

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



## DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2003

Alexandra Csajková

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika



KALIBRÁCIA MODELOV VÝVOJA ÚROKOVEJ MIERY

Diplomová práca

Diplomant: Alexandra Csajková

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2003

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne  
s použitím uvedenej literatúry.

.....

Touto cestou by som sa chcela poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Danielovi Ševčovičovi za jeho odborné vedenie, cenné rady a za množstvo času, ktoré mi venoval pri vypracovávaní diplomovej práce.

# Obsah

<b>Prehľad označení</b>	<b>2</b>
<b>Glosár</b>	<b>3</b>
<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>1 Situácia finančného trhu na Slovensku</b>	<b>6</b>
1.1 Zmeny v regulácii na európskom finančnom trhu . . . . .	6
1.2 Portfóliové investície na Slovensku . . . . .	7
1.3 Finančný trh . . . . .	8
1.4 Slovenská burza cenných papierov . . . . .	9
<b>2 Finančné deriváty úrokovej miery</b>	<b>10</b>
2.1 Definícia základných derivátov . . . . .	10
2.2 Všeobecný prístup modelovania term-structure . . . . .	11
<b>3 Term-structure modely</b>	<b>13</b>
3.1 Jednofaktorové modely oceňovania dlhopisov . . . . .	13
3.1.1 Odvodenie jednofaktorového modelu . . . . .	14
3.1.2 Ho and Lee Model . . . . .	17
3.1.3 Zovšeobecnený jednofaktorový model . . . . .	18
3.2 Viacfaktorové modely . . . . .	19
3.2.1 Simulácie dvojfaktorových modelov . . . . .	22
<b>4 Ciele práce</b>	<b>25</b>
<b>5 Štruktúra a charakteristika dát</b>	<b>26</b>
<b>6 Metódy spracovania úlohy</b>	<b>32</b>
6.1 Evolučné stratégie . . . . .	32
6.1.1 Úvod do evolučných stratégií . . . . .	32
6.1.2 Formulácia úlohy . . . . .	32
6.1.3 Evolučná stratégia $(1+1)$ . . . . .	33
6.1.4 Evolučná stratégia $(\mu + 1)$ . . . . .	34
6.1.5 Evolučná stratégia $(\mu, \lambda)$ a $(\mu + \lambda)$ . . . . .	34
6.1.6 Modifikovaná verzia evolučnej stratégie . . . . .	35
6.2 Numerický experiment . . . . .	36
6.2.1 Popis programu . . . . .	36

<b>7</b>	<b>Výsledky</b>	<b>38</b>
7.1	Mesačná analýza jednotlivých rokov . . . . .	38
7.2	Týždenná analýza jednotlivých rokov . . . . .	41
7.3	Tabuľkové výsledky . . . . .	47
7.4	Kritika . . . . .	48
<b>8</b>	<b>Diskusie</b>	<b>49</b>
<b>9</b>	<b>Záver</b>	<b>50</b>
	<b>Referencie</b>	<b>51</b>
	<b>Príloha</b>	<b>53</b>
	Tabuľky . . . . .	53
	Význam jednotlivých parametrov . . . . .	62
	Program . . . . .	63
	Výpis behu programu . . . . .	77

## Prehľad označení

$\alpha$  - drift procesu, ktorý sleduje premenná  $y$ .

$\beta$  - je funkcia, ktorá vyjadruje vplyv volatility premennej  $y$  na jej vývoj.

$\rho$  - funkcia, ktorá vyjadruje koreláciu medzi  $w_t$  a volatilitou úroku  $r$ .

$\theta$  - priemerná hodnota úrokovej miery, ku ktorému sa v mean reversion procese približuje úrok  $r$ .

$\lambda$  - trhovú cenu rizika.

$\nu$  - trhovú cenu rizika volatility.

$\mu$  - drift stochastického procesu pre úrokovú mieru  $r$ .

$\sigma$  - variancia stochastického procesu pre úrokovú mieru  $r$ .

$\tau$  - rozdiel  $T-t$ ; ostávajúci čas do expirácie.

$F$  - face value.

$P$  - cena dlhopisu.

$R$  - spojitá úroková miera.

$T$  - maturity.

$V$  - opčná prémie.

$c$  - kupón.

$r$  - okamžitý úrok.

$r_i$  - časovo meniaci sa úrok.

$t$  - čas v ktorom sa oceňuje derivát.

## Glosár

**Arbitráž - burzová špekulácia:** využitie existujúcich cenových rozdielov na viacerých trhoch, v tom istom čase, cieľom obdržania zisku.

**Brownov pohyb:** špeciálny typ Wienerovho stochastického procesu.

**Drift:** koeficient pri člene  $dt$  v procese  $dr$ .

**Forwardová úroková miera:** budúci úrok.

**Investičné portfólio:** efektívne rozloženie akcií a dlhopisov.

**Kupón:** čiastka peňazí periodicky vyplácaná dlhopisom.

**Long term interest rate:** úrok na dlhšiu dobu.

**Market price of risk - trhovú cenu rizika:** dodatočná cena, krotú zaplatíme za riziko.

**Maturita:** doba splatnosti.

**Mean reversion:** úroková miera na dlhšom horizonte je tlačaná naspäť k nejakej dlhodobej priemernej hodnote (long run average level).

**Nominálna hodnota dlhopisu:** je hodnota derivátu v čase maturity.

**Okamžitá úroková miera - overnight:** je to úrok na veľmi krátku pôžičku.

**Ornstein-Uhlenbeckovej proces:** proces tvaru  $dX = \kappa(\theta - X)dt + \sigma dw_t$ .

**Stochastický proces:** je proces tvaru  $dX = \mu dt + \sigma dw_t$ , kde  $\sigma dw_t$  je stochastická časť a  $\mu dt$  je driftová časť.

**Strike price:** pevne stanovená cena cenného papiera, za ktorú môže byť predaný (resp. kúpený) vo vopred stanovenom čase.

**Spot interest rate:** okamžitá úroková miera.

**Term-structure:** graf zobrazujúci závislosť výnosovej krivky od času  $T$ .

**Úroková miera:** je platený úrok.

**Volatilita:** koeficient pri člene  $dw_t$  v procese  $dX$ .



**Výnosová krivka - yield curve:** graf zobrazujúci závislosť výnosu dlhopisu od času  $T$ .

**Wienerov proces:** definícia v kapitole 3.1

# Úvod

Veľmi dôležitou súčasťou finančných trhov sú finančné deriváty, konkrétne deriváty úrokovej miery, ktoré úzko závisia od úrovni úroku. Poznamenajme si, že úroková miera sa používa nielen na diskontovanie ale aj na definovanie payoffu derivátu. Pri konštrukcii oceňovacích modelov finančných derivátov je dôležité si uvedomiť stochastický pohyb úrokovej miery. V mnohých literatúrach sú uvedené rôzne oceňovacie formulky, ale zatiaľ žiadny definitný záver nebol dosiahnutý ohľadom najlepšieho priblíženia oceňovacích problémov.

Správne modelovanie stochastického charakteru úrokovej miery, presnejšie term-structure úrokovej miery za nejaké obdobie, je veľmi dôležité pre konštrukciu realistického, dôveryhodného oceňovacieho modelu derivátu úrokovej miery.

Hlavná myšlienka je modelovanie ceny derivátu ako funkcia niekoľkých premenných ako: spot rate, long term interest rate, forward rate, atď. V tzv. no-arbitrage interest rate modeloch platí konzistencia spolu so začiatočným term-structure úrokovej miery a/alebo volatilitou úrokovej miery.

V 1.kapitole sa rozoberá aktuálny stav kapitálového a finančného trhu na Slovensku, taktiež portfóliové investície a burza cenných papierov.

V 2.kapitole sú definované základné pojmy týkajúce sa finančných derivátov a tiež je uvedený všeobecný a najznámejší prístup modelovania časovej štruktúry úrokových mier tzv. term-structure.

V 3.kapitole sú uvedené rôzne jedno- a viacfaktorové modely, ktoré sú široko používané v literatúrach. Avšak empirické skúsenosti aplikácií týchto modelov nie sú povzbudzujúce. Dostávame sa do rozpakov, keď sa máme rozhodnúť, ktorý model si vybrať. Jednoduché modely nezachytávajú podstatu pohybu term-structure, zatiaľ čo zložitejšie áno, avšak ich použitie v praxi je nepohodlné.

V 4.kapitole sú uvedené ciele práce a postup riešenia nastávajúcich problémov.

V 5.kapitole som sa snažila priblížiť a sprehľadniť charakter dát. Do tejto kapitoly som zahrnula aj grafické znázornenie úrokových mier.

6.kapitola je venovaná stochastickej metóde hľadania minima tzv. evolučnej stratégie, uviedla som jej stručný historický prehľad. Tiež je tu uvedený popis fungovania programu.

7.kapitola obsahuje analýzu mesačných a týždenných výsledkov, grafické porovnanie modelov CIR a Vašíček a tiež ich kritiku.

# 1 Situácia finančného trhu na Slovensku

## 1.1 Zmeny v regulácii na európskom finančnom trhu

Vývoj na finančných trhoch je mimoriadne dynamický. Vyvoláva požiadavku pohotovej reakcie z pohľadu jeho inštitucionálneho, legislatívneho a regulatívneho zabezpečenia. Nároky v týchto oblastiach sú vysoké aj pre vyspelé trhové ekonomiky. O to náročnejšie sú požiadavky, ktoré musia pre dosiahnutie konkurencieschopnosti splniť transformujúce sa ekonomiky. Museli, resp. musia totiž realizovať navyše procesy reštrukturalizácie a privatizácie.

**Finančný sektor v stredoeurópskych prístupových krajinách:** Úloha a veľkosť burzy cenných papierov ako zdroja kapitálu je v prístupových krajinách pomerne nízka, čo reflektuje nízky pomer trhovej kapitalizácie (stock market capitalisation). Priemerná trhová kapitalizácia búrz v prístupových krajinách dosahuje zhruba štvrtinu úrovne eurozóny (84% HDP). Kapitálový trh má síce dobre sformovanú infraštruktúru, jeho fungovanie je však významne obmedzené zdrojovými možnosťami domácich ekonomických subjektov. Vybudovanie výkonnostnej sily kapitálového trhu bude dlhodobejším procesom.

Z hľadiska budúceho vývoja je zrejmé, že hlavným smerom musí byť relatívne zníženie závislosti ekonomických subjektov od bankového financovania, čo znamená rozvinutie kapitálového trhu. Zároveň je nevyhnutné, aby sa podstatne zvýšila majetková sila nefinančného sektora. Vo vzťahu k integračnému procesu je sila finančného sektora napokon aj jedným z determinantov znižovania úrokových sadzieb na úroveň, pri ktorej bude možné reálne uvažovať s bezproblémovým udržiavaním kurzovej parity voči euru. Finančný sektor pozostáva z bankového sektora, z poisťovníctva a z kapitálového trhu.

**Kapitálový trh:** Je potrebné priznať, že najslabším článkom finančného trhu je kapitálový trh. Aj v poslednom roku boli rozhodujúce aktivity orientované na štátne cenné papiere. Obchodovanie s firemnými cennými papiermi je naďalej minimálne. V podstate jedinou rozvíjajúcou sa súčasťou kapitálového trhu sú otvorené podielové fondy. Najväčšími obchodníkmi s cennými papiermi sú bankové subjekty. V štruktúre obratu na trhu cenných papierov na BCPB stále prevládajú dlhopisy. Predstavujú až 88,4% obratu. Z hľadiska pohybu kapitálu je naďalej slabým článkom kapitálového trhu kurzotvorné anonymné obchodovanie.

Pôsobenie všetkých spomínaných segmentov finančného trhu, ako aj inštitúcií, ktoré sú zodpovedné za kontrolu ich zdravého fungovania je osadené do legislatívneho rámca, ktorý bol a je tvorený s cieľom maximálnej harmo-

nizácie s právnymi normami EÚ pre oblasť finančného trhu.

## 1.2 Portfóliové investície na Slovensku

Toky zahraničného kapitálu majú najčastejšie formu priamych zahraničných investícií, portfóliových investícií, pôžičiek a dlhodobých úverov. Najefektívnejšou formou zahraničného kapitálu sú priame zahraničné investície (PZI). Ide o také investície, ktoré investorovi zabezpečujú určitý podiel vlastníctva a kontroly konkrétnej organizácie v hostiteľskej krajine. Na rozdiel od portfóliových investícií vstupujú priamo do výrobnjej, obchodnej alebo obslužnej sféry konkrétnej ekonomiky.

**Portfóliové investície:** Portfóliové investície (PI) predstavujú pohyb cenných papierov, ktorých zmyslom je hodnotený výnos, zatiaľ čo v prípade PZI sa okrem výnosu ráta aj s možnosťou vplyvu na už existujúce alebo práve vytvárané podniky. Na portfóliové investície viac pôsobia faktory, ako sú výnosy z cenných papierov, úrokové miery, ale aj rôzne špekulačné manipulácie. Tá časť portfóliových investícií, ktorá sa vloží do akcií bude menej pulzujúca, pretože smeruje do sféry dlhodobjších výrobných zámerov. Rozsah zahraničných investícií vkladných do rôznych druhov cenných papierov závisí od rozvinutosti kapitálového trhu.

**Výhody a riziká spojené s prívodom portfóliových investícií:** Ako významné pozitívum sa uvádza vyššia spoluúčasť na riziku. Zahraničný investor podporuje činnosť firmy, do ktorej investoval, pretože má záujem na tom, aby prosperovala. Veľké investície do akcií môžu danej krajine priniesť výhody spojené s transferom technológií, s prístupmi na svetové trhy, a tým udržanie alebo rast zamestnanosti a pod.

Ďalšou výhodou je dlhodobý prínos zvýšenia trhovo orientovaných tokov. Fungujúca burza cenných papierov môže prispieť k lepšej alokácii kapitálu. Súčasne s vplyvom zahraničnej konkurencie sa vytvára tlak na znižovanie domácich úrokových sadzieb a tým sa mobilizuje domáci kapitál pre miestne firmy s nižšími nákladmi. V tejto sfére existujú aj určité riziká, napr. splatnosť bondov môže byť nedostatočná na financovanie dlhodobých projektov. Sú reálne obavy z nestability krátkodobého kapitálu, ktorý sa na základe doterajších skúseností správa dosť nevypočítateľne.

V menšej miere portfóliové investície smerujú do krajín, ktoré ešte nedosiahli veľký ekonomický rast a dlhodobú stabilitu, ale je tu predpoklad pozitívneho vývoja. V tomto prípade prichádzajú zahraniční investori skôr s krátkodobými vkladmi, využívajúcimi vysoké krátkodobé zisky vyplývajúce z okamžitých výhod, vytváraných momentálnou neucelenosťou ekonomiky, ktorá je zároveň sprevádzaná vysokými úrokovými sadzbami.

### 1.3 Finančný trh

Vo fungujúcej trhovej ekonomike má finančný trh svoju nezastupiteľnú úlohu. Je miestom, kde sa stretáva dopyt po finančných prostriedkoch s ich ponukou. Na strane ponuky sa nachádzajú subjekty, ktoré financie poskytujú. Stranu dopytu tvoria najmä podniky, ktoré finančné prostriedky potrebujú na financovanie svojich aktivít. Prostriedky tvoriace ponuku majú charakter úspor rôznych ekonomických subjektov. Týmito subjektmi sú okrem bánk domácnosti, firmy, vláda a cudzozemské zdroje. Finančný sprostredkovateľ prostredníctvom finančných nástrojov na finančnom trhu zabezpečujú pohyb krátkodobého a dlhodobého kapitálu medzi jednotlivými subjektmi v národnom, ako aj medzinárodnom meradle.

Voľné finančné prostriedky spomenutých subjektov prechádzajú finančným trhom. Tieto finančné prostriedky získavajú dlžníci. Po ich použití nadobúdajú charakter investícií. Investície pritom môžeme rozdeliť na reálne investície a finančné.

Charakter investícií závisí od ich využitia. Niektoré investície možno financovať z úverových zdrojov. Veritelia požičiavajú dlžníkom prostredníctvom úveru. Za požičanie prostriedkov očakávajú výnos v podobe úroku. Požičané prostriedky sa im po dohodnutom čase vrátia a získaný výnos je ziskom veriteľa. Finančnými investíciami nazývame investície do cenných papierov, nehnuteľností, drahých kovov atď. Investor nákupom cenných papierov taktiež očakáva výnos. Veritelia získavajú predajom cenných papierov finančný kapitál. Cenný papier je teda nárokom majiteľa na úrok, dividendu, prípadne iný kapitálový výnos.

Pohyb prostriedkov od veriteľov k dlžníkom môže mať formu: priameho a nepriameho financovania.

Ak dlžníci získavajú prostriedky priamo od veriteľov, hovoríme o priamom financovaní. Transakcia medzi veriteľom a dlžníkom sa uskutočňuje formou predaja cenných papierov, prípadne priameho úveru. Cenný papier predstavuje nárok veriteľa na vrátenie požičaných prostriedkov s príslušným výnosom. Tento spôsob je najjednoduchší a zároveň v sebe ukrýva mnohé nevýhody. Pri tomto spôsobe financovania je zložitá nájsť dvoch investorov, ktorým budú vyhovovať podmienky transakcie, ako sú objem prostriedkov, forma, časová realizácia. Pri procesoch môže nastať situácia, keď partneri nie sú ochotní akceptovať vzájomné podmienky. Informácie o obchodných partneroch sa získavajú ťažko a celý proces predražujú. Tým rastú transakčné náklady /náklady potrebné na uzavretie obchodu/, ktoré sú potom nedostupné najmä individuálnym investorom. Preto sa obracajú na iných účastníkov trhu, ktorí zastupujú svojich klientov pri predaji cenných papierov. Tým,

že na seba berú zodpovednosť za úspešnú realizáciu klientových požiadaviek, odbremeňujú ich od tejto špecializovanej práce a nechávajú im väčší priestor na realizáciu obchodných zámerov. Pretože finanční sprostredkovatelia sa špecializujú na danú činnosť, dokážu odbornejšie a kvalitnejšie realizovať klientove požiadavky. Tým klesajú transakčné náklady na finančnú operáciu a rastie šanca na úspešný predaj cenných papierov na trhu. Finanční sprostredkovatelia zjednodušujú kontakt medzi veriteľom a dlžníkom a uľahčujú realizáciu financovania. Pretože medzi veriteľa a dlžníka vstupuje iný subjekt, finančný sprostredkovateľ, hovoríme o nepriamom financovaní. Finančnými sprostredkovateľmi sú v súčasnosti hlavne komerčné banky, spopritelne, finančné spoločnosti, penzijné fondy, poisťovne, investičné fondy, investičné spoločnosti, obchodníci s cennými papiermi a pod.

## 1.4 Slovenská burza cenných papierov

Slovenská burza cenných papierov (SBCP) je akciovou spoločnosťou, ktorá organizuje dopyt a ponuku cenných papierov na základe povolenia Úradu pre finančný trh. Po právnej stránke je chod obchodného systému zastrešený Burzovými pravidlami, ktoré schválil Úrad pre finančný trh.

**Obchodovanie:** Technické prostriedky, ktorými disponuje SBCP, mu umožňujú realizovať vysporiadanie obchodov v reálnom čase. V praxi to znamená, že od podania pokynu až do jeho majetkového a finančného vysporiadania uplynie iba niekoľko sekúnd, čo zaraďuje daný obchodný systém medzi najrýchlejšie na svete. Vysoká rýchlosť a bezpečnosť bola dosiahnutá aj vďaka tomu, že všetky cenné papiere na Slovensku sú na základe zákona o cenných papieroch povinne dematerializované a uložené v Stredisku cenných papierov. V súčasnosti je možné na trhu SBCP uzatvárať obchody s akciami a podielovými listami podielových fondov.

## 2 Finančné deriváty úrokovej miery

Finančné deriváty sú cenné papiere, ktorých hodnota závisí od iných základných premenných. V posledných rokoch sa deriváty stali jednou z najdôležitejších častí finančných trhov. Futurity a opcie sú široko obchodovateľné na rôznych burzách. Forwardy, swapy a iné typy opcí sú používané finančnými inštitúciami a ich klientmi, mimo burzy. Finančné deriváty vlastne slúžia na zaistovanie investičného portfólia voči riziku plynúceho z výkyvov cien akcií.

### 2.1 Definícia základných derivátov

**Dlhopis** je cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje majiteľovi, že vo vopred stanovených lehotách bude vyplácať kupónové platby (väčšinou periodicky), a tiež v stanovenom čase vyplatí nominálnu hodnotu. Ak sa jedná o tzv. zero-coupon bond (bezcupónový dlhopis), nevypláca sa pravidelný úrok. Poznáme tri typy dlhopisov: štátne, podnikové a komunálne.

**Forward kontrakt** je kontrakt o kúpe alebo predaja nejakého aktíva vo vopred dohodnutom čase a za presne stanovenú cenu tzv. delivery price. Vo všeobecnosti sa s nimi obchoduje mimo burzy. Long pozícia, je strana, ktorá kupuje forward, zatiaľ čo short pozícia predáva. Hodnota forwardu v čase uzavretia kontraktu je nulová, potom môže nadobudnúť aj kladné aj záporné hodnoty v závislosti od pohybu ceny aktíva.

**Future** je kontrakt podobný forward kontraktu, v ktorom sa jedna strana zaväzuje kúpiť alebo predať aktívum druhej strane vo vopred dohodnutom čase za presne stanovenú cenu. Tento derivát sa obchoduje na burze. Na rozdiel od forwardu, nie nutne sa poznajú obidve strany, preto za splnenie záväzkov ručí burza. Najvýznamnejším rozdielom future od forwardu je, že presný čas prevzatia kontraktu nie je špecifikovaný.

**Cap** predstavuje poistenie sa voči zvýšeniu úrokovej miery nad nejakú hodnotu, ktorá je známa ako cap rate. Ak úroková miera prevyšuje cap rate, predávajúci capu vypláca rozdiel medzi úrokom na pôžičku a úrokom, ktorý bude požadovaný v prípade aplikácie cap rate-u. Cap je konštruovaný tak, aby garantoval, že priemerná hodnota platieb počas života pôžičky neprevyšovala určitú úroveň.

**Floor** predstavuje poistenie sa voči zníženiu úrokovej miery pod nejakú hodnotu. Je to vlastne opak capu.

## 2.2 Všeobecný prístup modelovania term-structure

V predchádzajúcej časti som už definovala dlhopisy. Uviedla som aj to, že existuje bezkupónový dlhopis a taktiež kupónový dlhopis (discount bond). Cena dlhopisu v nejakom čase  $t$  závisí od viacerých faktorov ako sú: fluktuácie úrokovej miery, doba splatnosti a iné nezrovnalosti.

Ak uvažujeme diskrétné úročenie, tak hodnota bezkupónového dlhopisu je:

$$P = \frac{F}{(1 + r_n)^n},$$

kde  $F$ -face value,  $r_n$ -časovo meniaci sa úrok.

Hodnotu kupónového dlhopisu dostaneme nasledovne:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{c}{(1 + r_i)^i} + \frac{F}{(1 + r_n)^n},$$

kde  $c$ -kupón, ktorý sa vypláca pravidelne (ročne, štvrťročne, mesačne atď). Keďže kupónový dlhopis sa dá zostrojiť z bezkupónových, budeme uvažovať už len bezkupónové. Cena takéhoto cenného papiera závisí od okamžitého času  $t$  a od maturity  $T$ .

Keď prejdeme na spojitú úročenú, cena dlhopisu v čase  $t$  s maturitou  $T$  je:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1)$$

kde  $R(t, T)$  je spojitá úročená úroková miera v čase  $t$  s maturitou  $T$ . Z toho platí pre úrok:

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}. \quad (2)$$

Toto vyjadrenie nám umožňuje určiť krivku úrokovej miery v prípade, keď poznáme cenu dlhopisu v každom čase  $t$ . Ak uvažujeme závislosť  $R(t, T)$  od maturity  $T$ , dostávame tzv. yield curve. Term-structure alebo časová štruktúra úrokových mier vyjadruje závislosť výnosovej krivky (yield curve) od času  $(T - t)$  ostávajúceho do expirácie.

Overnight je začiatkový bod tejto krivky. Tento úrok je na veľmi krátku dobu a je definovaný takto:

$$R(t, t) = r_t = -\frac{\partial \log(P(t, T))}{\partial T}. \quad (3)$$

Na vysvetlenie tvaru term-structure vznikli rôzne teórie. Z nich najznámejšie sú:



**Teória očakávaní:** Táto teória tvrdí, že dlhodobý úrok sleduje očakávanú budúcu hodnotu krátkodobej úrokovej miery. Platí teda:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T E_t(r(s)) ds,$$

kde  $E_t(r(s))$  je očakávaná hodnota v čase  $t$ , short rate-u v čase  $s$ .

**Teória rozdelenia trhu:** Táto teória zase tvrdí, že tvar yield curve bude závisieť na podmienkach ponuky a dopytu kapitálu na long-term trhu v závislosti od short-term trhu.

**Teória preferencie likvidity:** Predpokladá, že krátkodobé pôžičky sú uprednostnené zo strany požičiavajúceho z dôvodu likvidity kapitálu. Z toho vyplýva, že dlhodobé dlhopisy majú vyšší výnos.

U posledných dvoch teóriach rovnica pre  $R(t, T)$  má rovnaký tvar a to:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left( \int_t^T E_t(r(s)) ds \int_t^T L(s, T) ds \right),$$

kde  $L(s, T)$  sa dá interpretovať ako prémie v čase  $s$  dlhopisu s maturitou  $T$ . Táto prémie reprezentuje odchýlku od teórie očakávaní.

Analogickým spôsobom ako u dlhopisov (1), môžeme napísať u forwardu:

$$\frac{P(t, T + \Delta t)}{P(t, T)} = e^{-f(t, T, T + \Delta t)(\Delta t)}, \quad (4)$$

kde ľavá strana rovnosti vyjadruje pomer cien dvoch dlhopisov s maturitami  $T$  a  $T + \Delta t$ ; a na pravej strane sa vyskytuje  $f(t, T, T + \Delta t)$  - forward rate v čase  $t$  na obdobie  $(T, T + \Delta t)$ .

Z tejto rovnice vyplýva:

$$f(t, T, T + \Delta t) = -\frac{\log P(t, T + \Delta t) - \log P(t, T)}{\Delta t}. \quad (5)$$

Z toho vieme odvodiť okamžitú forward rate, ktorá má tvar:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (6)$$

### 3 Term-structure modely

Modely, ktoré opisujú správanie sa úrokových mier, v literatúrach nájdeme pod menom yield curve model, term-structure model, model výnosovej krivky alebo model časovej štruktúry úrokových mier.

Sú známe dva základné typy týchto modelov:

**No-arbitrage interest rate modely:** Počiatočný term-structure je vstupom týchto modelov; premenné získané z týchto modelov sú automaticky konzistentné s týmto vstupom. Parametre týchto modelov sú funkciami času a sú determinované súčasnými trhovými dátami. K týmto modelom patrí napr. Heath-Jarrow-Mortonov model [1], ktorý je tzv. non-Markovovský model; ktorý môže byť často jednotvárný a týmpádom v praxi menej používaný.

**Equilibrium modely:** V týchto modeloch vychádzame z predpokladov o stochastickom vývoji úrokovej miery. Toto spolu s bezarbitrážnou ekonomikou nám udáva cenu všetkých derivátov. Napr. Cox, Ingersoll a Ross model [1] začína s predpokladmi o premenných v ekonomike, konkrétne so stochastickým vývojom jedného alebo viacerých premenných; a s preferenciami reprezentatívneho účastníka trhu. Naviac celkové rovnovážne podmienky endogenizujú úrokovú mieru a ceny dlhopisov. K týmto modelom patrí Vašíčkov model. Vo všeobecnosti problémom týchto modelov je nepresný fit vstupnej výnosovej krivky.

#### 3.1 Jednofaktorové modely oceňovania dlhopisov

Modelovanie term-structure sa začína stochastickým procesom krátkodobej úrokovej miery  $r$  v rizikovo neutrálnom svete a pozoruje sa aký dopad má na ceny dlhopisov a akcií. Je však potrebné vedieť, že neexistuje proces opisujúci vývoj úrokovej miery. V mnohých modeloch je predpokladaný vývoj závislý od jedného stochastického faktora. Tieto modely sa nazývajú jednofaktorové. Takže predpokladajme, že úroková miera  $r_t$  sleduje spojitý markovovský proces. Tá sa dá vyjadriť pomocou nasledujúcej stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dr = \mu_r(r, t)dt + \sigma_r(r, t)dw, \quad (7)$$

kde  $dw$  je štandardný Wienerov proces,  $\mu_r(r, t)$  je drift,  $\sigma_r(r, t)$  je variancia tohto procesu.

**Definícia 3.1.** Štandardný Wienerov proces  $\{w(t), t \geq 0\}$  je  $t$ -parametrický systém náhodných veličín, pričom:

- všetky prírastky  $w(t + \Delta) - w(t)$  majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a varianciou  $\Delta$ ,
- pre všetky delenia  $0 < t_1 < \dots < t_n$  sú prírastky  $w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_n) - w(t_{n-1})$  nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa prvého bodu,
- $w(0) = 0$  a vzorky ciest  $w(t)$  sú spojité v premennej  $t \geq 0$ .

Pri konštrukcii jednofaktorových modelov treba špecifikovať vhodný tvar stochastického procesu riadiacej premennej. Táto premenná môže byť short rate. V tom prípade hlavné požiadavky týchto modelov sú:

- úroková miera by nemala nadobúdať záporné hodnoty a tiež príliš veľké hodnoty.
- úroková miera na dlhšom horizonte je tlačaná späť k nejakej dlhodobej priemernej hodnote (long run average level). Keď úrok je vysoký, tzv. mean reversion pôsobuje negatívny drift, v opačnom prípade kladný drift.
- volatilita úrokovej miery na rôzne obdobia je rôzna. Spravidla pre krátke obdobia sú vyššie úroky, a naopak.
- volatilita sa mení s hodnotou short rate.

Zatiaľ však nie je známy žiadny model, ktorý by zachytával všetky tieto požiadavky naraz. Treba si uvedomiť, ktoré z týchto vlastností potrebujeme najviac pri praktickej konštrukcii modelu.

### 3.1.1 Odvodenie jednofaktorového modelu

V týchto modeloch je jediný zdroj neistoty, štandardný Wienerov proces. Samozrejme sú aj iné faktory, ktoré ovplyvňujú ceny dlhopisov ako sú: dane, obchodovateľnosť, riziko atď. Pre zjednodušenie, teraz predpokladajme, že cena dlhopisu  $P$  závisí od úrokovej miery  $r$ , času  $t$  a maturity  $T$ :  $P = P(t, T, r)$ . Na odvodenie diferenciálnej rovnice určujúcej cenu bezkupónového dlhopisu potrebujeme Itôovu lemu.

**Lema 3.1.** (Itôova lema [6]) *Nech  $f(x, t)$  je hladká funkcia dvoch premenných  $x, t$ , pričom premenná  $x$  je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde  $w$  je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie  $f$  je daný vzťahom:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia  $f$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Vieme, že úrok  $r$  vyhovuje rovnici (7). Potom podľa lemy 3.1 pre diferenciál  $P$  platí:

$$\begin{aligned} dP &= \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} dw \\ &= \tilde{\mu}(t, T) dt + \tilde{\sigma}(t, T) dw, \end{aligned} \quad (8)$$

kde  $\tilde{\mu}$  je drift diferenciálu  $P$  a  $\tilde{\sigma}$  je jeho volatilita.

Teraz zostavme portfólio  $\pi$ , ktoré pozostáva z jedného dlhopisu s dobou splatnosti  $T_1$  a  $\gamma$  dlhopisov s dobou splatnosti  $T_2$ :

$$\pi = P_1(t, T_1, r) + \gamma P_2(t, T_2, r). \quad (9)$$

Investor si určuje potom pomer  $\gamma$  tak, aby minimalizoval svoje riziko. Zmena hodnoty portfólia za čas  $dt$  je:

$$d\pi = dP_1 + \gamma dP_2.$$

Po dosadení z rovnice (8) a po úprave dostávame:

$$d\pi = (\tilde{\mu}_1 + \gamma \tilde{\mu}_2) dt + (\tilde{\sigma}_1 + \gamma \tilde{\sigma}_2) dw. \quad (10)$$

Na odstránenie rizikového člena položíme:

$$\tilde{\sigma}_1 + \gamma \tilde{\sigma}_2 = 0.$$

To znamená, že

$$\gamma = -\frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_2}, \quad (11)$$

a hodnota portfólia je bez stochastickej časti:

$$d\pi = \left( \tilde{\mu}_1 - \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{\sigma}_2} \tilde{\mu}_2 \right) dt. \quad (12)$$

Hodnota portfólia je teda deterministická. Aby nevznikla možnosť arbitráže, musí platiť rovnosť:

$$\frac{rP_1 - \tilde{\mu}_1}{\tilde{\sigma}_1} = \frac{rP_2 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{\sigma}_2};$$

pričom máme na pamäti, že  $\pi$  je portfólio vytvorené podľa (9).

Táto rovnica je platná pre ľubovoľné doby splatnosti, teda veličina

$$\lambda(t, r) = \frac{\tilde{\mu}(t, T) - r(t)P(t, T)}{\tilde{\sigma}(t, T)} \quad (13)$$

je nezávislá na  $T$ . Nazýva sa trhovú cena rizika (market price of risk). Je to vlastne dodatočná cena, ktorú zaplatíme za riziko.

Spojením vzťahov (8) a (13) dostaneme:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \tilde{\mu} &= \lambda \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r} + rP = \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Z toho:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda \sigma_r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (14)$$

Táto rovnica je parciálna diferenciálna rovnica, ktorá nám určuje všeobecný tvar jednofaktorového modelu. Ak by sme chceli odvodiť konkrétne nejaký model, stačí špecifikovať funkcie  $\mu_r(r, t)$ ,  $\sigma_r(r, t)$  a  $\lambda(r, t)$ . Najviac známe a používané sú modely, v ktorých úrok sleduje tzv. Ornstein-Uhlenbeckovej proces. To znamená, že drift má tvar:

$$\mu_r(r, t) = \kappa(\theta - r(t)),$$

kde  $\kappa$ ,  $\theta$  sú konštanty; a volatilita zvykne mať tvar:

$$\sigma_r(r, t) = \sigma r^\gamma,$$

kde  $\gamma$  je konštanta.

Takže dostávame stochastický proces v tvare:

$$dr = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma r^\gamma dw. \quad (15)$$

Z tejto rovnice môžeme vyčítať, že úroková miera sleduje mean reversion proces, t.j. úrok je tlačný späť k dlhodobej priemernej hodnote. V tomto prípade táto priemerná hodnota je  $\theta$ , a sila ktorou sa približuje k priemeru je  $\kappa$ .

Typy modelov:

- Vašíčkov model [2]:  $\gamma = 0$ ,  $\lambda(r, t) = \lambda_0$ ,
- CIR model [2]:  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda(r, t) = \frac{\lambda_0 r^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$ .

Pričom  $\lambda_0$  je rôzna pre oba modely.

Riešenie týchto modelov sa dá zapísať v tvare:

$$P(t, T, r) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (16)$$

kde  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$  sú konkrétne funkcie. Samozrejme riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (14) musí spĺňať podmienku  $P(T, T, r) = 1$ .

Pre modely

- Vašíček:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}, \quad (17)$$

$$A(t, T) = \exp \left[ (B(t, T) - T + t) \left( \theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda_0}{\kappa} \right) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4\kappa} \right],$$

- CIR:

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\eta(T-t)} - 1)}{(\kappa + \lambda + \eta)(e^{\eta(T-t)} - 1) + 2\eta},$$

$$\eta = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}, \quad (18)$$

$$A(t, T) = \left[ \frac{2\eta e^{(\kappa + \lambda + \eta)(T-t)/2}}{(\kappa + \lambda + \eta)(e^{\eta(T-t)} - 1) + 2\eta} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}},$$

funkcie majú tento tvar.

### 3.1.2 Ho and Lee Model

Ho a Lee prezentovali prvý bezarbitrážny model [1] term-structure v roku 1986<sup>1</sup>. Model bol založený na binomickom strome, kde existovali dva parametre. Jeden sa vzťahuje na volatilitu a druhý na trhovú cenu rizika. Ukázalo sa, že úroková miera sleduje nasledovný proces:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dw, \quad (19)$$

---

<sup>1</sup>T.S.Y.Ho and S.-B.Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", Journal of Finance, 41 (December 1986), 1011-29.

kde  $\sigma$  je štandardná odchýlka úrokovej miery a  $\theta(t)$  je funkcia času, ktorá definuje priemerný smer pohybu  $r$  závislého od  $t$ . Táto funkcia nám zabezpečuje aby model fitoval začiatočný term-structure. Rovnica pre  $\theta(t)$  má nasledovný tvar:

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t. \quad (20)$$

Tento výraz nám opisuje nasledovnú vec, drift odráža sklon počiatočnej forward krivky a volatilitu krátkodobej úrokovej miery. Cena diskontovaného dlhopisu v čase  $t$  sa dá napísať v tvare:

$$P(t, T, r) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}, \quad (21)$$

kde

$$B(t, T) = T - t, \quad (22)$$

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T, r)}{P(0, t, r)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t, r)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 t B(t, T)^2.$$

Ho and Lee model je ľahko implementovateľný a exaktne fituje súčasný term structure úrokovej miery. Nedostatok modelu je, že dáva malý priestor na voľbu volatility structure; a tiež nie je mean reversion.

### 3.1.3 Zovšeobecnený jednofaktorový model

Okrem modelov Vašíčka [2] a CIR [2] existuje množstvo iných jednofaktorových modelov. Ich základom je opäť stochastický proces reprezentovaný vťahom:

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \rho r^\gamma dw,$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$  sú konštanty. Vašíčkov model korešponduje s  $\gamma = 0$ ; CIR model s  $\gamma = \frac{1}{2}$ ; geometrický Brownov model s  $\alpha = 0, \gamma = 1$ .

Poznamenajme si, že ak  $\gamma > 0$ , tak volatilita rastie s rastúcou úrokovou mierou. Tento efekt sa nazýva level efekt.

Pomocou zovšeobecnenej momentovej metódy sa empirickou analýzou potvrdilo, že najúspešnejšie modely sú tie, ktoré dovoľujú vysokú senzitivnosť zmien volatility úrokovej miery v závislosti od  $r$ . Tento poznatok potvrdil, že volatilita term-structure je dôležitým faktorom pri stanovení hodnoty derivátov. Tiež sa zistilo, že modely s  $\gamma \geq 1$  viacej zahŕňajú dynamiku krátkodobej úrokovej miery ako modely s  $\gamma < 1$ . Vzťah medzi volatilitou úrokovej miery a výškou  $r$  je dôležitejší ako vlastnosť mean reversion, pri charakteristike dynamiky modelov úrokovej miery. Vašíčkov model je často kritizovaný pre možnosť vyskytnutia zápornej úrokovej miery, avšak väčší

nedostatok tohto modelu je  $\gamma = 0$ . Tento predpoklad nám implikuje, že zmena volatility je konštantná, nezávislá od  $r$ .

Z ďalších záverov empirických štúdií vyplýva, že takýto prístup modelovania term-structure úrokovej miery nám nedáva adekvátny obraz.

### 3.2 Viacfaktorové modely

V modeloch, ktoré sme doteraz spomenuli, celá term-structure bola závislá na jednom stochastickom parametri. Viacerí sa zaoberali vlastnosťami dvojfaktorového modelu. Napr. Brennan a Schwartz [13] navrhli model v ktorom proces short rate sa vracia k long rate, ktorý však sleduje stochastický proces. Druhý známy model bol predstavený Longstaffom a Schwartzom [3]. Vyštartovali zo zovšeobecneného rovnovážneho modelu a odvodili term structure model so stochastickou volatilitou. Je to analyticky zložitý model. Definujme taký proces, ktorý je stochastický a má stochastickú volatilitu.

**Definícia 3.2.** *Nech  $(r_t)$  je proces, ktorý sleduje okamžitú úrokovú mieru pre dvojfaktorový model s driftom  $\mu(t, r, y)$  a volatilitou  $\sigma(t, r, y)$ . Nech  $(y_t)$  je proces, ktorý určuje volatilitu s driftom  $\alpha(t, r, y)$ . Nech  $w_t$  a  $v_t$  sú nezávislé Wienerove procesy (3.1);  $\rho(t, r, y)$  je korelácia medzi  $w_t$  a volatilitou  $r_t$ .  $\beta(t, r, y)$  je ohraničená funkcia a  $|\rho(t, r, y)| < 1$ .*

*Potom proces  $(r_t, y_t)$  splňa*

$$\begin{aligned} dr_t &= \mu(t, r, y)dt + \sigma(t, r, y)dw_t \\ dy_t &= \alpha(t, r, y)dt + \beta(t, r, y) \left( \rho(t, r, y)dw_t + \sqrt{1 - \rho^2(t, r, y)}dv_t \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Na odvodenie diferenciálu funkcie  $P(t, T, r, y)$  sa postupuje podobne ako v kapitole 3.1.1.

**Lema 3.2.** *(Viacrozmerná Itôova lema [2]) Nech  $f(X, t) : R^n \times R \rightarrow R$  je  $C^2$  hladká funkcia a  $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$  je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice:*

$$d\vec{X} = \vec{\mu}dt + \Sigma d\vec{W},$$

*kde  $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  je vektor driftov,  $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^n$  je kovariančná matica;  $d\vec{W}$  označuje vektor diferenciálov Wienerových procesov  $\vec{W} = (w_1, \dots, w_n)$ , ktoré sú navzájom nezávislé. Potom platí:*

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma : \nabla_x^2 f \Sigma \right) dt + \nabla_x f d\vec{X},$$

*kde  $\nabla_x f$  označuje gradient funkcie  $f : \nabla_x f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$   
a  $\Sigma : \nabla_x^2 f \Sigma = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk}$ .*



V našom prípade teda diferenciál funkcie  $P(t, T, r, y)$  má tvar:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial y}drdy + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}dy^2 \right). \quad (24)$$

Po dosadení sústavy (23) a po úpravách dostávame:

$$\begin{aligned} dP &= \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \alpha \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \beta\rho\sigma(t, r, y) \frac{\partial^2 P}{\partial r\partial y} \right) dt \\ &+ \left( \sigma \frac{\partial P}{\partial r} + \beta\rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) dw_t + \beta\sqrt{1-\rho^2} \frac{\partial P}{\partial y} dv_t. \end{aligned} \quad (25)$$

Túto rovnicu môžeme prepísať do tvaru:

$$dP = \tilde{\mu}dt + \tilde{\nu}dw_t + \tilde{\varphi}dv_t, \quad (26)$$

kde  $\tilde{\mu}$  je koeficient v rovnici (25) pred  $dt$ ,  $\tilde{\nu}$  je koeficient pred  $dw_t$  a  $\tilde{\varphi}$  je koeficient pred  $dv_t$ .

Zase zostavíme portfólio  $\pi$ , ktoré pozostáva z jedného dlhopisu s dobou splatnosti  $T_1$ ,  $\gamma$  dlhopisov s maturitou  $T_2$  a  $\delta$  dlhopisov s maturitou  $T_3$ :

$$\pi = P_1(t, T_1, r, y) + \gamma P_2(t, T_2, r, y) + \delta P_3(t, T_3, r, y). \quad (27)$$

Zmena hodnoty portfólia za čas  $dt$  je:

$$\begin{aligned} d\pi &= dP_1 + \gamma dP_2 + \delta dP_3 \\ &= (\tilde{\mu}_1 + \gamma\tilde{\mu}_2 + \delta\tilde{\mu}_3)dt + (\tilde{\nu}_1 + \gamma\tilde{\nu}_2 + \delta\tilde{\nu}_3)dw_t + (\tilde{\varphi}_1 + \gamma\tilde{\varphi}_2 + \delta\tilde{\varphi}_3)dv_t. \end{aligned} \quad (28)$$

Na odstránenie rizikových členov položíme:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1 + \gamma\tilde{\nu}_2 + \delta\tilde{\nu}_3 &= 0 \\ \tilde{\varphi}_1 + \gamma\tilde{\varphi}_2 + \delta\tilde{\varphi}_3 &= 0. \end{aligned}$$

To znamená, že:

$$\gamma = \frac{\tilde{\nu}_3\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\nu}_1\tilde{\varphi}_3}{\tilde{\nu}_2\tilde{\varphi}_3 - \tilde{\nu}_3\tilde{\varphi}_2} \quad (29)$$

$$\delta = \frac{\tilde{\nu}_1\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\nu}_2\tilde{\varphi}_1}{\tilde{\nu}_2\tilde{\varphi}_3 - \tilde{\nu}_3\tilde{\varphi}_2}, \quad (30)$$

a zmena hodnoty portfólia je bez stochastickej časti:

$$d\pi = \left( \tilde{\mu}_1 + \frac{\tilde{\nu}_3\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\nu}_1\tilde{\varphi}_3}{\tilde{\nu}_2\tilde{\varphi}_3 - \tilde{\nu}_3\tilde{\varphi}_2}\tilde{\mu}_2 + \frac{\tilde{\nu}_1\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\nu}_2\tilde{\varphi}_1}{\tilde{\nu}_2\tilde{\varphi}_3 - \tilde{\nu}_3\tilde{\varphi}_2}\tilde{\mu}_3 \right) dt.$$

Hodnota portfólia je teda deterministická. Aby nevznikla možnosť arbitráže musí zase platiť:

$$d\pi = \pi r dt.$$

Nech parametre  $\lambda$  a  $\omega$ , ktoré nie sú závislé od maturity, majú tvar:

$$\begin{aligned}\lambda(t, r, y) &= \frac{\tilde{\mu} - rP - \omega\tilde{\varphi}}{\tilde{\nu}} \\ \omega(t, r, y) &= \frac{\tilde{\mu} - rP - \lambda\tilde{\nu}}{\tilde{\varphi}}.\end{aligned}$$

Potom platí:

$$\tilde{\mu} - rP = \lambda\tilde{\nu} + \omega\tilde{\varphi}. \quad (31)$$

Parameter  $\lambda$  je trhová cena rizika (market price of risk) a  $\omega$  je trhová cena rizika volatility (market price of volatility risk).

Ak spojíme vzťahy (25), (26) a (31) dostaneme finálny tvar PDR pre dvojfaktorový model:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \left( \alpha - \lambda\beta\rho - \omega\beta\sqrt{1 - \rho^2} \right) \frac{\partial P}{\partial y} \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \beta\rho\sigma \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP.\end{aligned} \quad (32)$$

Po úpravách z toho nám plynie:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div} (A \nabla P) + \vec{b} \nabla P - rP = 0, \quad (33)$$

kde  $\nabla P = (\frac{\partial P}{\partial r}; \frac{\partial P}{\partial y})$  je gradient ceny dlhopisu,  $A(t, r, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^2 & \beta\rho\sigma \\ \beta\rho\sigma & \beta^2 \end{pmatrix}$

a  $\text{div}$  je operator divergencie. Vektor  $\vec{b}$  ma tvar:

$$\vec{b}(t, r, y) = \begin{pmatrix} \mu - \lambda\sigma - \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\beta\rho\sigma)}{\partial y} \\ \alpha - \lambda\beta\rho - \omega\beta\sqrt{1 - \rho^2} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\beta\rho\sigma)}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Ak pouijeme transformaciu

$$\tau = T - t$$

(=as do expirácie), (33) sa nám pretransformuje na tvar:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \text{div}(A \nabla P) + \vec{b} \nabla P - rP = 0. \quad (34)$$

Takže našou úlohou je nájsť  $P$ , riešením rovnice (34) tak, aby boli splnené nasledovné počiatočné a okrajové podmienky:

$$\begin{aligned} P(0, r, y) &\equiv 1, & \text{pre } \forall r > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \\ P(\tau, 0, y) &\equiv 1, \\ P(\tau, +\infty, y) &\equiv 0, & \text{pre } \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### 3.2.1 Simulácie dvojfaktorových modelov

Z predchádzajúcej časti máme odvodenú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre viacfaktorové modely. V definícii (3.2) vystupovala premenná  $y$ , ako skrytá. Teraz si ju predstavme ako premennú, ktorá sa pohybuje v inej (kratšej) časovej škále ako premenná  $r$ .

Nech teda  $\varepsilon$  je tá časová škála v ktorej sa  $y$  pohybuje (škála v ktorej sa pohybuje  $r$  je jednotková), pričom  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Potom z práce [3] môžeme proces (23) pre  $(r_t, y_t)$  napísať v tvare:

$$\begin{aligned} dr &= \mu dt + \sigma dw_t \\ dy &= \frac{1}{\varepsilon} \alpha dt + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \beta \left( \rho dw_t + \sqrt{1 - \rho^2} dz_t \right). \end{aligned} \tag{35}$$

V tej istej práci je graficky znázornené správanie sa premenných  $r$  a  $y$  v závislosti od funkcií vstupujúcich v procese (35).

Pre zjednodušenie sa predpokladalo, že funkcia  $\mu$ , teda drift prislúchajúci k  $r$ , má tvar  $\mu = \kappa(\theta - r)$ . Kde konšanta  $\kappa$  je rovná 1, a pre funkciu  $\theta$  platí:

$$\theta = \theta_0 + 0.2y, \tag{36}$$

pričom  $\theta_0 = 6.0$ .

$\sigma$  predstavujúca volatilitu vývoja úrokovej miery  $r$  má tvar:

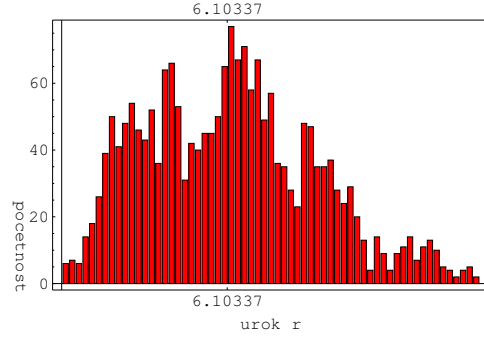
$$\sigma = 0.1 \left( 1 + \frac{y}{1 + y^2} \right), \tag{37}$$

čiže závisí explicitne len od  $y$ .

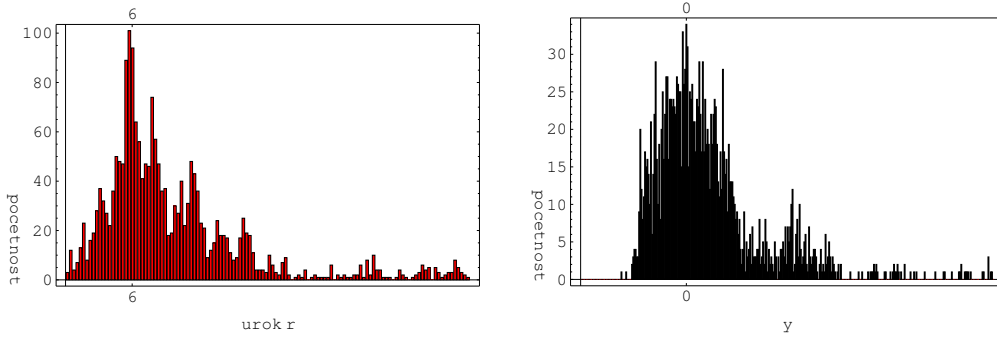
Pomocou programu z práce [3] si ukážme rozličné formy procesu pre  $y$ .

Na nasledujúcich obrázkoch (čerpaných z práce [3]) uvidíme histogramy zostavené z hodnôt úroku  $r$  a  $y$ . Pre všetky uvedené príklady platia predpoklady (36) a (37).

**Obrázok 1:** Pre zaujímavosť tento obrázok obsahuje proces  $y$  v prípade, že  $\alpha$  a  $\beta$  sa rovnajú 0. To znamená, že dostávame jednofaktorový model.



Obrázok 1: Proces  $y$  v prípade  $\alpha$  a  $\beta$  sa rovná 0.



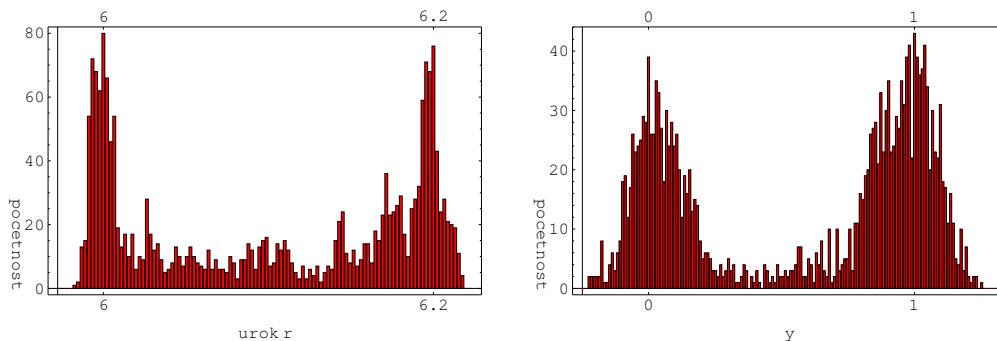
Obrázok 2: Oba procesy sa pohybujú v rovnakej časovej škále.

**Obrázok 2:** Stochastická časť procesu pre  $y$  má tvar ako v definícii (3.2), pričom funkcie  $\beta$  a  $\rho$  sú konštanty. Čím väčšia je hodnota  $\beta$ , tým väčší vplyv na hodnotu  $y$  má práve stochastická časť.  $0 \leq \rho \leq 1$  a čím je bližšie k 1, tým väčšia je korelácia medzi  $y$  a volatilitou procesu pre  $r$ .

V prípade obrázku 2 sa zistilo, že tvarom funkcie  $\alpha$  bol zabezpečený jeden stacionárny bod.

Na obrázku 3 je prípad viac oblastí zvýšeného výskytu hodnôt  $y$  a  $r$ .

**Obrázok 3:** Funkcia  $\alpha$  má tvar  $\alpha = -y(0,5 - y)(1 - y)$ , čo zabezpečuje existenciu dvoch stabilných stacionárnych bodov  $y = 0$  a  $y = 1$ . Každému



Obrázok 3: Drift procesu  $y_t$  má tvar  $\alpha = -y(0,5 - y)(1 - y)$ .

z týchto bodov prislúcha iná hodnota úroku. Ak  $y = 0$ ,  $r$  sa blíži k hodnote 6 a v prípade  $y = 1$  platí  $r = 6.2$ . Dôležitým faktorom v takomto prípade je hodnota  $\beta$ . Keby totiž vplyv náhodnej zložky nebol dostatočne vysoký, hodnota  $y$  by sa ustálila v jednom zo stacionárnych bodov a takpovediac neskákala by z jedného na druhý.

## 4 Ciele práce

V kapitole 3.1 som odvodila všeobecný tvar PDR jednofaktorového modelu. Pre najviac používané modely, ktorých úrok sleduje Ornstein-Uhlenbeckovej proces, som uviedla explicitné vzorce riešenia tejto parciálnej diferenciálnej rovnice (17),(18). V týchto vzorcoch sa vyskytujú isté parametre, ktoré charakterizujú rovnovážne jednofaktorové modely. Ak sú vopred dané, umožňujú nám výpočet cien dlhopisov. Kto nám ich však vopred dá?

Cieľom tejto práce je nakalibrovať parametre jednofaktorových modelov (Vašíček a CIR) pre slovenské úrokové miery. Pri riešení tohto problému sa zoberú dáta (BRIBOR) iba z krátkeho časového úseku, totiž pre dlhšie obdobia by sme potrebovali od trendu, konkrétne od inflácie, očistenú úrokovú mieru, ktorá však nie je k dispozícii. Preto sa budeme zaoberať rokmi 1997 až 1999.

Pri kalibrácii parametrov modelov CIR a Vašíček sa rieši minimalizačná úloha, na ktorú použijeme metódu evolučných stratégií, kvôli jej konzistentnosti. Pri výbere konkrétneho typu, však uvidíme, že treba spraviť nejaké modifikácie. Na základe týchto zmien sa potom spraví program, ktorý rieši danú problematiku, t.j. minimalizovať rozdiel medzi reálnymi úrokovými mierami a úrokovými mierami rátanými pomocou explicitných vzorcov, ktoré dostaneme spojením vzťahov (16),(2),(17),(18).

## 5 Štruktúra a charakteristika dát

Na kalibráciu parametrov jednofaktorových modelov som použila dáta zo stránky [8]. Sú to údaje z obdobia 1.1.97 až 31.12.99.

**Vzorka úrokových mier:**

Date	O/N	1W	2W	1M	2M	3M	6M
2.1.97	15.095	15.525	15.665	15.965	16	15.99	15.98
3.1.97	14.21	14.985	15.23	15.755	15.8	15.8	15.815
7.1.97	14.5	14.97	15.075	15.75	15.77	15.795	15.815
8.1.97	15.43	15.35	15.365	15.81	15.825	15.835	15.81
9.1.97	16.91	16.575	16.56	16.455	16.36	16.3	16.145
10.1.97	21.905	21.32	21.065	20.6	20.395	20.285	18.82
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
21.12.99	14.97	16.975	17.86	17.78	14.68	14.58	14.24
22.12.99	14.46	15.5	15.48	15.44	14.39	14.22	14.07
23.12.99	6.45	12.36	12.305	13.55	14	13.98	13.9
27.12.99	1.6	9.59	10.83	13.2	13.79	13.81	13.85
28.12.99	1.09	9.45	10.5	12.82	13.46	13.53	13.67
29.12.99	0.52	9.41	10.39	12.51	13.14	13.25	13.49
30.12.99	4.1	9.45	10.37	12.21	13	13.18	13.38

Tabuľka 1: Ukážka dát.

**Date** – dátum, ku ktorému sa úroková miera vzťahuje;

**O/N** – overnight úrok (úroková miera na krátku dobu);

**1W** – jedentýždňový úrok;

**2W** – dvojtýždňový úrok;

**1M–6M** – jeden- až šesťmesačný úrok.

Výsledné hodnoty úrokových mier v tabuľke 1 som získala ako aritmetický priemer bidu a asku. Niektoré hodnoty v tabuľke chýbali z dôvodu pozastavenia BRIBOR-u (Bratislava Inter-Bank Offer Rate) v roku 1997 (presnejšie

od 29.5.1997 do 30.9.1997<sup>2</sup>). To sa odzrkadľuje v počte použiteľných údajov v danom roku.

Počet dát v jednotlivých rokoch:

- v roku 1997: 152,
- v roku 1998: 252,
- v roku 1999: 246.

Niektoré z týchto údajov sú veľmi zaujímavé, ako napr. v roku 1998 nasledovné obdobie:

Date	O/N
1.10.98	60
2.10.98	75
5.10.98	75
6.10.98	52.165

Takýto overnight sa dá vysvetliť vplyvom politického diania, konkrétne voľbami, na obchod a financie.

Pri analyzovaní štruktúry dát som sa pozrela aj na rozdelenie overnight a polročných úrokových mier, z toho dôvodu, že v budúcnosti pri kalibrácii parametrov jednofaktorových modelov sa použijú práve hodnoty overnight.

Prvým krokom je teda grafické znázornenie týchto údajov vid. obrázok 4. Na tomto obrázku sú histogramy overnight-u a poločných úrokových mier pre roky 1997 až 1999. Opticky sa nám zdá byť normálne rozdelený O/N v roku 97.

Toto však treba potvrdiť. Preto je potrebné poznať isté charakteristiky týchto dát:

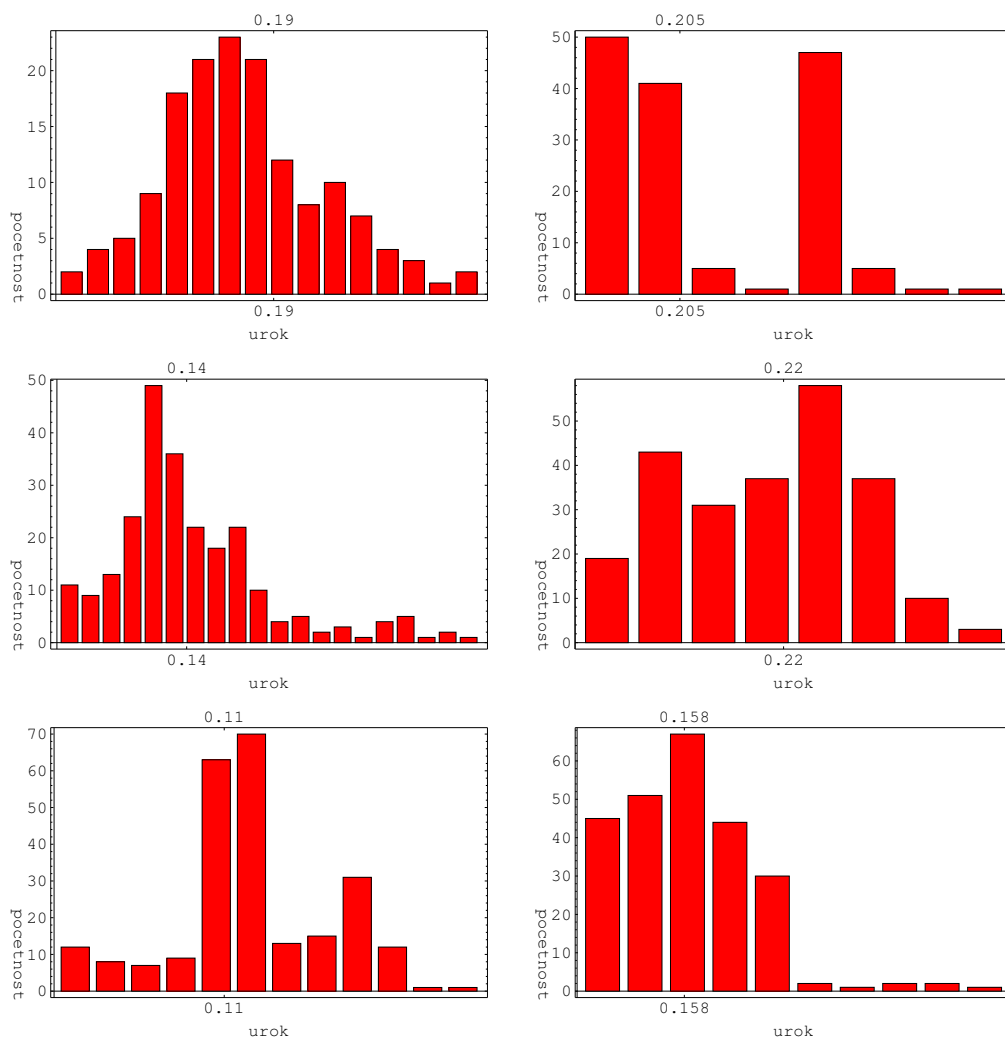
Roky	stred	variancia
1997	0.190187	0.00403324
1998	0.144507	0.0109654
1999	0.1140999	0.00261603

Tabuľka 2: Charakteristiky O/N.

---

<sup>2</sup>Na stretnutí referenčných bánk dňa 28.5.1997 bol na základe rozhodnutia 8 bánk dočasne pozastavený BRIBOR s účinnosťou od 29.5.1997.





Obrázok 4: Histogramy pre O/N (vľavo) a polročné úrokové miery (vpravo); pre roky 1997-1999.

Roky	stred	variancia
1997	0.20547	0.00140867
1998	0.222428	0.00451917
1999	0.158187	0.00025601

Tabuľka 3: Charakteristiky polročných úrokových mier.

Najjednoduchší test na overenie normálnosti týchto rokov je taký, že:

1. 68% údajov má byť v intervale  $stred \pm \sqrt{variancia}$ ,
2. 95% údajov má byť v intervale  $stred \pm 2\sqrt{variancia}$ ,
3. 99.7% údajov má byť v intervale  $stred \pm 3\sqrt{variancia}$ .

Na základe tohoto testu vychádzali nasledovné výsledky:

	1997	1998	1999
1.	69%	84%	68.9%
2.	95.4%	95.9%	96%
3.	99.3%	97.96%	98.4%

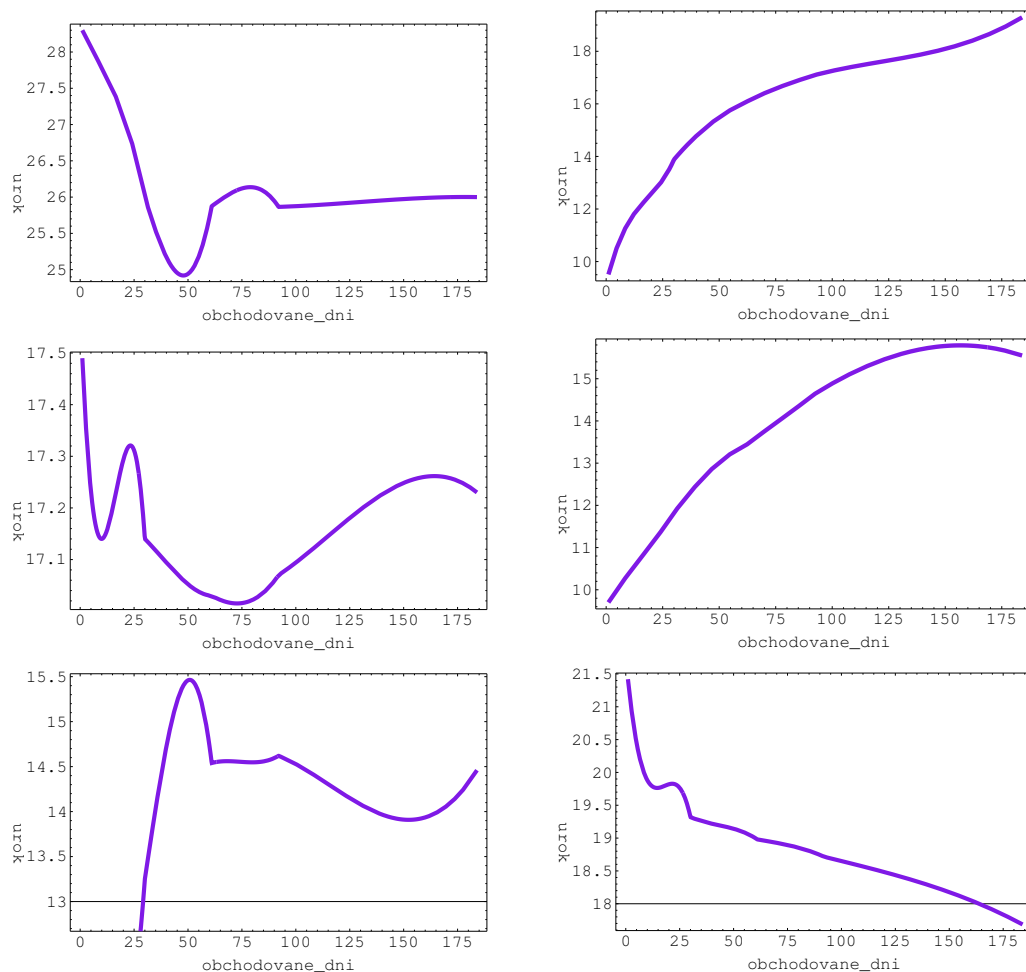
Tabuľka 4: Test pre O/N.

	1997	1998	1999
1.	57.9%	93%	68.5%
2.	98.7%	97.6%	97.6%
3.	100%	97.6%	98%

Tabuľka 5: Test pre polročné úrokové miery.

Z toho môžeme usúdiť, že dáta O/N z roku 97 majú normálne rozdelenie. V roku 98 pre O/N ako keby sa formovala istá podobnosť s obrázkom 3. To by však znamenalo prechod na dvojfaktorové modely a ich kalibráciu. Samozrejme ten druhý hrbol na obrázku 4 môže byť zapríčinený aj z iného dôvodu. Ostatné výsledky nepotvrdili normalitu údajov.

Teraz sa pozrime na výnosové krivky. Vo všeobecnosti krivka, ktorá vyjadruje vzťah medzi úrokovou mierou a časom do expirácie, môže mať rôzne tvary. Ideálny tvar je rastúca krivka, ktorá znamená vlastne to, že



Obrázok 5: Ukážka výnosových kriviek.

v budúcnosti budú úroky vyššie a cena dlhopisov poklesne. Klesajúci tvar krivky vyjadruje pokles úrokov a nárast cien dlhopisov. Ak je krivka rastúca a potom mierne zahnutá, tak v krátkom čase sa očakáva nárast úroku ale v budúcnosti zase pokles. Nevýhoda Vašíčkovho modelu [2] je, že povoľuje aj záporné hodnoty úroku, čo však v realite neexistuje. Model CIR [2] tento nedostatok odstraňuje, ale krivka má zas klesajúci charakter. Tieto chyby sa vyskytli pravdepodobne z nesprávneho riešenia PDR (14) pre jednofaktorové modely.

Ukážku z týchto grafov môžeme vidieť na obrázku 5. Tieto grafy nám udávajú rozmanitosť údajov, ktoré som v ďalšom použila pri získavaní parametrov jednofaktorových modelov (Vašíček, CIR) pre slovenské úrokové miery.

Výnosové krivky na obrázku 5 môžeme rozdeliť do dvoch skupín. Na pravej strane sú klasické typy kriviek, t.j. rastúce, rastúce s klesaním a klesajúce. Na ľavej strane sú krivky, ktoré menia svoju štruktúru z klesania na rast a naopak.

Nasledujúce tabuľky obsahujú priemerné hodnoty úrokových mier po kvartáloch.

štvrtrok	O/N	1W	2W	1M	2M	3M	6M
1.	17.868	18.052	18.157	18.048	17.863	17.770	17.304
2.	19.924	20.457	20.322	20.056	19.713	19.666	19.452
3.	—	—	—	—	—	—	—
4.	19.417	22.295	22.817	24.235	24.853	25.152	25.005

Tabuľka 6: rok 1997

štvrtrok	O/N	1W	2W	1M	2M	3M	6M
1.	13.940	17.801	18.770	20.455	21.805	22.747	23.777
2.	11.039	13.676	14.463	15.978	17.405	18.261	20.316
3.	15.218	16.515	15.730	15.858	15.916	17.004	18.539
4.	16.604	16.092	16.016	17.925	19.414	20.199	20.717

Tabuľka 7: rok 1998

štvrtrok	O/N	1W	2W	1M	2M	3M	6M
1.	12.859	14.613	15.024	15.805	16.351	16.542	17.054
2.	13.074	14.886	15.025	15.253	15.673	15.663	16.269
3.	9.713	10.572	10.937	12.247	13.494	14.754	15.664
4.	9.577	11.107	11.508	13.007	13.305	13.901	14.3076

Tabuľka 8: rok 1999

Teoreticky sa očakáva, že úrková miera by sa mala zväčšovať s rastúcou dobou splatnosti, avšak v roku 1997 sa to nepotvrdilo pre štvrtročný úrok (vid. tabuľku 6). Roky 1998 a 1999 tieto očakávania spĺňajú (vid. tabuľku 7 a 8).

## 6 Metódy spracovania úlohy

### 6.1 Evolučné stratégie

#### 6.1.1 Úvod do evolučných stratégií

Evolučná stratégia [5] je jedna z prvých najúspešnejších stochastických algoritmov. Prvá bola vyvinutá v roku 1964 na Berlínskej Technickej Univerzite Rechenbergom a Schwefelom ako experimentálna optimalizačná metóda. Táto varianta  $(1 + 1)$ -evolučná stratégia používala jednu mutáciu a tiež jedno riešenie v populácii s dvoma jedincami (rodič a potomok). Mutácia rodiča  $r$  na potomok  $p$  je určená nasledovným predpisom:

$$p = r + N(0, \sigma),$$

kde  $N(0, \sigma)$  je vektor nezávislých náhodných čísel s gaussovskou distribúciou so stredom nula a s disperziou  $\sigma$ . Takže podstata tejto stratégie spočíva v tom, že v ďalšej generácii potomok sa stane rodičom ak je lepší než jeho rodič, ináč prežije rodič. Táto stratégia bola nahradená s variantmi  $\mu > 1$  rodičov a  $\lambda > 1$  potomkov v generácii.

$(\mu + 1)$ -evolučná stratégia s  $\mu > 1$  rodičmi funguje tak, že po mutácii potomok nahradí najhoršieho jedinca z rodičov, ak je lepší ako on. Najnovšie stratégie sú  $(\mu + \lambda)$  a  $(\mu, \lambda)$ . Prvá z nich má  $\mu$  rodičov z ktorých sa mutáciou vytvorí  $\lambda$  potomkov a vybere sa spomedzi nich  $\mu$  najlepších jedincov, ktorí sa stávajú rodičmi nasledujúcej generácie. Zatiaľ čo  $(\mu, \lambda)$ -stratégia vyberá  $\mu$  najlepších jedincov iba spomedzi potomkov a tí sa stávajú novými rodičmi. Tu musí nutne platiť podmienka  $\lambda \geq \mu$  inak stačí  $\mu \geq 1$ .

#### 6.1.2 Formulácia úlohy

Majme  $n$ -rozmernú parametrickú úlohu tvaru:

$$f := f(\vec{x}) = \min\{f(\vec{x}); \vec{x} \in M \subseteq \mathbb{R}^n\}, \quad (38)$$

kde  $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; g_j(x) \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, q\}\}$  je definičný obor hodnôt,  $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sú ohraničenia.

Jedinec  $\vec{a} \in I$  je vektor z priestoru  $I = \mathbb{R}^n \times S$ , kde  $S$  je množina parametrov nezávislá od druhu evolučnej stratégie.

Populácia  $k$  z  $\{\mu, \lambda\}$  jedincov generácie  $t$  je:

$$P^{(t)} = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\} \in I^k,$$

kde  $\mu, \lambda \in \mathbb{N}$  dávajú počet rodičov a potomkov.

Základné operácie evolučnej stratégie sú zobrazenia:

$$\begin{aligned} rec : I^\mu &\rightarrow I \text{ rekombinácia,} \\ mut : I &\rightarrow I \text{ mutácia,} \\ sel_\mu^k : I^k &\rightarrow I^\mu \text{ selekcia, } k \in \{\lambda, \mu + \lambda\}. \end{aligned}$$

Jediná iterácia je teda prechod od populácie  $P^{(t)}$  k populácii  $P^{(t+1)}$  zobrazením:

$$opt_{ES} : I^\mu \rightarrow I^\mu,$$

pričom platí:

$$opt_{ES}(P^{(t)}) = sel_\mu^k \left( \bigcup_{i=1}^{\lambda} \{mut(rec(P^{(t)}))\} \cup Q \right), \quad (39)$$

kde  $Q \in \{P^{(t)}, \emptyset\}$  v závislosti od operácie selekcie. Pre  $\mu = 1$  rekombinácia sa nerobí, teda  $rec = id$ .

### 6.1.3 Evolučná stratégia (1+1)

V tejto stratégii  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1$ , nerobí sa rekombinácia a je pevne dané pravidlo na modifikáciu dĺžky kroku  $\sigma$  pre všetky mutácie. Jediniec má tvar  $\vec{a} = (\vec{x}, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ . Operácia mutácie je zloženie dvoch zmien:

- zmena  $\sigma$  na

$$\tilde{\sigma} := mut_\sigma(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt[p]{c}} & ak \quad p > 1/5 \\ \sigma \sqrt[p]{c} & ak \quad p < 1/5 \\ \sigma & ak \quad p = 1/5 \end{cases}$$

- zmena  $\vec{x}$  na

$$\vec{\tilde{x}} := mut_x(\vec{x}) = (x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n),$$

kde  $z_i \sim N_i(0, \tilde{\sigma}^2)$ .

Na základe týchto znalostí môžeme napísať:

$$mut((\vec{x}, \sigma)) = mut_x(mut_\sigma(\vec{x}, \sigma)) = mut_x(\vec{x}, mut_\sigma(\sigma)) = mut_x(\vec{\tilde{x}}, \tilde{\sigma}).$$

Na potomka  $\vec{a}$  sa použije selekcia  $sel_1^2 : I^2 \rightarrow I$ , ktorá vybere jedinca s lepšou funkčnou hodnotou hľadanej funkcie, teda:

$$sel_1^2(\{\vec{a}, \vec{\tilde{a}}\}) = \begin{cases} \{\vec{\tilde{a}}\} & ak \quad f(\vec{\tilde{x}}) \leq f(\vec{x}) \\ \{\vec{a}\} & ak \quad inak. \end{cases}$$

Potom algoritmus tejto stratégie má tvar:

$$opt_{(1+1)-ES}(\{\vec{a}\}) = sel_1^2(\{mut(\vec{a})\} \cup \{\vec{a}\}). \quad (40)$$

Táto metóda rieši problém hľadania lokálneho extrému, avšak pravidlo 1/5 môže viesť k predčasnej stagnácii. Tento nedostatok sa dá riešiť  $(\mu + 1)$ -evolúčnou stratégiou.

#### 6.1.4 Evolučná stratégia $(\mu + 1)$

Je rozšírením predošlej stratégie operáciou rekombinácie:  $rec : I^\mu \rightarrow I$ . Táto operácia sa aplikuje pred mutáciou, výsledkom bude jedinec z populácie rodičov, ktorý po mutácii nahrádza najhoršieho rodiča ak je aspoň tak dobrý ako jeho najhorší rodič. Takže ďalšia generácia sa vyberá z  $\mu$  rodičov a jedného potomka.

Operácia rekombinácie vytvára len jedného jedinca. Najprv sa vybere  $\rho$  ( $1 \leq \rho \leq \mu$ ) rodičovských vektorov z populácie  $P^{(t)} \in I^\mu$  s rovnomernou pravdepodobnosťou a potom sa zmixujú prvky z  $\rho$  rodičov. Takto sa vytvorí vektor jedinca:

$$rec = re \circ co,$$

kde  $co : I^\mu \rightarrow I^\rho$  a  $re : I^\rho \rightarrow I$ .

Existujú rôzne druhy rekombinácií:

- žiadna rekombinácia:  $re = id$ .
- globálna priemerná rekombinácia:  $i$ -ty komponent vektora je priemerom hodnôt všetkých rodičov.
- lokálna priemerná rekombinácia: vyberá dvoch z  $\rho$  rodičov pre každý komponent vektora a spočíta vážený priemer príslušných komponentov týchto dvoch rodičov.
- diskrétna rekombinácia: každý komponent vektora je korešpondujúci komponent náhodne vybraného jedinca z  $\rho$  rodičov.

Samozrejme existujú aj iné typy rekombinácií. Selekcia vyberá  $\mu$  najlepších jedincov. Potom  $(\mu + 1)$ -stratégia má tvar:

$$opt_{(\mu+1)-ES}(P^{(t)}) = sel_{\mu}^{\mu+1}(\{mut(rec(P^{(t)}))\} \cup P^{(t)}). \quad (41)$$

Aj táto stratégia má svoje nedostatky, nekontroluje sa štandardná odchýlka  $\sigma$ . Moderné stratégie  $(\mu, \lambda)$  to riešia tak, že sa štandardná odchýlka samo-prispôsobuje v priebehu procesu hľadania.

#### 6.1.5 Evolučná stratégia $(\mu, \lambda)$ a $(\mu + \lambda)$

V týchto metódach sa odohráva tzv. samo-prispôbovanie sa parametrov stratégie [9]. To spočíva v tom, že štandardná odchýlka pre mutáciu stáva súčasťou jedinca a vyvíja sa mutáciou a rekombináciou spolu s premennou hľadanej funkcie.

Ako som už spomínala jedinec  $\vec{a}$  je z priestoru  $I = \mathbb{R}^n \times S$ , kde  $S$  je množina parametrov. V tomto prípade  $S = \mathbb{R}_+^{n_\sigma} \times [-\pi, \pi]^{n_\alpha}$ .

Takže  $\vec{a} = (\vec{x}, \vec{\sigma}, \vec{\alpha}) \in I$ , kde  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  je vektor premenných funkcie,  $\vec{\sigma} \in \mathbb{R}_+^{n_\sigma}$ , kde  $(1 \leq n_\sigma \leq n)$ , je vektor štandardných odchýliek normálneho rozdelenia,  $\vec{\alpha} \in [-\pi, \pi]^{n_\alpha}$ , kde  $(n_\alpha = (n - n_\sigma/2)(n_\sigma - 1))$ , je vektor uhlov sklonu.

Na základe toho, že jedinec sa skladá z troch častí, operácia mutácie má tvar:

$$mut = mut_x \circ (mut_\sigma \times mut_\alpha),$$

kde  $mut_\sigma : \mathbb{R}^{n_\sigma} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\sigma}$  mutuje rekombinované  $\vec{\sigma}$ ,  $mut_\alpha : \mathbb{R}^{n_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\alpha}$  mutuje rekombinované  $\vec{\alpha}$ ,  $mut_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mutuje rekombinované premenné vektora  $\vec{x}$ .

Rekombinácia má tvar:

$$rec = (re_x \circ co_x) \times (re_\sigma \circ co_\sigma) \times (re_\alpha \circ co_\alpha),$$

kde  $co_\delta : I^\mu \rightarrow I^{\rho_\delta}$  a  $re_\delta : I^{\rho_\delta} \rightarrow I$ ,  $(\delta \in \{x, \sigma, \alpha\})$ .

Takže výsledný tvar hlavného cyklu  $(\mu, \lambda)$ -evolučnej stratégie je:

$$opt_{(\mu, \lambda)-ES}(P^{(t)}) = sel_\mu^\lambda \left( \bigcup_{i=1}^{\lambda} \{mut(rec(P^{(t)}))\} \right). \quad (42)$$

Selekcia vracia  $\mu$  najlepších jedincov spomedzi  $\lambda$  potomkov.

Ak sa jedná o  $(\mu + \lambda)$ -evolučnú stratégiu, tak selekcia vracia  $\mu$  najlepších jedincov spomedzi  $\mu + \lambda$ . Takže stratégia je tvaru:

$$opt_{(\mu+\lambda)-ES}(P^{(t)}) = sel_\mu^{\mu+\lambda} \left( \bigcup_{i=1}^{\lambda} \{mut(rec(P^{(t)}))\} \cup P^{(t)} \right). \quad (43)$$

Nevýhodou tejto stratégie je, že má sklony skôr k lokálnemu ako globálnemu prehľadávaniu.

Dôležité je ešte spomenúť ukončovacie kritérium. Najjednoduchší spôsob je vopred určiť požadovaný počet generácií. Čo sa týka inicializácie štartovacej populácie  $P^{(0)}$ , najčastejšie sa zvolí dolná a horná medza pre každého jedinca. Potom všetci jedinci  $P^{(0)}$  sú ľubovoľne rozdelení v ohraničenom priestore.

### 6.1.6 Modifikovaná verzia evolučnej stratégie

Pri programovaní metódy evolučných stratégií som urobila nejaké zmeny. Použila som 125 rodičov, ktorých som na začiatku náhodne vygenerovala tak, aby ich číselné hodnoty boli nezáporné a v nejakých (vopred určených) medziach. Takýmto spôsobom som teda získala štartovaciu populáciu.

V predchádzajúcich podkapitolách som popísala jednotlivé typy evolučných stratégií. Okrem jedného, to je  $(1 + 1)$ -evolučná stratégia, vo všetkých



sa robila rekombinácia populácie a až potom mutácia a selekcia. Ja som operáciu rekombinácie vynechala z toho dôvodu, že v matematickom prostredí táto operácia môže viesť k nesprávnemu výsledku pri hľadaní minima nejakej funkcie.

Zo svojich 125 rodičov som pomocou mutácie získala 125 potomkov (detí). Pri mutácii som použila náhodný výber z gaussovského rozdelenia so strednou hodnotou 0 a s disperziou  $\sigma^2$ . Samozrejme populácia detí sa mohla vzdialiť od populácie rodičov iba v dostatočne malom intervale (vopred danom). Množinu detí a rodičov som spojila do jednej skupiny, ktorá týmto spôsobom obsahovala 250 jedincov.

Po tomto zoskupení nasledovala operácia selekcie. Ako u evolučnej stratégie  $(\mu + \lambda)$  sa vyberá  $\mu$  najlepších potomkov spomedzi  $\mu + \lambda$  jedincov, tak som aj ja vybrala 125 najlepších potomkov spomedzi 250 jedincov. Pri selekcii tých najlepších, samozrejme nebolo také jednoduché postupovať. Ku každému jedincovi z množiny 250 jedincov, som priradila funkčnú hodnotu. Táto hodnota mi predstavuje istý rozdiel (skutočných a vypočítaných hodnôt), ktorý chceme minimalizovať. Takže neostávalo nič iné, len zoradiť tých 250 jedincov podľa funkčnej hodnoty a vybrať 125 z nich s najmenšou funkčnou hodnotou. Tým prebehla jedna iterácia tejto stratégie. V ďalšej iterácii tí jedinci, ktorí sa vybrali, sa považujú za rodičov a cyklus sa môže zopakovať.

Pri ukončovaní celého výpočtu som sa rozhodla pre kritérium vopred určených počtov generácií. Týmpádom som vopred zadala počet iterácií rovných 40.

## 6.2 Numerický experiment

### 6.2.1 Popis programu

V predchádzajúcej kapitole som popísala základné črty mnou použitej stratégie. Program je napísaný v programovacom jazyku  $C++$ , ktorý som si zvolila kvôli jeho rýchlosti.

Skladá sa z hlavnej časti `main.cpp` (vid. Príloha) a z pomocnej časti `mo.h`. Na začiatku programu sa definuje vstupný súbor s dátami (`bribor.txt`), výstupný súbor s výsledkami (`vystup.txt`, vid. Príloha) a niekoľko konštánt, ktoré parametrizujú samotný problém (ich význam je vysvetlený v Prílohe). Vektory a matice s ktorými rátam v evolučnej stratégii sú dynamicky alokované polia.

Najprv sa načítajú vstupné dáta. Náhodne sa vygeneruje vopred určený počet rodičov, ktorých predstavujú parametre *theta*, *kappa*, *lambda*, *sigma*.

Vo funkcii *spoj* sa vytvorí nová populácia (*novyrodictia*) nasledovným spôsobom: spoja sa *rodicia* a *rodiciamute* (mutovaní rodičia).

Mutácia sa robí pomocou náhodného generátora *getgaussrandom* do ktorého vstupuje náhodné číslo vytvorené pomocou *private random*. Pri mutácii sa testuje podmienka, či mutovaní rodičia padajú do povolených intervalov  $MINA\_1 - MAXA\_1$  až  $MINA\_4 - MAXA\_4$  (vid. Príloha).

Pre každého člena novej populácie volám *ucelovú funkciu*. Táto funkcia ráta rozdiel medzi reálnymi hodnotami úrokových mier a hodnotami, ktoré sa počítajú na základe explicitných vzorcov pre Vašíčkov (17) a CIR model (18).

Potom sa volá funkcia *usporiadať zostupne podľa prveho pola*. Jej úlohou je zoradiť novú populáciu podľa účelovej funkcie.

Nakoniec sa za rodičov vyberú tí jedinci populácie, ktorí majú najmenšiu hodnotu účelovej funkcie. Do ďalšej iterácie teda postupujú iba tí najlepší.

Do výstupného súboru sa zapíšu usporiadaní *noví rodičia* spolu s účelovou funkciou.

## 7 Výsledky

Táto kapitola je venovaná porovnávaniu riešení jednotlivých modelov v rokoch 1997 až 1999. Zisťujú sa rozdiely skutočných a vypočítaných hodnôt úrokových mier /na základe rovníc (16),(2),(17),(18)/ pomocou grafického znázornenia. Diskutujú sa nedostatky modelov; prínosy, obtiaže a možné perspektívy.

### 7.1 Mesačná analýza jednotlivých rokov

V tejto časti sa graficky analyzujú výstupy programu (vid. Príloha). Porovnávajú sa výsledky modelov CIR a Vašíček.

**Obrázok 6:** V roku 1997 bol pozastavený BRIBOR, takže údaje som rozdelila na dve časti. Prvé obdobie zahŕňa prvých 5 mesiacov, druhé, od 10. do 12. mesiaca. Na x-ovej osy sú uvedené mesiace, na y-ovej, parameter  $\theta$  resp. *chyba*<sup>3</sup>.  $\theta$  je výstupom programu (vid. Príloha); *chybu* (ktorú mi predstavuje účelová funkcia vo výstupe programu) som relativizovala mesačným priemerom polročných úrokových mier.

**Obrázok 7,8:** Opäť sú vykreslené mesačné výsledky programu (vid. Príloha) avšak pre roky 1998,1999. Chyba je rátaná podobne ako v predošlom roku.

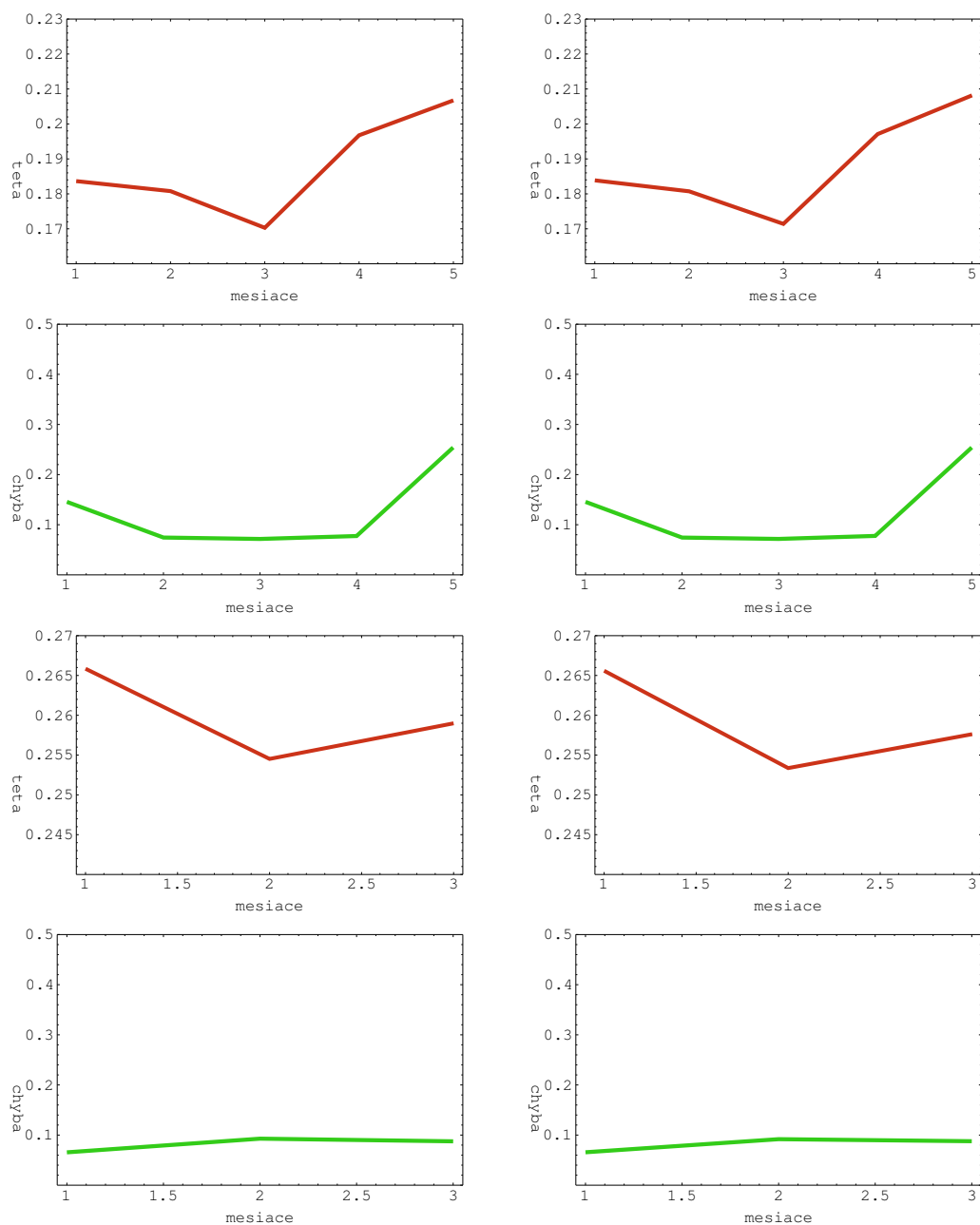
Môžeme konštatovať, že na obrázku 6 obidva modely podobne odhadli vývoj parametra  $\theta$ . Platí to aj pre druhé obdobie. Malý číselný rozdiel medzi modelom CIR a Vašíček môžeme overiť v tabuľkách (vid. Príloha). To isté možno povedať o chybách.

Túto zhodu však nemôžeme nájsť na obrázku 7, kde obdobie 2.-8. mesiaca bol odhadovaný rozlične modelmi CIR a Vašíček. Napriek tomu chyby sa veľmi podobajú. Väčšia chyba sa očakávala tam, kde sa rátalo s väčšou hodnotou  $\theta$ .

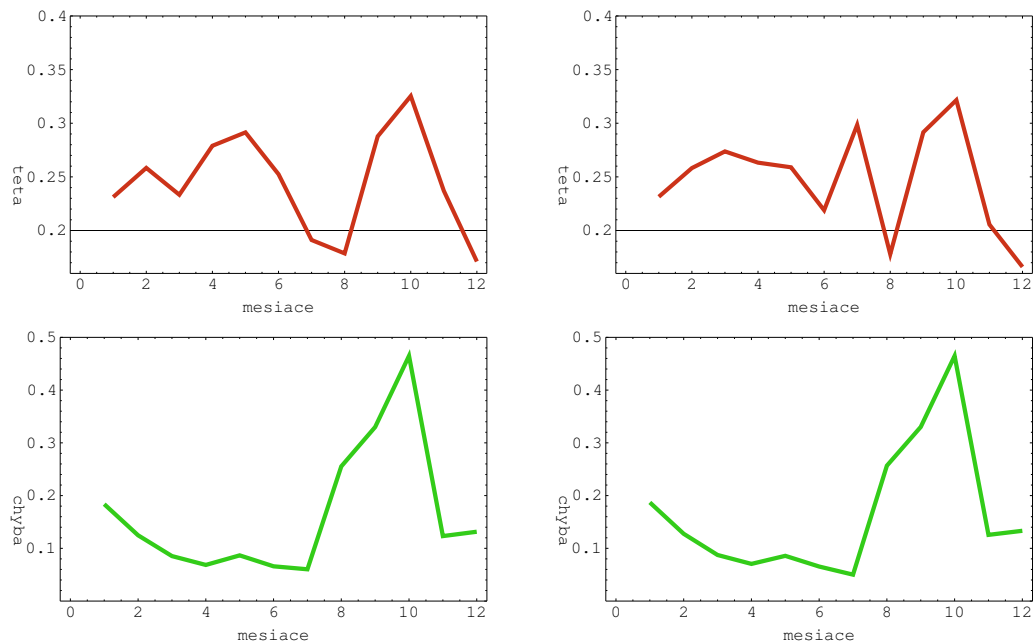
Pre obrázok 8 platí, že model CIR očakával väčšiu zmenu na začiatku roka ako model Vašíček, avšak koncom roka obidva modely sa zhodujú vo veľkom páde okolo 9. a 10. mesiaca. Čo je však prekvapujúce, najväčšia chyba nevznikla v období veľkého poklesu  $\theta$ .

---

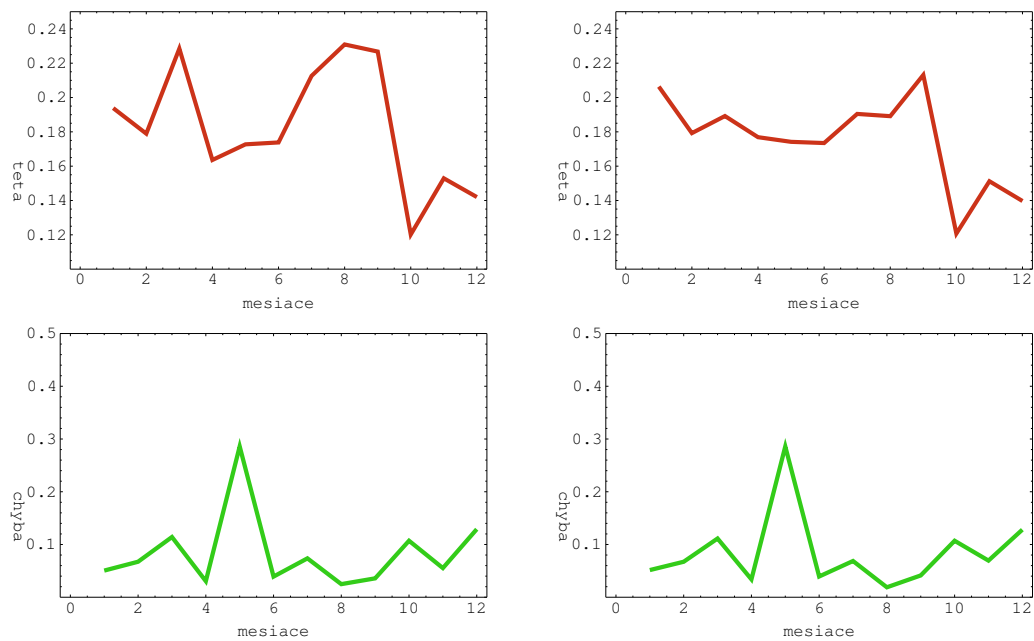
<sup>3</sup>Poznámka: Táto chyba je síce zrelativizovaná, ale nepredstavuje nám skutočnú relatívnu chybu. Možno by bolo správnejšie postupovať tak, že pri výpočtoch chyby v programe (vid. Príloha) vzorcom:  $x = x + (R[i][j] - yield[j]) * (R[i][j] - yield[j])$  by sme ho ešte delili priemerom zo skutočných úrokových mier.



Obrázok 6: Prvá a druhá časť mesačných výsledkov z roku 1997 pre modely CIR(vľavo) a Vašíček(vpravo).



Obrázok 7: Mesačné výsledky z roku 1998 pre modely CIR(vľavo) a Vašíček(vpravo).



Obrázok 8: Mesačné výsledky z roku 1999 pre modely CIR(vľavo) a Vašíček(vpravo).

Predtým, než by som sa rozhodla mesačne kalibrovať parametre modelov CIR a Vašiček, som vyskúšala ich celoročnú kalibráciu. Z chýb týchto výsledkov som posúdila, že takýto postup nemá význam.

Mesačné výsledky tiež neboli povzbudzujúce, čo sa týka rozhodovania, ktorý model je lepší pre naše úrokové miery. Preto som pokračovala týždennou kalibráciou.

## 7.2 Týždenná analýza jednotlivých rokov

Teraz budeme porovnávať týždenné výsledky modelov CIR a Vašiček, skonfrontujeme ich so skutočnými dátami BRIBOR-u zo stránky [8].

**Obrázok 9:** Údaje sú opäť rozdelené na dve časti. Prvé obdobie obsahuje 22 týždňov, druhé, týždne 42 až 53. Parameter  $\theta$  je výsledok z programu a *chyba* (účelová funkcia) je relativizovaná týždenným priemerom polročných úrokových mier.

**Obrázok 10, 11:** Obsahom týchto obrázkov sú týždenné výsledky programu (vid. Príloha) pre zvyšné dva roky: parameter  $\theta$  a *chyby*.

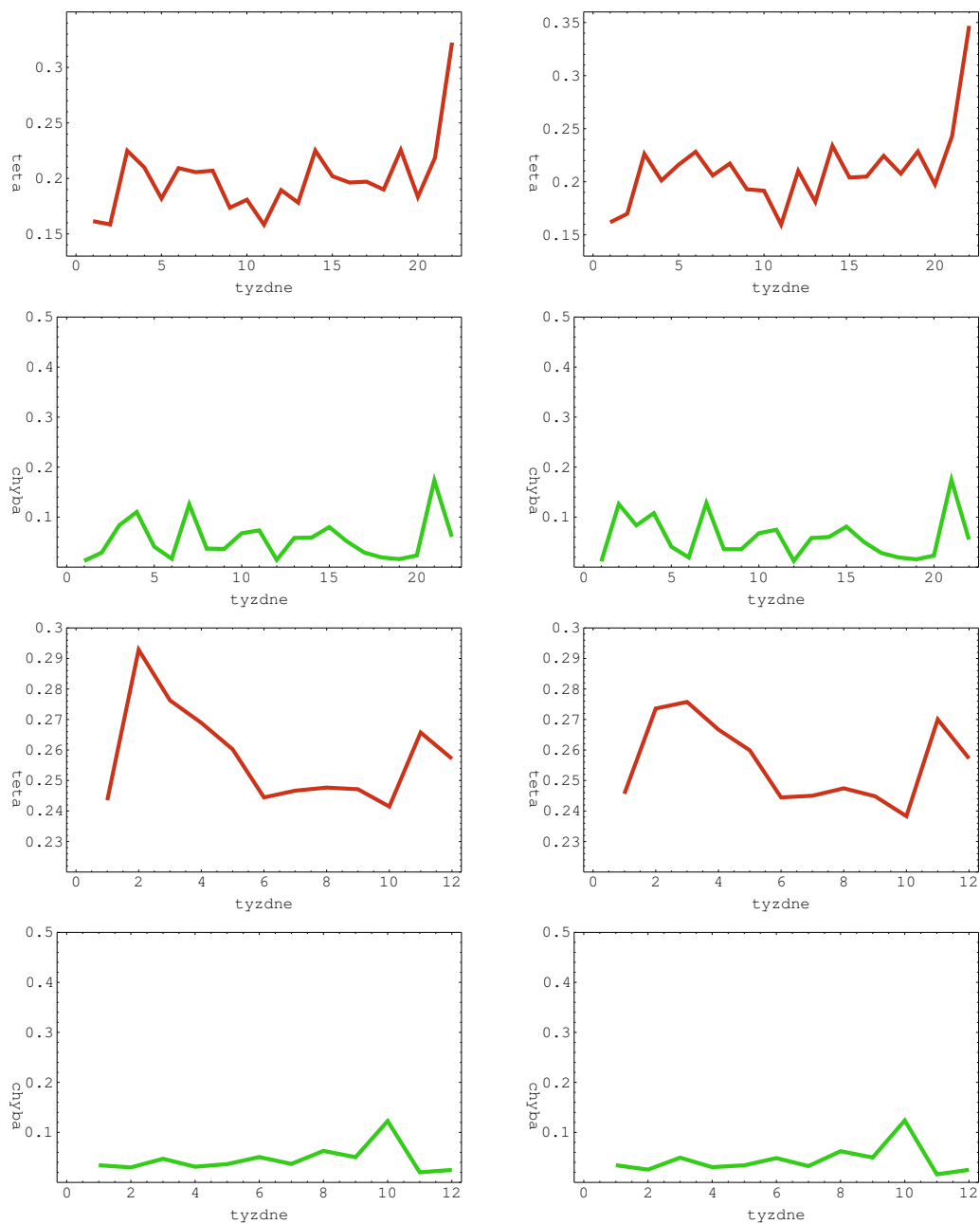
Pri porovnaní modelov na obrázku 9 zistíme, že na jednotlivých obdobiach (ako od 5.-9. resp. od 15.-18. týždňa) parameter  $\theta$  odhadovaný modelom CIR, bol viacej vyhladený ako Vašičkovým modelom. A naopak, v období 43. týždňa Vašičkov model očakával menšiu zmenu parametra  $\theta$ . Chyby sa zhruba podobajú, možno začiatkom roka sú odlišné.

Na obrázku 10 vidíme výrazný skok parametra  $\theta$ , ktorý sa dá odôvodniť voľbami. Vplyvom tejto udalosti sa v tomto období vyskytli aj najväčšie chyby.

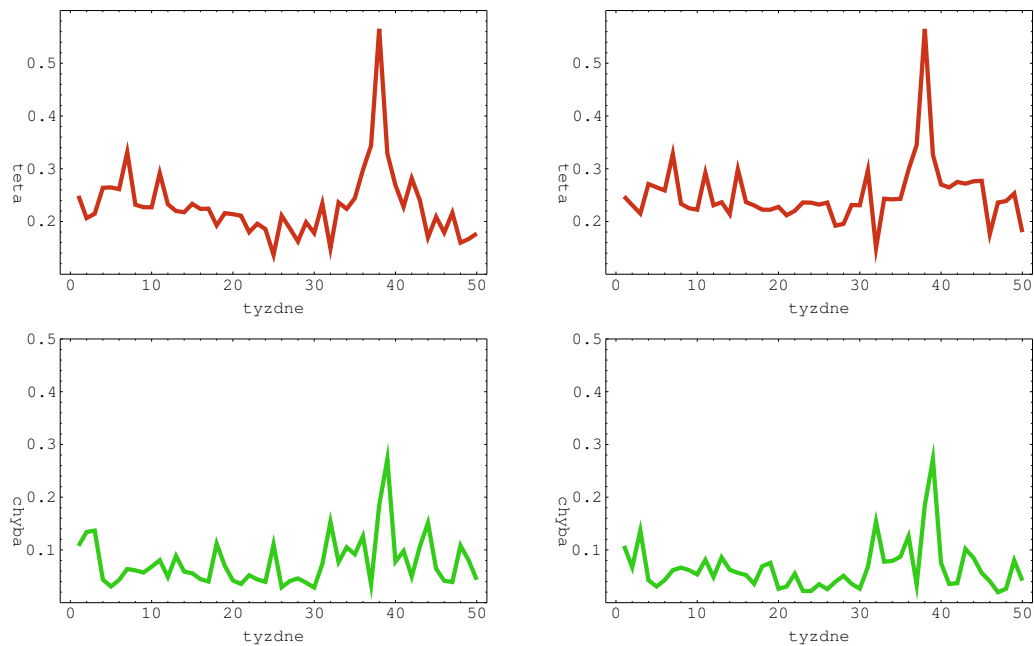
Obrázok 11 nám svädčí o tom, že odhadovaný parameter  $\theta$  sa vyvíjal rozlične pre rôzne modely, a chyby, ktoré sa počas výpočtov vyskytli, sú tiež odlišné.

**Obrázok 12:** Porovnáva výstupný parameter  $\theta$  s týždennými priemernými hodnotami z roku 1997. Obidva modely splnili naše očakávania, čo sa týka vývoja úrokových mier, ale hodnoty a výkyvy parametra  $\theta$  (očakávanej úrokovej miery) boli väčšie ako skutočné.

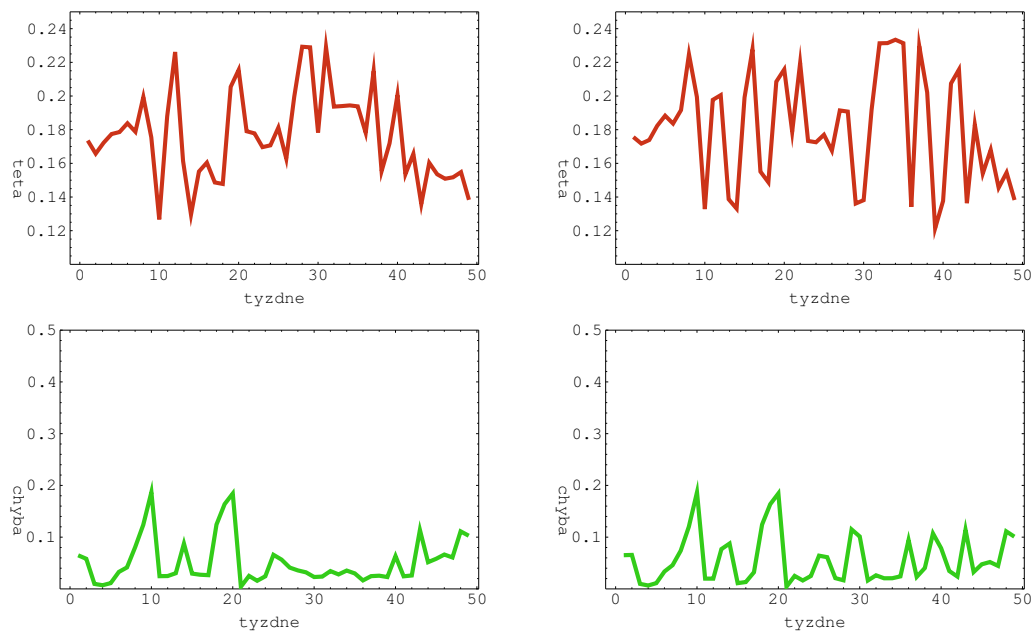
**Obrázok 13:** V tomto prípade sú porovnané hodnoty z rokov 98 a 99. Zvláštnosť roku 1998 je rapidný skok úrokových mier okolo 38. týždňa. Toto sa dá vysvetliť pravdepodobne vplyvom volieb na finančný trh. Oba modely kopírujú tento skok a tiež celý vývoj úrokových mier. Model Vašiček očakával trocha vyššie hodnoty úroku, ako v skutočnosti



Obrázok 9: Prvá a druhá časť týždenných výsledkov z roku 1997 pre modely CIR(vľavo) a Vašíček(vpravo).

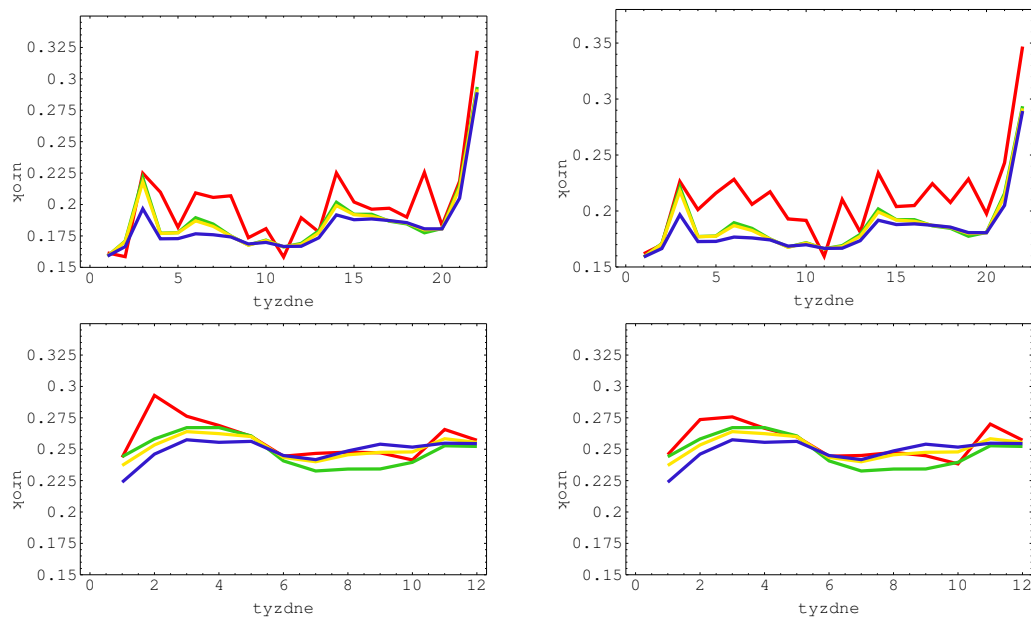


Obrázok 10: Týždenné výsledky z roku 1998 pre modely CIR(vľavo) a Vašiček(vpravo).

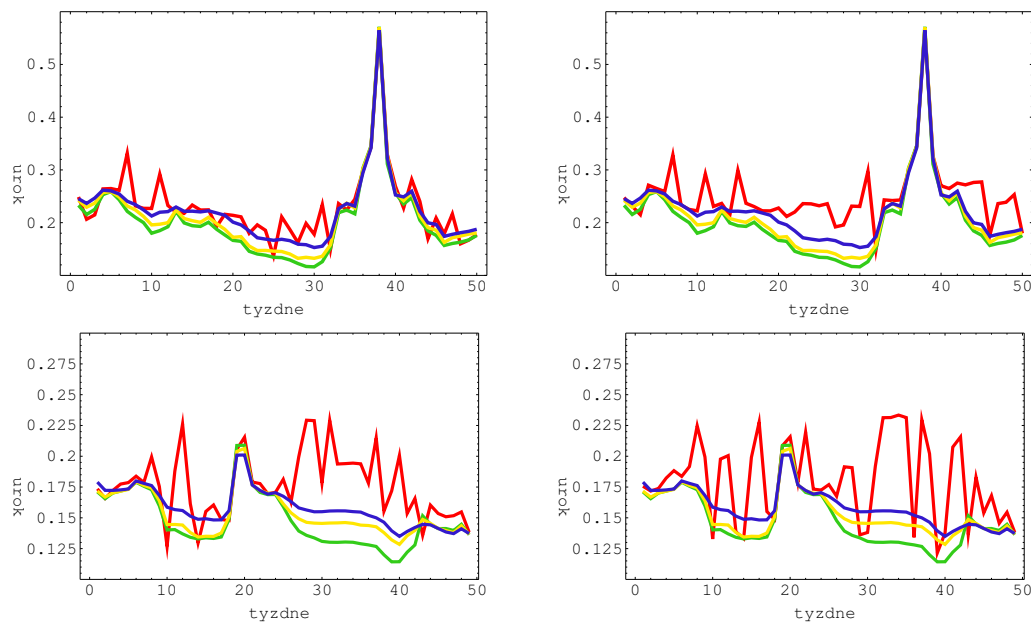


Obrázok 11: Týždenné výsledky z roku 1999 pre modely CIR(vľavo) a Vašiček(vpravo).





Obrázok 12: Porovnanie úrokových mier (s maturitou 2 mesiace-zelená, 3 mesiace-žltá, 6 mesiacov-modrá) s týždennými výsledkami (červená) modelov CIR(vľavo) a Vašíček(vpravo). Prvá a druhá časť z roku 1997.



Obrázok 13: Porovnanie úrokových mier (s maturitou 2 mesiace-zelená, 3 mesiace-žltá, 6 mesiacov-modrá) s týždennými výsledkami (červená) modelov CIR(vľavo) a Vašíček(vpravo). Rok 1998 hore a rok 1999 dole.

boli. V roku 1999 nebol podobný jav v ekonomike. Môžeme však povedať, že modely CIR a Vašíček nesledovali vývoj úrokovej miery. Opäť model Vašíček očakával vyššie hodnoty.

Z práce [4] by sme mohli vysvetliť, prečo leží parameter  $\theta$  väčšinou nad skutočnými hodnotami úrokovej miery. Riešenia modelov CIR a Vašíčka počítané z explicitných vzorcov v tej práci dávali väčšie ceny dlhopisov, než v reálnom svete. Keď sa rátali tie isté ceny pomocou numerickej schémy, ktorá je naprogramovaná v práci [4], ceny boli menšie. Tým boli bližšie k reálnym hodnotám. Možno, keby sa nakalibroval parameter  $\theta$  pomocou tejto schémy [4], by sa viac priblížil ku skutočnému úroku.

Ak sa štatisticky sledovali chyby týždenných výsledkov jednotlivých modelov, tak Vašíčkov model mal oveľa viackrát menšiu chybu ako model CIR. Avšak obrázky 12, 13 by nám tvrdili opak, t.j. lepšie odhadoval model CIR vývoj úrokovej miery.

V kapitole 5 sú uvedené charakteristiky a histogramy overnight-u a polročných úrokových mier. Keďže máme výsledky kalibrácie parametrov jednofaktorových modelov, je logické porovnať rozdelenie parametra  $\theta$  s rozdelením overnight-u resp. polročných úrokových mier.

Opäť som znázornila histogramy na obrázku 14, avšak týždenných výsledkov  $\theta$ .

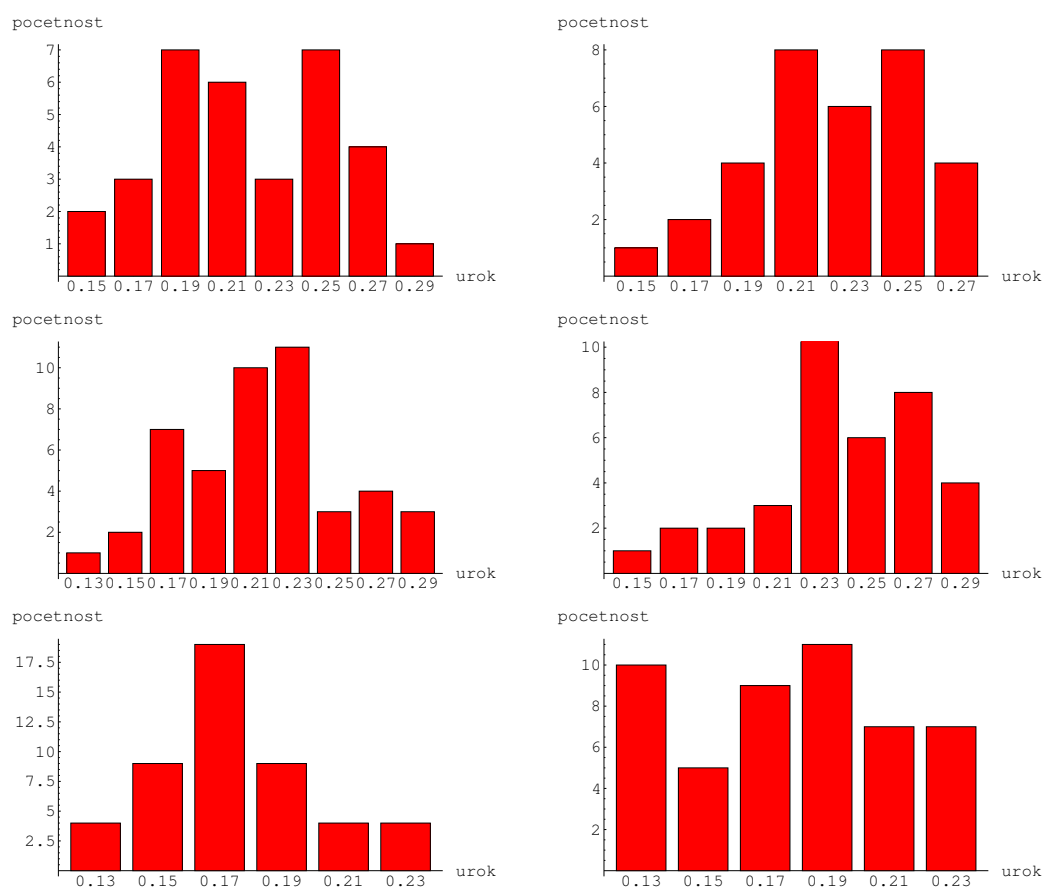
Ďalej sú uvedené charakteristiky parametra  $\theta$ :

Roky	stred		variancia	
	CIR	Vašíček	CIR	Vašíček
1997	0.220323	0.227114	0.00161978	0.00142226
1998	0.230178	0.251212	0.00439869	0.00350726
1999	0.17624	0.180437	0.000668372	0.00106708

Tabuľka 9: Charakteristiky  $\theta$ .

	1997		1998		1999	
	CIR	Vašíček	CIR	Vašíček	CIR	Vašíček
1.	73.5%	73.5%	66%	84%	73.5%	57.1%
2.	97%	97%	98%	98%	93.9%	100%
3.	100%	100%	98%	98%	100%	100%

Tabuľka 10: Test pre  $\theta$ .



Obrázok 14: Histogramy  $\theta$  (roky 1997-1999 vľavo pre model CIR; vpravo pre model Vašíček).

Test, ktorý som popísala v kapitole 5 na jednoduché overenie normálnosti údajov nám dal výsledky, ktoré sú uvedené v tabuľke 10.

Na základe týchto výsledkov nám ani jeden rok nevychádza normálnosť parametra  $\theta$ , pre žiadny model. Je dôležité však spomenúť, že sme mali malý počet dát na to, aby sme mohli jednoznačne usúdiť tento fakt. Všimnime si, že na obrázku 14 sa ukazujú dva hrbolčeky na niektorých histogramoch. Možno je to zdôvodu toho, že by bolo lepšie modelovať slovenské dáta úrokových mier dvojfaktorovým modelom.

Keby sme vedeli zistiť typ rozdelenia parametra  $\theta$ , potom by sme jeho vývoj mohli popísať nejakou funkciou. Táto funkcia by potom slúžila ako vstup pre viacfaktorový (konkrétne pre dvojfaktorový) model. Tým by sme mohli rozšíriť počet hľadaných parametrov a dostali by sme väčšiu voľnosť pri minimalizácii.

### 7.3 Tabuľkové výsledky

Ako som už spomínala, malé číselné rozdiely v modeloch CIR a Vašíček môžeme nájsť v tabuľkách v Prílohe. Tieto tabuľky obsahujú zhrnuté týždenné a mesačné výsledky programu pre oba modely a pre všetky tri nami sledované roky. Jednotlivé stĺpce nám predstavujú:

- 1.stĺpec obsahuje mesiace resp. týždne jednotlivých rokov. V roku 1997 chýba 6.-9. mesiac a 23.-41. týždeň.
- V 2.stĺpci je UF (=účelová funkcia), ktorá sa zhoduje s chybou našich výpočtov. Táto chyba ešte nie je zrelativizovaná; je to surový výstup programu (vid. Príloha).
- Zvyšné stĺpce obsahujú nami kalibrované parametre modelov CIR a Vašíček:
  - $\theta$ - očakávaný úrok,
  - $\kappa$ - rýchlosť reakcie na zmeny,
  - $\lambda$ - trhová cena rizika,
  - $\sigma$ - volatilita.

Cieľom bolo minimalizovať účelovú funkciu a tým kalibrovať parametre  $\theta, \kappa, \lambda, \sigma$ . O hodnotách jednotlivých parametrov sme mali akúsi predstavu.

Očakávaný úrok, teda  $\theta$ , by sa mal pohybovať okolo tých percent, aké boli v rokoch 97 až 99. Číselne to znamená od 14% do 35%.

O hodnotách  $\sigma$  sa v mnohých literatúrach píše, že by sa mala pohybovať okolo 30%, 40%. Výsledky tieto očakávania vo všeobecnosti spĺňajú, avšak

sú aj výnimky, kedy buď volatilita je oveľa nižšia, okolo 10%, alebo vyššia, okolo 50%. Takých výnimiek je však len málo.

Z praxe sa očakávala kladná trhovú cenu rizika. Toto očakávanie sa splnilo. Výsledky sú v intervale 0-10.

Skrytým bodom celej kalibrácie je parameter  $\kappa$ , ktorý sa správal dosť nezvyčajne. Buď sa našiel minimum UF pre malé hodnoty  $\kappa$ , alebo potom pre veľké. Výsledky však potvrdzujú, že pre menšie hodnoty  $\kappa$  sa dosiahol lepší fit. Samozrejme výnimky vždy existujú.

## 7.4 Kritika

**Kritika okrajových podmienok:** Pri odvodení jednofaktorových modelov som spomenula tri najznámejšie modely: Vašíčkov, CIR a Ho and Lee model. Uviedla som aj explicitné riešenia týchto modelov spolu s okrajovou podmienkou. Tieto vzorce platia iba pre voľbu  $\gamma = 0, 1/2, 1$  a sú skonštruované tak, aby pri riešení nevznikali problémy. Logické by bolo však nájsť riešenie pre každé  $\gamma$ . Okrajová podmienka je tiež umelo vytvorená.

Vhodné okrajové podmienky by mali byť:

$$r \rightarrow \infty, P(t, T, r) = 0 \text{ pre každé } 0 < t < T,$$

$$r \rightarrow 0, P(t, T, r) = 1.$$

Prvú spĺňa nami poznané explicitné riešenie:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Ae^{-Br} = 0$$

ale druhá podmienka neplatí, totiž  $P(t, T, 0) = A(t, T) \neq 1$ . Riešenie PDR (14) s touto okrajovou podmienkou môžeme nájsť v práci [4].

**Kritika modelov:** Najsilnejšou kritikou Vašíčkovho modelu je, že povoľuje záporné úrokové miery, keďže proces short rate-u má konštantnú volatilitu. Možné tvary výnosovej krivky tohto modelu sú limitované, čo skomplikuje praktickú implementáciu, keďže tvary trhových yield curve sú veľmi zložité. Klesajúci charakter výnosových kriviek tiež neprispieje tomuto modelu.

Z praktického hľadiska nedostatok modelu CIR je fakt, že získané výnosové krivky sú úboho reprodukovanie z dôvodu limitovanej flexibility funkcie, ktorá opisuje diskontný faktor. Tento model odstraňuje problém záporných úrokových mier, ale yield curve má naďalej klesajúci charakter.

## 8 Diskusia

Finančný trh má nezastupiteľnú úlohu v trhovej ekonomike. Súčasťou tohto trhu sú finančné deriváty úrokovej miery, ktorých oceňovanie je jednou z najdôležitejších častí teórie finančných derivátov. Existujú rôzne jedno- a viacfaktorové modely, ktoré sú založené na stochastickom vývoji úrokovej miery. Teória týchto modelov nám umožnila nasimulovať jedno- a dvojfaktorové procesy, na základe ktorých sme usúdili správnosť použitia modelov s jedným stochastickým faktorom na modelovanie vývoja úrokovej miery.

V analyzovaní štruktúry dát (BRIBOR) sme sa zaoberali typom rozdelenia O/N a polročných úrokových mier a s výnosovými krivkami. Črtali sa náznaky použitia dvojfaktorových modelov (graf 4, pre rok 1998).

Najprv sa kalibrovali jednofaktorové modely CIR a Vašíček. Tieto modely sú najpoužívannejšie, ale majú svoje nedostatky. Prvým krokom kalibrácie parametrov týchto modelov je použitie explicitných vzorcov ((16),(2),(17), (18)).

Výsledky tohto kroku splnili naše očakávania. Nakalibrované parametre naozaj potvrdili teóriu a prax. Modelmi odhadovaný parameter  $\theta$  celkom dobre sledoval skutočný vývoj úrokových mier. Týždenné výsledky  $\theta$  ležali nad reálnymi hodnotami, čo sa pravdepodobne dá vysvetliť nesprávnosťou riešenia PDR (14) pre jednofaktorové modely. Tento nedostatok by sa mohol vyriešiť pomocou použitia numerického riešenia PDR (14) so správnymi okrajovými podmienkami.

V spracovávaní výsledkov sme zisťovali rozdelenie parametra  $\theta$ , aby sme to mohli porovnať s rozdelením O/N alebo polročných úrokových mier. Výsledky však normalitu nepotvrdili, skôr sa opäť črtali náznaky použitia viac stochastických faktorov.

Postupne sa porovnávali modely CIR a Vašíček. U mesačných výsledkov bol viacej vyhladený očakávaný úrok odhadovaný modelom Vašíček. Týždenná analýza nedáva jednoznačnú odpoveď na túto otázku. Štatistika chýb výpočtov však prispeje použitiu modelu Vašíček. Nedá sa jednoznačne rozhodnúť, ktorý model modeluje lepšie slovenské úrokové miery.

## 9 Záver

V predloženej diplomovej práci sme sa zaoberali rovnovážnymi modelmi Vašíček a CIR. Tieto modely sú založené na okamžitej úrokovej miere a skúmajú jej vplyv na ceny dlhopisov. Ich riešenia sa dajú vyjadriť v explicitnom tvare, preto sú ľahko implementovateľné. Majú však svoje nedostatky, že nedokážu dostatočne aproximovať celú výnosovú krivku do stupňa presnosti požadovaného užívateľmi a existuje príliš veľa rozporov medzi nimi a realitou. Tieto rozpory vedú ku konštrukcii modelov s väčším počtom parametrov, ktoré plne využívajú informácie obsiahnuté vo výnosovej krivke.

Prínosom tejto práce je nakalibrovanie parametrov jednofaktorových modelov CIR a Vašíček pre slovenské dáta BRIBOR-u. Navrhli sme program, ktorý pomocou metódy evolučných stratégií minimalizuje rozdiel úrokových mier rátaných explicitnými vzorcami a skutočných úrokových mier, a tým udáva hľadané parametre. Získané výsledky splnili naše očakávania.

Perspektívou do budúcnosti by mohli byť modifikácie nášho programu. Miesto explicitných vzorcov použiť numerické riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre jednofaktorové modely so správnou okrajovou podmienkou; alebo prejsť na dvojfaktorový model, ktorý dáva väčšiu voľnosť pri minimalizácii.

## Referencie

- [1] Hull, J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice - Hall, Inc., 1989.
- [2] Kwok, Y. K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer - Verlag, 1998.
- [3] Alexová, M., *Dvojfaktorové modely derivátov úrokových mier so stochastickou volatilitou*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2002.
- [4] Lucová, M., *Numerické metódy oceňovania derivátov úrokovej miery*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2002.
- [5] Kuchta, J., *Optimalizácia plynovodných sietí evolučnými stratégiami*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2001.
- [6] Ševčovič, D.,  
*pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/studium/seminare/management*,  
Oceňovanie finančných derivátov.
- [7] Shreve, S., *www.2.cs.cmu.edu/chal/shreve.html*,  
Stochastic Calculus and Finance.
- [8] Dáta BRIBOR-u: *www.nbs.sk*.
- [9] Schwefel, H.-P., *Numerische Optimierung von Computermodele n Mittels der Evolutionsstrategie*, volume 26 of Interdisciplinary System Research, Birkhäuser, Basel 1977.
- [10] Rechenberg, I., *Evolutionstrategie: Optimierung Technischer Systeme nach Prinzipien der Biologischen Evolution*, Frommann-Holzboog, Stuttgart 1973.
- [11] Schwefel, H.-P., *Evolution and Optimum Seeking*, Sixth- Generation Computer Technology Series, Wiley, New York 1995.
- [12] Schwefel, H.-P., Rudolph, G., *Contemporary Evolution Strategies*, In V F. Morán, A. Moreno, J.J. Merelo, P. Chacón (eds) *Advances in Artificial Life*, Third International Conference on Artificial Life, volume 929 of Lecture Notes in Artificial Intelligence, pages 893-907, Springer, Berlin 1998 .



- [13] Longstaff, F.A., Schwartz, E.S., *Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model*, The Journal of Finance, 47 (1992), 1259-1282.
- [14] Ungvarský, C., *Metóda konečných objemov a oceňovanie opcií*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2000.

# Príloha

## Tabuľky

<i>mesiace</i>	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.026840	0.183645	515.404785	0.813259	0.286207
2.	0.012938	0.180782	567.211165	0.420514	0.282810
3.	0.012100	0.170294	737.008113	2.663737	0.333376
4.	0.014586	0.196757	95.321465	3.490298	0.177984
5.	0.052271	0.206733	451.237844	1.182936	0.371905
10.	0.016199	0.265846	693.721065	0.444257	0.288796
11.	0.023170	0.254518	204.151796	0.593092	0.394158
12.	0.022080	0.258989	64.997755	0.790082	0.344001

Tabuľka 11: CIR mesačné odhady z roku 1997

<i>mesiace</i>	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.026838	0.183866	514.964671	0.817330	0.286544
2.	0.012930	0.180729	563.375808	0.406628	0.282338
3.	0.012109	0.171412	742.769853	2.673224	0.324331
4.	0.014628	0.197103	95.900378	3.402308	0.186701
5.	0.052265	0.208164	453.258314	1.256334	0.376860
10.	0.016230	0.265591	693.943415	0.438608	0.289616
11.	0.022921	0.253368	204.322665	0.564616	0.397901
12.	0.022131	0.257626	63.723042	0.951790	0.294178

Tabuľka 12: Vašíčkove mesačné odhady z roku 1997

<i>mesiace</i>	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.047885	0.231157	89.773328	8.737784	0.210571
2.	0.030853	0.258358	131.698924	6.052194	0.274542
3.	0.018778	0.233325	66.342138	7.212982	0.449576
4.	0.015266	0.278981	26.081598	6.135644	0.422754
5.	0.018393	0.291458	21.309546	8.044831	0.357133
6.	0.011693	0.252476	8.128915	2.913879	0.401868
7.	0.009820	0.191136	13.642744	2.024643	0.304099
8.	0.047056	0.178651	132.140077	1.099249	0.307407
9.	0.099230	0.287762	591.831938	9.909774	0.445992
10.	0.148202	0.325346	344.129098	8.733495	0.205350
11.	0.024717	0.237006	43.097723	6.641954	0.350272
12.	0.024021	0.171105	95.027885	6.475019	0.341613

Tabuľka 13: CIR mesačné odhady z roku 1998

<i>mesiace</i>	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.048732	0.231443	89.587027	8.731863	0.210676
2.	0.031558	0.258191	131.723493	5.994108	0.274452
3.	0.019235	0.273736	64.607007	9.027155	0.440715
4.	0.015706	0.263260	32.899433	4.007325	0.349020
5.	0.018204	0.258924	26.338580	4.562196	0.294429
6.	0.011619	0.218903	12.134379	1.126679	0.374522
7.	0.008166	0.298443	5.778709	1.649929	0.334624
8.	0.047298	0.177934	132.049496	1.040122	0.306764
9.	0.099289	0.291611	577.562455	8.824502	0.211579
10.	0.148175	0.321577	343.364867	8.740719	0.204915
11.	0.025179	0.205593	60.102681	1.700903	0.337801
12.	0.024346	0.166078	89.311773	1.453647	0.237278

Tabuľka 14: Vašíčkove mesačné odhady z roku 1998

<i>mesiace</i>	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.008800	0.193829	95.964294	14.848012	0.445519
2.	0.011898	0.178947	558.558167	4.888774	0.260559
3.	0.018367	0.228491	6.503442	1.938810	0.247353
4.	0.004565	0.163605	28.591852	2.660965	0.445773
5.	0.049993	0.172718	429.198077	4.776266	0.277580
6.	0.006762	0.173825	696.755270	0.004298	0.302896
7.	0.011866	0.212605	16.467543	4.355819	0.206447
8.	0.003858	0.230918	9.830060	3.561388	0.254434
9.	0.005494	0.226773	5.009550	1.535619	0.224592
10.	0.015067	0.120188	519.218721	1.302883	0.396751
11.	0.007910	0.152923	39.722988	0.971523	0.249917
12.	0.017856	0.141999	319.915234	4.907581	0.260708

Tabuľka 15: CIR mesačné odhady z roku 1999

<i>mesiace</i>	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.008966	0.206358	76.324403	8.299175	0.344277
2.	0.011893	0.179256	558.822786	4.876883	0.261159
3.	0.017912	0.189211	12.117028	0.577698	0.375881
4.	0.005076	0.176892	31.265060	3.445136	0.260641
5.	0.049985	0.174177	472.512942	2.452671	0.417908
6.	0.006792	0.173476	696.564323	0.012291	0.303238
7.	0.011058	0.190441	12.899284	0.526145	0.373785
8.	0.002930	0.189128	12.124769	0.569261	0.374201
9.	0.006347	0.213140	8.660871	1.954311	0.220308
10.	0.015064	0.120738	518.467442	1.316997	0.397435
11.	0.009941	0.151219	89.539314	0.716471	0.236866
12.	0.017737	0.139696	343.102785	1.144131	0.284559

Tabuľka 16: Vašíčkove mesačné odhady z roku 1999

$t_{\text{ýždne}}$	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.001982	0.161477	96.688238	0.660994	0.301847
2.	0.004843	0.158495	577.680849	0.597759	0.305503
3.	0.016420	0.224905	560.144262	9.891478	0.314868
4.	0.019036	0.209841	38.087238	5.442239	0.341247
5.	0.007063	0.181914	35.642241	1.166991	0.301192
6.	0.002962	0.209247	22.840222	4.123986	0.221978
7.	0.022080	0.205644	98.203431	2.852488	0.310911
8.	0.006428	0.206956	38.258065	5.583988	0.340228
9.	0.006143	0.173578	184.839909	3.498609	0.417330
10.	0.011511	0.180801	283.549986	6.236584	0.201659
11.	0.012244	0.158213	268.800294	1.071713	0.305569
12.	0.002412	0.189465	36.921753	5.349576	0.215102
13.	0.010119	0.178148	241.529178	4.920943	0.260396
14.	0.011349	0.225141	37.261772	6.883879	0.428699
15.	0.015052	0.201992	278.305072	8.664420	0.211873
16.	0.009723	0.196273	155.361102	0.267821	0.208370
17.	0.005450	0.197044	68.957149	2.605460	0.438188
18.	0.003577	0.189960	63.469832	1.237796	0.375625
19.	0.002893	0.225546	14.085081	3.180465	0.223884
20.	0.004214	0.183309	73.349077	1.471540	0.355669
21.	0.035517	0.218592	90.126393	5.999374	0.274960
22.	0.017605	0.322387	34.839112	4.912192	0.220300
42.	0.007679	0.243541	63.849842	2.803921	0.357670
43.	0.007378	0.292843	10.864460	2.371063	0.356676
44.	0.012161	0.276273	417.146967	4.529991	0.440795
45.	0.008002	0.268905	343.935073	5.020249	0.217488
46.	0.009374	0.260224	460.281035	4.577684	0.294596
47.	0.012408	0.244458	95.471824	0.608451	0.291398
48.	0.008922	0.246669	95.566936	0.595332	0.292764
49.	0.015654	0.247683	70.765679	2.902293	0.357600
50.	0.012805	0.247139	95.518862	0.555914	0.289519
51.	0.030876	0.241461	93.770681	6.476501	0.402430
52.	0.005150	0.265729	74.983940	4.810908	0.430465
53.	0.006325	0.257145	489.067599	4.616190	0.295231

Tabuľka 17: CIR týždenné odhady z roku 1997

<i>týždne</i>	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.026421	0.248698	134.869338	1.615449	0.231999
2.	0.031701	0.206485	214.697181	2.021018	0.285646
3.	0.033697	0.214749	470.745328	1.807961	0.274413
4.	0.011453	0.263962	112.236432	3.755991	0.396703
5.	0.007949	0.264658	446.637304	0.656257	0.307483
6.	0.010978	0.261334	100.462537	2.083888	0.310866
7.	0.015367	0.331338	7.210995	2.594006	0.204765
8.	0.014358	0.231815	113.273812	2.188672	0.448671
9.	0.012803	0.227154	71.117058	0.870188	0.435396
10.	0.014512	0.226934	49.366354	0.638122	0.327761
11.	0.017695	0.291833	6.927170	2.598931	0.204381
12.	0.010746	0.232564	22.305366	1.099645	0.246903
13.	0.020374	0.219871	251.952066	1.383742	0.297947
14.	0.013072	0.217639	172.436695	2.850188	0.394552
15.	0.012356	0.233411	5.129892	0.420138	0.284980
16.	0.009847	0.223889	44.217561	1.506012	0.216822
17.	0.008898	0.224289	24.231194	0.874709	0.393867
18.	0.024453	0.192610	200.805707	1.928283	0.377051
19.	0.014944	0.215821	42.170618	1.179140	0.221117
20.	0.008444	0.213907	22.393525	1.182582	0.220377
21.	0.006945	0.211020	23.345703	1.198934	0.219752
22.	0.009602	0.179725	34.790737	0.348165	0.301357
23.	0.007546	0.195797	16.873552	2.894871	0.339611
24.	0.006673	0.185540	12.342091	0.392744	0.373542
25.	0.018380	0.136862	225.196634	2.038246	0.322572
26.	0.004894	0.210923	7.653524	0.960076	0.399541
27.	0.006798	0.187188	18.277518	2.298662	0.296669
28.	0.007325	0.162221	26.725597	1.139445	0.474639
29.	0.006003	0.198579	6.271635	0.409251	0.293824
30.	0.004385	0.177947	13.838065	2.004693	0.276105
31.	0.011381	0.234117	4.460238	1.477317	0.405481
32.	0.026644	0.149089	441.589702	2.841417	0.212872
33.	0.017468	0.236086	33.077141	1.213686	0.223308
34.	0.024819	0.223957	221.544959	1.141776	0.246070
35.	0.021236	0.244259	24.263645	1.188174	0.221534
36.	0.037163	0.297907	154.688417	0.074350	0.208326
37.	0.011834	0.344048	181.258613	1.188200	0.348228
38.	0.104252	0.565333	157.375771	2.032480	0.431869
39.	0.087629	0.328807	255.078208	2.943474	0.220381
40.	0.019651	0.268740	77.514137	1.840445	0.335987
41.	0.024401	0.227908	200.072687	1.950146	0.379938
42.	0.012882	0.281816	35.436548	1.212689	0.224451
43.	0.023578	0.240298	41.022142	1.984000	0.378843
44.	0.030205	0.169607	219.560831	1.575527	0.464548
45.	0.012660	0.208910	22.652447	0.430959	0.356067
46.	0.007227	0.178895	40.477455	0.290357	0.306511
47.	0.006972	0.216462	16.846641	2.601502	0.266055
48.	0.019608	0.159850	210.699705	1.843664	0.234922
49.	0.014773	0.166778	380.858054	2.881939	0.214069
50.	0.008140	0.177246	42.035923	0.331336	0.305756

Tabuľka 18: CIR týždenné odhady z roku 1998

<i>týždne</i>	<i>UF</i>	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.011622	0.173546	394.041285	0.002759	0.303314
2.	0.010022	0.165762	325.397798	3.316762	0.348299
3.	0.001667	0.172251	259.877695	3.448841	0.279324
4.	0.001225	0.177417	59.443797	1.743625	0.417703
5.	0.001940	0.178600	108.192997	3.549855	0.369235
6.	0.005903	0.183816	349.423757	0.560891	0.304249
7.	0.007387	0.178747	322.586082	2.457966	0.260361
8.	0.014166	0.199413	14.995327	1.256738	0.434779
9.	0.020808	0.175455	83.401002	1.734323	0.440137
10.	0.029637	0.126710	366.988546	1.771111	0.283796
11.	0.003853	0.187901	21.752371	3.988079	0.410104
12.	0.003877	0.226160	5.701668	1.951641	0.245639
13.	0.004595	0.161433	27.093420	1.861557	0.446804
14.	0.013031	0.129523	389.691502	4.874906	0.402667
15.	0.004411	0.155153	19.047237	0.962843	0.248170
16.	0.004060	0.160449	8.324920	0.203058	0.307510
17.	0.003940	0.148651	43.331963	0.426806	0.235693
18.	0.019367	0.147767	385.708996	4.776938	0.214788
19.	0.032916	0.205467	256.101131	2.749299	0.344563
20.	0.037041	0.215476	379.613921	3.075650	0.273508
21.	0.000756	0.179075	272.741686	3.553528	0.366614
22.	0.004327	0.177806	59.213008	1.744333	0.436507
23.	0.002661	0.169627	169.222912	1.032841	0.304658
24.	0.004148	0.170695	399.511204	0.007028	0.302990
25.	0.011034	0.181237	47.407264	3.101546	0.100410
26.	0.009228	0.162784	103.536588	1.839341	0.445902
27.	0.006513	0.199532	14.433039	2.902913	0.253862
28.	0.005588	0.229275	10.129070	3.626861	0.254260
29.	0.004963	0.228916	10.221586	3.611428	0.254192
30.	0.003559	0.178347	25.835487	3.141224	0.376679
31.	0.003704	0.229060	10.245581	3.627345	0.257477
32.	0.005359	0.193707	6.537267	0.486267	0.285845
33.	0.004362	0.194019	6.541289	0.484089	0.284368
34.	0.005488	0.194429	7.215925	0.477936	0.284157
35.	0.004626	0.193849	5.917138	0.444440	0.282911
36.	0.002494	0.178143	14.465492	2.014464	0.274803
37.	0.003697	0.214874	7.634689	2.573119	0.205906
38.	0.003736	0.155340	20.331166	0.587278	0.249740
39.	0.003196	0.171857	15.044873	2.748082	0.329579
40.	0.008562	0.200625	3.602415	1.503312	0.404509
41.	0.003382	0.153548	19.298508	1.604435	0.247938
42.	0.003690	0.165639	8.362570	0.607955	0.302793
43.	0.016468	0.135811	375.243998	2.735922	0.380797
44.	0.007449	0.160337	28.603190	1.801071	0.198431
45.	0.008232	0.153508	94.335817	2.749826	0.112021
46.	0.009195	0.150860	46.149755	1.925344	0.293680
47.	0.008335	0.151719	94.520636	2.776384	0.113781
48.	0.015690	0.154790	390.716395	1.935406	0.296902
49.	0.014106	0.138334	216.021581	2.928935	0.183784

Tabuľka 19: CIR týždenné odhady z roku 1999

$t_{\text{ýždne}}$	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.001814	0.161824	95.615421	0.436113	0.306749
2.	0.020957	0.169867	586.058830	1.646452	0.417707
3.	0.016419	0.226322	561.344828	6.684293	0.431817
4.	0.018628	0.201257	48.160730	2.874161	0.312063
5.	0.007063	0.216022	43.128917	6.094460	0.274901
6.	0.003412	0.228260	24.723139	2.900321	0.393939
7.	0.022526	0.205965	98.283256	2.744450	0.310615
8.	0.006250	0.217146	45.259667	6.082208	0.275653
9.	0.006023	0.192899	193.673450	9.944155	0.445091
10.	0.011509	0.191597	298.920112	9.959958	0.445501
11.	0.012452	0.159613	268.968811	0.941999	0.306143
12.	0.002080	0.210244	26.717574	3.022154	0.381373
13.	0.010105	0.181157	249.618533	6.274169	0.200670
14.	0.011541	0.233895	37.940750	4.654995	0.333722
15.	0.015217	0.203968	252.182066	5.564043	0.343366
16.	0.009495	0.204889	213.431364	5.533626	0.342701
17.	0.005271	0.224414	86.849788	9.849413	0.312727
18.	0.003572	0.207626	86.948340	5.488982	0.342405
19.	0.002814	0.228538	24.531347	2.783621	0.392676
20.	0.004158	0.197558	67.785777	2.512646	0.438475
21.	0.035742	0.243006	85.409776	9.672341	0.331596
22.	0.015986	0.346880	29.097708	4.670684	0.392848
42.	0.007685	0.245669	50.978430	1.748286	0.336100
43.	0.006289	0.273598	7.299671	1.105322	0.244415
44.	0.012729	0.275750	372.490798	3.528394	0.254055
45.	0.007796	0.266703	348.794222	2.148632	0.307457
46.	0.008752	0.259906	460.075045	4.545320	0.297259
47.	0.011903	0.244455	96.351563	1.803938	0.207424
48.	0.007881	0.245005	96.767150	1.874428	0.204307
49.	0.015506	0.247446	71.204167	2.757008	0.355897
50.	0.012646	0.244833	95.377898	0.563604	0.292313
51.	0.031184	0.238310	95.005852	4.809726	0.225567
52.	0.004108	0.270025	76.770846	4.291400	0.334900
53.	0.006396	0.257223	491.651761	4.655106	0.295886

Tabuľka 20: Vašiček týždenné odhady z roku 1997



<i>týždne</i>	$UF$	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.026416	0.247518	134.941542	1.933619	0.342990
2.	0.015843	0.231170	27.347159	0.902369	0.222816
3.	0.033715	0.215164	469.672079	1.814158	0.275337
4.	0.011124	0.271007	113.465767	3.634957	0.439504
5.	0.007982	0.264815	448.164523	0.671548	0.305833
6.	0.010907	0.258992	102.850917	2.081975	0.312068
7.	0.014845	0.328210	6.860180	2.595466	0.202365
8.	0.015581	0.233577	114.075709	2.156957	0.447683
9.	0.013836	0.225126	72.324044	0.846416	0.434973
10.	0.011372	0.222395	74.588494	2.838939	0.432989
11.	0.017855	0.292266	7.025017	2.614048	0.203120
12.	0.010783	0.230764	24.863630	0.832192	0.394995
13.	0.019721	0.236507	23.622117	1.231453	0.220538
14.	0.013801	0.213998	188.323014	2.932528	0.219981
15.	0.012537	0.299027	2.629434	0.453314	0.332993
16.	0.011566	0.236738	43.641041	2.973174	0.333460
17.	0.007923	0.230483	13.861786	0.866114	0.222777
18.	0.015080	0.222469	74.068460	2.952581	0.316351
19.	0.016148	0.222279	35.267877	1.204464	0.348687
20.	0.005270	0.227779	14.404649	0.899320	0.225544
21.	0.005999	0.211763	20.495173	1.166807	0.221223
22.	0.010129	0.220200	17.194362	1.221265	0.350164
23.	0.003827	0.236111	10.140681	2.080321	0.253958
24.	0.003712	0.235684	10.003015	2.063689	0.252907
25.	0.005831	0.232057	5.907250	1.084516	0.243677
26.	0.004290	0.235939	9.407306	2.093215	0.252571
27.	0.006573	0.191991	11.613616	0.316316	0.376518
28.	0.008099	0.195535	15.740077	1.790375	0.257381
29.	0.005617	0.231342	6.177643	1.081280	0.252907
30.	0.004054	0.230720	6.226277	1.114131	0.246144
31.	0.010548	0.297205	2.595830	0.482614	0.333062
32.	0.026661	0.149702	433.395036	2.859748	0.214492
33.	0.017589	0.243184	39.600543	1.952596	0.342774
34.	0.018715	0.241931	60.682882	1.112670	0.244189
35.	0.020150	0.242978	23.656656	1.152422	0.221782
36.	0.037183	0.298347	154.424138	0.061856	0.207956
37.	0.011734	0.345248	180.942703	1.207205	0.346794
38.	0.104230	0.565221	162.007242	1.850052	0.337351
39.	0.087660	0.326346	257.204919	2.960969	0.220437
40.	0.018941	0.269995	76.014362	1.852547	0.336721
41.	0.008842	0.264707	33.930406	0.853553	0.395838
42.	0.009581	0.275015	35.789576	0.809556	0.395424
43.	0.022576	0.271717	30.198683	2.376833	0.451485
44.	0.016951	0.276253	7.550738	1.813716	0.207647
45.	0.011090	0.277217	13.953376	1.880615	0.426937
46.	0.007085	0.176159	39.363025	0.302074	0.306061
47.	0.003517	0.236134	12.025500	0.963137	0.425632
48.	0.004777	0.238705	11.693483	0.949488	0.423189
49.	0.014738	0.253154	7.141682	2.611691	0.201041
50.	0.007861	0.179753	41.937873	0.292044	0.306014

Tabuľka 21: Vašičkove týždenné odhady z roku 1998

<i>týždne</i>	<i>UF</i>	$\theta$	$\kappa$	$\lambda$	$\sigma$
1.	0.011663	0.175637	370.025156	1.765586	0.416545
2.	0.011310	0.171733	87.940185	1.750721	0.416384
3.	0.001673	0.173861	260.231931	3.447947	0.278559
4.	0.001138	0.182293	31.989422	0.738593	0.356276
5.	0.001933	0.188318	112.871295	3.970951	0.409166
6.	0.006042	0.183627	349.305889	0.558085	0.303073
7.	0.008162	0.191612	197.405368	4.934095	0.447251
8.	0.013004	0.224792	10.615112	1.630097	0.223030
9.	0.020217	0.199430	69.399136	3.600940	0.475987
10.	0.029584	0.132821	388.636987	5.819233	0.405861
11.	0.003116	0.197706	17.852357	1.296076	0.439186
12.	0.003093	0.200513	6.636893	0.609422	0.282880
13.	0.011643	0.138674	215.376556	4.899122	0.261511
14.	0.013037	0.133130	390.842942	4.824121	0.405060
15.	0.001658	0.199096	6.642520	0.678812	0.284497
16.	0.001972	0.227651	4.868636	0.564302	0.392562
17.	0.004769	0.155103	39.466591	1.692714	0.216538
18.	0.019371	0.148769	386.692527	4.787436	0.212782
19.	0.032875	0.208537	256.767383	2.753385	0.343000
20.	0.037060	0.215778	379.910644	3.018333	0.276543
21.	0.000754	0.178810	324.656123	2.461399	0.260153
22.	0.004321	0.219589	43.473996	4.729926	0.409667
23.	0.002758	0.173302	190.124182	3.412585	0.276664
24.	0.004260	0.172533	375.311894	1.733948	0.418473
25.	0.010756	0.176985	45.758244	2.448681	0.161517
26.	0.010002	0.167555	107.989559	3.321176	0.349882
27.	0.003292	0.191432	11.728902	0.473369	0.373003
28.	0.002606	0.190750	11.509940	0.524001	0.375205
29.	0.017799	0.136136	214.156327	2.635432	0.419361
30.	0.015697	0.138133	214.491498	4.892456	0.261228
31.	0.002539	0.191843	11.552486	0.544261	0.375082
32.	0.004087	0.231325	5.923937	1.091417	0.244738
33.	0.003193	0.231434	5.882930	1.091791	0.243897
34.	0.003197	0.233433	8.868434	2.095283	0.254835
35.	0.003745	0.231399	5.595607	1.084488	0.244629
36.	0.014339	0.134126	212.529157	1.585560	0.420505
37.	0.003481	0.229658	5.413952	1.089301	0.247445
38.	0.005909	0.202085	11.524894	0.973430	0.424970
39.	0.014945	0.121412	211.909946	2.043801	0.301089
40.	0.010622	0.137639	18.875022	0.701531	0.285214
41.	0.004811	0.207467	10.532254	2.058140	0.287328
42.	0.003401	0.215692	7.029999	0.858642	0.400675
43.	0.016542	0.136330	318.919994	1.321746	0.283021
44.	0.004713	0.183003	19.758079	2.326221	0.235413
45.	0.006723	0.153948	122.606688	2.923410	0.421274
46.	0.007192	0.168020	31.757977	1.990147	0.309548
47.	0.006103	0.145519	112.034283	1.471270	0.159199
48.	0.015694	0.154530	376.768589	0.507239	0.294143
49.	0.013864	0.138224	215.630528	2.938564	0.184285

Tabuľka 22: Vašičkove týždenné odhady z roku 1999

## Význam jednotlivých parametrov

**RIADOK** - počet rodičov v evolučnej stratégii,

**POCARGUMENTOV** - počet vstupujúcich argumentov do účelovej funkcie, ktorá ráta súčet štvorcov rozdielov medzi reálnymi a vypočítanými úrokovými mierami,

**POCZAZNAMOV** - počet dát vo vstupnom súbore,

**OD DNA** - dátum od ktorého sa ráta yield curve,

**DO DNA** - dátum do ktorého sa ráta yield curve,

**MAXA 1** - maximálna povolená hodnota parametra *theta*,

**MAXA 2** - maximálna povolená hodnota parametra *kappa*,

**MAXA 3** - maximálna povolená hodnota parametra *lambda*,

**MAXA 4** - maximálna povolená hodnota parametra *sigma*,

**MINA 1** - minimálna povolená hodnota parametra *theta*,

**MINA 2** - minimálna povolená hodnota parametra *kappa*,

**MINA 3** - minimálna povolená hodnota parametra *lambda*,

**MINA 4** - minimálna povolená hodnota parametra *sigma*.

## Program

Program na výpočet parametrov jednofaktorového modelu v programovacom jazyku C++.

Výpis súboru mo.h

```
int
read_data(FILE *vstup_urokov,double **R);

void
vystupny_subor(double *pole,double **novyrodictia);

int
mute(double *i_rodictia, double *rodictiamute, double *maxA,
      double *minA,double sigmanr);

void
spoj(double **rodictia,double *rodictiamute,
      double **novyrodictia,double *maxA,
      double *minA,double *i_rodictia,double sigmanr);

double
getgaussrandom(int i);

void
usporiadaj_zostupne_podla_prveho_pola(double *pole,
                                     double **novyrodictia);

void
swapfields(double *x, double *y);

double
private_random();

double
ucelova_funkcia(double theta,double kappa,double lambda,
               double sigma,double **R,int od_dna,int do_dna);

double
model_Vasicek_B(double kappa,double tau);
```

```

double
model_Vasicek_A(double kappa,double lambda,double sigma,
                double tau,double theta);

void
yield_curve_model_Vasicek(double kappa,double lambda,double r,
                          double sigma,double theta,
                          double *yield);

double
model_CIR_eta(double kappa,double lambda,double sigma);

double
model_CIR_B(double kappa,double lambda, double sigma,
            double tau);

double
model_CIR_A(double kappa,double lambda,double sigma,
            double tau,double theta);

void
yield_curve_model_CIR(double kappa,double lambda,double r,
                      double sigma,double theta,
                      double *yieldCIR);

//-----

```

Výpis súboru main.cpp.

```

#include <string.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <malloc.h>
#include <ctype.h>
#include <math.h>
#include "mo.h"

#define DATAFILE_R "98bribor.txt" //matica urokov
#define VYSTUP "r98_vystup.txt"
#define RIADOK 125
#define MAXRIADOK 2*RIADOK

```

```

#define MAXPOCETITER 40
#define POCZAZNAMOV 251
#define POCETARGUMENTOV 4
#define SIGMA 0.001

#define OD_DNA 31
#define DO_DNA 35

#define MAXA_1 0.4
#define MAXA_2 50
#define MAXA_3 3
#define MAXA_4 0.45

#define MINA_1 0.1
#define MINA_2 0
#define MINA_3 0
#define MINA_4 0.2

int
main()
{
    int k, i, j, od_dna, do_dna, pom;
    double kappa, lambda, sigma, theta, sigmanr;
    double *i_rodicia, *rodiciamute, *minA, *maxA, *pole;
    double **rodicia, **novyrodiscia, **R;
    FILE *vstup_urokov;

    if ((vstup_urokov = fopen(DATAFILE_R, "r"))
        == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "Cannot open input file urokov.\n");
        exit(0);
    }

    // Alokacia poli
    rodicia=(double **) calloc(MAXRIADOK+1,sizeof(double *));
    novyrodiscia=(double **) calloc(MAXRIADOK+1,sizeof(double *));
    pole=(double *) calloc(MAXRIADOK+1,sizeof(double));
    minA=(double *) calloc(POCETARGUMENTOV+1,sizeof(double));
    maxA=(double *) calloc(POCETARGUMENTOV+1,sizeof(double));

```

```

i_rodicia=(double *) calloc(POCETARGUMENTOV+1,sizeof(double));
rodiciamute=(double *) calloc(POCETARGUMENTOV+1,sizeof(double));
R=(double **) calloc(MAXRIADOK+1,sizeof(double *));

for(i=1; i<=MAXRIADOK; i++)
{
    rodicia[i]=(double *) calloc(POCETARGUMENTOV+1,sizeof(double));
    novyrodicia[i]=(double *)calloc(POCETARGUMENTOV+1,sizeof(double));
    R[i]=(double *) calloc(8,sizeof(double));
}

printf("Program na kalibráciu interest rate modelov\n");
printf("(c) Alexandra Csajkova, KEFM 2002/2003,\n\n");

od_dna=OD_DNA;
do_dna=DO_DNA;
sigmanr=SIGMA;

maxA[1]=MAXA_1; //theta max
maxA[2]=MAXA_2; //kappa max
maxA[3]=MAXA_3; //lambda max
maxA[4]=MAXA_4; //sigma max

minA[1]=MINA_1; //theta min
minA[2]=MINA_2; //kappa min
minA[3]=MINA_3; //lambda min
minA[4]=MINA_4; //sigma min

//nacitanie
read_data(vstup_urokov,R);

for(j=1; j<=RIADOK; j++)
{
    for(k=1;k<=POCETARGUMENTOV;k++)
    {
        rodicia[j][k]=minA[k] + private_random()*(maxA[k]-minA[k]);
        if(rodicia[j][k]<minA[k]) rodicia[j][k]=minA[k];
        if(rodicia[j][k]>maxA[k]) rodicia[j][k]=maxA[k];
    }
}

```

```

for(pom=1;pom<=MAXPOCETITER;pom++)
{
printf("Iteracia cislo: %d ucelova funkcia ", pom);

//spojenie rodicia a rodiciamute
spoj(rodicia,rodiciamute,novyrodicia,maxA,minA,i_rodicia,sigmanr);

for(i=1;i<=2*RIADOK;i++)
{
theta=novyrodicia[i][1];
kappa=novyrodicia[i][2];
lambda=novyrodicia[i][3];
sigma=novyrodicia[i][4];
pole[i]=ucelova_funkcia(theta,kappa,lambda,sigma,R,od_dna,do_dna);
theta=0.;
kappa=0.;
lambda=0.;
sigma=0.;
}

//usporiadanie
usporiada_j_zostupne_podla_prveho_pola(pole, novyrodicia);

printf("%lf\n", pole[2*RIADOK]);

// vyber poslednych n novych roidicov a presunutie do rodicov.
for(i=RIADOK+1;i<=2*RIADOK;i++)
{
for(j=1;j<=POCETARGUMENTOV;j++)
{
rodicia[i-RIADOK][j]=novyrodicia[i][j];
}
}
}

fclose(vstup_urokov);

vystupny_subor(pole,novyrodicia);

// Uvolnenie poli

```



```

for(i=1; i<=MAXRIADOK; i++)
    {
        free(rodicia[i]);
        free(novyrodicia[i]);
        free(R[i]);
    }
free(rodicia);
free(novyrodicia);
free(R);
free(pole);
free(minA);
free(maxA);
free(rodiciamute);
free(i_rodicia);

// Koniec programu
exit(0);
}
//-----

//nacitanie dat

int
read_data(FILE *vstup_urokov,double **R)
{
    double x;
    int i,j;

    for(i=1;i<=POCZAZNAMOV;i++)
        {
            for(j=0;j<=6;j++)
                {
                    fscanf(vstup_urokov, "%lf",&x);
                    R[i][j]=x/100.;
                }
        }
    return(0);
}
//-----

```

```

//vystup programu
void
vystupny_subor(double *pole,double **novyrodictia)
{
FILE *out;
int i,j;

    out = fopen (VYSTUP, "w");
    if ( out == NULL ) {
        printf("Chyba pri otvarani vystupneho suboru\n");
        exit(1);
    }

fprintf(out, "Vstupne data\n");
fprintf(out, "-----\n");
fprintf(out, "Model CIR\n");
fprintf(out, "Vstupny subor %s\n", DATAFILE_R);
fprintf(out, "Pasma od dna %d do dna %d\n", OD_DNA, DO_DNA);
fprintf(out, "Pocet rodicov (deti) %d\n", RIADOK);
fprintf(out, "Pocet iteracii %d\n", MAXPOCETITER);
fprintf(out, "Stand. odchylka pre mutacie %lf\n", SIGMA);
fprintf(out, "Pasma pre theta od %lf do %lf\n",MINA_1,MAXA_1);
fprintf(out, "Pasma pre kappa od %d do %d\n",MINA_2,MAXA_2);
fprintf(out, "Pasma pre lambda od %d do %d\n",MINA_3,MAXA_3);
fprintf(out, "Pasma pre sigma od %lf do %lf\n",MINA_4,MAXA_4);
fprintf(out, "-----\n");

fprintf(out,"ucelova_funkcia  theta  kappa  lamda  sigma \n");

//zapis usporiadanych novych rodicov spolu s ucelovou funkciou
for(i=1;i<=2*RIADOK;i++)
{
    fprintf(out, "%lf ", pole[i]);
    for(j=1;j<=POCETARGUMENTOV;j++)
    {
        fprintf(out,"%lf ", novyrodictia[i][j]);
    }
    fprintf(out,"\n");
}
fprintf(out,"\n");

```

```

fclose(out);
}
//-----

void
usporiadaj_zostupne_podla_prveho_pola(double *pole,
                                     double **novyrodictia)
{
    int j,i, flag;
    double temp;

    while(1)
    {
        flag=0;
        for(j=1; j<=2*RIADOK; j++)
        {
            if(pole[j]<pole[j+1])
            {
                temp = pole[j];
                pole[j] = pole[j+1];
                pole[j+1] = temp;
                swapfields(novyrodictia[j],novyrodictia [j+1]);
                flag=1;
            }
        }
        if(flag==0) break;
    }
}
//-----

void
swapfields(double *x, double *y)
{
    int i;
    double temp;

    for(i=1; i<=POCETARGUMENTOV; i++)
    {
        temp=x[i];
        x[i]=y[i];
    }
}

```

```

        y[i]=temp;
    }
}
//-----

void
spoj(double **rodicia,double *rodiciamute,double **novyrodicia,
      double *maxA,double *minA,double *i_rodicia,double sigmanr)
{
    int i,j;

    for(i=1;i<=RIADOK;i++)
    {
        for(j=1;j<=POCETARGUMENTOV;j++)
        {
            novyrodicia[i][j]=rodicia[i][j];
        }
    }

    for(i=RIADOK+1;i<=2*RIADOK;i++)
    {
        for(j=1;j<=POCETARGUMENTOV;j++)
        {
            i_rodicia[j]=rodicia[i-RIADOK][j];
        }
        mute(i_rodicia, rodiciamute, maxA,minA, sigmanr);
        for(j=1;j<=POCETARGUMENTOV;j++)
        {
            novyrodicia[i][j]=rodiciamute[j];
        }
    }
}
//-----

int
mute(double *i_rodicia, double *rodiciamute, double *maxA,
      double *minA,double sigmanr)
{
    int j,k, index;
    double gauss;

```

```

for(k=1; k<=POCETARGUMENTOV; k++)
{
    gauss=private_random();
    index=(int )(1000*gauss);
    rodiciamute[k]=i_rodicia[k]+sigmanr*getgaussrandom(index)*
                                *(maxA[k]-minA[k]);
    if(rodiciamute[k]<minA[k]) rodiciamute[k]=minA[k];
    if(rodiciamute[k]>maxA[k]) rodiciamute[k]=maxA[k];
}
return(0);
}
//-----

double
private_random()
{
    return( (double )rand()/RAND_MAX);
}
//-----

//funkcie A,B pre Vasickov model
double
model_Vasicek_B(double kappa,double tau)
{
    return( (1-exp(-kappa*tau))/kappa);
}
//-----

double model_Vasicek_A(double kappa,double lambda,double sigma,
                        double tau,double theta)
{
    double B,pom;
    B=model_Vasicek_B(kappa,tau);
    pom=theta-((sigma*sigma)/(2*kappa))-(sigma*lambda/kappa);
    return(exp((B-tau)*(pom)-((sigma*sigma*B*B)/(4*kappa))));
}
//-----

//funkcie A,B resp eta pre CIR model
double model_CIR_eta(double kappa,double lambda,double sigma)
{

```

```

double pomoc;
pomoc=((kappa+lambda)*(kappa+lambda))+(2*sigma*sigma);
return sqrt(pomoc);
}
//-----

double model_CIR_B(double kappa,double lambda, double sigma,
                    double tau)
{
double pomoc,pom;
pomoc=model_CIR_eta(kappa,lambda,sigma);
pom=exp(pomoc*tau)-1;
return(2*pom)/(((kappa+lambda+pomoc)*pom)+(2*pomoc));
}
//-----

double model_CIR_A(double kappa,double lambda,double sigma,
                    double tau,double theta)
{
double zaklad, exponent, pomoc,pom,cit,men;
exponent=(2*kappa*theta)/(sigma*sigma);
pomoc=model_CIR_eta(kappa,lambda,sigma);
pom=kappa+lambda+pomoc;
cit=2*pomoc*exp(pom*tau/2);
men=(pom*(exp(pomoc*tau)-1))+2*pomoc;
zaklad= cit/men;
return(pow(zaklad,exponent));
}
//-----

//Vasickov yield curve
void
yield_curve_model_Vasicek(double kappa,double lambda,double r,
                           double sigma,double theta,
                           double *yield)
{
static double tau[10];
double A,B;
int j;

tau[0]=0.;

```

```

tau[1]=1./52;
tau[2]=2./52;
tau[3]=1./12;
tau[4]=2./12;
tau[5]=3./12;
tau[6]=0.5;
yield[0]=r;

    for(j=1;j<=6;j++)
    {
        A=model_Vasicek_A(kappa,lambda,sigma,tau[j],theta);
        B=model_Vasicek_B(kappa,tau[j]);
        yield[j]=(B*r-log(A))/tau[j];
    }
}
//-----

//CIR yield curve
void
yield_curve_model_CIR(double kappa,double lambda,double r,
                      double sigma,double theta,
                      double *yieldCIR)
{
    static double tau[10];
    double A,B;
    int j;

    tau[0]=0.;
    tau[1]=1./52;
    tau[2]=2./52;
    tau[3]=3./52;
    tau[4]=1./12;
    tau[5]=3./12;
    tau[6]=0.5;

    yieldCIR[0]=r;

    for(j=1;j<=6;j++)
    {
        A=model_CIR_A(kappa,lambda,sigma,tau[j],theta);

```

```

        B=model_CIR_B(kappa,lambda,sigma,tau[j]);
        yieldCIR[j]=(B*r-log(A))/tau[j];
    }
}
//-----

double
ucelova_funkcia(double theta, double kappa, double lambda,
                double sigma,double **R, int od_dna,int do_dna)
{
    int i,j;
    double x,r;
    double *yield; //podla potreby sa pouzije yield alebo yieldCIR
    double *yieldCIR;

    //podla potreby sa alokuje yield alebo yieldCIR
    yield=(double *) calloc(10,sizeof(double));
    yieldCIR=(double *) calloc(10,sizeof(double));

    for(i=od_dna; i<=do_dna; i++)
    {
        r=R[i][0];
        //podla potreby sa pouzije yield_curve_model_Vasicek
        // alebo yield_curve_model_CIR
        yield_curve_model_Vasicek(kappa,lambda, r, sigma, theta, yield);
        yield_curve_model_CIR(kappa,lambda, r, sigma, theta, yieldCIR);
    }

    x=0;
    for(i=od_dna;i<=do_dna;i++)
    {
        for(j=1;j<=6;j++)
        {
            //podla potreby sa pouzije yield alebo yieldCIR
            x=x+((R[i][j]-yield[j])*(R[i][j]-yield[j]));
            x=x+((R[i][j]-yieldCIR[j])*(R[i][j]-yieldCIR[j]));
        }
    }

    free(yield); //podla potreby sa uvolni yield alebo yieldCIR
    free(yieldCIR);
}

```



```

return(sqrt(x/(6*(do_dna+1-od_dna)-1)));
}
//-----

double
getgaussrandom(int i)
{
static double gaussnormal[1001];

gaussnormal[1] = -0.577127;
gaussnormal[2] = -1.06285;
gaussnormal[3] = 0.535353;
gaussnormal[4] = 0.742842;
gaussnormal[5] = -1.16796;
gaussnormal[6] = -1.54074;
.
.
.
.
gaussnormal[996] = -0.0730081;
gaussnormal[997] = 0.499988;
gaussnormal[998] = -0.899027;
gaussnormal[999] = 1.02913;
gaussnormal[1000] = 1.77692;

return (gaussnormal[i]);
}
//-----

```

## Výpis behu programu

Ukážka výstupného súboru (vystup.txt)

Vstupne data

-----  
Model CIR

Vstupny subor 98bribor.txt

Pasmo od dna 111 do dna 115

Pocet rodicov (deti) 125

Pocet iteracii 40

Stand. odchylka pre mutacie 0.001000

Pasmo pre theta od 0.100000 do 0.250000

Pasmo pre kappa od 0 do 200

Pasmo pre lambda od 0 do 3

Pasmo pre sigma od 0.200000 do 0.450000  
-----

ucelova_funkcia	theta	kappa	lamda	sigma
0.007728	0.195084	16.398765	2.918584	0.340249
0.007684	0.195128	16.568240	2.921107	0.340473
0.007657	0.194953	16.737920	2.908057	0.341679
0.007656	0.195124	17.841548	2.885300	0.340438
0.007651	0.195049	16.716945	2.910021	0.339652
0.007646	0.194791	16.965808	2.909314	0.341627
0.007635	0.195257	16.500762	2.887251	0.340606
0.007633	0.195710	16.452438	2.921877	0.340632
0.007627	0.195190	17.560877	2.922567	0.340443

Zvyšné iterácie.....

0.007567	0.195643	17.072972	2.910080	0.340400
0.007566	0.195748	17.190403	2.912367	0.340449
0.007566	0.195505	17.122329	2.895436	0.341178
0.007566	0.195721	16.998171	2.914369	0.340046
0.007562	0.195764	17.013997	2.913627	0.340454
0.007562	0.195837	16.991550	2.919787	0.340088
0.007561	0.195618	17.048851	2.899894	0.339379
0.007556	0.195744	17.043117	2.904977	0.340409
0.007549	0.195941	17.063395	2.911022	0.340601
0.007546	0.195797	16.873552	2.894871	0.339611

