

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
Ekonomická a finančná matematika

# Sunspots in RBC models

Diplomová práca

Vypracoval: Marian Baranec

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Juraj Zeman, PhD.

Bratislava, Apríl 2002

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Spojité model a analýza jeho rovnovážneho stavu</b>	<b>3</b>
2.1	Monopolisticko-konkurenčné prostredie . . . . .	3
2.1.1	Dynamika systému . . . . .	4
2.1.2	Rovnovážny stav a jeho závislosť od voľby parametrov . . . . .	5
2.2	Zhrnutie . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Diskrétny model a analýza časového radu simulovaných dát</b>	<b>10</b>
3.1	Rovnice modelu . . . . .	10
3.1.1	Rovnovážny stav . . . . .	11
3.1.2	Lineárna aproximácia . . . . .	12
3.1.3	Dokonalá konkurencia a monopol . . . . .	13
3.1.4	Sunspot modely . . . . .	13
3.2	Kalibrácia modelu . . . . .	15
3.2.1	Model s rastúcimi výnosmi z rozsahu . . . . .	15
3.2.2	Hodnoty parametrov . . . . .	15
3.3	Zhrnutie . . . . .	16
3.4	Simulácie modelu . . . . .	16
3.4.1	Funkcia odozvy na šok (Impulse Response Function) . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Záverečné poznámky</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Dodatok</b>	<b>20</b>
5.1	Loglinearizácia . . . . .	20
5.2	Nutná podmienka neurčitosti . . . . .	21
5.3	Program v jazyku MATLAB . . . . .	22
5.3.1	Hlavný program . . . . .	22
5.3.2	Program na výpočet IRF funkcií . . . . .	27
	<b>Referencie</b>	<b>28</b>

# 1 Úvod

Od osemdesiatych rokov boli RBC<sup>1</sup> modely, ktoré vychádzajú z neoklasickej teórie, hlavným nástrojom kvantitatívnej analýzy hospodárskych cyklov. Ideou týchto klasic-  
kých modelov je simulácia fluktuácií, ktoré môžeme pozorovať v reálnych dátach, pomocou vonkajších zásahov do celkovej produkcie. Tieto umelé šoky do výroby sú hnacou silou RBC modelov. Obyčajne sa predpokladá, že sú tieto šoky autokorelované. Ďalej sa zavádza akýsi parameter trvácnosti šokov, ktorý umožňuje ich lepšiu ovladateľnosť z hľadiska modelovania. Simulované dáta sú porovnateľné s reálnymi. Vykazujú vysoké kladné korelácie medzi celkovou výrobou, spotrebou, investíciami a prácou, čo je v súlade so závermi, ktoré pri štúdiu amerických dát po roku 1954, urobili Kydland a Prescott [10]. Na druhej strane sú tieto modely kritizované pre niekoľko dôvodov. Prvé slabé miesto týchto modelov je, že výrazne nadhodnocujú koreláciu medzi produktivitou a výrobou ako aj koreláciu medzi ponukou práce a mzdou. Ďalej sa ako slabé miesto ukazuje práve idea exogénnych šokov zavádzaných do celkovej produkcie. Kritizuje sa hlavne to, že táto myšlienka nevychádza z praxe, ale je to čisto umelý krok. Tieto a ďalšie nedostatky RBC modelov viedli k tomu, že sa hľadali alternatívy modelovania reálnej ekonomiky.

Malé odchýlenie sa od štandardných predpokladov, ako napríklad uvažovanie s mono-  
polmi, môže viesť k neurčitosti v dynamickom systéme, ktorá umožňuje modelovanie fluktuácií bez akýchkoľvek vonkajších šokov. V štandardnom modeli je jediná stabilná cesta, sedlová cesta, ktorou sa ekonomika dostane do rovnovážneho stavu. Tento rovnovážny stav je nestabilný a preto je v týchto modeloch spotreba funkciou množstva kapitálu, aby sa zabezpečilo umiestnenie ekonomiky na sedlovú cestu pre ľubovoľnú úroveň kapitálu<sup>2</sup>. Pri uvažovaní s monopolmi dostaneme agregovanú produkčnú funkciu, ktorá vykazuje rastúce výnosy z rozsahu. V takomto modeli sa môže stať, že rovnovážny stav ekonomiky je lokálne stabilný. Už nemusíme uvažovať o spotrebe ako o funkcii množstva kapitálu. V tomto prípade existuje nekonečne veľa stabilných ciest a teda pre jednu úroveň kapitálu existuje nekonečne veľa úrovní spotreby, ktoré zabezpečujú konvergenciu k rovnovážnemu stavu<sup>3</sup>. Takýto rovnovážny stav budeme nazývať sunspot ekvilibrium a príslušný model sunspot model. Hlavnou myšlienkou v sunspot modeloch je akási endogenizácia šokov prostredníctvom zavedenia racionálnych<sup>4</sup> očakávaní do spotreby. Tieto očakávania sa modelujú pomocou náhodnej premennej určitých vlastností<sup>5</sup> s požadovanou volatilitou.

Kritika sunspot modelov sa sústreďuje okolo dvoch tém. Prvá je, že sunspot ekvilibriá sú čisto teoretickou záležitosťou a sunspot modely používajú predpoklady vzdialené realite. Druhá spochybňuje vierohodnosť týchto modelov. V našej práci sa snažíme reagovať na obidve tieto témy.

---

<sup>1</sup>Real Business Cycle - Reálne hospodárske cykly.

<sup>2</sup>Pozri Obrázok 1: "Sedlová cesta".

<sup>3</sup>Pozri Obrázok 2: "Dve komplexné vlastné čísla" a Obrázok 3: "Dve reálne vlastné čísla".

<sup>4</sup>Mark Weder [13] vo svojej práci ukázal, že model nemusí stratiť vlastnosť sunspot ekvilibrií aj pri nie celkom racionálnych očakávaniach agentov.

<sup>5</sup>Je kladená požiadavka nulovej strednej hodnoty a zvyčajne sa používa náhodná premenná z normálneho rozdelenia.

V prvej časti vyšetrujeme spojitý model monopolisticko-konkurenčnej ekonomiky. Monopoly vyrábajú polotovary a musia sa vysporiadať s klesajúcou krivkou dopytu po ich statku. Konkurenčná časť ekonomiky potom použitím týchto polotovarov vyrába finálny produkt podľa Dixit-Stiglitzovej [7] produkčnej funkcie. Kalibrujeme model hodnotami parametrov ako ich vo svojej práci navrhujú Benhabib a Farmer [2], ktorí sa opierajú o práce zaoberajúce sa aproximáciou parametra rastúcnosti výnosov z rozsahu (Caballero a Lyons [5]) a aproximáciou produkčnej funkcie (Baxter a King [1]). Hýbeme jedným parametrom modelu pri ostatných fixovaných na pôvodných hodnotách a sledujeme závislosť druhu rovnovážneho stavu od meniacich sa hodnôt tohoto parametra. Najprv dáme voľnosť parametru  $\lambda$ , čo je vlastne parameter vyjadrujúci silu monopolu na trhu. Potom urobíme to isté s elasticitou pracovnej ponuky. Ukážeme, že pri hodnotách parametrov modelu blízkych štandardnej kalibrácii<sup>6</sup>, môže nastať prípad sunspot ekvilibrií.

V druhej časti našej práce podrobne popisujeme diskrétny variant modelu používaného v prvej časti. Kalibrujeme tento model na reálne dáta americkej ekonomiky. Výstupy potom porovnáваме s americkými dátami v období od roku 1954 po rok 1993 pomocou smerodajných odchýliek, corelačných koeficientov a pomocou funkcií odozvy na šok<sup>7</sup>. Prichádzame k záveru, že tieto modely zachytávajú hlavné znaky reálnych dát s veľkou presnosťou.

## 2 Spojitý model a analýza jeho rovnovážneho stavu

### 2.1 Monopolisticko-konkurenčné prostredie

Zopakujme, že monopolisticko-konkurenčné prostredie nazývame také prostredie, v ktorom máme monopolných výrobcov polotovarov a konkurenčný sektor výroby konečného produktu. Predpokladáme, že agregovaná produkčná funkcia je Cobb-Douglasova:

$$Y = K^\alpha L^\beta, \quad (1)$$

kde  $\alpha + \beta > 1$ .  $K$  je množstvo kapitálu a  $L$  je poskytnutá práca. Označme  $w$  relatívnu cenu práce a  $r$  úrok pri prenájaní kapitálu. Potom môžeme písať:

$$wN = bY, \quad (2)$$

$$rK = aY, \quad (3)$$

čo znamená, že produkčné faktory práca a kapitál dostávajú fixné podiely z celkového produktu. Príslušné elasticity výrobných faktorov  $\alpha$  a  $\beta$  budú rôzne od podielov z celkovej výroby pre prácu a kapitál, keďže v našom modeli predpokladáme, že  $0 < a < \alpha$  a  $0 < b < \beta$ . Presnejšie povedané platí:

$$a = \lambda\alpha, \quad (4)$$

$$b = \lambda\beta, \quad (5)$$

kde  $\lambda$  je parameter monopolnej sily na trhu, kde monopolný výrobcovia polotovarov majú produkčné funkcie  $Y(i)$  a konkurenčný sektor vyrába konečný produkt

<sup>6</sup>Všetky modeli sa kalibrujú na základe amerických dát.

<sup>7</sup>Impulse Response Functions.

podľa Dixit-Stiglicovej [7] produkčnej funkcie:

$$Y = \left( \int_0^1 Y(i)^\lambda di \right)^{\frac{1}{\lambda}}. \quad (6)$$

### 2.1.1 Dynamika systému

Teraz sa pozrieme na spotrebiteľa a jeho problém maximalizácie úžitkovej funkcie a následne sa dostaneme k analýze typu rovnovážneho stavu dvojrozmerného systému autonómnych diferenciálnych rovníc. Celú túto analýzu robíme v spojitom čase kôli väčšej prehľadnosti. Avšak všetky výsledky, ku ktorým sa dopracujeme, majú analógiu v modeloch s diskrétnym časom.

Momentálna úžitkovosť reprezentatívnej domácnosti je v našom modeli daná vzťahom:

$$U = \log C(t) - \frac{N^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (7)$$

kde  $C$  je spotreba,  $N$  je ponuka práce a  $\gamma \leq 0$  je jej elasticita. Reprezentatívny spotrebiteľ teda maximalizuje

$$\int_0^\infty U e^{-\rho t} dt, \quad (8)$$

za podmienky,

$$\frac{dK}{dt}(t) = (r(t) - \delta) K(t) + w(t) N(t) + \Pi_T(t) - C(t), \quad K(0) = K_0. \quad (9)$$

Parameter  $\rho$  je diskontný faktor,  $\delta$  je amortizácia kapitálu a  $\Pi_T(t)$  je celkový zisk monopolných výrobcov. Tento zisk spolu s nákladmi na vstupné faktory nám dá finálnu výrobu<sup>8</sup>:

$$\Pi_T(t) + r(t) K(t) + w(t) N(t) = Y(t). \quad (10)$$

Ako nutné podmienky<sup>9</sup> daného maximalizačného problému dostávame:

$$\frac{C(t)}{N(t)^\gamma} = w(t), \quad (11)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} \cdot \frac{1}{C(t)} = r(t) - \rho - \delta. \quad (12)$$

Teraz využijeme skutočnosť, ktorú sme opísali už skôr a to síce, že produkčné faktory sú dotované fixnými podielmi z celkovej výroby a teda, že platí (2) a (3). Týmto sa nám podarí eliminovať  $w(t)$  a  $r(t)$  z predchádzajúceho systému, ktorý sa týmto transformuje na:

$$C(t) = bY(t) N(t)^{\gamma-1} \quad (13)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} \cdot \frac{1}{C(t)} = a \frac{Y(t)}{K(t)} - \rho - \delta. \quad (14)$$

<sup>8</sup>Pozri Benhabib a Farmer [2].

<sup>9</sup>Tzv. 'First Order Conditions'.

Rovnice (14) a (9) popisujú dynamiku nášho modelu. Najskôr tento systém zjednodušíme a prevedieme na autonómny tvar a potom budeme skúmať závislosť stability jeho rovnovážneho stavu od zvolených parametrov. Kôli zjednodušeniu ďalších výpočtov prevedieme nasledovnú transformáciu: nech  $y = \log(Y)$ ,  $k = \log(K)$ ,  $l = \log(L)$  a  $c = \log(C)$ . Teda systém (13), (9) dostávame v tvare:

$$\dot{k} = e^{y-k} - e^{c-k} - \delta, \quad (15)$$

$$\dot{c} = ae^{y-k} - \rho - \delta, \quad (16)$$

kde bodky nad premennými  $k$  a  $c$  reprezentujú derivácie podľa času. Teraz tento systém prevedieme do autonómneho tvaru a to tým, že výraz  $y - k$  vyjadříme pomocou  $k$  a  $c$ . Využijeme na to logaritmické vyjadrenie produkčnej funkcie (1) ako aj nutnú podmienku pre optimálnu ponuku práce (13) v logaritmickom tvare:

$$y = \alpha k + \beta l, \quad (17)$$

a

$$c = \log(b) + y + (\gamma - 1)l. \quad (18)$$

Eliminovaním  $l$  z (17) a (18) dostávame nasledovný výraz pre  $y - k$ :

$$y - k = \lambda_0 + \lambda_1 k + \lambda_2 c, \quad (19)$$

kde

$$\lambda_0 = -\frac{\beta \log(b)}{\beta + \gamma - 1},$$

$$\lambda_1 = \frac{(\gamma - 1)(\alpha - 1) - \beta}{\beta + \gamma - 1},$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta}{\beta + \gamma - 1}.$$

Použitím získaného vyjadrenia pre  $y - k$  dostávame dvojrozmerný autonómny systém diferenciálnych rovníc:

$$\dot{k} = e^{\lambda_0 + \lambda_1 k + \lambda_2 c} - e^{c-k} - \delta, \quad (20)$$

$$\dot{c} = ae^{\lambda_0 + \lambda_1 k + \lambda_2 c} - \rho - \delta. \quad (21)$$

### 2.1.2 Rovnovážny stav a jeho závislosť od voľby parametrov

Každá trajektória  $\{k(t), c(t)\}$ , ktorá rieši (20), (21) a vyhovuje počiatočnej podmienke pre množstvo kapitálu  $k(0) = k_0$ , predstavuje rovnovážnu cestu. Teraz sa bližšie pozrieme na správanie tohoto systému. Inými slovami, budeme zisťovať vlastnosti daného systému v okolí jeho rovnovážneho stavu  $\{k^*, c^*\}$ . Poľahky sa presvedčíme, že v rovnovážnom stave platí:

$$e^{c^*} = \left( \frac{\rho + \delta(1-a)}{a} \right) e^{k^*}, \quad (22)$$

$$e^{k^*} = \left[ \left( \frac{\rho + \delta(1-a)}{a} \right)^{-\lambda_2} \left( \frac{\rho + \delta}{a} \right) e^{-\lambda_0} \right]^{\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}}. \quad (23)$$

Všimnime si, že pravé strany výrazov (22) a (23) sú kladné vďaka tomu, že znamienko výrazu  $\left(\frac{\rho+\delta(1-a)}{a}\right)$  je vždy kladné kôli predpokladu  $0 < a < 1$ . Teda môžeme písať explicitné formalky pre kapitál a spotrebu v rovnovážnom stave:

$$k^* = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \log \frac{\rho + \delta}{a} - \lambda_2 \log \frac{\rho + \delta(1-a)}{a} - \lambda_0 \right), \quad (24)$$

$$c^* = \log \frac{\rho + \delta(1-a)}{a} + k^*, \quad (25)$$

kde  $k^*$  a  $c^*$  sú prirodzené logaritmy  $K^*$  a  $C^*$ . Z teórie všeobecných autonómnych diferenciálnych rovníc vieme, že stabilita pevného bodu  $\hat{x}$  je určená vlastnými číslami matice  $Df(\hat{x})$ . Je to matica prvých derivácií funkcie  $f$ . V našom prípade  $x = \begin{pmatrix} k \\ c \end{pmatrix}$  a  $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(k,c) \\ f_2(k,c) \end{pmatrix}$ . Budeme teda skúmať vlastné čísla Jacobiho matice  $Df(x)$ , ktorú ďalej budeme označovať  $J$ :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(k,c)}{\partial k} & \frac{\partial f_1(k,c)}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2(k,c)}{\partial k} & \frac{\partial f_2(k,c)}{\partial c} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

kde  $f_1(k, c)$  predstavuje pravú stranu z rovnosti (20) a  $f_2(k, c)$  zase pravú stranu z rovnosti (21). Pri analýze využijeme, že platia nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} \mu_1 \mu_2 &= \det(J), \\ \mu_1 + \mu_2 &= \text{trace}(J), \end{aligned}$$

kde  $\mu_1$  a  $\mu_2$  sme si označili vlastné čísla matice  $J$ .  $\text{Det}(J)$  a  $\text{trace}(J)$  je jej determinant a stopa, ktoré sú v bode  $\begin{pmatrix} k^* \\ c^* \end{pmatrix}$  dané vzťahmi:

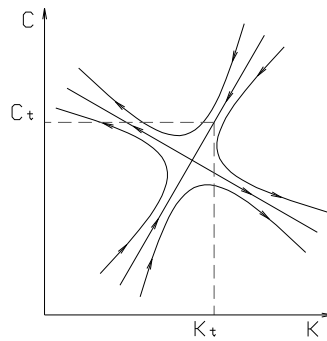
$$\text{Trace}(J) = (\lambda_1 + a\lambda_2) \left( \frac{\rho + \delta}{a} \right) + \frac{\rho + \delta(1-a)}{a}, \quad (27)$$

$$\text{Det}(J) = (\rho + \delta(1-a)) \left( \frac{\rho + \delta}{a} \right) (\lambda_1 + \lambda_2). \quad (28)$$

Nás prirodzene bude najviac zaujímať prípad, keď determinant matice  $J$  bude kladný a stopa naopak záporná, čo implikuje záporné vlastné čísla a teda stabilný rovnovážny stav. Znamienko determinantu je dané znamienkom výrazu

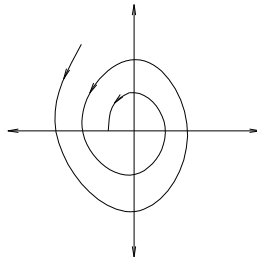
$$\frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{\beta + \gamma - 1}, \quad (29)$$

ktoré je rôzne pre rôzne hodnoty príslušných parametrov. Ak  $a = \alpha$ , teda ak polotovary vyrábané monopolmi sú dokonale substituovateľné, stopa matice  $J$  má hodnotu  $\rho$ , čiže je kladná. Pri kalibrácii používanej v klasických modeloch má (29) záporné znamienko, čo znamená vlastné čísla opačných znamienok. Dostávame sedlový bod a jediná rovnovážnu sedlovú cestu. Spotreba sa stáva funkciou kapitálu a tým sa zabezpečí konvergencia k pevnému bodu:

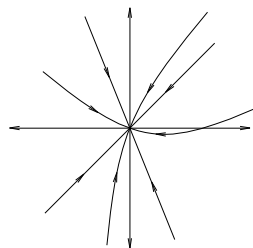


Obr. 1: Sedlová cesta

Ak by bol v tomto prípade determinant kladný, dostávame nestabilný pevný bod, t.j. všetky trajektórie začínajúce v ľubovoľnom bode okolia pevného bodu divergujú. V prípade kladného determinantu a zápornej stopy dostávame stabilný pevný bod. Môžu nastať dva prípady. Buď máme komplexne združené vlastné čísla so zápornou reálnou časťou (Obrázok 2), alebo dve záporné reálne vlastné čísla (Obrázok 3):



Obr. 2: Dve komplexné vlastné čísla



Obr. 3: Dve reálne vlastné čísla

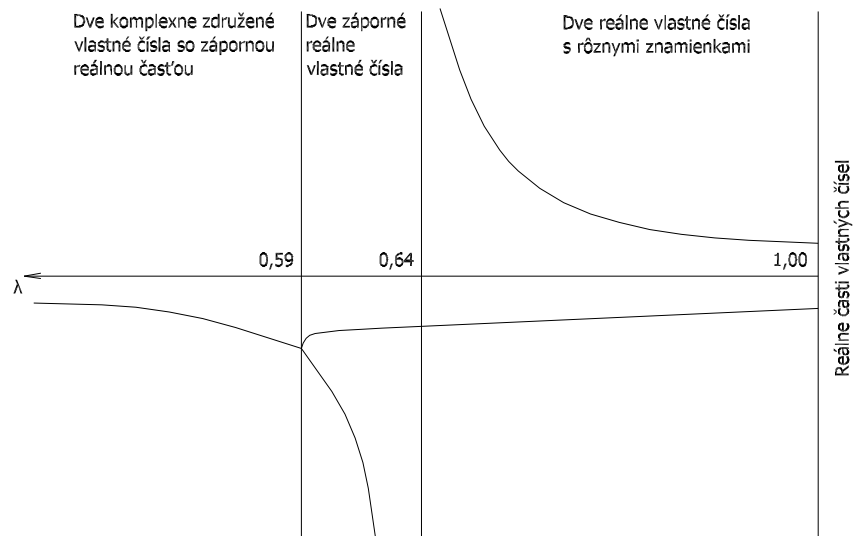
Ako príklad prvého prípadu môže posloužiť kalibrácia používaná pri simulácií dát v druhej časti tejto práce. Pri nej dostávame práve kladný determinant a zápornú stopu matice  $J$ . Urobme teraz podrobnejšiu analýzu. Najprv budeme skúmať závislosť stability ekonomiky od sily monopolov. Budeme meniť parameter  $\lambda$  v rozmedzí od 1 do 0.54. Aby sa zachovala konzistentnosť modelu, budeme náležite meniť aj parametre  $\alpha$  a  $\beta$  podľa známych vzťahov (4),(5). Zvyšné parametre sme zafixovali



na štandardných hodnotách: podiely pre kapitál a pracovnú silu z celkovej produkcie sú 0.36 a 0.64,  $\gamma = 0$ <sup>10</sup>, diskontný faktor  $\rho = 0.99$  a amortizácia kapitálu  $\delta = 0.025$ . Výsledky podrobnejšie zachytáva Tabuľka 1 a Obrázok 4:

Tabuľka 1.

$\lambda$	Vlastné čísla		Stabilita pevného bodu
1	2.79	-1.80	nestabilný
0.95	2.97	-1.82	nestabilný
0.90	3.21	-1.83	nestabilný
0.85	3.57	-1.85	nestabilný
0.80	4.14	-1.88	nestabilný
0.75	5.22	-1.93	nestabilný
0.70	8.06	-1.99	nestabilný
0.65	39.64	-2.13	nestabilný
0.60	-6.57	-2.59	stabilný
0.55	$-2.04 \pm 1.35i$		stabilný



Obr. 4: Vplyv sily monopolov na rovnovážny stav ekonomiky

Začínajúc z bodu  $\lambda = 1$  dostávame reálne vlastné čísla opačných znamienok, čo implikuje sedlovú cestu. Približne okolo hodnoty  $\lambda = 0.64$  kladná vlastná hodnota sa "stratí" v  $+\infty$  a v zápätí sa "objaví" v  $-\infty$ . Od tohto bodu až po  $\lambda \approx 0.59$  máme dve reálne záporné čísla a teda stabilný rovnovážny stav, sunspot ekvilibriá.

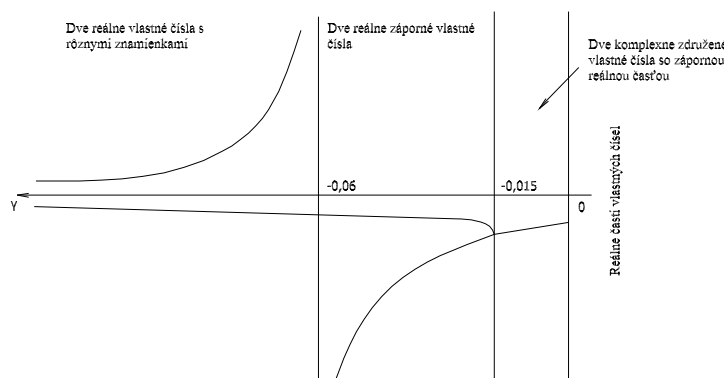
<sup>10</sup>Predpokladáme dokonalú elasticitu ponuky práce.

Od  $\lambda \approx 0.59$  už ďalej máme komplexne združené vlastné čísla matice  $J$  so zápornou reálnou časťou a teda na kvalite pevného bodu sa nič nemení, ostáva naďalej stabilný. Ešte dodáme, že príslušný obrázok nie je kreslený v mierke, ale len schematicky zachytáva dynamiku zmeny znamienok vlastných čísel a tým dynamiku zmeny stability pevného bodu systému.

Teraz sa pozrime, čo spôsobí hýbanie s ponukovou elasticitou  $\gamma$ . Hansen [9] poukazuje na to, že agregovaná ekonomika sa bude chovať, ako keby bola práca nekonečne elastická. Pri našej analýze vyjdeme z tohoto bodu nekonečnej elasticity pre ponuku práce ( $\gamma = 0$ ) a budeme sledovať správanie sa modelu počas zmeny  $\gamma$  a analýzu ukončíme v bode  $\gamma = -0.09$ . Zvyšné parametre sú fixované:  $a = 0.3$ ,  $b = 0.7$ ,  $\delta = 0.025$ ,  $\rho = 0.99$  a  $\lambda = 0.66$ <sup>11</sup>. Výsledky sú zhrnuté v Tabuľke 2 a na Obrázku 5:

Tabuľka 2.

$\gamma$	Vlastné čísla	Stabilita pevného bodu
0	$-4.97 \pm 2.44i$	stabilný
-0.01	$-5.87 \pm 1.6i$	stabilný
-0.02	-4.88    -9.58	stabilný
-0.03	-4.27    -14.64	stabilný
-0.04	-3.95    -23.76	stabilný
-0.05	-3.73    -49.36	stabilný
-0.06	-3.56    -912.27	stabilný
-0.07	61.67    -3.43	nestabilný
-0.08	31.12    -3.33	nestabilný
-0.09	21.31    -3.24	nestabilný



Obr. 5: Vplyv elasticity pracovnej ponuky na rovnovážny stav ekonomiky

<sup>11</sup>Táto hodnota je konzistentná s prácami Baxtera a Kinga [1], Caballera a Lyonsa [5], ktorí skúmali externalitu v reálnych dátach americkej ekonomiky v danom období.

Na intervale  $\gamma \in (0, -0.015)$  dostávame dve komplexne združené vlastné čísla so zápornými reálnymi časťami. V bode  $\gamma \approx -0.015$  sa vlastné čísla stávajú reálnymi a až po hodnotu  $-0.06$  majú záporné znamienko. Približne v tomto bode sa jedno vlastné číslo "stráca" v  $-\infty$  a znovu sa "objavuje" v  $+\infty$ . Druhá vlastná hodnota ostáva naďalej záporná. Počnúc bodom  $\gamma \approx -0.06$  teda dostávame sedlovú cestu a na intervale  $(0, -0.06)$  zase sunspot ekvilibriá. Opäť podotýkame, že obrázok je len schematický a čísla v ňom uvedené slúžia skôr pre orientáciu.

## 2.2 Zhrnutie

Ukázali sme, že výskyt sunspot ekvilibrií, alebo neurčitosti, nie je len teoretická záležitosť odtrhnutá od reality, ako sa mnohí domnievali. Fakt, že náš model nado-  
búdala stabilný rovnovážny stav už pri malých odchýlkach od štandardného prístupu naznačuje, že sunspot ekvilibriá sú nevyhnutnou súčasťou makroekonomických mo-  
delov reálnych dát.

V ďalšej časti podrobne popisujeme diskretný variant predchádzajúceho modelu. Kalibrujeme ho na dáta americkej ekonomiky v roku 1951, simulujeme dáta a porov-  
návame ich s realitou pomocou štandardných nástrojov makroekonómie. Dôraz sa  
pri tom kladie na rozdiel oproti štandardnému prístupu, kde hnacou silou modelu sú  
umelo dodávané exogénne šoky do celkovej produkcie. Náš model je poháňaný en-  
dogénnymi šokmi v spotrebe reprezentovanými racionálnymi očakávaniami agentov  
bez akýchkoľvek vonkajších zásahov do ekonomiky.

## 3 Diskretný model a analýza časového radu simulovaných dát

### 3.1 Rovnice modelu

Vychádzajúc z diskretnej, stochastickej varianty modelu Benhabiba a Farmera [2] dostávame nasledovné rovnice:

$$Y_t = Z_t K_t^\alpha L_t^\beta, \quad (30)$$

$$A \frac{C_t}{L_t^\gamma} = b \frac{Y_t}{L_t}, \quad (31)$$

$$\frac{1}{C_t} = E_t \left[ \frac{\rho}{C_{t+1}} \left( a \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right], \quad (32)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + Y_t - C_t, \quad (33)$$

$$Z_t = Z_{t-1}^\theta \eta_t, \quad Z_0 \text{ je dané,} \quad (34)$$

kde  $C_t$  je spotreba,  $L_t$  je ponuka práce,  $Y_t$  je celková produkcia ekonomiky,  $K_t$  je kapitál,  $a$  je podiel pre kapitál a  $b$  je podiel pre pracovnú silu z celkovej produkcie.  $E_t$  je operátor očakávaní v čase  $t$ . Rovnica (30) je Cobb-Douglasova produkčná funkcia s exogénnymi produkčnými šokmi  $Z_t$ , rovnica (33) je rovnica akumulácie kapitálu, kde sme využili rovnosť

$$Y_t = C_t + I_t. \quad (35)$$

Rovnice (31) a (32) sme dostali ako nutné podmienky pri riešení problému spotrebiteľa, ktorý chce maximalizovať svoju úžitkovú funkciu  $u$  v čase 0<sup>12</sup> za podmienky platnosti rozpočtového ohraničenia:

$$\max u(0),$$

za podmienky

$$K_{t+1} + C_t \leq w_t L_t + (1 - \delta + r_t) K_t + \Pi_t, \quad K_0 \text{ je dané,} \quad (36)$$

kde

$$u(0) = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t E_0 [\log C_t - A \frac{L_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}], \quad \rho \in (0, 1). \quad (37)$$

Premenná  $w_t$  predstavuje reálnu mzdu,  $\delta$  je amortizačný parameter,  $r_t$  je reálny úrok,  $\Pi_t$  predstavuje zisk domácnosti z vlastníctva firmy,  $\rho$  v rovnici (37) predstavuje diskontný faktor,  $\gamma (\leq 0)$  je elasticita ponuky práce a  $A (> 0)$  je preferenčný parameter. Nerovnica (36) ako rozpočtové ohraničenie nám hovorí, že domácnosť nemôže mať spotrebu väčšiu ako sú jej celkové príjmy. Bude to zrejmejšie, ak si všimneme, že (36) sa dá prepísať do tvaru

$$C_t \leq \Pi_t + w_t L_t + r_t K_t - I_t, \quad (38)$$

kde na pravej strane máme čistý zisk domácností v čase  $t$ <sup>13</sup>.

### 3.1.1 Rovnovážny stav

Zjednodušili sme model z pôvodných piatich rovníc na tri a to eliminovaním  $Y$  pomocou rovnice (30) a takisto elimináciou  $L$  z rovníc (32) a (33). Túto úpravu sme robili na uľahčenie manipulácie s modelom ako aj pre ľahšie generovanie časových radov, simulácií správania sa ekonomiky. Teda dostávame nasledovné rovnice:

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= B Z_t^m K_t^g C_t^d + (1 - \delta) K_t - C_t, \\ \frac{1}{C_t} &= E_t \left[ D Z_{t+1}^m K_{t+1}^{g-1} C_{t+1}^{d-1} + \frac{\tau}{C_{t+1}} \right], \\ Z_t &= Z_{t-1}^\theta \eta_t, \end{aligned} \quad (39)$$

kde  $\phi = \frac{1}{(\beta + \gamma - 1)}$ ,  $d = \beta \phi$ ,  $m = 1 - d$ ,  $g = \alpha m$ ,  $B = \left(\frac{A}{b}\right)^d$ ,  $D = B a \rho$ ,  $\tau = \rho(1 - \delta)$ . Zamestnanosť je daná vzťahom

$$L_t = \left[ \frac{A}{b} \frac{C_t}{Z_t K_t^\alpha} \right]^\phi, \quad (40)$$

ktorý dostaneme elimináciou  $Y_t$  z (31) pomocou (30) a následným vyjadrením  $L_t$  z rovnice (31).

Ďalej budeme pokračovať postupom bežným v literatúre. Aproximujeme systém (39) použitím Taylorovho radu prvého stupňa okolo rovnovážneho stavu nestochastickej ekonomiky ( $Z_t \equiv 1$  pre  $\forall t$ ). Tento rovnovážny stav ( $K^*, C^*, 1$ ) je definovaný nasledovne:

$$K^* = \left[ \frac{\omega}{v} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad C^* = v (K^*)^\alpha, \quad (41)$$

<sup>12</sup>Čo predstavuje sumu úžitkovostí budúcich období diskontovaných k súčasnosti.

<sup>13</sup>Tj. zisk z vlastníctva firiem + mzda + úrok z kapitálu - investície.

kde

$$\omega \equiv \frac{B(1-\tau)}{D} - \delta, \quad v \equiv \left[ \frac{1-\tau}{D} \right]^{\frac{1}{d}}, \quad \chi \equiv \frac{1-g}{d}.$$

### 3.1.2 Lineárna aproximácia

Dynamika našej stochastickej ekonomiky je popísaná nelineárnymi funkcionálnymi rovnicami (39). Keďže tento systém nelineárnych rovníc sa nedá riešiť analyticky, budeme používať jeho lineárnu aproximáciu okolo bodu  $(K^*, C^*, 1)$ . Zadefinujeme nové premenné  $\hat{K}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{Z}$  a to nasledovne:

$$\hat{K}_t \equiv \frac{K_t - K^*}{K^*} \approx \log \left( \frac{K_t}{K^*} \right), \quad \hat{C}_t \equiv \frac{C_t - C^*}{C^*} \approx \log \left( \frac{C_t}{C^*} \right), \quad (42)$$

$$\hat{Z}_t \equiv \frac{Z_t - 1}{1} \approx \log Z_t. \quad (43)$$

Ďalej definujeme vektor  $e_{t+1}$  ako vektor chýb v očakávaní  $\hat{K}_{t+1}$ ,  $\hat{C}_{t+1}$ ,  $\hat{Z}_{t+1}$ :

$$e_{t+1} \equiv \begin{pmatrix} E_t \left[ \hat{K}_{t+1} \right] - \hat{K}_{t+1} \\ E_t \left[ \hat{C}_{t+1} \right] - \hat{C}_{t+1} \\ E_t \left[ \hat{Z}_{t+1} \right] - \hat{Z}_{t+1} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Použitím týchto definícií môžeme napísať lineárnu aproximáciu systému (39) nasledovne:

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{C}_t \\ \hat{Z}_t \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \hat{K}_{t+1} \\ \hat{C}_{t+1} \\ \hat{Z}_{t+1} \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \hat{\eta}_{t+1} \\ e_{t+1} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

kde  $J$  je Jacobiho matica (typu  $3 \times 3$ ) parciálnych derivácií transformovaného systému (45),  $R$  je matica príslušných koeficientov. Ďalšie lineárne rovnice nám popisujú správanie sa investícií, pracovných hodín, výroby a produktivity v závislosti od  $[\hat{K}_t, \hat{C}_t, \hat{Z}_t]$ :

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_t \\ \hat{L}_t \\ \hat{Y}_t \\ \hat{P}_t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{K}_t \\ \hat{C}_t \\ \hat{Z}_t \end{pmatrix}, \quad (46)$$

kde produktivitu  $P$  definujeme ako podiel  $\frac{Y}{L}$ .  $M$  je matica (typu  $4 \times 3$ ) koeficientov získaných loglinearizáciou príslušných rovníc<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>Pre podrobnejšie vysvetlenie loglinearizácie pozri Dodatok.

### 3.1.3 Dokonalá konkurencia a monopol

Pre štandardný model hospodárskych cyklov (RBC model) je charakteristická konštantnosť výnosov z rozsahu produkčnej funkcie ( $\alpha + \beta = 1$ ) a za predpokladu dokonalej konkurencie na trhu dostávame:

$$\alpha = a \quad \text{a zároveň} \quad \beta = b. \quad (47)$$

Teda podiel pre kapitál resp. pracovnú silu z výroby je rovný ich výrobným elasticitám.

Prípad, kedy sa dané vzťahy môžu narušiť je aj prípad, ktorým sa zaoberá táto práca. Je to ekonomika s kontinuumom monopolných výrobcov polotovarov s produkčnou funkciou vykazujúcou restúce výnosy z rozsahu.  $I - ty$  monopolný výrobca má produkčnú funkciu  $Y(i)$ . Konkurenčný sektor pomocou týchto polotovarov vyrába konečný produkt (monopolisticko-konkurenčné prostredie) použitím technológie podľa Dixit-Stiglitz [7],

$$Y = \left( \int_0^1 Y(i)^\lambda di \right)^{\frac{1}{\lambda}}, \quad (48)$$

kde  $\lambda \in (0, 1)$  je kvantifikátor monopolnej sily každého výrobcu polotovarov. Ak  $\lambda = 1$ , tak polotovary sa stávajú perfektne substituovateľné a výrobcovia polotovarov sa musia vysporiadať s perfektne elastickým dopytom po statku. Ak je  $\lambda < 1$ , dostávame klesajúcu dopytovú funkciu po polotovaroch. Ďalej, dá sa ukázať<sup>15</sup>, že

$$a = \lambda\alpha \quad \text{a zároveň} \quad b = \lambda\beta, \quad (49)$$

čo znamená, že

$$0 < a < \alpha \quad \text{a} \quad 0 < b < \beta. \quad (50)$$

Inými slovami pripúšťame výskyt kladných ziskov a taktiež pripúšťame možnosť, že podiely pre kapitál a prácu z celkovej výroby môžu byť v súčte menšie ako jedna. V monopolisticko-konkurenčnom prostredí platí:

$$a + b < 1, \quad (51)$$

$$\alpha + \beta > 1. \quad (52)$$

### 3.1.4 Sunspot modely

Model, ktorý sme tu opísali, zahŕňa v sebe štandardný model hospodárskych cyklov ako špeciálny prípad, keď položíme  $\lambda = 1$  spolu s predpokladom konštantnosti výnosov z rozsahu. Dá sa ukázať, že v takomto prípade bude mať matica  $J$  z lineárneho systému (45) jedno vlastné číslo v absolútnej hodnote menšie ako 1 a teda dostávame nestabilný sedlový bod ako rovnovážny stav<sup>16</sup>. Z jednoznačnosti<sup>17</sup> riešenia modelu s racionálnymi očakávaniami dostávame  $C_t$  ako lineárnu funkciu  $K_t$

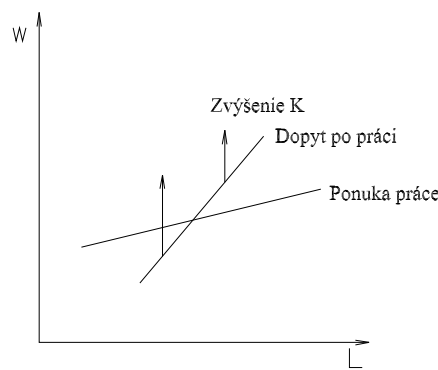
<sup>15</sup>Pozri Benhabib a Farmer [2].

<sup>16</sup>Treba si uvedomiť, že o stabilite rovnovážneho stavu lineárneho systému (45) rozhodujú vlastné čísla matice  $J^{-1}$ , ktoré sú prevrátenými hodnotami vlastných čísel matice  $J$ .

<sup>17</sup>Pozri prácu Blanchard a Kahn [4].

a  $Z_t$ . V špeciálnom prípade bez náhodovosti, teda keď  $Z \equiv 1$ , táto funkcia umiestni ekonomiku na stabilnú sedlovú cestu. Inými slovami pre každé  $K_t$  táto funkcia priradí takú hodnotu  $C_t$ , že v systéme  $\{K, C\}$  bude bod  $(K_t, C_t)$  ležať na sedlovej ceste.

V prvej časti tejto práce sme ukázali, že malé odchýlky od predpokladov štandardného modelu môžu viesť na model, kde rovnovážny stav je buď stabilný uzol alebo stabilný fokus. Idea spočíva v tom, že v ekonomike, ktorej produkčná funkcia vykazuje rastúce výnosy z rozsahu, môže krivka dopytu po práci stúpať rýchlejšie ako krivka ponuky práce ako funkcie reálnej mzdy. Potom zvýšením kapitálu sa krivka dopytu po práci posunie smerom nahor a tým sa zníži mzda a zamestnanosť:



Obr. 6: Efekt zvýšenia kapitálu na prácu a reálnu mzdu

Nutná podmienka výskytu sunspot ekvilibríí je ekvivalentná tomu, že máme krivku dopytu po práci, ktorá stúpa rýchlejšie ako krivka ponuky práce<sup>18</sup>.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že štandardný model sa dá popísať dynamickým systémom dvoch diferencných rovníc, kde jedna rovnica je pre stavovú veličinu kapitál  $K_t$ , a druhá pre exogénne šoky  $Z_t$ :

$$\begin{aligned}\widehat{K}_t &= a_{11}\widehat{K}_{t-1} + a_{12}\widehat{Z}_t, \\ \widehat{Z}_t &= \theta\widehat{Z}_{t-1} + \widehat{\eta}_t\end{aligned}\quad (53)$$

Avšak pri rastúcich výnosoch z rozsahu sa môže stať, že všetky vlastné čísla matice  $J$  v lineárnom systéme (45) budú mimo jednotkového kruhu. To ale implikuje mnoho stabilných ciest čo znamená, že spotrebu  $C_t$  nie je možné určiť ako funkciu kapitálu  $K_t$  a exogénnych šokov  $Z_t$ . Teda dáta ekonomiky s rastúcimi výnosmi z rozsahu sa dajú popísať dynamickým systémom troch diferencných rovníc:

$$\begin{aligned}\widehat{K}_t &= a_{11}\widehat{K}_{t-1} + a_{12}\widehat{C}_{t-1} + a_{13}\widehat{Z}_t, \\ \widehat{C}_t &= a_{21}\widehat{K}_{t-1} + a_{22}\widehat{C}_{t-1} + a_{23}\widehat{Z}_t + b_2\widehat{V}_t, \\ \widehat{Z}_t &= a_{33}\widehat{Z}_{t-1} + b_3\widehat{\eta}_t,\end{aligned}\quad (54)$$

<sup>18</sup>Pozri Dodatok: "Nutná podmienka neurčitosti".

kde  $\widehat{V}_t$  reprezentuje ľubovoľnú náhodnú premennú, ktorá má nulovú podmienenú strednú hodnotu v čase  $t - 1$ .

V špeciálnom prípade, keď neuvažujeme exogénne šoky, sa náš systém redukuje na sústavu dvoch diferencných rovníc pre  $K_t$  a  $C_t$ :

$$\begin{aligned}\widehat{K}_t &= a_{11}\widehat{K}_{t-1} + a_{12}\widehat{C}_{t-1}, \\ \widehat{C}_t &= a_{21}\widehat{K}_{t-1} + a_{22}\widehat{C}_{t-1} + b_2\widehat{V}_t.\end{aligned}\tag{55}$$

Práve týmto posledným prípadom, keď nepripúšťame exogénne zásahy do celkovej produkcie, sa zoberá táto práca.

## 3.2 Kalibrácia modelu

### 3.2.1 Model s rastúcimi výnosmi z rozsahu

Náš model používa Rogerson-Hansenovu funkciu užitočnosti (37), ktorá splňa podmienku, o ktorej hovoria vo svojej práci Benhabib a Farmer [2], že každý model hospodárskych cyklov na to, aby verne zachytil pozorované fluktuácie práce  $L_t$ , vyžaduje vysoko elasticnú ponuku práce. Budeme skúmať, či časové rady generované modelom sú kvalitatívne ako aj kvantitatívne porovnateľné s reálnymi dátami americkej ekonomiky v rokoch (1954-1991). Budeme skúmať a porovnávať smerodajné odchýlky, korelácie a zostrojíme tzv. funkcie odozvy na šok (IRF funkcie).

### 3.2.2 Hodnoty parametrov

Budeme používať kalibráciu, ktorú navrhujú Farmer a Guo [8]. Predpokladáme, že ponuka práce je nekonečne elasticná vzhľadom na reálnu mzdu. Teda kladieme  $\gamma \equiv 0$ . Ďalej budeme používať štandardné hodnoty pre štvrtročný diskontný faktor  $\rho = 0.99$  a pre štvrtročný amortizačný koeficient  $\delta = 0.025$ . V modeloch s dokonalou konkurenciou sa podiely z výroby pre kapitál a pracovnú silu rovnajú ich výrobným elasticitám (t.j.  $a = \alpha$ ,  $b = \beta$ ). V monopolisticko-konkurenčnom prostredí môžu tieto parametre byť rôzne od seba, keďže platí  $a = \lambda\alpha$  a  $b = \lambda\beta$ , kde  $\lambda$  meria stupeň monopolnej sily na trhu s polotovarmi. Na presné určenie  $\lambda$  si zoberieme na pomoc Lernerov index<sup>19</sup>, ktorý je daný následovnou identitou:

$$1 - \lambda \equiv \frac{p - mc}{p},\tag{56}$$

kde  $p$  je cena polotovaru a  $mc$  ('marginal cost') sú hraničné náklady monopolných výrobcov polotovarov. Pri dokonalej konkurencii  $p = mc$  a teda  $\lambda = 1$ . Čím je  $\lambda$  menšia, tým je sila monopolu na trhu väčšia<sup>20</sup>. Témou určenia Lernerovho indexu pre Americké povojnové dáta sa zaoberalo mnoho ekonómov. My opäť preberieme hodnotu, ktorú navrhujú Farmer a Guo [8], ktorí práve vychádzali z prác napísaných na túto tému a odporúčajú  $\lambda$  položiť rovnú číslu 0.58. Sledujúc ďalej ich kalibráciu,

<sup>19</sup>Je to vlastne prevrátená hodnota elasticity dopytu po statku.

<sup>20</sup>Ekonomická definícia sily na trhu je schopnosť udržiavať cenu statku nad cenou danou dokonalou konkurenciou.



kladieme podiel pre pracovnú silu z národného dôchodku  $b$  rovný číslu  $0.7^{21}$ . Na určenie podielu z národného dôchodku pre kapitál používa väčšina prác predpoklad, že  $a + b = 1$ . Toto však nie je pravda v našej práci, kde dovoľujeme prítomnosť kladných ziskov.  $b = 0.7$ , čo necháva 30% národného zisku pre všetky ostatné faktory. My uvažujeme so 7% – *ným* ziskom<sup>22</sup> pre monopoly, čo implikuje podiel 23% pre kapitál z národného príjmu. Hodnoty pre  $\alpha$  a  $\beta$  sa už poľahky dajú vypočítať a spolu s hodnotami parametrov  $a, b$  a  $\lambda$  ich pre prehľadnosť uvádzame v tabuľke:

$a$	$b$	$\alpha = \frac{a}{\lambda}$	$\beta = \frac{b}{\lambda}$	$\lambda$
0.23	0.7	0.4	1.21	0.58

### 3.3 Zhrnutie

Dynamické vlastnosti modelu závisia na vlastných číslach linearizovanej matice  $J$  resp.  $J^{-1}$ . V klasickom prípade je vždy jedna vlastná hodnota matice  $J^{-1}$  v absolútnej hodnote väčšia ako 1. Eliminujeme nepriaznivý vplyv tejto vlastnej hodnoty tým, že vyjadríme  $C_t$  ako lineárnu funkciu  $K_t$ . Tým zabezpečíme, že sa ekonomika dostane na stabilnú sedlovú cestu. Toto však ale nie je náš prípad. V našom modeli sú prítomné rastúce výnosy z rozsahu. Tento fakt môže spôsobiť, že krivka dopytu po práci stúpa rýchlejšie ako krivka ponuky práce, čo spôsobí prítomnosť sunspot ekvilibrií<sup>23</sup>. V takomto prípade sú hnacou silou modelu práve racionálne očakávania agentov, ktoré vystupujú v úlohe endogénnych<sup>24</sup> šokov do spotreby. Vonkajšie zásahy do ekonomiky sú úplne vypnuté, t.j.  $Z_t = 1$  pre všetky  $t$ . Nie je možné určiť  $C_t$  ako funkciu  $K_t$ , keďže pre každý stav kapitálu existuje nekonečne veľa úrovní spotreby, ktoré umiestnia ekonomiku na stabilnú cestu, keďže aj týchto stabilných ciest je nekočne veľa. Skutočne obidve vlastné hodnoty našej linearizovanej matice  $J^{-1}$  sú v absolútnej hotnote menšie ako 1:

$$\lambda_{1,2} = 0.9215 \pm 0.0976i, \quad (57)$$

čo podľa teórie autonómnych diferenčných rovníc znamená, že pevný bod daného dynamického systému je stabilný fokus. Smerodajná odchýlka člena  $V_t$  je zvolená tak, aby volatilita produkcie našej simulovanej ekonomiky zodpovedala americkým dátam.

### 3.4 Simulácie modelu

Pomocou rovníc systému (55) generujeme časový rad o rozsahu 151 údajov. Je to taký istý počet ako vzorka amerických dát<sup>25</sup>, s ktorou porovnávame naše generované dáta. Celkovo robíme 1000 simulácií. V každej simulácii používame generátor

<sup>21</sup>Hodnoty parametra  $b$  iných autorov: Baxter a King [1] 0.58, Kydland a Prescott [10] 0.64, Hansen [9] 0.64, Christiano [6] 0.66 a Prescott [11] 0.75.

<sup>22</sup>Celkové výsledky modelu sú do značnej miery robustné k výberu voľby  $a + b$  a podobne ako Farmer a Guo [8] aj my sme dostali podobné výsledky pre zisk od 2% do 7%.

<sup>23</sup>V našom modeli tak tomu skutočne je vďaka zvolenej kalibrácii. Funkcia užitočnosti je lineárna v pracovných hodinách a preto je krivka ponuky práce konštantná. Rastúca krivka dopytu po práci teda nutne stúpa rýchlejšie ako konštantná funkcia ponuky.

<sup>24</sup>Nie exogénnych šokov do celkovej produkcie, ako je tomu v klasickom prípade.

<sup>25</sup>Štvrťročné dáta od 1954.1 po 1991.3.

náhodných čísel normálneho rozdelenia NORMRND v programe Matlab na zrealizovanie simulácií šoku  $\hat{V}_t$  s veľkosťou smerodajnej odchýlky, ktorá vychádza z kalibrácie modelu na americké dáta,  $\sigma = 0.0025^{26}$ . Taktiež každý simulovaný časový rad upravujeme Hoderick-Prescott filtrom<sup>27</sup> pre zachovanie štandardu s ohľadom na ostatné práce a ďalej už pracujeme len s očisteným radom. V každej simulácii počítame žiadané ukazovatele: smerodajné odchýlky a príslušné korelácie. Výsledné smerodajné odchýlky a korelácie dostávame ako aritmetický priemer smerodajných odchýliek a korelácií vypočítaných v jednotlivých simuláciách.

Výsledky sú zobrazené v nasledujúcich tabuľkách:

Tabuľka 3.

Premenná	US dáta	Model
Výroba(Y)	1.73(1.00)	1.73(1.00)
Spotreba(C)	0.86(0.50)	0.89(0.51)
Investície(I)	7.78(4.50)	7.05(4.08)
Práca(L)	1.50(0.87)	1.15(0.66)
Produktivita(P)	0.88(0.51)	0.89(0.51)

Tabuľka 4.

Premenná	US dáta	Model
Spotreba(C)	0.86	0.85
Investície(I)	0.84	0.94
Práca(L)	0.86	0.89
Produktivita(P)	0.50	0.80

V tabuľke 3 sú zachytené smerodajné odchýlky jednotlivých premenných tak, ako sa zistili v reálnych dátach<sup>28</sup> porovnané s výsledkami nášho modelu. V zátvorkách sú uvedené pomery príslušných smerodajných odchýliek k smerodajnej odchýlke výroby. Tabuľka 4 zas zachytáva korelačné koeficienty príslušných premenných s agregovanou výrobou a opäť porovnáva s korelačnými koeficientami z reálnych dát. Vidíme, že náš model dosť presne zachytáva ako smerodajné odchýlky, tak aj korelácie. Nie je našim cieľom púšťať sa do hlbších analýz. Chceli sme ukázať, v snahe preskúmania opodstatnenosti kritiky, že sunspot modely dobre vystihujú momenty reálnych dát.

<sup>26</sup>Volatilitu  $\sigma$  sme zvolili tak, aby smerodajná odchýlka generovaných dát pre Y zodpovedala smerodajnej odchýlke produkcie zo skutočných dát.

<sup>27</sup>Hoderick-Prescott (HP) filter rozloží časový rad na trend  $\{\tau_t\}$  a cyklickú zložku  $c_t = x_t - \tau_t$ , nájdením trendu, ktorý rieši:

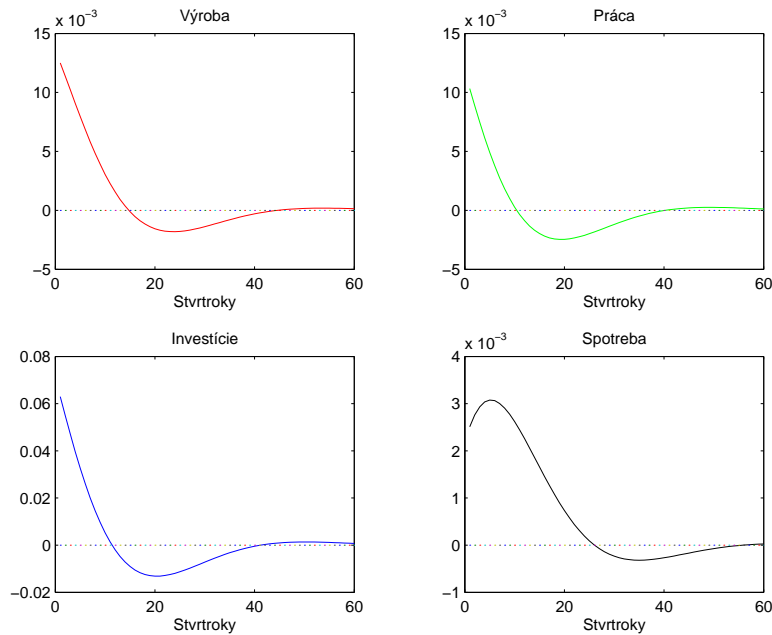
$$\min_{\{\tau_t\}} \left( \sum_{t=1}^T (x_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right),$$

kde  $\lambda$  je parameter určovaný podľa frekvencie príslušných dát. My používame hodnotu všeobecne používanú pre štvrtročné dáta a kladieme  $\lambda = 1600$ .

<sup>28</sup>Dáta sú z CITIBASE data bank.

### 3.4.1 Funkcia odozvy na šok (Impulse Response Function)

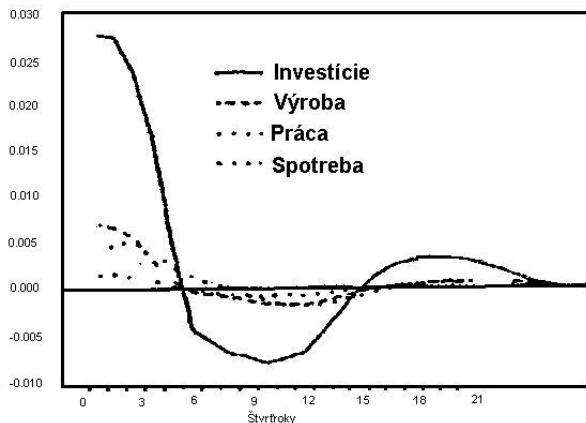
Ďalším krokom bude porovnanie funkcií odozvy na počiatočný šok. Zaviedli sme počiatočný šok do spotreby prostredníctvom očakávaní agentov a vzápätí sme nechali ekonomiku reagovať bez akýchkoľvek ďalších vnútorných šokov. Najimpulzívnejšie reagujú investície, potom výroba, ponuka práce a spotreba:



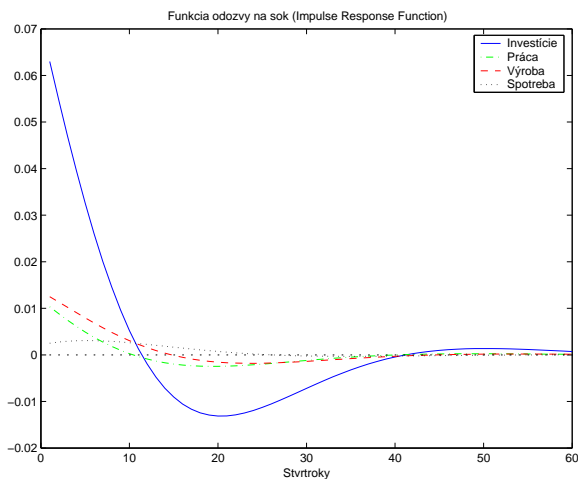
Obr. 7: IRF funkcia jednotlivých premenných

Teraz budeme naše výsledky konfrontovať s realitou. Opäť ide len o hrubé porovnanie základných vlastností funkcie odozvy na šok v realite a v našom modeli. Obrázok 8 predstavuje IRF funkciu pre americké dáta a na Obrázku 9 je IRF funkcia vyge-

nerovaná našim modelom. V obidvoch obrázkoch sú zachytené odozvy investícií, výroby, práce a spotreby. Ako vidíme náš model verne zachytáva realitu v rýchlosti a veľkosti odozvy jednotlivých premenných, keď rovnako ako u našej IRF funkcie aj v realite najimpulzívnejšie reagujú investície, potom výroba, práca a spotreba. Cyklickosť odozvy jednotlivých premenných, ktorú môžeme pozorovať na Obrázku 8, je našim modelom taktiež dobre zachytená. Je to práve vďaka dvom stabilným komplexným vlastným číslam matice nášho modelu, ktoré spôsobujú, že systém vyvedený mimo rovnovážny stav sa dostáva späť po akýchsi kružniciach so stále sa znižujúcou amplitúdou výchylky, čo sa u klasických modelov nedá dosiahnuť.



Obr. 8: IRF funkcia pre reálne americké dáta



Obr. 9: IRF funkcia zostrojená pomocou modelu

## 4 Záverečné poznámky

V našej práci sme chceli reagovať na kritiku, ktorá sa objavila po zavedení myšlienky sunspot modelov. Idea takýchto modelov vznikla na základe objavených nedostatkov klasickej teórie reálnych hospodárskych cyklov. Snaha o odstránenie týchto nedostatkov viedla k zavedeniu nových predpokladov ako sú napr. externality, vnútorný rast, monopoly, racionálne očakávania. Všetky tieto predpoklady implikujú rastúcosť výnosov z rozsahu produkčnej funkcie, čo môže viesť na sunspot ekvilibriá. Objavila sa kritika nereálnosti takýchto modelov a ich nevierohodnosti. V prvej časti sme ukázali, že výskyt sunspot ekvilibrií vôbec nie je nereálny a že tento stav môže nastať malým odchýlením sa od štandardných predpokladov. V druhej časti sme vykonštruovali model s monopolnými výrobcami polotovarov. Skúmali sme, ako môžu racionálne očakávania agentov ovplyvniť reálne výstupy ekonomiky. Úplne sme vypli exogénne šoky v agregovanej produkčnej funkcii. Práve očakávania agentov sa ukázali byť veľmi silnou hnacou silou modelu. Simulovali sme chod namodelovanej ekonomiky a dáta porovnali s reálnymi. Smerodajné odchýlky a korelačné koeficienty veľmi dobre zodpovedali realite. Významným krokom dopredu oproti klasickému prístupu bolo zachytenie cyklických reakcií jednotlivých premenných na

počiatočný šok. Náš model sa choval takmer identicky so skutočnosťou a to práve vďaka zahrnutiu racionálnych očakávaní v modeli. Na základe týchto výsledkov sa domnievame, že sunspot modely a sunspot ekvilibriá spolu s myšlienkou racionálnych očakávaní sú neoddeliteľnou súčasťou balíčka makroekonomických nástrojov pri analýze reálnych dát.

## 5 Dodatok

### 5.1 Loglinearizácia

Je viacej spôsobov ako previesť samotnú loglinearizáciu. My si ukážeme jeden z nich. Vychádzame z daných definícií:

$$\hat{x}_t \equiv \log\left(\frac{x_t}{x^*}\right). \quad (58)$$

Po elementárnej úprave zistíme, že je to ekvivalentné zápisu

$$x^* e^{\hat{x}_t} = x_t. \quad (59)$$

Teraz použijeme aproximáciu člena  $e^{\hat{x}_t} \approx (1 + \hat{x}_t)$ , ktorá platí pre malé  $\hat{x}_t$  a dostávame

$$x^*(1 + \hat{x}_t) \approx x_t. \quad (60)$$

V prípade, že by niektorá premenná bola umocnená, napr. by sme mali  $x_t^m$ , analogickým postupom dostaneme

$$x^{*m}(1 + m\hat{x}_t) \approx x_t^m \quad (61)$$

pre  $m\hat{x}_t$  blízke nule.

Teraz si tento všeobecný postup ukážeme na rovnici pre kapitál zo systému (39).

$$K_{t+1} = BZ_t^m K_t^g C_t^d + (1 - \delta)K_t - C_t, \quad (62)$$

$$K^* e^{\hat{K}_{t+1}} = BZ^{*m} e^{m\hat{Z}_t} K^{*g} e^{g\hat{K}_t} C^{*d} e^{d\hat{C}_t} + (1 - \delta)K^* e^{\hat{K}_t} - C^* e^{\hat{C}_t}, \quad (63)$$

$$K^* e^{\hat{K}_{t+1}} = BZ^{*m} K^{*g} C^{*d} e^{(m\hat{Z}_t + g\hat{K}_t + d\hat{C}_t)} + (1 - \delta)K^* e^{\hat{K}_t} - C^* e^{\hat{C}_t}, \quad (64)$$

$$K^*(1 + \hat{K}_{t+1}) \approx \bar{A}(1 + m\hat{Z}_t + g\hat{K}_t + d\hat{C}_t) + (1 - \delta)K^*(1 + \hat{K}_t) - C^*(1 + \hat{C}_t) \quad (65)$$

$$K^* \hat{K}_{t+1} \approx m\bar{A}\hat{Z}_t + g\bar{A}\hat{K}_t + d\bar{A}\hat{C}_t + (1 - \delta)K^* \hat{K}_t - C^* \hat{C}_t, \quad (66)$$

$$\hat{K}_{t+1} \approx \frac{m\bar{A}}{K^*} \hat{Z}_t + \left(\frac{g\bar{A}}{K^*} + 1 - \delta\right) \hat{K}_t + \left(\frac{d\bar{A}}{K^*} - \frac{C^*}{K^*}\right) \hat{C}_t, \quad (67)$$

kde  $\bar{A} \equiv BZ^{*m} K^{*g} C^{*d}$ .

Rovnica (67) je už lineárna v strieškových premenných a v tvare, aký sme chceli dostať. Pri úprave (65) na (66) si stačí uvedomiť tvar rovnice (62) v rovnovážnom stave:

$$K^* = BZ^{*m} K^{*g} C^{*d} + (1 - \delta)K^* - C^*. \quad (68)$$

## 5.2 Nutná podmienka neurčitosti

Pripomeňme, že znamienko determinantu linearizovanej matice  $J$  je dané výrazom

$$\frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{\beta + \gamma - 1}. \quad (69)$$

Predpokladáme, že  $\alpha < 1$  a  $\gamma \leq 0$ . Z toho vyplýva, že ak chceme mať kladné znamienko predchádzajúceho výrazu, musí byť  $\beta + \gamma - 1 > 0$ . Pozrime sa teraz na krivku ponuky a dopytu po práci, ktoré odvodíme z rovníc (13) a (2). Dostávame

$$w = \frac{C}{N^\gamma} \quad \text{a} \quad w = b \frac{K^\alpha N^\beta}{N}, \quad (70)$$

čo predstavuje krivku ponuky a dopytu po práci. V logaritmickej podobe majú rovnice (70) tvar:

$$\hat{w} = c - \gamma n \quad (71)$$

$$\hat{w} = \log(b) + \alpha k + (\beta - 1)n, \quad (72)$$

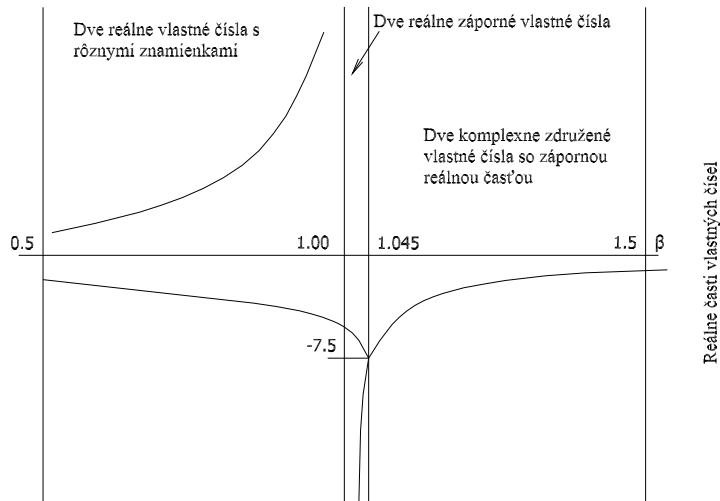
kde  $\hat{w}$  je logaritmus reálnej mzdy a malé písmená reprezentujú logaritmy príslušných veličín. Z tohoto je zrejmé, že na to, aby krivka dopytu po práci stúpala rýchlejšie musí nutne platiť:

$$\beta - 1 > -\gamma, \quad (73)$$

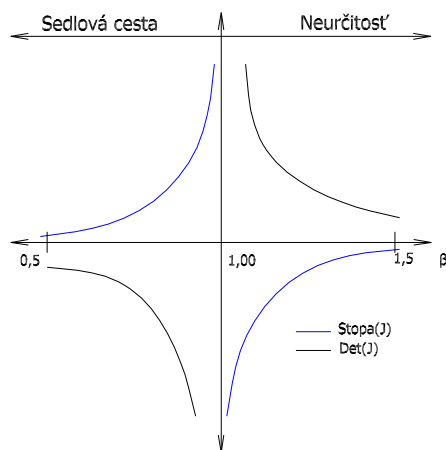
ako je aj zrejмый posun krivky dopytu nahor pri zvýšení hladiny kapitálu. Všimnime si, že podmienka (73) nie je nič iné, ako nutná podmienka kladnosti determinantu linearizovanej matice  $J$ . Pri našej kalibrácii sa podmienka (73) ukazuje ako nutná a postačujúca podmienka výskytu sunspot ekvilibrií, alebo neurčitosti. Kôli lepšej ilustrácii uvádzame nasledujúce obrázky, ktoré znázorňujú dynamiku zmeny znamienok vlastných čísel matice  $J$  ako funkciu výrobnjej elasticity pracovnej sily (Obrázok 10) a takisto veľkosti stopy a determinantu matice  $J$  ako funkciu  $\beta$  (Obrázok 11<sup>29</sup>).

Zvyšné hodnoty sme ponechali na úrovni kalibrácie diskretného modelu z druhej časti našej práce. Ešte treba podotknúť, že pri analýze znamienok vlastných čísel bola fixovaná  $\lambda$  a podiel pre pracovnú silu z celkovej produkcie  $b$  sa menil v závislosti od zmeny  $\beta$ . Keďže používame kalibráciu, kde  $\gamma = 0$ , nutná a v tomto prípade aj postačujúca podmienka neurčitosti sa redukuje na  $\beta > 1$ . Skutočne to vidno aj na obrázkoch, kde práve bod  $\beta = 1$  je bodom, kde sa kladné vlastné číslo "stráca" v  $+\infty$  a v zápätí sa "objavuje" v  $-\infty$  a pevný bod sa stáva stabilným. Z druhého obrázka vidíme, že sa v tomto bode takisto menia aj znamienka stopy a determinantu matice  $J$ , čo plne korešponduje s prechádzajúcimi tvrdeniami.

<sup>29</sup>Obrázky 10 a 11 nedodržiavajú skutočnú mierku, sú len schematickým znázornením.



Obr. 10: Vplyv  $\beta$  na stabilitu pevného bodu



Obr. 11: Stopa a determinant matice  $J$  v závislosti od  $\beta$

## 5.3 Program v jazyku MATLAB

### 5.3.1 Hlavný program

```
clear all;
%-----%
% SIMULACIE DAT A ICH ANALYZA POMOCOU DISKRETNEJ VERZIE SPOJITEHO %
%                               MODELU BENHABIBA A FARMERA %
%-----%
% Autor: Marian Baranec %
%       student FMFI UK Bratislava %
%       odbor EFM %
%       7baranec@st.fmph.uniba.sk %
%
```

```

% Tento program simuluje data pomocou diskretneho modelu          %
% s racionalnymi ocakavanimi, ktore vstupuju ako sok do spotreby. %
% Pocita smerodajne odchyľky a prislusne korelacne koeficienty.   %
% Dĺzka jednej simulacie je nastavena na 151, koli možnosti      %
% porovnaní s realnymi datami americkej ekonomiky v období      %
% 1954.1 - 1991.3 a na tieto data je aj nakalibrovany. Každá     %
% simulácia sa opakuje 1000 - krát a výsledne charakteristiky su  %
% aritmetickým priemerom vypočítaných charakteristik v jednotlivých %
% simuláciach.                                                    %
%-----%

```

```

%-----%
% 1.KALIBRACIA MODELU %
%-----%

```

```

lambda = 0.58;           % parameter monopolnej sily na trhu\quad

a = 0.23;               % podiel pre kapital z cekovej vyroby
alfa = a/lambda;       % vyrobná elasticita kapitalu
beta = 1.21;           % vyrobná elasticita pracovnej sily
b = lambda*beta;       % podiel pre pracu z celkovej produkcie
gama = 0;              %(<=0) elasticita ponuky prace, gama=0 -> krivka ponuky
                        % prace je nekonečne elastická vzhľadom na realnú mzdu

delta = 0.025;         % štvrtročný odpisový faktor
rho = 0.99;            % štvrtročný diskontný faktor
A = 1;                 %(>0)preferenčný parameter
theta = 1;             % parameter trvácnosti sokov produktivity
sigma = 0.0025         % volatilita soku do spotreby

```

```

%-----%
% 2.ZADEFINOVANIE KONSTANT %
%-----%

```

```

tau = rho*(1-delta);
FI = 1/(beta+gama-1);
d = beta*FI;
m = 1-d;
g = alfa*m;
B = (A/b)^d;
D = B*a*rho;
omega = (B*(1-tau)/D)-delta;
chi = (1-g)/d;
ni = ((1-tau)/D)^(1/d);

```

```

%-----%

```



```

% 3. STEADY STATE NONLINEARIZED MODEL (K_bar, C_bar, 1) %
%-----%

K_bar = (omega/ni)^(1/(chi-1));           % Kapital
C_bar = ni*((K_bar)^chi);                 % Spotreba
Z_bar = 1;                                % Ex. soky
L_bar = (A*C_bar/(b*(K_bar)^alfa))^FI;    % Praca
Y_bar = (K_bar^alfa)*(L_bar^beta);        % Vyroba
P_bar = Y_bar/L_bar;                      % Produktivita
I_bar = delta*K_bar;                      % Investicie

disp('Steady state:')
disp(' ')
disp(sprintf('Kapital (K)           = %2.2f', K_bar))
disp(sprintf('Spotreba (S)          = %5.2f', C_bar))
disp(sprintf('Ex. soky (Z)          = %5.2f', Z_bar))
disp(sprintf('Praca (L)             = %5.2f', L_bar))
disp(sprintf('Vyroba (Y)            = %5.2f', Y_bar))
disp(sprintf('Produktivita (P)      = %5.2f', P_bar))
disp(sprintf('Investicie (I)       = %5.2f', I_bar))

%-----%
% 4. LINEARIZED MODEL %
%-----%

a11 = (g*B*(K_bar^(g-1))*(C_bar^d)+1-delta);
a12 = (d*B*(K_bar^(g-1))*(C_bar^d)-(C_bar/K_bar));
pom21 = (g-1)*D*(K_bar^(g-1))*(C_bar^d);
pom22 = ((d-1)*D*(K_bar^(g-1))*(C_bar^d)-tau);
a21 = -(pom21*a11/pom22);
a22 = -((1+a12*pom21)/pom22);

%-----%
% Linearized matrix and its eigenvalues %
%-----%

disp(' ')
disp(' ')
disp('Matrix of the linear model and its eigenvalues:')
J = [a11 a12; a21 a22]
eigen = eig(J)

%-----%
% Generating data %
%      initialization %

```

```

%-----%

M=1000; % pocet simulacii
pocet_obdobi=151; % N=151 <= 1954.1-1991.3
clear K_gen; clear L_gen;
clear C_gen; clear Y_gen P_gen;

for j = 1:M
    K=0;C=0;

    for i = 1:pocet_obdobi
        K_gen(i,j) = a11*K + a12*C;
        C_gen(i,j) = a21*K + a22*C - normrnd(0,sigma);
        L_gen(i,j) = FI*C - (FI*alfa)*K;
        Y_gen(i,j) = alfa*K + beta*L_gen(i,j);
        I_gen(i,j) = (Y_bar/I_bar)*Y_gen(i,j) - (C_bar/I_bar)*C_gen(i,j);
        P_gen(i,j) = Y_gen(i,j) - L_gen(i,j);

        K = K_gen(i,j);
        C = C_gen(i,j);
    end

clear K_hp C_hp L_hp Y_hp I_hp P_hp
% OCISTENIE RADU HP-FILTROM OD FLUKTUACII %
K_hp = Hpfilter(K_gen(:,j),1600);
C_hp = Hpfilter(C_gen(:,j),1600);
L_hp = Hpfilter(L_gen(:,j),1600);
Y_hp = Hpfilter(Y_gen(:,j),1600);
I_hp = Hpfilter(I_gen(:,j),1600);
P_hp = Hpfilter(P_gen(:,j),1600);

std_K(j) = std(K_hp);
std_C(j) = std(C_hp);
std_L(j) = std(L_hp);
std_Y(j) = std(Y_hp);
std_I(j) = std(I_hp);
std_P(j) = std(P_hp);

pomcorr_K = corrcoef(K_hp,Y_hp); corr_K(j) = pomcorr_K(1,2);
pomcorr_C = corrcoef(C_hp,Y_hp); corr_C(j) = pomcorr_C(1,2);
pomcorr_L = corrcoef(L_hp,Y_hp); corr_L(j) = pomcorr_L(1,2);
pomcorr_I = corrcoef(I_hp,Y_hp); corr_I(j) = pomcorr_I(1,2);
pomcorr_P = corrcoef(P_hp,Y_hp); corr_P(j) = pomcorr_P(1,2);
end

```

```

corrKY = mean(corr_K);
corrCY = mean(corr_C);
corrLY = mean(corr_L);
corrIY = mean(corr_I);
corrPY = mean(corr_P);

sd_K = mean(std_K); sd_C = mean(std_C); sd_L = mean(std_L);
sd_Y = mean(std_Y); sd_I = mean(std_I); sd_P = mean(std_P);

%-----%
% VYPISY %
%-----%

% SMERODAJNE ODCHYLKY (STANDARD DEVIATIONS) %
disp(' ')
disp('Smerodajne odchyly (standard deviations):')
disp(' ')
disp(sprintf('Kapital (K)      = %1.2f',100*sd_K))
disp(sprintf('Pomerna k vyrobe = %1.2f',sd_K/sd_Y))
disp(' ')
disp(sprintf('Spotreba (C)      = %1.5f',100*sd_C))
disp(sprintf('Pomerna k vyrobe = %1.2f',sd_C/sd_Y))
disp(' ')
disp(sprintf('Praca (L)         = %1.5f',100*sd_L))
disp(sprintf('Pomerna k vyrobe = %1.2f',sd_L/sd_Y))
disp(' ')
disp(sprintf('Vyroba (Y)         = %1.5f',100*sd_Y))
disp(sprintf('Pomerna k vyrobe = %1.2f',sd_Y/sd_Y))
disp(' ')
disp(sprintf('Produktivita (P) = %1.5f',100*sd_P))
disp(sprintf('Pomerna k vyrobe = %1.2f',sd_P/sd_Y))
disp(' ')
disp(sprintf('Investicie (I)      = %1.5f',100*sd_I))
disp(sprintf('Pomerna k vyrobe = %1.2f',sd_I/sd_Y))

% KORELACNE KOEFICIENTY %
disp(' ')
disp(' ')
disp('Korelacie:')
disp(' ')
disp(sprintf('corr(K,Y) = %1.2f',corrKY))
disp(sprintf('corr(C,Y) = %1.2f',corrCY))
disp(sprintf('corr(L,Y) = %1.2f',corrLY))
disp(sprintf('corr(P,Y) = %1.2f',corrPY))
disp(sprintf('corr(I,Y) = %1.2f',corrIY))

```

```

i=pocet_obdobi;
% Vykreslujeme percentualne odchylky %
subplot(2,2,1),plot(1:i,100*Y_gen(:,19),1:i,0,'-'),title('Vyroba')
subplot(2,2,2),plot(1:i,100*C_gen(:,19),1:i,0,'-'),title('Spotreba')
subplot(2,2,3),plot(1:i,100*L_gen(:,19),1:i,0,'-'),title('Praca')
subplot(2,2,4),plot(1:i,100*I_gen(:,19),1:i,0,'-'),title('Investicie')

```

```

%-----%
% IMPULSE RESPONSE FUNCTION %
%-----%
IRF;

```

### 5.3.2 Program na výpočet IRF funkcií

```

%-----%
%                IMPULSE RESPONSE FUNCTION                %
%-----%
% Autor: Marian Baranec                                     %
%      student FMFI UK Bratislava                          %
%      odbor EFM                                           %
%      7baranec@st.fmph.uniba.sk                          %
%                                                         %
% Funkcia odozvy na sok:                                   %
% - vyjadruje, ako reaguje dany dynamicky system       %
%   na pociatocny sok                                     %
% - budeme sledovat reakcie vyroby (Y), prace (L),      %
%   spotreby (C), a investicii (I)                       %
% - zistime, ze najrychlejsie reaguju prave investicie  %
%-----%

```

```

pocet_obdobi = 60;
K=0; C = 0.00217;

```

```

for i=1:pocet_obdobi
    impK(i) = a11*K + a12*C;
    impC(i) = a21*K + a22*C;
    impL(i) = FI*C - (FI*alfa)*K;
    impY(i) = alfa*K + beta*impL(i);
    impI(i) = (Y_bar/I_bar)*impY(i) - (C_bar/I_bar)*impC(i);
    impP(i) = impY(i) - impL(i);
    K = impK(i);
    C = impC(i);
    L = impL(i);
    Y = impY(i);
    I = impI(i);
    P = impP(i);
end

```

```

figure;
% REAKCIE JEDNOTLIVYCH PREMENNÝCH OSOBITNE%
subplot(2,2,4),plot(1:i,impC,'k',1:i,0,'-'),
axis auto,xlabel('Stvrtroky'),title('Spotreba');
subplot(2,2,2),plot(1:i,impL,'g',1:i,0,'-'),
axis auto,xlabel('Stvrtroky'),title('Praca');
subplot(2,2,1),plot(1:i,impY,'r',1:i,0,'-'),
axis auto,xlabel('Stvrtroky'),title('Vyroba');
subplot(2,2,3),plot(1:i,impI,'b',1:i,0,'-'),
axis auto,xlabel('Stvrtroky'),title('Investicie');

% REAKCIE VSETKYCH PREMENNÝCH V JEDNOM GRAFE%
figure;
plot(1:i,impI,'b-',1:i,impL,'g-',1:i,impY,'r--',1:i,impC,'k:',1:i,0,'k-'),
legend('Investicie','Praca','Vyroba','Spotreba',0),xlabel('Stvrtroky'),
title('Funkcia odozvy na sok (Impulse Response Function)'),axis auto

```

## Referencie

- [1] M. Baxter a R. G. King, "Productive Externalities and Business Cycles," Discussion Paper 53, Institute for Empirical Macroeconomics, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Nov. 1991.
- [2] J. Benhabib a R. E. A. Farmer, Indeterminacy and increasing returns, *J. Econ. Theory* 62 (1994).
- [3] J. Benhabib, R. E. A. Farmer, Indeterminacy and Sunspots in Macroeconomics.
- [4] O. J. Blanchard, C. M. Kahn, The Solution of Rational Difference Models Under Rational Expectations, *Econometrica*, 48, 1305-1311.
- [5] R. J. Caballero a R. K. Lyons, External effects in U.S. procyclical productivity, *J. Monet. Econ.* (1992), 209-226.
- [6] L. J. Christiano, Why does inventory investment fluctuate so much? *J. Monet. Econ* 21 (1998), 247-280.
- [7] A. Dixit a J. E. Stiglitz, Monopolistic competition and optimum product diversity, *Amer. Econ. Rev.* 67 (1977), 297-308.
- [8] R. E. A. Farmer, J. T. Guo, Real Business Cycles and the Animal Spirits Hypothesis, *Journal of Economic Theory* 63, 42-72 (1994).
- [9] G. Hansen, Indivisible labor and the business cycle, *J. Monet. Econ.* 16(1985), 309-325.
- [10] F. Kydland a E. C. Prescott, Time to build and aggregate fluctuations, *Econometrica* 50 (1982), 1345-1370.
- [11] E. C. Prescott, Theory ahead of business cycle measurement, *Fed. Res. Bank Minn. Quart. Rev.* 10 (Fall 1986), 9-22.
- [12] J. Thomas, Do sunspots produce business cycles?, (Dec 1998).
- [13] M. Weder, Near-Rational Expectations in animal Spirits Models of Aggregate Fluctuations, (October 5, 2001)