejakého centra.

Tento algoritmus zachováva úplnú časovú separáciu medzi vymazávaním centier a ich rastom do mŕtvej zóny. V tejto podkapitole sa uvažuje výlučne s prirodzeným časom.

Pravdepodobnosť, že pridané centrum je skutočne nové (efektívna miera pridávania centier), je pravdepodobnosť p zmenšená pravdepodobnosťou výberu centra ktoré je ešte aktívne. Pravdepodobnosť výberu aktívneho centra je $n(t)/N$, kde $n(t)$ je znova počet zostávajúcich aktívnych centier. Ako dôsledok, efektívna miera pridávania centier je:

$$r_p = p - n(t)/N.$$

Podobne, efektívna miera vymazávania centier závisí na pravdepodobnosti výberu aktívneho centra. Tzn.:

$$r_v = n(t)/N.$$

Teda stabilný stav systému sa dosiahne, keď nastane rovnosť medzi pridávaním centier a ich vymazávaním :

$$n^*/N = p - n^*/N, \text{ z čoho } n^* = N.p/2,$$

kde n^* je počet aktívnych centier systému v stabilnom stave.

Z čoho dostávame, že priemerná veľkosť centra v stabilnom stave s^* je:

$$s^* = N/n^* = 2/p.$$

Rozdelenie veľkosti centier pre model v tejto sekcii je numericky blízke log-normálnemu rozdeleniu [5]. V kontraste s modelom v predošlej sekcii je toto výsledok dosiahnutý v stabilnom stave. Čo sa týka výsledného rozdelenia momentálne ani autori predlohy samotní nemajú poruke konzistentné vysvetlenie pre log – normálne rozdelenie v modeli z tejto časti. Jedno možné však predsa len ponúkajú: spočiatku sa najviac novopridaných centier veľkosti jeden nachádza v rámci hraníc nejakého staršieho a väčšieho centra. Môže nastať prípad, že toto väčšie a staršie centrum bude vymazané a novopridané centrá veľkosti jeden v ňom sa nachádzajúce sa zväčšia za účelom zabratia mŕtvej zóny po vymazanom väčšom centre. V priebehu tejto fázy rýchleho rastu je rýchlosť tohoto rastu proporcionálna perimetru priemerne veľkého centra a teda $s^{1/2}$, kde s je veľkosť tejto plochy. Preto $s^{1/2}$ sa správa podľa multiplikatívneho náhodného posunu, čo znamená, že $\ln(s^{1/2}) = \ln(s)/2$ sa správa podľa aditívneho náhodného posunu. Dôsledkom toho, keď sa zastaví proces rastu bude $\ln(s)$ normálne rozdelený, a teda s samotné bude rozdelené lognormálne. Aby toto

fungovalo, bolo by potrebné, aby sa proces rastu zastavil v približne rovnakom čase pre všetky zahrnuté centrá, a to vďaka tomu, že typická vzdialenosť medzi miestami pridávania je inverzne proporcionálna miere pridávania.

3.1.3. Náhodné pridávanie centier na priamke.

Možno je intuitívne jasné, že pridávací mechanizmus modelu z podkapitoly 3.1.2. neguje výsledok modelu bez náhodného pridávania centier z podkapitoly 3.1.1., ktorým je mocninový zákon. Existuje ale pridávací proces ktorý generuje stabilný stav pri zachovaní mocninového zákona. Takýmto je náhodné pridávanie centier do matice s ktorou pracujeme len pozdĺž 1-d priamky. Teda na rozdiel od celoplošného náhodného pridávania v podkapitole 3.1.2. teraz napevno stanovíme, že:

$$c(i) = i$$

pre všetky bunky pozdĺž danej priamky. V tomto prípade nájdené numerické riešenie [5] skutočne predstavuje mocninový aj keď síce nie Zipfov zákon, konkrétne :

$$n(s) \approx s^{-1,5}, \quad \text{resp.} \quad n(>s) \approx s^{-0,5}.$$

Keďže pridávací mechanizmus tu nezávisí od času, a keďže rozdelenie veľkosti centier je stacionárne, je nezávislé aj na definícii času, ktorá bola v predchádzajúcich prípadoch dôležitá.

3.1.4. Formovanie cien.

Napriek tomu, že sa táto podkapitola nebude presne zaoberať problematikou formovania sa miest a ich rozdelenia podľa veľkosti ale formovaním sa cien v ekonomike, uvádzam ju ako dobrý príklad riešiteľnosti širokej škály problémov pomocou prístupov rozoberaných v tejto práci. Uvedený model bude len jednoduchý a nebude sledovať množstvo detailov veľmi komplexnej obchodnej činnosti v reálnom svete.

V princípe teda ide o pridanie mechanizmu formovania cien do modelu priestorovej konkurencie ktorý bol vo viacerých variantoch popísaný vyššie. Jednotlivé prvky matice v ktorej pracujeme budeme teraz považovať za zákazníkov – konzumentov. Centrá, teda zhľuky prvkov korešpondujú so skupinami zákazníkov ktorí nakupujú u jedného producenta. Intuitívne je jasné ako to bude fungovať: producenti, ktorí nie sú schopní konkurencie odídu z podnikania a ich zákazníci budú prebraní

ostatnými spoločnosťami. Redukcia počtu predávajúcich spoločností bude vyrovnávaná prostredníctvom pridávania začínajúcich producentov. Producenti môžu skončiť s podnikaním v princípe z dvoch príčin: strata priveľa peňazí alebo strata príliš veľa zákazníkov. Prvá príčina korešponduje s príliš nízkou cenou výrobkov a druhá s príliš vysokou.

Predpoklady modelu sú rovnaké ako v predošlých podkapitolách: znovu máme maticu s N prvkami typu $L \times L$ s periodickými hraničnými podmienkami. V každom prvku máme zákazníka a producenta. Títo však nie sú spojení v nijakom zmysle okrem priestorovej pozície. Firmy, ktoré majú zákazníkov sa nazývajú aktívne, tie ostatné neaktívne. Časový krok pozostáva z nasledujúcich podkrokov:

- sú vykonané obchody
- spoločnosti s negatívnym ziskom sa zatvárajú
- zostávajúce spoločnosti menia ceny
- sú pridané nové spoločnosti
- spotrebitelia môžu zmeniť spoločnosť u ktorej budú ďalej nakupovať

Ďalej opíšeme jednotlivé kroky podrobnejšie:

Vykonanie obchodov: Všetci zákazníci majú začiatkové množstvo peňazí M , ktoré celé minú v jednom časovom kroku a v ďalšom bude znovuobnovené. Každý zákazník tiež vie, od ktorej spoločnosti $j = f(i)$ nakupuje. Teda v každom časovom kroku obdrží za objem M peňazí množstvo výrobkov $Q_i = M/P_j$, kde P_j je cena výrobku u danej spoločnosti. Nech má táto spoločnosť n_j zákazníkov. Bude teda produkovať a predávať $Q_j = n_j \cdot M/P_j$ výrobkov a zozbiera za ne $n_j \cdot M$ jednotiek peňazí.

Odstúpenie stratových spoločností: Predpokladajme externe zadanú nákladovú funkciu pre produkciu $C(Q)$, ktorá je pre každého producenta rovnaká. Ak zisk

$$\Pi_j = n_j \cdot M - C(n_j \cdot M/P_j)$$

je záporný, potom spoločnosť stráca peniaze a ihneď končí podnikanie (vymazávanie centier). V tomto modeli nie je samozrejme pripustená žiadna akumulácia aktív. Hodnota ceny výrobku takejto spoločnosti bude umelo stanovená ako ∞ . Nákladová funkcia nami použitá bude lineárna. Dôsledkom toho spoločnosti s cenou $P_j < 1$ ihneď skončia s podnikaním akonáhle pritiahnu aspoň jedného zákazníka.

Zmena cien: Náhodne vyberieme hodnotu medzi 1 a N . Ak je na tej súradnici aktívna spoločnosť s týmto číslom, jej cena sa náhodne zvýši alebo zníži o d .

Pridávanie nových spoločností: Spoločnosti sa stávajú aktívnymi ak pritiahnu aspoň jedného zákazníka. S pravdepodobnosťou p náhodne vyberieme miesto na súradnici i a zákazníka j pošleme nakupovať do spoločnosti i . Cena za ktorú bude tento spotrebiteľ v danej spoločnosti nakupovať bude pôvodná za akú nakupoval náhodne zväčšená alebo zmenšená o d .

Adaptácia zákazníka: Všetci zákazníci, ktorých ceny sa zvýšili, či už z dôvodu odchodu ich bývalej spoločnosti z podnikania, alebo kvôli zmene cien si budú hľadať novú spoločnosť. Títo hľadajúci konzumenti korešpondujú s mŕtvymi zónami z modelu priestorovej konkurencie a ich dynamika bude vyzerat' nasledovne: všetci súčasne si náhodne vyberú najbližšieho suseda. Ak aj tento hľadá spoločnosť tak sa nič nedeje a hľadanie pokračuje ďalej. Ale ak nie a jeho sused platí nižšiu sumu, tak náš hľadajúci konzument sa pripojí k spoločnosti jeho suseda. Toto sa bude opakovať kým nezostanú žiadni hľadajúci zákazníci.

V takomto modeli bude cena konvergovať k jednotkovej cene produkcie, ktorá je kompetitívnou cenou. Jeho dynamika sa neopiera o teóriu racionálnych predpokladov, nakoľko firmy menia ceny náhodne a končia s podnikaním bez varovania keď stratia peniaze. Nové spoločnosti sú pridávané ako malé variácie existujúcich väčších. Zákazníci menia spoločnosti u ktorých nakupujú len keď musia tzn., že buď ich spoločnosť zanikla (nekonečne vysoká cena) alebo sa im zdvihli ceny, pričom len v poslednom prípade z nich prichádza do úvahy reálne porovnanie cien. Na identifikovanie spôsobu ako sa hľadá informácia o alternatívnych miestach na obchodovanie tu bolo použité modelovanie na rovine v čase,. Toto „ochraňuje“ tento model pred singularitami modelov Bertrandovho štýlu, kde podiel každej spoločnosti na trhu nezávisí od minulosti, čo môže viesť k nereálne veľkým fluktuáciám. Za týmto všetkým sa však dá pozorovať rozdelenie firiem podľa veľkosti správajúce sa podľa mocninového zákona, čo je predmetom nášho záujmu.

3.2. Zovšeobecnený model Lotka - Volterra.[3]

3.2.1. Teoretické pozadie.

Podľa svojich tvorcov má tento model nasledujúce výhody:

- 1.) zaručuje stabilný exponent α mocninového zákona $P(w) \approx w^{-1-\alpha}$ dokonca pri prítomnosti veľkých fluktuácií parametrov.
- 2.) hodnota $a(t)$ a priemerný majetok $w(t)$ sa môžu meniť v priebehu času a samozrejme medzi nimi bez vplyvu na exponent α .
- 3.) $a(t)$ typicky nadobúda hodnoty aj menšie aj väčšie ako 1

Uvažujeme N obchodníkov, z ktorých každý má majetok w_i , $i = 1, \dots, N$ a tento sa vyvíja v čase podľa nasledovnej rovnice:

$$w_i(t+1) = a(t) \cdot w_i(t) + b(t) \cdot w(t) - c(t) \cdot w(t) \cdot w_i(t) \quad ,$$

kde $w(t)$ je priemerný majetok v čase t , ktorý zastupuje výmenu medzi jednotlivcami:

$$w(t) = (w_1(t) + w_2(t) + \dots + w_N(t))/N \quad ,$$

$a(t)$ je kladná náhodná premenná s rozdelením pravdepodobnosti $p(a)$. V demograficky založenej interpretácii to môže byť miera prirodzeného prírastku obyvateľstva v systéme. Podľa vzťahu s reálnym svetom by mala nadobúdať hodnoty blízke 1 sprava, ale samozrejme sú na svete aj regióny kde by $a(t)$ systematicky a dlhodobo nadobúdala hodnoty menšie ako 1. Koeficienty b a c sú vo všeobecnosti funkcie závislé od času zachycujúce meniace sa podmienky v prostredí.

Koeficient b vyjadruje auto - katalytickú vlastnosť majetku resp. populácie t.j. reprezentuje majetok ktorý jednotlivec ako člen spoločnosti v platbách, službách a sociálnych príspevkoch. To je príčina prečo je to proporcionálne priemernému majetku v spoločnosti (v matici). Jeho hodnota by mala byť rádovo menšia od a kvôli porovnaniu významnosti vplyvu spoločnosti s vplyvom snahy jedinca samotného. V našom prípade sme v simuláciách odskúšali rôzne hodnoty tohoto koeficientu. Tieto sa ustálili zhruba na intervale 0,05 až 0,15.

Koeficient c má pôvod v konkurencii medzi jednotlivcom a zvyškom spoločnosti. Má efekt obmedzovania rastu $w(t)$ na hodnoty odôvodnené pre momentálne podmienky a zdroje. Jeho hodnoty museli kompenzovať vysokú hodnotu súčinu $w(t) \cdot w_i(t)$ oproti ostatným členom a teda sa pohybovali okolo 10^{-3} .

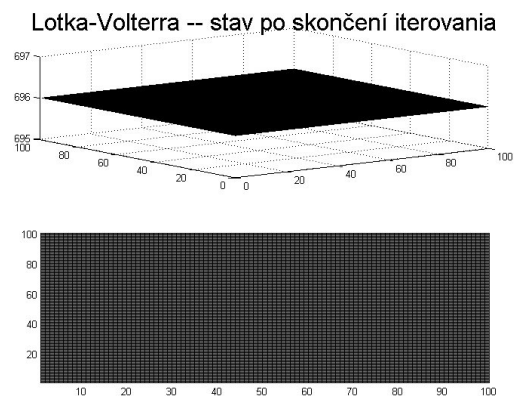
3.2.2. Výstavba modelu a numerické simulácie.

Keďže sme sa ohľadom tohto modelu dostali len k článkom popisujúcim jeho teoretické odvodenie a overenie, nemali sme žiadny záchytný bod pri stavbe programu potrebnom na úspešné prevedenie numerických simulácií. Teda až na rovnicu vývoja, ktorá je uvedená vyššie. Všetky technické detaily sme si teda museli pripraviť a odskúšať len s provizórnymi predpokladmi. Zrejme aj toto bol jeden z dôvodov neuspokojivých výsledkov dosiahnutých v našich simuláciách. Napriek tomu, že sme podľa nášho názoru postupovali podľa rozumných predpokladov nepodarilo sa program doladiť do tej podoby aby, reprodukoval model podľa našich predstáv. Napriek negatívne výsledku ale uvádzame aspoň skúsenosti s jeho stavbou, ktoré možno raz pomôžu pri správnom určení všetkých aspektov a detailov potrebných na úspešné spustenie a analyzovanie simulácií založených na zovšeobecnenom modeli Lotka – Volterra. Výpis tohto programu je pripojený ako Príloha č.1.

Simulácie sme prevádzali na štvorcovej matici s rozmermi 100×100 . Pred spustením iterácií sme každý prvok matice obsadili populáciou, ktorej objem bol vybraný z rovnomerného rozdelenia s určitou strednou hodnotou a s určitým rozptylom, pričom, keďže sme modelovali vývoj objemu populácie, museli sme tento proces ošetriť proti záporným hodnotám. Ak sa takéto vyskytli, vynulovali sme obsah dotyčnej bunky. Samotný tvar rovnice vývoja systému neskôr zabezpečoval, že po takomto ošetrení na začiatku procesu a rozumnom zvolení koeficientu c sa už neskôr záporné hodnoty v matici nemohli vyskytnúť. V priebehu iterovania sa v každom časovom kroku vyberali hodnoty koeficientov \mathbf{a} , \mathbf{b} a \mathbf{c} náhodne z rovnomerného rozdelenia rozloženého v rozumných intervaloch okolo hodnôt, ktoré sme už vyššie spomenuli. Na obr.č.1 je zachytený stav systému po náhodnom osadení matice počiatočnou populáciou. Na obr.č.2 potom výsledok dosiahnutý vo všetkých simuláciách uskutočnených pomocou nášho programu bez ohľadu na rôzne zmeny vstupných koeficientov \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} a iné menšie modifikácie v programe. Na ďalších obrázkoch je zachytený vývoj systému z rôznych aspektov, spejúci k úplnému zahladeniu akýchkoľvek nehomogenít medzi bunkami.

V tomto prípade hlavnú úlohu zohrali difúzne javy, ktoré prevážili nad všetky ostatné vplyvy v modeli a výsledkom bola rovnaká populácia vo všetkých bunkách matice.

Obrázok č.1

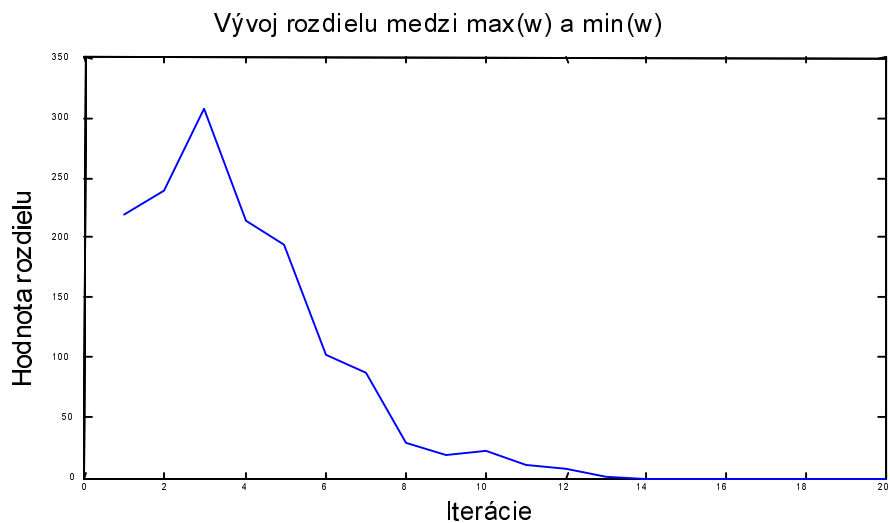


Obrázok č.2

Na preukázanie veľmi neuspokojivého správania sa modelu počas simulácií sme vybrali dve kritériá, ktoré v nasledujúcom dokladáme aj graficky.

Logicky prvým a najdôležitejším z nich je vybratý časový vývoj rozdielu medzi maximálnym majetkom $\max(w_i(t))$ a minimálnym majetkom jednotlivcov $\min(w_i(t))$. Vďaka tomu na grafe na obr.č.3 zreteľne vidieť nepochybný sklon k zahladeniu

akýchkoľvek rozdielov v hodnotách prvkov matice už okolo 13. iterácie. Celkovo sa tento sklon k definitívnemu zahľadeniu prejavoval od 12. po 16. iteráciu. Z tohto stavu sa už systém potom nedostal a zotrval v ňom až do skončenia v ľubovoľnom čase.



Obrázok č.3

Ďalším je časový vývoj celkového objemu populácie v systéme (Obr.č.4), ktorý síce spočiatku pomerne rovnomerne rástol ale v celom ďalšom priebehu simulácií kolísal bez nejakého zreteľného sklonu ku konvergencii k nejakej hodnote, alebo stabilizovaní sa v nejakom časovom vzore resp. intervale. Celkový objem populácie dokonca vždy kolísal ešte aj v iteráciách po vyššie spomenutom úplnom zahľadení celého systému na rovnakú hodnotu čo sa vždy udialo najneskôr okolo 16. iterácie.



Obrázok č.4.

Zahľadenie rozdielov medzi jednotlivými prvkami matice vlastne úplne vylúčilo naše ďalšie skúmanie modelu, nakoľko náš základný cieľ – ktorým bolo sledovanie

morfologického a dynamického vývoja nehomogenít v osídlení nejakej oblasti bol tým pádom už vo svojej podstate nespĺniteľný. V tomto štádiu sme od sledovania tohto modelu upustili a venovali sme sa výlučne modelu ktorému je venovaná nasledujúca kapitola.

4. Dvojkrovový difúzne – reakčný model. [2]

4.1. Teoretické pozadie modelu.

Tento v čase aj v priestore diskretný model pracuje na matici typu $n \times n$ s otvorenými hraničnými podmienkami, v ktorej každý prvok s pozíciou i, j v čase t symbolizuje malú jednotku priestoru v kontexte matice ako „krajiny“. V ďalšom budeme populáciu každej takejto bunky označovať ako $m(i, j, t)$. Idea časového vývoja modelu pozostáva z nasledujúcich dvoch po sebe idúcich krokov ktoré sa odohrajú v jednej časovej iterácii (odtiaľ dvojkrovový model) v nasledovnom poradí:

1.) **Difúzia.** Reprezentuje prirodzený sklon k „rozptyľiteľnosti“ populácie kvôli vyhnutiu sa príliš vysokej hustote populácie na jednom mieste. Príliš vysoká hustota je však len relatívny pojem, nakoľko je zrejmé, že vo väčších centrách sa môžu vytvoriť miesta s vyššou hustotou populácie ako v menších centrách vďaka ich väčšej príťažlivosti pre okolitú populáciu. V našom modeli to znamená, že v každom časovom kroku stratí každý prvok matice (ďalej bunka) zlomok α zo svojho obsahu. Táto časť o ktorú bunka príde je ihneď rovnomerne rozdistribuovaná medzi bunky ktoré s ňou susedia. Presnejšie tento proces možno vyjadriť vzťahom:

$$m(i, j, t + \frac{1}{2}) = (1 - \alpha).m(i, j, t) + (\alpha/4). \sum_{\langle k, l \rangle} m(k, l, t)$$

kde $\langle k, l \rangle$ indikuje sumáciu cez množinu susediacich buniek. Tzn., že bunka nachádzajúca sa v rohu matice susedí s dvomi, bunka nachádzajúca sa na krajnom riadku alebo stĺpci ale nie v rohu s tromi a bunka vo vnútri matice so štyrmi bunkami. Označenie $t + \frac{1}{2}$ je pomocné a len ním zdôrazňujeme že difúzia sa odohráva ako prvá v časovom kroku. Príčina prítomnosti difúzie je zrejmá a jej interpretáciou je v úvode spomenutý druhý mechanizmus rastu mesta a to migrácia.

2.) **Reakcia.** Každá bunka znásobí s pravdepodobnosťou p svoj obsah multiplikátorom p^{-1} a s doplnkovou pravdepodobnosťou $(1-p)$ svoj obsah stratí.

Toto sa dá vyjadriť vzťahmi:

$$\begin{aligned} m(i, j, t + 1) &= p^{-1} \cdot m(i, j, t + 1/2) \text{ s pravdepodobnosťou } p \\ m(i, j, t + 1) &= 0 \quad \quad \quad \text{s pravdepodobnosťou } 1-p \end{aligned}$$

Všeobecne sa v reakčnom kroku vyskytujú dva parametre: p ($0 < p < 1$) a q ($0 \leq q \leq 1$). S ktorými vyzerá matematicky zapísaná reakcia nasledovne:

$$\begin{aligned} m(i, j, t + 1) &= (1 - q) \cdot p^{-1} \cdot m(i, j, t + 1/2) \text{ s pravdepodobnosťou } p \\ m(i, j, t + 1) &= q \cdot (1 - p)^{-1} \cdot m(i, j, t + 1/2) \text{ s pravdepodobnosťou } 1-p \end{aligned}$$

Kvôli symetrii možných výstupov pre $m(i, j, t + 1)$, hodnota q môže byť obmedzená na interval $\langle 0, 1/2 \rangle$. Avšak nami modelovaný proces je zovšeobecnenie Zeldovičovho modelu prerušovania [6] kde $q = 0$. V tomto modeli, ktorý bol mimochodom vypracovaný pre prípad spojitého času a priestoru sa dokázalo, že difúzia nie je schopná v nízkodimenzionálnom modeli nášho typu negovať prerušovania generované reakciou. Práve reakcia je príčinou divergencie populačných momentov: $\mu_k(t) = \sum_x n(x, t)^k$, kde $k > 1$. Táto divergencia, ktorá matematicky charakterizuje prerušovanie je spojená s formovaním nehomogéní v rozdelení populácie, ktoré sú napokon podstatou našej práce. S uvažovaním parametra q s malou hodnotou ($q \ll 1-p$) sa v matici objavujú výrazne ostrejšie extrémny s rastúcou výškou objemu populácie na miestach s favorizovanou polohou, pričom na ostatných zostávajúcich súradniciach, ktorých počet s časom rastie, populácia rapídne klesá. Dynamika je v tomto prípade silne ovplyvňovaná fluktuáciami.

Aj keď difúzia môže byť ľahko implementovaná v numerických simuláciách, analytický problém, ktorý sa môže zapísať ako reakčne - difúzna rovnica s vyššie popísanou stochastickou reakčnou časťou, je ale komplikovane riešiteľný v dvojdimenzionálnom priestore [2]. V podstate sú známe len niektoré všeobecné vlastnosti jeho riešenia. Preto sa v modeli s ktorým pracujeme uvažuje len zjednodušená verzia difúzie, ktorá je popísaná vyššie.

Parametre α a p popisujú sociálne podmienky vývoja mesta (do toho sa dá zahrnúť ekonómia mesta, urbanizačné plánovanie, miera pohybu v danej krajine smerom do mesta atď.). Intuitívne je zrejmé že v oblastiach s nižším prírastkom obyvateľstva a starou urbanizačnou tradíciou ako napríklad Západná Európa bude p blízke 1 a α blízke 0. Pričom u miest v oblastiach v väčšom pohybe obyvateľstva, veľkým prírastkom, ktorý samotný mimoriadne dynamizuje demografickú situáciu v krajine kde mestá sú nútené absorbovať podstatne väčšie počty migrujúcich, ako napríklad Juhovýchodná Ázia resp. Subsaharská Afrika, budú hodnoty p nižšie a hodnoty α vyššie. V najvšeobecnejšom prípade by sa mali hodnoty p a α meniť s časom v stochastickom zmysle, no v našom modelovaní sme použili fixované hodnoty.

Následkom iterovania pomocou vyššie spomenutých krokov je formácia zhlukov obývaných buniek, ktoré môžeme nazvať centrami. Tieto zhluky sú definované ako množiny navzájom spojených buniek s nenulovou populáciou. Vo všeobecnosti platí, že čím väčší zhluk tým je v čase stabilnejší. Tento intuitívne jasný fakt sa potvrdil aj v našich simuláciách. Toto je následkom toho, že v okolí bunky postihnutej reakciou (t.j. bunky ktorej obsah sa v reakčnom kroku vymaže) sa nachádza dostatok buniek schopných jej v nasledujúcom časovom kroku vďaka difúzii odovzdať časť svojho obsahu a teda bude zachovaná celistvosť zhluku. Je zrejmé, že čím bude diameter tohoto zhluku väčší tým bude lepšia možnosť vzájomnej podpory u buniek. Najväčšie zhluky sú v čase naozaj stabilné a v našom modelovaní pretrvali celú dobu pozorovania.

4.2. Výstavba modelu.

Samozrejme sú možné rôzne interpretácie vyššie spomenutých princípov difúzne – reakčného modelu. My sme na základe rozumných predpokladov [2] postupovali nasledovne:

- v každom čase t a s malou pravdepodobnosťou p_n v našom prípade rovnou 0,02 sú náhodne vybrané prázdne bunky a je do nich dosadená populácia Δm ktorej objem je vybraný náhodne z rovnomerného rozdelenia z intervalu $\langle 0,100 \rangle$
- v každom čase t je náhodne vybrané konštantné množstvo Q (u nás 10) buniek do ktorých je ešte dosadená populácia Δm na základe rovnakých princípov ako vyššie. Tento krok je nutný na udržanie dynamických vlastností modelu

-- v každom čase t po aplikovaní predchádzajúcich pravidiel je redistribuovaná celková populácia podľa pravidiel difúzne - reakčného procesu, ktoré boli diskutované v predchádzajúcej časti. Nami použité hodnoty parametrov p a α sú 0,75 resp. 0,25.

Konkrétna voľba parametrov p_n , Q a Δm neovplyvní štatistické vlastnosti systému pokiaľ je pridávanie ďalšej populácie do systému dostatočne pomalé.

Presnejšie, ak uvážime celkový objem populácie $N(t) = \sum_{i,j=1}^L m(i, j, t)$, kde L je celkový

počet buniek s nenulovou populáciou, znamená pomalé pridávanie populácie $Q \cdot \Delta m \ll N(t)$. Táto podmienka nie je splnená len v počiatočných štádiách formovania centier a pre naše hodnoty bude vždy splnená pre veľké t . Čo sa týka obsadzovania prázdnych buniek populáciou je potrebné aby bolo p_n dostatočne malé. Stupeň schopnosti novo obsadenej bunky stať sa centrom by totiž na základe reálnych dát mal klesať pretože už sa v systéme nachádza minimálne jedno veľké centrum, ktoré pohlcuje pridávanú populáciu.

4.3. Analýza výsledkov.

Rozmer matice nami používanej je 500×500 a počet iterácií $t = 500$. Tieto hodnoty sú dostatočné na preukázanie štatistických vlastností modelu a zároveň maximálne z dôvodov časovej náročnosti počítačových simulácií. Z dôvodov vizualizácie sme do stredu matice umiestnili pred začiatkom iterovania už vytvorené centrum s rozmermi strán 10×10 a hodnotami populácie v jednotlivých bunkách vybratých podľa rovnomerného rozdelenia z intervalu $\langle 0,100 \rangle$. Toto centrum si zachovalo existenciu počas celého trvania simulácie a dokonca pôsobilo ako dominantné (malo najvyšší počet populácie a najväčšiu obsadenú plochu). Aj keď na základe pozorovaní v $t = 100$, $t = 200$ atď. sa jeho dominancia oslabovala silnejšími centrami vzniknútými v priebehu simulácie, vždy si udržalo svoju pozíciu až do konca. Celkovo bola zrejماً tendencia modelu k decentralizácii ale len v tom zmysle, že sa prejavoval sklon k preberaniu pozície nejakého centra iným. Samotné členenie systému na centrá a slabo osídlené časti bolo vždy zreteľné. Na obrázku č.5. je zachytený stav systému po skončení iterovania .

Obrázok č.5

Na základe definície centra (navzájom spojené bunky s nenulovou populáciou, pričom za spojené bunky považujeme bunky navzájom priľahlé v smere hlavných svetových strán ale nie po diagonálach) sme však museli po skončení iterovania upraviť model z dôvodu osídlenia všetkých buniek aj keď väčšinou malou, ale predsa nenulovou populáciou. Pričom toto osídlenie sa uskutočnilo už vo veľmi skorom štádiu. Preto sme zvolili nasledovný umelý krok: vo výstupe simulácie ktorým bola matica s rozmiestnením populácie sme uskutočnili rez rovinou rovnobežnou so základňou vo výške zodpovedajúcej hodnote $(\max(m(i, j, 500)) - \min(m(i, j, 500))) / 10$. Pričom bunkám nachádzajúcim sa pod touto hranicou sme priradili nulové hodnoty a bunkám nad ňou zostali pôvodné po odpočítaní hodnoty úrovně tohto rezu. Tým sme docielili dostatočné „zdisjunktnenie“ jednotlivých centier a následne sprístupnili možnosť ich ďalšej analýzy.

Najskôr bola teda potrebná spoľahlivá identifikácia centier a ich vzájomné odlíšenie. V obrázku č.6 sú jednotlivé centrá farebne odlišené v šesťfarebnom spektre. V tejto konkrétnej simulácii zachytenej na obrázku sa ich tam nachádza 3102. V strede obrázku je zreteľné umelo od začiatku nasadené centrum správajúce sa ako dominantné. Ostatné centrá sú priestorovo rozložené približne rovnomerne.

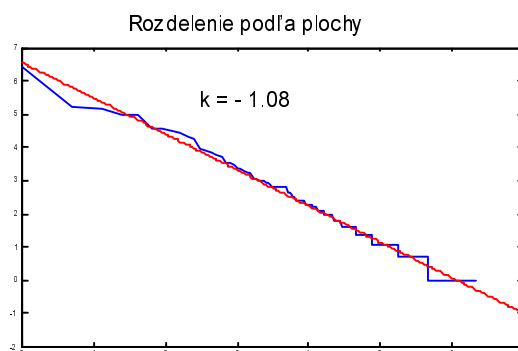
Obrázok č.6

Následne v nich bola v každom osobitne spočítaná populácia a ich plocha. Po ich zoradení podľa veľkosti objemu populácie resp. plochy bolo možné graficky znázorniť závislosť logaritmu populácie resp. plochy v závislosti od logaritmu poradového umiestnenia príslušného centra v rebríčku podľa veľkosti(Obr.č.7).



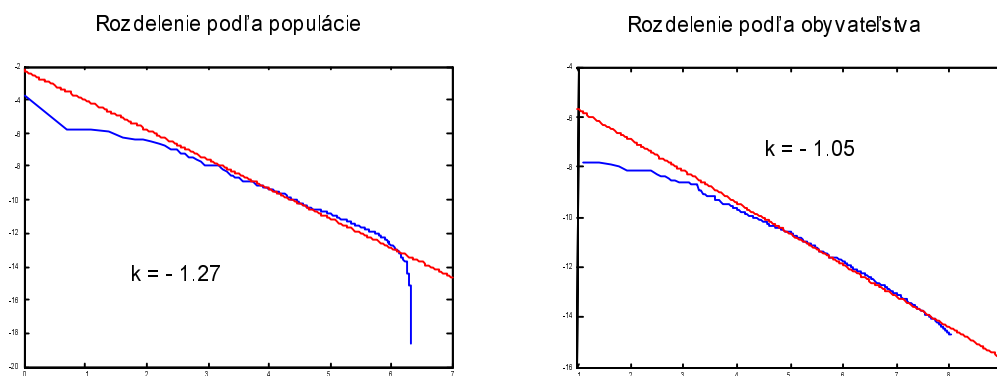
Obr.č.7

Z grafov je evidentné, že náš pokus bez výhrad potvrdil predpokladanú závislosť (Zipfov zákon) u rozloženia centier podľa veľkosti plochy (Obr.č.7 – vpravo) ktorú zaberajú. Schodovitosť grafu v jeho koncovej časti je spôsobená mnohopočetnosťou centier s malou plochou, u nás konkrétne s plochou jednej, dvoch až po zhruba šesť buniek. Potom sa schodovitosť stráca z dôvodu jemnejšieho členenia počtu centier v závislosti od ich plochy a centrálna časť grafu, ktorá je pre nás najilustratívnejšia a pre súvislosť modelu s reálnym svetom aj najdôležitejšia, naberá veľmi zreteľne lineárny trend so sklonom veľmi blízkym -1 čo samo o sebe v dostatočnej miere potvrdzuje platnosť Zipfovho zákona. Hodnota v ľavej časti grafu ktorá ďaleko prevyšuje za ňou nasledujúce hodnoty predstavuje najväčšie centrum ktoré je veľmi dobre pozorovateľné taktiež v podobných grafoch zostrojených z reálnych dát. V obrázku č.8 je zobrazená aj rovná čiara, ktorá je fitovacou priamkou nami získaných hodnôt so sklonom $-1,08$.



Obrázok č.8

Graf závislosti logaritmu (Obr.č.9) celkovej populácie jednotlivých centier od logaritmu ich umiestnenia v poradí podľa veľkosti má niektoré podobné znaky ako predchádzajúci graf. Hodnota v ľavej časti grafu ktorá ďaleko prevyšuje za ňou nasledujúce hodnoty je totožná s hodnotou v predchádzajúcom grafe a taktiež výborne korešponduje so skutočnosťou. Koncová časť vyzerá ináč a jej tvar rýchlo klesajúcej krivky je interpretovaný tým, že v modeli sa vytvorilo málo centier s veľmi nízkou populáciou. Tento fakt je ale rovnako zachytený aj v reálnych dátach [7]. Totiž v skutočnosti majú ľudia sklon združovať sa do sídiel s aspoň približne päťdesiatimi obyvateľmi. Takáto komunita totiž dokáže lepšie zabezpečiť ekonomické, technické a sociálne potreby jej obyvateľov vďaka nožnej špecializácii práce a rôznym iným sociálnym faktorom, ako spoločenstvo s malým počtom (napríklad do desať) obyvateľov. A znova najdôležitejšia centrálna časť má rovnomerný priebeh so zreteľným lineárnym trendom so sklonom fitovacej priamky $-1,05$. Konkrétna hodnota jej sklonu pre celý definičný obor je v našom prípade $-1,27$ a je zachytená v nasledujúcom grafe, netreba však zabudnúť, že ako sme už vyššie spomenuli, je táto hodnota skreslená pravou časťou grafu. Kvôli odstráneniu tohto vplyvu je priložený aj fitovaný graf bez špeciálne sa chovajúcej koncovaj a začiatocnej časti grafu.



Obrázok č.9

Z našej simulácie aj z reálnych dát je zřejmé, že celková populácia centier aj celková nimi urbanizovaná plocha rastie s časom. Aj keď je nová populácia pridávaná viac-menej rovnomerne zistili sme, že sa organizuje takým spôsobom, že na základe dynamických vlastností modelu jeho celková populácia rastie proporcionálne s časom, t.j. $N(t) \propto t$. Pri našich predpokladoch, keď sme sa rozhodli neobmedzovať maximálny možný objem populácie v jednej bunke sa matica nenasycuje ani pri vysokom počte

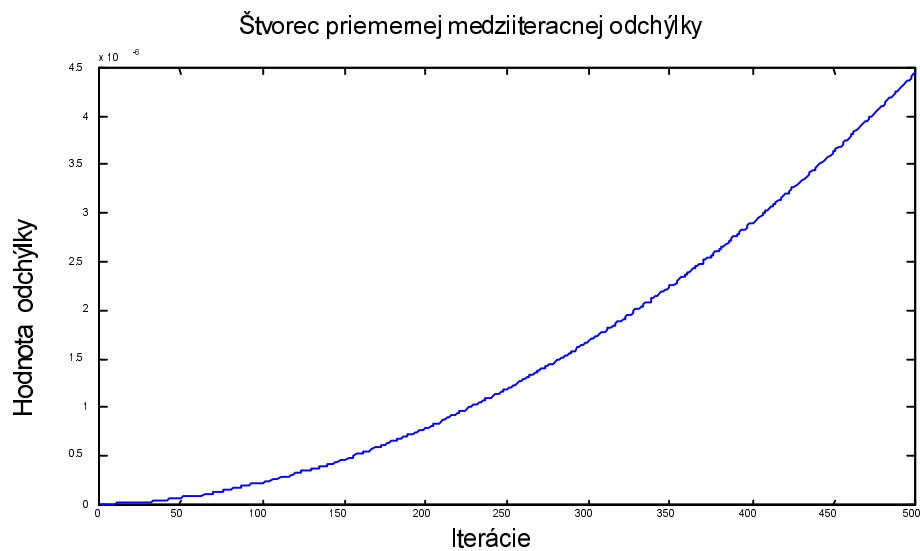
iterácií, napriek tomu, že v neskorších štádiách je prírastok celkovej populácie pomalší kvôli tomu, že dôležitejšiu úlohu získava úbytok populácie cez hranice matice. Navyše sa v neskorších štádiách objavujú fluktuácie ako dôsledok priestorového prerušovania spôsobeného reakčnou časťou časového kroku. Z dôvodu sledovania vývoja morfológie modelu, inými slovami, či speje k nejakému rovnovážnemu stavu, sme sledovali vývoj priemernej medziiteračnej odchýlky od predošlej hodnoty v bunkách, konkrétne jej druhej mocniny. Druhej mocniny kvôli tomu, lebo sme chceli zachytiť zmenu morfológie systému a nie absolútnu hodnotu tejto zmeny. Presnejšie zapísané to vyzerá nasledovne:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i,j} (m(i, j, t) - m(i, j, t - 1))^2}{n^2}$$

$m(i, j, t)$ – objem populácie každej jednotlivéj bunky

n^2 – rozmer matice

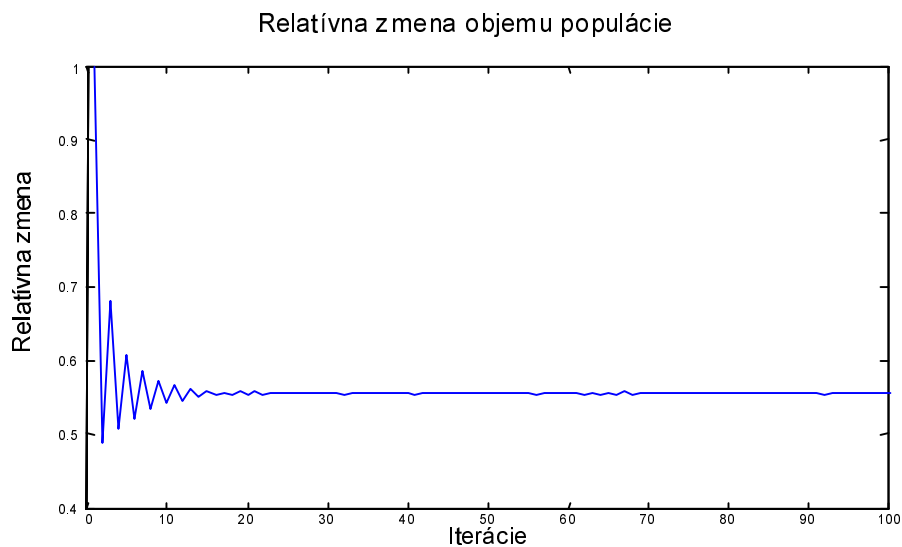
Jej priebeh pri našej simulácii naznačuje, že systém nespeje k rovnovážnemu stavu, ale je v ňom výrazný sklon k už vyššie spomenutej decentralizácii. Ináč povedané morfológia systému sa stáva zložitejšou s rastúcim časom. Je znázornená v nasledujúcom obrázku:



Obrázok č.10

Ďalším dôležitým faktorom ohľadom pozorovania dynamických vlastností modelu je miera pribúdania celkovej populácie. Táto sa dá vhodne vyjadriť ako podiel celkovej novopribudnutej populácie k celkovému objemu populácie v realizovanej iterácii. Znázornením časového priebehu v takejto forme je veľmi dobre sledovateľná zmena v tempe rastu. Z obr.č.11 je zrejmé, že po počiatočnom kolísaní zmeny sa táto už okolo 25-jej iterácie stabilizuje, čo sme otestovali na viacerých realizáciách modelu, a pri nami používaných hodnotách parametrov v modeli sa stabilizuje konkrétne na hodnote cca. 0,55 a ani pri vysokom počte iterácií nevykazuje známky poľavovania a ďalej rastie veľmi rýchlym tempom. Toto spolu s predchádzajúcim zistením potvrdzuje, že populácia v našom systéme bude rásť nad všetky medze. Celkovo pri zhladnutí obr.č.11 pripomína z fyziky známe tlmené kmitanie struny. Matematicky zapísaná vyzerá miera pribúdania celkovej populácie nasledovne:

$$\delta = \frac{\sum_{i,j} (m(i, j, t) - m(i, j, t - 1))}{\sum_{i,j} (m(i, j, t))}$$



Obrázok č.11

Z dôvodov vizualizácie a s vedomosťami z predchádzajúcich zistení sme pristúpili k ďalšej modifikácii modelu a to v tom, že sme ho v každej iterácii normovali na celkovú populáciu rovnú 1, čo nám umožňovalo pohodlné sledovanie dynamických

a štatistických vlastností modelu pri zachovaní jeho vlastností. Bez normovania totiž pri vysokom počte iterácií nebolo možné realizovať grafický výstup a niekedy ani samotné riešenie, z dôvodov vyššie spomenutej vlastnosti modelu, a to, že nárast populácie sa v čase nespomaľuje.

4.4. Hodnotenie modelu.

Výsledky obsiahnuté v predchádzajúcej časti veľmi dobre korešpondujú s platným Zipfovým zákonom, preukázanom na reálnych dátach, a silne podporujú domnienku, že dynamiku veľkoškálového mestského rastu formuje jednoduchý mechanizmus založený na multiplikatívnom základe so stochastickými prvkami spolu s priestorovou difúziou. Tiež sme potvrdili, že formovanie miest a ich rozdelenie podľa objemu populácie, alebo veľkosti plochy ktorú zaberajú, je nezávislé na ich veľkosti a stupni vývoja systému. Toto sme aj veľmi úspešne porovnali so skutočnosťou v podmienkach Slovenska [7]. Výsledky dosiahnuté vďaka našim simuláciám obsahujú, ako už bolo v predošlom texte spomenuté, množstvo zhodných prvkov s analýzami reálnych dát. Porovnávanie sme uskutočňovali sami v rámci hodnotenia výsledkov, ale rozsiahle overovanie podnikli aj autori predlohy nášho modelu. Porovnávali platnosť Zipfovho zákona (mocninového zákona s exponentom -2) pre vzorky úplne odlišné čo do ich objemu, rozlohy oblastí nimi pokrytých a aj rozsahu pozorovaných súborov. Na základe zistených štatistických údajov určili rozdelenie sídel v nižšie spomenutých troch rozličných oblastiach sveta a porovnali to so známou štatistikou rozdelenia 2700 najväčších miest sveta. Konkrétne modelovanie robili pre nasledujúce tri súbory a pomocou metódy najmenších štvorcov k nim získali nasledovné odhady exponentov v dokazovanej závislosti $f(n) \propto n^{-z}$:

- sídla 100 najväčších krajín sveta $z = 1,73$
- sídla 10 najväčších krajín Južnej Európy $z = 2,17$
- 1300 administratívnych celkov Švajčiarska $z = 2,16$

Pričom pre 2700 najväčších miest sveta platí: $f(n) \propto n^{-2,01}$.

Model je ľahko obohatiteľný o ďalšie rozširujúce predpoklady. K našim základným predpokladom použitým pri výstavbe modelu by sa v prípade potreby mohli pridať ešte ďalšie, doplnujúce, týkajúce sa napríklad geografických obmedzení (t.j.

zvýšenie príťažlivosti určitých skupín buniek voči ostatným – napr. vplyv vodných zdrojov, ložísk nerastných surovín, nehostinných vysokohorských pásiem na umiestnenie sídiel). Prostriedkom môže byť zavedenie rozličných pravdepodobností osídlenia u jednotlivých buniek. Ako by napríklad mohla ovplyvniť demografický vývoj centier diaľnica ktorá by ich spojila? Zmena rýchlosti transportu medzi nimi by určite ovplyvnila priemernú životnosť našej virtuálnej metropoly. Takéto zmeny by zrejme ovplyvnili morfológiu mestských centier aj keď štatistické vlastnosti nášho modelu by mali zostať zachované. U rozsiahlejších a komplexnejších modelov je možné aplikovať aj súhrn pravidiel popisujúcich ekonomické pozadie a povahu mestských centier. Takéto modely je však možné aplikovať len v obmedzených podmienkach a špecifických situáciách nakoľko je už ohrozená ich všeobecnosť. Avšak pri ich presnom aplikovaní do konkrétnych podmienok budú ich výsledky a uzávery veľmi kvalitné.

Difúzna zložka časového kroku spôsobuje, že dlhodobý vývoj centra závisí čiastočne od zdrojov populácie v jeho blízkosti. Reakčná zložka je spolu s náhodnými predchádzajúcimi historickými udalosťami zodpovedná za existenciu path-dependent fenoménu. Nami uskutočnené simulácie potvrdzujú, že v pozadí formovania centier pracujú všeobecné mechanizmy, ktorých platnosť nie je obmedzená historickými, politickými ani ekonomickými faktormi. V prípade potreby môže byť ďalším špecifikovaním vhodne usmernený na nejaký konkrétnejší problém. Dosiagnuté výsledky sú dostatočne presvedčivé na to, aby sme sa mohli domnievať, že skutočné procesy formujúce výzor a vlastnosti mestských centier fungujú na rovnakých princípoch aké boli použité vo vyššie popísaných simuláciách.

5. Záver.

Nami skúmané metódy preukázali veľmi dobrú schopnosť modelovania reálnych dát ohľadom vzniku a vývoja populačných centier. Niektoré z nich dokázali sledovať a verne reprodukovat' naozaj širokú škálu štatistických a dynamických vlastností tohoto procesu. Teda až na výnimku uvedenú v kapitole 3.2. sme boli v našej snahe veľmi úspešní. Spomenutá výnimka však bola zrejme spôsobená nedostatočným podchytením teoretického pozadia modelu a jeho aplikovania v numerických simuláciách. Do detailov sme to však v tejto práci nerozoberali nakoľko sme sa neskôr naplno venovali v našich očiach omnoho nádejnejšiemu modelu, ktorý je podrobne popísaný v kapitole 4. Vďaka výsledkom ním dosiahnutým môžeme s uspokojením konštatovať, že cieľ sa nám podarilo splniť a úspešne sme simulovali vyššie spomenuté procesy a následne analyzovali výsledky s pozitívnym záverom, že ich rozdelenie sa správa podľa kritéria v tejto práci toľko spomínaného, ktorým je Zipfov zákon.

Treba však spomenúť, že aj ostatné modely popísané v tejto práci a nielen tieto, majú v sebe veľmi silný potenciál a na ich skúmanie by sa oplatilo vynaložiť aspoň také úsilie ako na skúmanie modelu v kap. 4. Toto by však už mohlo byť námetom na viacero takých prác akú sme vypracovali my.

Použitá literatúra.

- [1] G. K. Zipf; Human Behavior and the Principle of Least Effort
vydané: Addison-Wesley, Cambridge MA, 1949
- [2] S. C. Manrubia, D. H. Zanette, R. V. Solé; Transient Dynamics and Scaling
Phenomena in Urban Growth
zdroj: internet, 2000
- [3] S. Solomon; Generalized Lotka – Volterra (GLV) Models
zdroj: internet, 1999
- [4] K. Kawamura, N. Hatano; Univerzality of Zipf's Law
zdroj: internet, 2002
- [5] K. Nagel, M. Shubik, M. Paczuski, P. Bak; Spatial competition and price
formation
zdroj: internet, 2000
- [6] Ja. B. Zeldovič; The almighty chance
vydané: World scientific, Singapur, 1990
- [7] A. Horeháiová; Rozdelenie sídiel na Slovensku podľa veľkosti
Diplomová práca, FMFI UK, 2002
- [8] M. Fujita, P. Krugman, A. J. Venables; The spatial economy
vydané: MIT press, 2000
- [9] D. H. Zanette, S. C. Manrubia; Role of Intermittency in Urban Development:
A Model of Large – Scale City Formation
zdroj: internet, 1997

Príloha č.1:

Výpis vlastného programu vypracovaného v maticovom procesore MATLAB 6.0 R12 použitého na prevedenie simulácií popísaných v kapitole 3.2. Program je vo verzii na sledovanie grafického výstupu v každej iterácii.

```
n=100;
iter=100;
a = zeros(n,n);
z = zeros(iter,1);
w = zeros(iter,1);

for j = 1:n
    for i = 1:n
        a(i,j) = round(normrnd(100,30));
        if a(i,j) < 0
            a(i,j) = 0;
        end;
    end;
end;

SUBPLOT(2,1,1), surf(a);
colormap(hot);
SUBPLOT(2,1,2), pcolor(a);
colormap(hot);

disp(sprintf('Celkova pop.: %5g',sum(sum(a))));
disp(sprintf('Maximalna pop.: %5g',max(max(a))));
disp(sprintf('Minimalna pop.: %5g',min(min(a))));

disp(' <Stlac klaves>');pause;

for kk = 1:iter

b=sum(sum(a))/(n*n);
alfa=normrnd(1.2,0.2);
if alfa<0
    alfa=0;
end;
beta=normrnd(0.4,0.1);
if beta<0
    beta=0;
end;
gama=normrnd(1/1000,1/10000);
if gama<0
    gama=0;
end;

for i = 1:n
    for j = 1:n
        a(i,j)=round(alfa*a(i,j)+beta*b-gama*b*a(i,j));
        if a(i,j)<0
            a(i,j)=0;
        end;
    end;

end;
end;
```

```
disp(' <Stlac klaves>');pause;

d = max(max(a))-min(min(a));
e = sum(sum(a));
disp(sprintf('Iter.: %3g',kk));
disp(sprintf('Celkova pop.: %5g',sum(sum(a))));
disp(sprintf('Maximalna pop.: %5g',max(max(a))));
disp(sprintf('Minimalna pop.: %5g',min(min(a))));
disp(sprintf('Rozdiel: %5g',d));

z(kk,1) = d;
w(kk,1) = e;

SUBPLOT(2,1,1), surf(a);
colormap(hot);
SUBPLOT(2,1,2), pcolor(a);
colormap(hot);

end;

figure;
pomx = 1:iter;
pomy = z(pomx,1);
plot(pomx,pomy);

figure;
pomx = 1:iter;
pomy = w(pomx,1);
plot(pomx,pomy);
```


Príloha č.2:

Výpis vlastného programu vypracovaného v maticovom procesore MATLAB 6.0 R12 použitého na prevedenie simulácií v kapitole „Dvojkrovový difúzna – reakčný model“. Výpis je uvedený vrátane žiadaných grafických a textových výstupov.

Vlastná výstavba systému:

```
n = 500;
iter =500;
a = zeros(n,n);
b = zeros(n,n);
q = zeros(n,n);
q1 = zeros(n,n);
kv_odchylka = zeros(iter,1);

for i = 245:255
    for j = 245:255
        a(i,j) = floor(rand*100)+1;
    end;
end;

for kk = 1:iter

q(i,j) = b(i,j);

for i = 1:n
    for j = 1:n
        if a(i,j)==0
            if rand<0.02
                a(i,j)=floor(rand*100)+1;
            end;
        end;
    end;
end;

for i = 1:10
    c1 = floor(rand*n)+1;
    c2 = floor(rand*n)+1;
    while a(c1,c2)==0
        c1 = floor(rand*n)+1;
        c2 = floor(rand*n)+1;
    end;
    a(c1,c2) = a(c1,c2) + floor(rand*100)+1;
end;

for i = 2:n-1
    b(1,i) = 0.75*a(1,i)+(1/16)*(a(1,i-1)+a(1,i+1)+a(2,i));
    b(n,i) = 0.75*a(n,i)+(1/16)*(a(n,i-1)+a(n,i+1)+a(n-1,i));
    b(i,1) = 0.75*a(i,1)+(1/16)*(a(i-1,1)+a(i+1,1)+a(i,2));
    b(i,n) = 0.75*a(i,n)+(1/16)*(a(i-1,n)+a(i+1,n)+a(i,n-1));
end;

b(1,1) = 0.75*a(1,1)+(1/16)*(a(1,2)+a(2,1));
b(1,n) = 0.75*a(1,n)+(1/16)*(a(1,n-1)+a(2,n));
b(n,1) = 0.75*a(n,1)+(1/16)*(a(n-1,1)+a(n,2));
b(n,n) = 0.75*a(n,n)+(1/16)*(a(n,n-1)+a(n-1,n));
```

```

for i = 2:n-1
    for j = 2:n-1
        b(i,j) = (3/4)*a(i,j)+(1/16)*(a(i-1,j)+a(i+1,j)+a(i,j-1)+a(i,j+1));
    end;
end;

a=b;
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if rand<0.75
            a(i,j)=a(i,j)*(4/3);
        else a(i,j)=0;
        end;
    end;
end;

x = sum(sum(a));
for i = 1:n
    for j = 1:n
        b(i,j)=a(i,j)/x;
    end;
end;

for i = 1:n
    for j = 1:n
        q(i,j) = q(i,j) - b(i,j);
        q1(i,j) = q(i,j)*q(i,j);
    end;
end;

kv_odchylka(kk,1) = sum(sum(q1))/(n*n);
disp(sprintf('%4g',kk));
disp(sprintf('%4.4g',sum(sum(q1))/(n*n)));

end;

pomx = 1:iter;
pomy = kv_odchylka(pomx,1);
plot(pomx,pomy);

disp(sprintf('Celkova populacia: %0.5g',sum(sum(b))));
disp(sprintf('Max. hod.: %0.5g',max(max(b))));
disp(sprintf('Min. hod.: %0.5g',min(min(b))));

k=0;
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if b(i,j)>0
            k = k+1;
        end;
    end;
end;

disp(sprintf('Poc. obyv. buniek: %4g',k));
disp(sprintf('Priem. poc. obyv. obyvaných buniek: %0.5g',sum(sum(b))/k));
figure;
SUBPLOT(2,1,1), pcolor(b);
colormap(hot);
SUBPLOT(2,1,2), surf(b);

```

```
colormap(hot);
```

Prevedenie popísaného rezu kvôli „zdisjunktneniu“ jednotlivých centier a ich následná detekcia a odlišenie:

```
c = zeros(n,n);
o = input(' < Zadaj o >:');
s = min(min(b))+((max(max(b))-min(min(b)))/o);
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if b(i,j)>s
            c(i,j) = b(i,j)-s;
        else c(i,j) = 0;
        end;
    end;
end;

m = 10;
for p = 0:m-1
    x = min(min(c))+((p/m)*(max(max(c))-min(min(c))));
    y = min(min(c))+(((p+1)/m)*(max(max(c))-min(min(c))));
    r = 0;
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            if c(i,j)>x
                if c(i,j)<=y
                    r = r+1;
                end;
            end;
        end;
    end;
    disp(sprintf('%5g',r));
end;

d = zeros(n+1,n+1);
d(1:n,1:n) = c;
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if d(i,j)>0
            d(i,j) = 1;
        else d(i,j) = 0;
        end;
    end;
end;

counter = 2;
e = d;
pom1 = 0;
pom2 = 0;
disp(sprintf('Riadok matice:'));

for i = 1:n
    for j = 1:n
        if (e(i,j) == 1)
            e(i,j) = counter;
            counter = counter+1;
        end;

        if (e(i,j) > 1)
            if (e(i,j+1) > 1)
```

```

pom1 = min(e(i,j+1),e(i,j));
pom2 = max(e(i,j+1),e(i,j));
for ii = 1:i+1
    for jj = 1:n
        if (e(ii,jj) == pom2)
            e(ii,jj) = pom1;
        end;
    end;
end;

if (e(i,j+1) == 1)
    e(i,j+1) = e(i,j);
end;

if (e(i+1,j) == 1)
    e(i+1,j) = e(i,j);
end;
end;
disp(sprintf('%4g',i));
end;

pom = zeros(counter-1,1);

k=0;
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if c(i,j)>0
            k = k+1;
            pomk(k,1) = c(i,j);
            pom(e(i,j)) = 1;
        end;
    end;
end;

pocet_centier = 0;
for i = 1:counter-1
    if (pom(i)==1)
        pocet_centier=pocet_centier+1;
    end;
end;

disp(sprintf('Pocet centier: %4g',pocet_centier));
disp(sprintf('Poc. obyv. buniek: %4g',k));
disp(sprintf('Priem. poc. obyv. obyvanych buniek: %0.5g',sum(sum(c))/k));
disp(sprintf('Celkova populacia: %0.5g',sum(sum(c))));
disp(sprintf('Max. hod.: %0.5g',max(max(c))));
disp(sprintf('Min. hod.: %0.5g',min(pomk)));

f = e;
for i = 1:n
    for j = 1:n
        if (f(i,j)>0)
            f(i,j) = mod(e(i,j),6)+1;
        end;
    end;
end;
end;

```

```

figure;
SUBPLOT(2,1,1), pcolor(c);
colormap(hot);
SUBPLOT(2,1,2), pcolor(d);
colormap(hot);

```

```

figure;
pcolor(f);
colormap(hot);

```

Zráťanie populácie v jednotlivých centrách a ich následné zoradenie podľa

veľkosti:

```

w = zeros(counter-1,1);
disp(sprintf('Centrum cislo:'));
for v = 2:counter-1
    if (pom(v)~=0)
        for i = 1:n
            for j = 1:n
                if e(i,j) == v
                    w(v,1) = w(v,1) + c(i,j);
                end;
            end;
        end;
        disp(sprintf('%4g',v));
    end;
end;
g = 0;
l=zeros(pocet_centier,1);
for v = 2:counter-1
    if w(v,1) ~= 0
        g = g + 1;
        l(g,1) = w(v,1);
    end;
end;

disp(sprintf('Pocet centier: %4g',pocet_centier));
disp(sprintf('Populacia najmensieho centra: %0.5g',min(l)));
disp(sprintf('Populacia najvacsieho centra: %0.5g',max(w)));

m = input('< Zadaj pocet intervalov >:');
for p = 0:m-1
    x = min(w)+(1/(2^(p+1))*(max(w)-min(w)));
    y = min(w)+(1/(2^p)*(max(w)-min(w)));
    if ((m-1)==p)
        x = min(w);
    end;
    r = 0;
    for v = 2:counter-1
        if w(v) > x
            if w(v) <= y
                r = r+1;
            end;
        end;
    end;
    disp(sprintf('%5g',r));
end;

```

```

for i = 1:pocet_centier
    maxa = l(i,1);
    for j = i:pocet_centier
        if l(j,1)>maxa
            maxa = l(j,1);
            pomm = l(j,1);
            l(j,1) = l(i,1);
            l(i,1) = pomm;
        end;
    end;
end;

disp(sprintf('%4.4g ;',l));
figure;
pomx1 = 1:pocet_centier;
pomx = log(pomx1);
pomy = log(l(pomx1,1));
plot(pomx,pomy);

```

Zráťanie plochy jednotlivých centier a ich následné zoradenie podľa veľkosti:

```

u = zeros(counter-1,1);
disp(sprintf('Centrum cislo:'));
for v = 2:counter-1
    if (pom(v)~=0)
        for i = 1:n
            for j = 1:n
                if e(i,j) == v
                    u(v,1) = u(v,1) + 1;
                end;
            end;
        end;
    end;
    disp(sprintf('%4g',v));
end;
end;

```

```

g = 0;
l=zeros(pocet_centier,1);
for v = 2:counter-1
    if u(v,1) ~= 0
        g = g + 1;
        l(g,1) = u(v,1);
    end;
end;

```

```

disp(sprintf('Plocha najmensieho centra: %0.5g',min(l)));
disp(sprintf('Plocha najvacsieho centra: %0.5g',max(u)));

```

```

m = input('< Zadaj pocet intervalov >:');
for p = 0:m-1
    x = min(u)+((p/m)*(max(u)-min(u)));
    y = min(u)+(((p+1)/m)*(max(u)-min(u)));
    r = 0;
    for v = 2:counter-1
        if u(v) > x
            if u(v) <= y
                r = r+1;
            end;
        end;
    end;
end;

```

```

        end;
    end;
end;
disp(sprintf('%5g',r));
end;

for i = 1:pocet_centier
    maxa = l(i,1);
    for j = i:pocet_centier
        if l(j,1)>maxa
            maxa = l(j,1);
            pomm = l(j,1);
            l(j,1) = l(i,1);
            l(i,1) = pomm;
        end;
    end;
end;

disp(sprintf('%4.4g ;',l));
figure;
pomx1 = 1:pocet_centier;
pomx = log(pomx1);
pomy = log(l(pomx1,1));
plot(pomx,pomy);

```