Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika

KONVEXNÁ ANALÝZA A MIKROEKONOMICKÁ TEÓRIA FIRMY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Martina Gancárová
Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr Pavol Brunovský, DrSc.

Bratislava 2003

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Zároveň by som chcela poďakovať Prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za rady, kritické pripomienky a trpezlivosť pri vedení diplomovej práce.

v Bratislave, 1.4.2003 Martina Gancárová

Obsah

Úvod

Teóriu firmy spracúva množstvo mikroekonomickej literatúry. Väčšina týchto publikácií pracuje zo začiatku so všeobecnou produkčnou funkciou, na ktorú sa kladú len tie najnutnejšie predpoklady. Počas odvodzovania rôznych tvrdení je neraz potrebné riešiť úlohy viazanej optimalizácie. Tu sa väčšina literatúry obmedzí na funkcie diferencovateľné, s ktorými sa pracuje jednoduchšie. Výsledky, ktoré takto dostaneme, sú potom pre iné funkcie nepoužiteľné. Cieľom tejto práce je spracovať teóriu firmy tak, aby sme o produkčnej množine a produkčnej funkcii predpokladali len to najnutnejšie – zaobídeme sa bez predpokladu o diferencovateľnosti produkčnej funkcie.

Podobný cieľ si dal vo svojej diplomovej práci aj P. Mezovský [3], jeho práca však obsahuje pomerne veľké množstvo chýb a nepresností. Navyše, na všetky matematické tvrdenia, ktoré sú použité, sa iba odvoláva. Mojou ambíciou však bolo nielen spracovať teóriu firmy, ale aj dokázať väčšinu tvrdení, ktoré sa použijú pri riešení úloh minimalizácie nákladov a maximalizácie zisku. Táto práca zároveň poskytuje aj širší pohľad na konvexné množiny, konvexné funkcie a ich kombináciu – úlohu konvexného programovania.

Hlavným cieľom každej firmy je maximalizovať svoj zisk. Ako neskôr ukážeme, ide o úlohu maximalizovať konvexnú funkciu na konvexnej množine. Preto bude konvexná analýza užitočný nástroj k riešeniu problému. Aj to je dôvod, prečo veľká časť tejto práce je venovaná konvexným množinám a konvexným funkciám.

Prvá kapitola sa venuje konvexným množinám a operáciam, ktoré konvexnosť zachovávajú. Okrem niektorých veľmi známych tvrdení je v nej aj časť o oddeľovaní konvexných množín, pomocou nej sa nám podarí zaviesť opornú funkciu konvexnej množiny.

V druhej kapitole sú všetky potrebné tvrdenia týkajúce sa konvexných funkcií. Zaoberá sa súvisom konvexných funkcií a konvexných množín a zadefinujeme si konjugovanú funkciu. Tiež si povieme niečo o maximalizácii konvexnej funkcie na konvexnej množine. Viac k týmto dvom častiam sa dá nájsť v knihách [4], [5] či [7].

Ďalšia kapitola spája prvé dve, hovorí o hľadaní minima konvexnej funkcie na konvexnej množine. Zadefinujeme si úlohu konvexného programovania a k nej vektor Kuhn-Tuckerovych koeficientov, ktorým nájdeme ekonomickú interpretáciu. Pomocou neho preformulujeme úlohu na hľadanie voľného extrému. Túto teóriu podrobne spracúva kniha [7], ale aj niektoré publikácie venované nelineárnemu programovaniu.

Posledná kapitola hovorí o mikroekonomickej teórii firmy. Zadefinujeme si produkčnú množinu, produkčnú funkciu a odvodíme ich základné vlastnosti. Sformulujeme úlohu minimalizácie nákladov a maximalizácie zisku a budeme skúmať, či majú riešenie. Odvodíme tiež niektoré vlastnosti nákladovej funkcie a funkcie zisku. O teórii firmy sa dá dozvedieť viac z ľubovoľnej knihy o mikroekonómii, napríklad [2],[6],[8] a [9].

Kapitola 1

Konvexné množiny

V prvej kapitole si zosumarizujeme niektoré dôležité vlastnosti konvexných množín. Zadefinujeme si niektoré špeciálne množiny. Pomocou viet o oddeľovaní konvexných množín dokážeme vetu, ktorá hovorí, že uzavretá konvexná množina je prienikom uzavretých polpriestorov, ktoré ju obsahujú. Pomocou tejto vety zavedieme pre množiny takzvanú opornú funkciu, ktorá bude hrať neskôr dôležitú úlohu.

1.1 Konvexné množiny

Konvexnosť je jednou z veľmi dôležitých vlastností množín. Jednoducho povedané, konvexné sú množiny, ktoré s každými dvoma bodmi X a Y obsahujú aj celú úsečku XY.

Definícia 1.1. Množinu $C \subset \mathbf{R}^n$ nazveme *konvexnou*, ak

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad \text{platí} \quad \lambda x + \ (1-\lambda)\ y \ \in C.$$

Na niektorých množinách vidíme na prvý pohľad, že sú konvexné. Z nich rôznymi operáciami (napríklad prienik) vznikajú opäť konvexné množiny. Aké sú to operácie a o ktorých množinách vieme, že sú konvexné, je obsahom tejto časti.

Definícia 1.2. Bod $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ nazveme *konvexnou kombináciou* bodov $x_i \in \mathbf{R}^n$, ak $\sum \alpha_i = 1$ a $\alpha_i \geq 0$.

Podľa definície je teda konvexnou množina obsahujúca konvexné kombinácie dvojíc svojich prvkov. Potom však pre ňu platí oveľa viac, obsahuje totiž konvexné kombinácie m-tíc svojich prvkov, teda platí veta

Veta 1.1. Množina $C \subset \mathbf{R}^n$ je konvexná práve vtedy, keď obsahuje všetky konvexné kombinácie svojich prvkov.

Dôkaz. Prvú implikáciu dokážeme matematickou indukciou podľa počtu bodov m. Opačná implikácia platí triviálne. □

Vďaka tejto vlastnosti triviálne platí nasledujúca veta.

Veta 1.2. Konečný prienik konvexných množín je konvexná množina.

Dôkaz. Vezmime ľubovoľných m bodov prieniku. Keďže všetky množiny boli konvexné, obsahujú ľubovoľnú konvexnú kombináciu týchto bodov, teda ju obsahuje aj prienik týchto množín. Preto je tiež konvexný. □

Z tejto vety potom vyplýva dôležitý dôsledok.

Dôsledok 1.1. Riešením ľubovoľného systému lineárnych rovníc a nerovníc je konvexná množina.

1.1.1 Vlastnosti konvexných množín

Existuje ešte mnoho operácií, ktoré zachovávajú konvexnosť. Spomeňme aspoň niektoré z nich.

Pre konvexnú množinu $C \subseteq \mathbf{R}^n$ platí, že množiny

$$\begin{aligned} \lambda C &= \{\lambda x \,|\, x \in C, \lambda > 0\} \\ C + a &= \{a + x \,|\, x \in C, a \in \mathbf{R}^n\} \end{aligned}$$

sú tiež konvexné – ide vlastne o „zväčšovanie“ a „zmenšovanie“ či „posunutie“ množiny. Trochu menej triviálne je tvrdenie

Veta 1.3. Ak C_1 a C_2 sú konvexné podmnožiny $\mathbf{R}^n$, potom je konvexná aj množina

$$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \,|\, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}.$$

Dôkaz. Nech x a y sú prvky $C_1 + C_2$, dokážeme, že aj $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_1 + C_2$. Nech teda $x = x_1 + x_2$ a $y = y_1 + y_2$ kde x_1, $y_1 \in C_1$ a x_2, $y_2 \in C_2$. Počítajme

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda x_1 + \lambda x_2 + (1-\lambda)y_1 + (1-\lambda)y_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2).$$

Pretože C_1 a C_2 sú konvexné, platí

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) \in C_1, \qquad (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \in C_2.$$

Potom platí $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_1 + C_2$, čo znamená, že $C_1 + C_2$ je konvexná množina. □

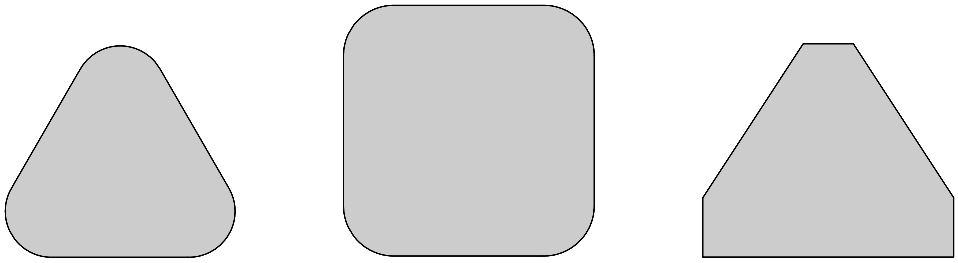
Keď sme si už definovali súčet množín $C_1 + C_2$, povedzme si niečo o jeho vlastnostiach. Tieto základné platia pre ľubovoľné (aj nekonvexné) množiny:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= C_2 + C_1, \\ (C_1 + C_2) + C_3 &= C_1 + (C_2 + C_3), \\ \lambda_1(\lambda_2 C) &= (\lambda_1 \lambda_2) C, \\ \lambda(C_1 + C_2) &= \lambda C_1 + \lambda C_2, \end{aligned}$$

kým nasledovná vlastnosť platí len pre konvexné množiny C a pre λ_1, $\lambda_2 > 0$:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) C = \lambda_1 C + \lambda_2 C.$$

Ide o skutočne zaujímavú operáciu, napríklad *sčítaním* kruhu a trojuholníka resp. štvorca a kruhu či štvorca a trojuholníka so „stredom“ v nule vzniknú nasledovné množiny:



Obr. 1.1: Sčítanie konvexných množín

Zároveň si však môžme definovať aj operáciu odčítania, konkrétne $C_1 - C_2 = C_1 + (-1 \cdot C_2)$. Pretože pre konvexnú množinu C je aj $-C$ konvexná, je aj rozdiel dvoch konvexných množín konvexný. Napríklad pre kruh$K$ so stredom v nule a polomerom 1 platí $K - K = 2 \cdot K$.

1.1.2 Niektoré špeciálne množiny

Definujme si najprv niektoré špeciálne konvexné množiny, ktoré budeme používať často. Špeciálnym druhom konvexných množín sú takzvané *afinné* množiny. Sú to také množiny A, pre ktoré platí, že pre $x, y \in A$ aj $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ pre všetky reálne čísla λ, čiže s každými dvoma bodmi patrí do A celá priamka, na ktorej ležia.
Okrem afinných množín budeme pracovať aj s pojmami nadroviny a polpriestorov. *Nadrovinou* budeme pre $b \neq 0$ nazývať množinu

$$H = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, b \rangle = \beta\}.$$

Uzavretými polpriestormi vytvorenými nadrovinou $H = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, b \rangle = \beta, b \neq 0\}$ budeme nazývať množiny

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, b \rangle \leq \beta, b \neq 0\} \qquad \text{a} \qquad \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle x, b \rangle \geq \beta, b \neq 0\}.$$

a *otvorené polpriestory* vytvorené nadrovinou H budú množiny

$$\{x \in \mathbf{R}^n \,\big|\, \langle x, b \rangle < \beta, b \neq 0\} \qquad \text{a} \qquad \{x \in \mathbf{R}^n \,\big|\, \langle x, b \rangle > \beta, b \neq 0\}.$$

Množinu

$$B = \{x \in \mathbf{R}^n \,\big|\, |x| \leq 1\}$$

nazveme *uzavretá jednotková guľa.* Pri takomto označení bude $x + \varepsilon B$ predstavovať uzavreté ε-okolie bodu x. V práci budeme ďalej používať aj pojmy ako afinný obal či vnútro, relatívne vnútro a uzáver množiny, ktoré si preto tiež zadefinujeme.

Afinný obal množiny C je najmenšia taká afinná množina $\text{aff}(C)$, ktorá obsahuje C.

Vnútro množiny C bude množina

$$\text{int}(C) = \{x \in C \,\big|\, \exists \varepsilon > 0 : (x + \varepsilon B) \subseteq C\}.$$

Relatívne vnútro množiny C bude množina

$$\text{ri}(C) = \{x \in C \,\big|\, \exists \varepsilon > 0 : (x + \varepsilon B) \cap \text{aff}(C) \subseteq C\}.$$

Relatívnym vnútrom je teda taká množina, ktorá by bola vnútrom, keby sme pracovali v $\text{aff}(C)$. Pri práci s relatívnym vnútrom si treba dať pozor, pretože na rozdiel od vnútra množiny tu napríklad neplatí, že ak $A \subseteq B$, potom $\text{ri}(A) \subseteq \text{ri}(B)$ – zoberme si za množinu B napríklad kocku a za množinu A jej stenu. Stena je síce podmnožinou kocky, ale ich relatívne vnútra sú disjunktné.

Uzáver množiny C bude množina

$$\text{cl}(C) = \cap\{C + \varepsilon B \,\big|\, \varepsilon > 0\}.$$

Množina je uzavretá, ak $\text{cl}(C) = C$. Zároveň pre konvexnú množinu C sú konvexné aj množiny $\text{cl}(C)$, $\text{int}(C)$ a $\text{ri}(C)$.

1.2 Oddeľovanie množín

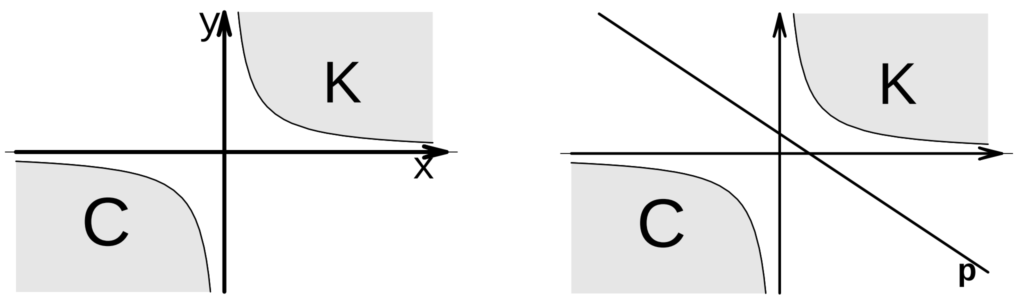
Oddeľovanie množín v $\mathbf{R}^n$ si vie predstaviť takmer každý. Je založené na tom, že nadrovina v $\mathbf{R}^n$ rozdelí priestor na dva polpriestory. Geometrická predstava hľadania takej priamky (roviny, ...), ktorá „oddelí“ dve množiny, nie je veľmi zložitá. Pri takejto geometrickej predstave je ťažšie hľadať súvislosť medzi oddeľovaním množín a optimalizáciou. Tá sa však objaví, keď si uvedomíme, aké vlastnosti takáto priamka či rovina musí spĺňať - jednoducho zistíme, že oddeľovane množín má mnoho spoločného s hľadaním extrémov lineárnych funkcií. V tejto časti odvodíme niektoré vlastnosti, ktoré sú nutné či postačujúce na to, aby sa množiny dali oddeliť. Tie použijeme na dokázanie zaujímavých vlastností konvexných množín. Budeme sa postupne zaoberať niekoľkými druhmi oddeľovania všeobecných a neskôr konvexných množín.

1.2.1 Oddeľovanie všeobecných množín

Definujme si najprv presne, čo budeme myslieť pod „oddeľovaním“ množín.

Definícia 1.3. Nech M_1 a M_2 sú neprázdne podmnožiny $\mathbf{R}^n$. Hovoríme, že nadrovina H *oddeľuje* množiny M_1 a M_2, ak množina M_1 je celá obsiahnutá v jednom z uzavretých polpriestorov vytvorených nadrovinou H a množina M_2 je celá obsiahnutá v druhom uzavretom polpriestore vytvorenom nadrovinou H.
Hovoríme, že nadrovina H *skutočne oddeľuje* množiny M_1 a M_2, ak ich oddeľuje a množiny M_1 a M_2 nie sú obe súčasne obsiahnuté v H.
Hovoríme, že nadrovina H *ostro oddeľuje* M_1 a M_2, ak existuje také $\varepsilon > 0$, že $M_1 + \varepsilon B$ je obsiahnutá v jednom z otvorených polpriestorov vytvorených nadrovinou H a $M_2 + \varepsilon B$ je obsiahnutá v druhom.

Definovali sme si až tri druhy oddeľovania – obyčajné oddeľovanie (separation), skutočné oddeľovanie (proper separation) a ostré oddeľovanie (strong separation).



(a) Oddeľovanie množín ***(b) Ostré oddeľovanie množín***

Obr. 1.2: Oddeľovanie množín

Napríklad množiny $C = \{(x,y) \,|\, x < 0, xy < 1\}$ a $K = \{(x,y) \,|\, x > 0, xy > 1\}$ na obrázku 1.2(a) sú priamkami $x = 0$ a $y = 0$ oddelené, dokonca skutočne oddelené, ale nie sú nimi oddelené ostro. To sú až priamkou $y + x + 0.25 = 0$ na obrázku 1.2(b).
Dokážme si najprv základnú vetu o oddeľovaní a vetu o ostrom oddeľovaní, ktoré vyzerajú na prvý pohľad zložito, ale v skutočnosti hovoria presne to, čo definícia – množiny sa dajú oddeliť, ak sa medzi ne dá vložiť nadrovina.

Veta 1.4. Nech M_1 a M_2 sú neprázdne podmnožiny $\mathbf{R}^n$. Nadrovina *skutočne oddeľujúca* M_1 a M_2 existuje práve vtedy, keď existuje vektor b taký, že

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} & \inf & \{\langle x,b\rangle \,|\, x \in M_1\} & \geq & \sup \ \{\langle x,b\rangle \,|\, x \in M_2\}, \\ \text{(b)} & \sup & \{\langle x,b\rangle \,|\, x \in M_1\} & > & \inf \ \{\langle x,b\rangle \,|\, x \in M_2\}. \end{array}$$

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že platí (a),(b).
Existuje teda také β, že

$$\inf\{\ \langle x,b\rangle \,\big|\, x\in M_1\} \geq \beta \geq \sup\{\langle x,b\rangle \,\big|\, x\in M_2\}.$$

Uvažujme nadrovinu

$$H=\{x\in \mathbf{R}^n \,\big|\, \langle x,b\rangle=\beta\}.$$

Tá vytvára v $\mathbf{R}^n$ dva polpriestory

$$H_1=\{x\in \mathbf{R}^n \,\big|\, \langle x,b\rangle \geq \beta\} \qquad \text{a} \qquad H_2=\{x\in \mathbf{R}^n \,\big|\, \langle x,b\rangle \leq \beta\}.$$

Vezmime ľubovoľné $x_1\in M_1$. Platí $\langle x,b\rangle \geq \inf\{\langle x,b\rangle \,\big|\, x\in M_1\}\geq \beta$, a teda $x_1\in H_1$. Potom ale $M_1\subseteq H_1$. Podobne dokážeme, že $M_2\subseteq H_2$. Podmienka (b) nám zabezpečí, že aspoň jedna z množín M_1, M_2 neleží celá v H, pretože existuje bod patriaci jednej z množín, ktorý neleží v nadrovine H. Pri platnosti podmienok (a), (b) teda H *skutočne oddeľuje* množiny.
Opačne, predpokladajme, že existuje nadrovina $H=\{x\in \mathbf{R}^n \,\big|\, \langle x,b\rangle=\beta\}$*skutočne oddeľujúca* M_1 a M_2. Potom (bez ujmy na všeobecnosti) platí $\langle x_1,b\rangle \geq \beta$ pre všetky $x_1\in M_1$, a preto

$$\inf\{\langle x,b\rangle \,\big|\, x\in M_1\}\geq \beta.$$

Rovnako dokážeme, že $\sup\{\langle x,b\rangle \,\big|\, x\in M_2\} \leq \beta$. To implikuje (a). Pretože H *skutočne oddeľuje* M_1 a M_2, existuje bod $\widehat{x}$ patriaci M_1 alebo M_2, ktorý nepatrí H, bez ujmy na všeobecnosti nech je to $\widehat{x}\in M_1$. Pre tento bod platí $\langle \widehat{x},b\rangle > \beta$, čo implikuje platnosť (b). □

Veta 1.5. Nadrovina H ostro oddeľujúca množiny M_1 a M_2 existuje práve vtedy, keď existuje vektor b taký, že

$$\text{(c)} \qquad \inf\{\ \langle x,b\rangle \,\big|\, x\in M_1\} > \sup\{\ \langle x,b\rangle \,\big|\, x\in M_2\}.$$

Dôkaz. Nech platí (c). Potom existuje také $\delta>0$ a $\beta\in \mathbf{R}^n$, že platí

$$\begin{aligned} \langle x,b\rangle &\geq \beta+\delta \qquad && \forall x\in M_1\\ \langle x,b\rangle &\leq \beta-\delta \qquad && \forall x\in M_2 \end{aligned}$$

Funkcia $f(y)=\langle y,b\rangle$ je lineárna, a preto pre dostatočne malé $\varepsilon>0$ a pre všetky $y\in \mathbf{R}^n$ také, že $y\in \varepsilon B$ platí $|\langle y,b\rangle|<\delta$, čiže $-\delta<\langle y,b\rangle<\delta$. Potom pre $x_1\in M_1$, $y\in\varepsilon B$ a $z_1=x_1+y\in M_1+\varepsilon B$ platí

$$\langle z_1,b\rangle=\langle x_1+y,b\rangle=\langle x_1,b\rangle+\langle y,b\rangle>\beta+\delta-\delta=\beta,$$

a pre $x_2 \in M_2$, $y \in \varepsilon B$ a $z_2 = x_2 + y \in M_2 + \varepsilon B$ platí

$$\langle z_2, b\rangle = \langle x_2 + y, b\rangle = \langle x_2, b\rangle + \langle y, b\rangle < \beta - \delta + \delta = \beta.$$

To ale znamená, že H *ostro oddeľuje* množiny M_1 a M_2. Opačne, ak $H = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, \langle x, b\rangle = \beta\}$ *ostro oddeľuje* M_1 a M_2, potom existuje $\varepsilon > 0$ také, že $M_1 + \varepsilon B$ a $M_2 + \varepsilon B$ sú v opačných polpriestoroch tvorených nadrovinou H, čo znamená (bez ujmy na všeobecnosti)

$$\begin{array}{rclcrcll} \langle x_1 + y, b\rangle & < & \beta & \text{a} & \langle x_2 + y, b\rangle & > & \beta & \text{pre } x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2 \text{ a } y \in \varepsilon B, \\ \langle x_1, b\rangle + \langle y, b\rangle & < & \beta & \text{a} & \langle x_2, b\rangle + \langle y, b\rangle & > & \beta & \text{pre } x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2 \text{ a } y \in \varepsilon B, \end{array}$$

z čoho dostaneme

$$\begin{array}{ll} \beta \leq & \inf\{\langle x_1, b\rangle + \langle y, b\rangle \,|\, x_1 \in M_1, y \in \varepsilon B\} < \inf\{\langle x, b\rangle \,|\, x \in M_1\}, \\ \beta \geq & \sup\{\langle x_2, b\rangle + \langle y, b\rangle \,|\, x_2 \in M_2, y \in \varepsilon B\} > \sup\{\langle x, b\rangle \,|\, x \in M_2\}. \end{array}$$

Z toho priamo vyplýva (c). □

Tieto dve vety samy o sebe by nám pri práci nejako obzvlášť nepomohli, ale našťastie pre konvexné množiny existujú navyše ďalšie zaujímavé tvrdenia, ktoré nám o možnosti oddeliť tieto množiny povedia podstatne viac.

1.2.2 Oddeľovanie konvexných množín

Keďže táto práca sa zaoberá konvexnými množinami, pozrime sa na ne podrobnejšie. Práve konvexné množíny sú tie, pre ktoré existuje o oddeľovaní niekoľko zaujímavých tvrdení. Povedzme si teda niektoré. Jedna z najvšeobecnejších je nasledujúca veta.

Veta 1.6. Nech C_1 a C_2 sú neprázdne konvexné podmnožiny $\mathbf{R}^n$. Nadrovina H *skutočne oddeľujúca* C_1 a C_2 existuje práve vtedy, keď $\operatorname{ri}(C_1) \cap \operatorname{ri}(C_2) = \emptyset$, alebo ináč $0 \notin \operatorname{ri}\ (C_1 - C_2)$.

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že sa množiny dajú skutočne oddeliť, teda existujú $b \neq 0$ a β také, že platí

$$\langle x_1, b\rangle \leq \beta \leq \langle x_2, b\rangle \qquad \text{pre } x_1 \in C_1, x_2 \in C_2,$$

čo ináč znamená

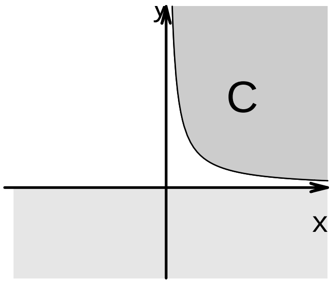
$$\langle x, b\rangle \leq 0 \qquad \text{pre } x \in C = \{x_1 - x_2 \,|\, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}.$$

Zároveň však existujú $\widetilde{x}_1 \in C_1$ a $\widetilde{x}_2 \in C_2$ také, že platí

$$\langle \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2, b\rangle < 0. \tag{1.1}$$

Keby platilo $0 \in \mathrm{ri}(C)$, muselo by existovať $\varepsilon > 0$ také, že $(\varepsilon B \cap \mathrm{aff}(C)) \subseteq C$. Zoberme ľubovoľné $x \in (\varepsilon B \cap \mathrm{aff}(C))$, preň musí platiť $\langle x, b\rangle \leq 0$. Lenže aj $-x \in (\varepsilon B \cap \mathrm{aff}(C))$ a teda platí aj $\langle x, b\rangle \geq 0$. Z toho vyplýva, že pre všetky $x \in (\varepsilon B \cap \mathrm{aff}(C))$ platí $\langle x, b\rangle = 0$. Potom ale z vlastností afinnej množiny vyplýva, že $\langle x, b\rangle = 0$ platí pre všetky x patriace do $\mathrm{aff}((\varepsilon B \cap \mathrm{aff}(C))$, ktorým je $\mathrm{aff}(C)$. Do toho však patrí aj $\widetilde{x} = \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2$, pre ktoré má tiež platiť $\langle \widetilde{x}, b\rangle = 0$. To je však spor s (1.1). Preto platí $0 \notin \mathrm{ri}(C_1 - C_2)$.
Opačná implikácia sa dokáže podobne. □

Nemôžeme však už hovoriť o *ostrom oddeľovaní*, pretože aj keď $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, nemusia sa dať množiny oddeliť ostro. Ako príklad v $\mathbf{R}^2$ môže poslúžiť (konvexná) množina bodov $\{(x, y) \,|\, y \geq 1/x\}$ pre $x > 0$, ktorá sa od konvexnej polroviny $\{(x, y) \,|\, y \leq 0\}$ dá *skutočne oddeliť* priamkou $p : y = 0$, ale nedá sa oddeliť *ostro.*



Pre *ostré oddelenie* platí podobná veta.

Veta 1.7. Nech C_1 a C_2 sú neprázdne konvexné množiny v $\mathbf{R}^n$. Nadrovina H oddeľujúca tieto množiny *ostro* existuje práve vtedy, keď

$$\inf\{|x_1 - x_2| \;\big|\; x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\} > 0,$$

čo inými slovami znamená, že $0 \notin \mathrm{cl}(C_1 - C_2)$.

Dôkaz. Ak sa množiny C_1 a C_2 dajú oddeliť ostro, existuje také $\varepsilon > 0$, že $C_1 + \varepsilon B$ a $C_2 + \varepsilon B$ sú disjunktné. To však znamená, že $0 \notin (C_1 + \varepsilon B) - (C_2 + \varepsilon B) = (C_1 - C_2) - 2\varepsilon B$. To je ekvivalentné s tvrdením $2\varepsilon B \cap (C_1 - C_2) = \emptyset$. To však implikuje, že $0 \notin \mathrm{cl}(C_1 - C_2)$.
Opačne, ak $0 \notin \mathrm{cl}(C_1 - C_2)$, potom existuje $\varepsilon > 0$ také, že $2\varepsilon B \cap (C_1 - C_2) = \emptyset$. Potom však platí $0 \notin (C_1 + \varepsilon B) - (C_2 + \varepsilon B)$, čo však znamená, že $C_1 + \varepsilon B$ a $C_2 + \varepsilon B$ sú disjunktné. Tieto sa potom sa podľa Vety 1.6 dajú skutočne oddeliť. Potom ale množiny $C_1 + \frac{\varepsilon}{2}B$ a $C_2 + \frac{\varepsilon}{2}B$ sú v opačných otvorených polpriestoroch tvorených oddeľujúcou nadrovinou, a teda C_1 a C_2 sa dajú oddeliť ostro. □

Dôsledok 1.2. Ak C_1 a C_2 sú neprázdne konvexné podmnožiny $\mathbf{R}^n$, ktorých uzávery sú disjunktné a jedna z množín je ohraničená, potom existuje nadrovina H *ostro oddeľujúca* C_1 a C_2.

Dôsledok 1.3. Ak C je neprázdna uzavretá konvexná podmnožina $\mathbf{R}^n$ a bod K je taký, že $K \notin C$, potom bod K a množina C sa dajú ostro oddeliť.

Už sme dokázali, že výsledkom systému nerovníc $\langle x, b_i \rangle \leq \beta_i, i \in I$ je uzavretá konvexná množina, pretože je to prienik uzavretých polpriestorov. Teraz dokážeme, že každá uzavretá konvexná množina je prienikom uzavretých polpriestorov.

Veta 1.8. Uzavretá konvexná množina C je prienikom uzavretých polpriestorov, ktoré ju obsahujú.

Dôkaz. Množina C je podmnožinou každého uzavretých polpriestorov, ktorý obsahuje množinu C, teda aj ich prieniku. Dokážeme, že tento prienik neobsahuje žiaden bod, ktorý nepatrí C. Pre $C = \emptyset$, $C = \mathbf{R}^n$ platí veta triviálne. Pre iné $C \subset \mathbf{R}^n$ uvažujme ľubovoľný bod $v \in \mathbf{R}^n \setminus C$. Pretože množina C je uzavretá a $v \notin C$, platí $\emptyset \notin \mathrm{cl}(C - v) = (C - v)$. Platia teda predpoklady predchádzajúcej vety, čo znamená, že existuje nadrovina H *ostro oddeľujúca* C a v. Množina C je obsiahnutá v tom z uzavretých polpriestorov vytvorených nadrovinou H, ktorý neobsahuje v. Teda existuje uzavretý polpriestor obsahujúci C, ktorý neobsahuje v, teda v nie je ani prvkom prieniku všetkých uzavretých polpriestorov obsahujúcich C. □

1.3 Oporná nadrovina, oporná funkcia

V predchádzajúcej časti sme dokázali, že uzavretá konvexná množina je prienikom uzavretých polpriestorov, ktoré ju obsahujú. Vezmime si jeden z nich, nech napríklad

$$C \subseteq \{x \,|\, \langle x, b \rangle \leq \beta\}.$$

Potom pre všetky $\alpha \geq \beta$ tiež platí

$$C \subseteq \{x \,|\, \langle x, b \rangle \leq \alpha\}.$$

Všimnime si preto pre každé $b \in \mathbf{R}^n$ tie uzavreté polpriestory, ktoré obsahujú C a zároveň obsahujú na svojej hraničnej nadrovine bod z C.

Tieto polpriestory nazveme *oporné polpriestory* k množine C. Nadroviny, ktoré ich vytvárajú, nazveme *oporné nadroviny* k množine C.
Inými slovami, oporné nadroviny sú tie

$$H = \{x \,\big|\, \langle x, b\rangle = \beta, b \neq 0\},$$

pre ktoré platí

$$\langle x, b\rangle \leq \beta \text{pre všetky } x \in C$$

a existuje $\widehat{x} \in C$ také, že $\langle \widehat{x}, b\rangle = \beta$. Toto ale zároveň znamená, ža funkcia $\langle x, b\rangle$ je na množine C zhora ohraničená hodnotou β.
Pozrime sa teraz na celý problém opačne, hľadajme pre každé b hodnotu

$$\sup\{\langle x, b\rangle \,\big|\, x \in C\}.$$

Označme

$$\delta^*(b \,\big|\, C) = \sup\{\langle x, b\rangle \,\big|\, x \in C\}\,. \tag{1.2}$$

Funkciu $\delta^*(b \,\big|\, C)$ nazveme *oporná funkcia* množiny C. Jednou z vlastností opornej funkcie množiny C je, že opisuje všetky uzavreté polpriestory, ktoré obsahujú C, inými slovami pre nejaké $b \in \mathbf{R}^n$ platí

$$C \subseteq \{x \,\big|\, \langle x, b\rangle \leq \beta\}$$

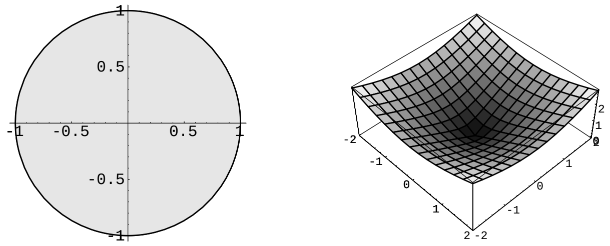
práve vtedy, keď pre to isté b platí

$$\beta \geq \delta^*(b \,\big|\, C).$$

Ako vlastne vyzerá taká oporná funkcia pre niektoré množiny? Pozrime sa najprv na jednotkovú guľu $B = \{x \in \mathbf{R}^n \,\big|\, |x| \leq 1\}$. Hľadáme $\delta^*(b \,\big|\, B) = \sup\{\langle x, b\rangle \,\big|\, x \in B\}$. Platí

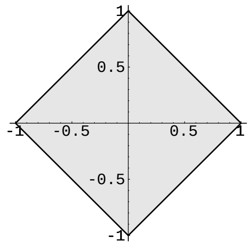
$$\delta^*(b \,\big|\, B) = \sup\{\langle x, b\rangle \,\big|\, x \in B\} = \sup\{\langle x, b\rangle \,\big|\, |x| \leq 1\} = |b|,$$

pretože $\langle x, b\rangle \leq |x||b|$ a platí $\langle x, b\rangle = |b|$ pre $b = 0$ alebo pre $x = \frac{b}{|b|}$. Ako to vyzerá v $\mathbf{R}^2$ ukazuje obrázok.

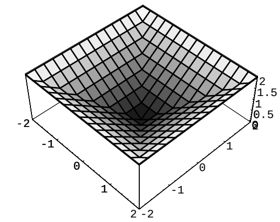


množina B oporná funkcia množiny B

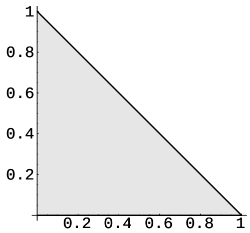
Podobne sa dá vypočítať oporná funkcia pre iné množiny, na obrázkoch sú grafy pre množiny v $\mathbf{R}^2$.



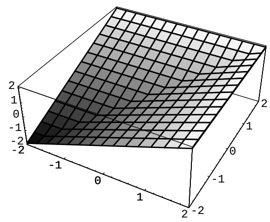
množina C_1



oporná funkcia množiny C_1



množina C_2



oporná funkcia množiny C_2

K vlastnostiam a významu opornej funkcie sa ešte dostaneme neskôr. Najprv si musíme zhrnúť veľa faktov o konvexných funkciách.

Kapitola 2

Konvexné funkcie

Konvexné funkcie majú oproti funkciám všeobecným niekoľko výhod. Tou základnou, o ktorú nám najmä pôjde, je, že keď nájdeme lokálne minimum konvexnej funkcie na konvexnej množine, máme istotu, že ide o minimum globálne. Pokiaľ ide o maximá, takúto istotu nemáme, ale aj v prípade maxím odvodíme aspoň nejaký výsledok. Ďalej nás bude zaujímať vzťah medzi konvexnými funkciami a konvexnými množinami. Zadefinujeme si konjugovanú funkciu a dokážeme niektoré jej vlastnosti.

2.1 Konvexné funkcie

Pod funkciami budeme v tejto kapitole myslieť aj funkcie, ktoré nadobúdajú v niektorých bodoch hodnoty $\pm\infty$. Aby s tým nevznikli problémy, definujme si, ako budeme s týmito nekonečnými hodnotami narábať.

$$\begin{array}{rrlr} & a+\infty=+\infty+a=+\infty & \text{pre} & -\infty<a\leq\infty, \\ & a-\infty=-\infty+a=-\infty & \text{pre} & -\infty\leq a<\infty, \\ a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty & a\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot a=-\infty & \text{pre} & 0<a\leq\infty, \\ a\cdot\infty=\infty\cdot a=-\infty & a\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot a=\infty & \text{pre} & -\infty\leq a<\ 0, \end{array}$$

$$0\cdot\infty=\infty\cdot 0=0\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot 0=0,\quad -(-\infty)=\infty,\qquad \inf\emptyset=\infty,\quad \sup\emptyset=-\infty.$$

Kombináciu $\infty-\infty$ definovať z pochopiteľných dôvodov nebudeme a takýto súčet zakážeme.

Definícia 2.1. Nech f je funkcia, ktorá je definovaná na $S\subseteq\mathbf{R}^n$ a nadobúda reálne hodnoty alebo $\pm\infty$. Podmnožinu $\mathbf{R}^{n+1}$ definovanú ako

$$\operatorname{epi} f=\{(x,\mu)\,|\,x\in S,\mu\in\mathbf{R},\mu\geq f(x)\}$$

nazveme *epigraf* funkcie f.

Pomocou epigrafu teraz definujme, čo budeme myslieť pod konvexnou funkciou.

Definícia 2.2. Funkciu f nazveme konvexnou, ak $\operatorname{epi} f$ je konvexná množina.

Pretože funkcia f môže nadobúdať aj nekonečné hodnoty, nazvime si podmnožinu definičného oboru, na ktorej $f(x) < \infty$ ako *efektívny definičný obor* a označme ho $\operatorname{dom} f$. Platí teda

$$\operatorname{dom} f = \{x \mid \exists \mu \in \mathbf{R} : (x, \mu) \in \operatorname{epi} f\} = \{x \mid f(x) < \infty\}.$$

Ďalej funkciu nazveme *vlastná* ak $f(x) > -\infty$ pre všetky x a zároveň existuje aspoň jedno x také, že $f(x) < \infty$. Ak funkcia nie je vlastná, nazveme ju *nevlastnou.* Vlastná funkcia je teda tá, ktorej epigraf je neprázdny a neobsahuje „zvislú priamku“ .
Príkladom nevlastnej konvexnej funkcie je napríklad

$$f(x) = \begin{cases} -\ \infty & \text{pre} \quad |x| < 7 \\ \quad 0 & \text{pre} \quad |x| = 7 \\ +\ \infty & \text{pre} \quad |x| > 7. \end{cases}$$

Z konvexnosti epigrafu funkcie vyplýva niekoľko užitočných vlastností, ktoré bývajú používané ako definícia konvexnosti. Pretože sú veľmi dobre známe, nebudeme ich dokazovať. Ten, kto by chcel dôkazy vidieť, ich nájde v §4 v knihe [7].

Veta 2.1. Nech $f : S \to (-\infty, \infty]$ kde S je konvexná množina. Potom f je konvexná práve vtedy, keď

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

pre všetky $0 < \lambda < 1$ a všetky $x, y \in S$.

Veta 2.2. Nech $f : \mathbf{R}^n \to (-\infty, \infty]$. Potom f je konvexná práve vtedy, keď

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta$$

pre všetky $0 < \lambda < 1$ a všetky $\alpha > f(x)$, $\beta > f(y)$.

Dôsledkom tejto vety pre $\beta = \alpha$ je nasledujúce tvrdenie:

Veta 2.3. Pre každú konvexnú funkciu f a pre každé $\alpha \in [-\infty, \infty]$ sú množiny

$$\{\, x \mid f(x) < \alpha\} \quad \text{a} \quad \{\, x \mid f(x) \le \alpha\}$$

konvexné.

Ak teraz položíme α rovné $\inf\{f(x)\}$, vieme, že množina, na ktorej funkcia $f(x)$ nadobúda svoje infimum, je konvexná. Nazvime túto množinu *minimová množina* funkcie f.
O niektorých funkciách vieme jednoducho dokázať, že sú konvexné. Pozrime sa teraz, ako sa konvexnosť prenáša na funkcie vytvorené z konvexných funkcií. Pretože väčšina týchto tvrdení je tiež známa, opäť ich nebudeme dokazovať – dôkazy sa dajú nájsť v §5 v knihe [7].

Veta 2.4. Nech $f : \mathbf{R}^n \to (-\infty, \infty]$ je konvexná funkcia a nech $\varphi : \mathbf{R} \to (-\infty, \infty]$ je neklesajúca konvexná funkcia. Potom funkcia $h(x) = \varphi(f(x))$ je konvexná.

Veta 2.5. Ak f_1 a f_2 sú konvexné funkcie, potom aj $f_1 + f_2$ je konvexná funkcia.

Veta 2.6. Nech funkcie $f_i(x), i \in I$ sú konvexné. Potom je konvexná aj funkcia

$$h(x) = \sup\{f_i(x) \,\big|\, i \in I\}.$$

Veta 2.7. Nech $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je lineárna transformácia. Potom pre konvexnú funkciu $g(x)$ je aj funkcia $h(x) = g(Ax)$ konvexná.

2.2 Konkávne funkcie

Keď hovoríme o konvexných funkciách, nemali by sme zabúdať ani na funkcie konkávne. Konkávna funkcia je taká funkcia f, pre ktorú je funkcia $-f$ konvexná. Keďže mnohé vety o konvexných funkciách sa prenášajú na konkávne funkcie iba zmenou znamienka nerovnosti na opačné, nebudeme ich všetky opäť vypisovať a dokazovať.

2.3 Uzavreté funkcie

Vlastnosť uzavretosti je známa predovšetkým u množín. My sme však konvexnú funkciu definovali ako funkciu, ktorá má konvexný epigraf. Ten nemusí byť pre niektoré funkcie uzavretý, napríklad pre funkciu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad |x| < 1 \\ \infty & \text{pre} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Aby sme mohli s epigrafom pohodlnejšie pracovať, mal by byť uzavretý. Preto si definujeme takzvanú uzavretú funkciu, ktorej epigraf bude uzavretý. Epigraf bude zrejme uzavretý, ak bude funkcia spojitá. To je však príliš silná podmienka, na uzavretosť epigrafu stačí aj menej.

Definícia 2.3. Nazvime funkciu $f : S \to (-\infty, \infty]$ *polospojitou zdola* v bode $x \in S$, ak platí

$$f(x) \leq \varliminf_{i \to \infty} f(x_i)$$

pre každú postupnosť $x_1, x_2, \ldots$ v S takú, že $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ a limita $f(x_1), f(x_2), \ldots$ existuje v $[-\infty, \infty]$. Podobným spôsobom môžme definovať *polospojitosť zhora*.

Pokiaľ je funkcia v bode x polospojitá zhora aj zdola, je v ňom spojitá.
Táto vlastnosť je ekvivalentná s inými vlastnosťami, ako hovorí nasledujúca veta.

Veta 2.8. Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathbf{R}^n$ do $[-\infty, +\infty]$. Potom nasledujúce vlastnosti sú ekvivalentné:

(a) Funkcia f je zdola polospojitá na $\mathbf{R}^n$;

(b) Množina $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ je uzavretá pre $\alpha \in \mathbf{R}$;

(c) Epigraf funkcie$f$ je uzavretá množina v $\mathbf{R}^{n+1}$.

Dôkaz.

(a)$\Leftrightarrow$(c) Polospojitosť zdola znamená, že $\mu \geq f(x)$ pre každé $\mu = \lim \mu_i$ a $x = \lim x_i$ také, že pre všetky i platí $\mu_i \geq f(x_i)$. To je ale zároveň ekvivalentné s tvrdením, že epigraf funkcie f je uzavretý.

(a)$\Rightarrow$(b) Položme v predchádzajúcom dôkaze $\alpha = \mu = \mu_1 = \mu_2 = \ldots$.

(b)$\Rightarrow$(a) Nech platí (b). Nech x_i konverguje k x a $f(x_i)$ konverguje k μ. Vezmime reálne $\alpha > \mu$. Od nejakého indexu i musí platiťpre všetky j $f(x_j) < \alpha$. Preto $x \in \mathrm{cl}\{y \mid f(y) \leq \alpha\} = \{y \mid f(y) \leq \alpha\}$. To znamená, že $f(x) \leq \mu$.

□

Polospojitosť zdola je teda ekvivalentná s uzavretosťou epigrafu. Pre neuzavretý epigraf však vieme nájsť jeho uzáver. Podobne je to aj s funkciami. Pre každú funkciu vyberme spomedzi zdola polospojitých funkcií, ktoré sú zhora ohraničené funkciou f tú najväčšiu a nazvime ju *zdola polospojitý obal* funkcie f. Pokiaľ funkcia f nikde nenadobúda hodnotu $-\infty$, tak tento zdola polospojitý obal nazveme *uzáver* funkcie f a označíme ho $\mathrm{cl}\, f$. Pokiaľ funkcia f v niektorom bode nadobúda hodnotu $-\infty$, jej uzáverom bude funkcia $\mathrm{cl}\, f \equiv -\infty$.

Definícia 2.4. Konvexnú funkciu f nazveme *uzavretou* ak $\mathrm{cl}\, f = f$.

Je zrejmé, že pre vlastnú konvexnú funkciu f platí

$$\mathrm{epi}(\mathrm{cl}\, f) = \mathrm{cl}(\mathrm{epi}\, f)\,.$$

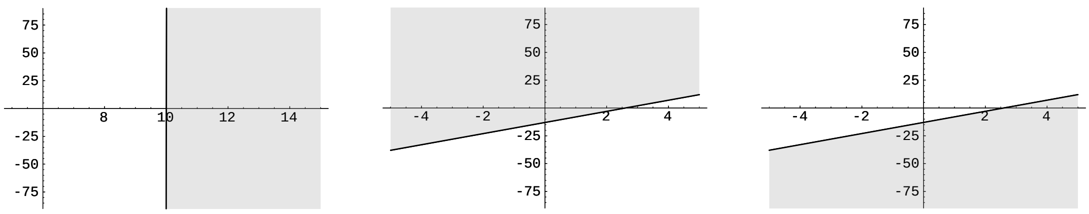
Potom pre takúto funkciu môžme uzáver vyjadriť ako

$$(\mathrm{cl}\, f)(x) = \liminf_{y\to x} f(y)\,.$$

2.4 Konjugovaná funkcia

O uzavretých konvexných množinách vieme, že sú prienikom uzavretých polpriestorov, ktoré ich obsahujú. Podobnú vlastnosť majú aj konvexné funkcie.
Konvexná funkcia je definovaná ako funkcia, ktorej epigraf je konvexnou množinou. Pre uzavreté konvexné funkcie je navyše epigraf uzavretá množina. Je preto prienikom uzavretých polpriestorov, ktoré ho obsahujú. Avšak aj niektoré uzavreté polpriestory sú epigrafmi funkcií. Vo všeobecnosti rozlišujeme 3 druhy uzavretých polpriestorov:

1. zvislé $\{(x,\mu) \,|\, \langle x,b\rangle - \beta \le 0\}$ pre $b \ne 0$,
2. horné $\{(x,\mu) \,|\, \langle x,b\rangle - \beta \le \mu\} = \text{epi } h$ pre $h(x) = \langle x,b\rangle - \beta$,
3. dolné $\{(x,\mu) \,|\, \langle x,b\rangle - \beta \ge \mu\}$.



Obr. 2.1: Zvislý, horný a dolný uzavretý polpriestor v $\mathbf{R}^2$.

Veta 2.9. Uzavretá konvexná funkcia je bodovým suprémom afinných funkcií h takých, že $h \le f$.

Dôkaz. Pre nevlastné funkcie f platí veta triviálne, nech je teda f vlastná. Jej epigraf je potom uzavretý a konvexný a ako taký je prienikom uzavretých polpriestorov, ktoré ho obsahujú. Skúmajme všetky takéto polpriestory. Zrejme dolné polpriestory nemôžu obsahovať žiaden epigraf vlastnej funkcie. Taktiež nemôžu byť všetky polpriestory obsahujúce epi f zvislé, pretože potom by funkcia nebola vlastná. Teda epigraf funkcie f je prienikom polpriestorov, z ktorých sú niektoré horné a niektoré zvislé.
Horné polpriestory sú epigrafy afinných funkcií h takých, že $h \le f$. Ich prienik je epigraf funkcie, ktorá je bodovým suprémom týchto funkcií h. Treba teda ešte dokázať, že prienik horných a zvislých polpriestorov obsahujúcich epi f je rovnaký ako prienik iba horných z týchto polpriestorov. Keby tomu tak nebolo, existoval by bod (x_0, μ_0), ktorý nepatrí nejakému zo zvislých polpriestorov a patrí všetkým horným polpriestorom obsahujúcim epi f. Nech

$$Z = \{(x,\mu) \,|\, 0 \ge \langle x,b_1\rangle - \beta_1 = h_1(x)\}$$

je ten zvislý polpriestor, teda bod (x_0, μ_0) nepatrí do Z. Potom platí $h_1(x_0) > 0$.
Nech $h_2(x) = \langle x, b_2 \rangle - \beta_2$ je ľubovoľná z afinných funkcií, pre ktorú $\operatorname{epi} f \subset \operatorname{epi} h_2$, čiže $h_2(x) \leq f(x)$. Položme

$$h(x) = \lambda h_1(x) + h_2(x) = \langle x, \lambda b_1 + b_2 \rangle - (\lambda \beta_1 + \beta_2).$$

Pre $x \in \operatorname{dom} f$ platí $h_1(x) \leq 0$ a $h_2(x) \leq f(x)$, teda aj

$$\lambda h_1(x) + h_2(x) \leq f(x) \qquad \forall \lambda \geq 0.$$

Pre $x \notin \operatorname{dom} f$ platí nerovnosť triviálne. Preto $h(x) \leq f(x)$ pre všetky x. V bode x_0 platí $h(x_0) = \lambda h_1(x_0) + h_2(x_0)$. Pretože $h_1(x_0) > 0$, pre dostatočne veľké λ platí $h(x_0) \geq \mu_0$ a teda $(x_0, \mu_0) \notin \operatorname{epi} h$. Našli sme teda horný polpriestor, do ktorého nepatrí bod (x_0, μ_0), čo je spor s predpokladom.
Pre každý bod nepatriaci zvislému polpriestoru obsahujúcemu $\operatorname{epi} f$ vieme teda nájsť horný polpriestor obsahujúci $\operatorname{epi} f$ a neobsahujúci daný bod. Preto prienik všetkých polpriestorov obsahujúcich $\operatorname{epi} f$ je rovný prieniku iba horných z týchto polpriestorov. □
Konvexnú funkciu $f(x)$ teraz vieme vyjadriť nielen ako množinu dvojíc $(x, f(x))$, ale aj ako takú množinu $F^* = \{(x^*, \mu^*) \in \mathbf{R}^{n+1}\}$, že funkcia $h(x) = \langle x, x^* \rangle - \mu^*$ je zhora ohraničená funkciou f. Podmienka $h(x) \leq f(x)$ platí pre všetky x práve vtedy, keď

$$\mu^* \geq \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) \,\big|\, x \in \mathbf{R}^n\}.$$

Množina F^* je teda epigraf funkcie f^* definovanej ako

$$f^*(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} = -\inf_x \{f(x) - \langle x, x^* \rangle\}$$

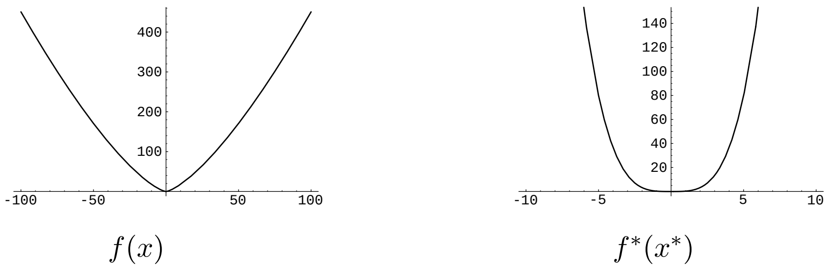
Funkciu f^* nazveme *konjugovaná funkcia* k funkcii f.

Príklad

Pre názornosť si vypočítajme konjugovanú funkciu pre niektoré jednoduché konvexné funkcie. Napríklad pre $f(x) = e^x$ počítame $f^*(x^*) = \sup_x \{x \cdot x^* - e^x\}$. Vidíme, že pre $x^* < 0$ môžeme voľbou čo najzápornejšieho x docieliť ľubovoľne nízku hodnotu $x \cdot x^* - e^x$. Pre $x^* = 0$ je $f^*(0)$ rovné $\sup_x \{-e^x\} = 0$. Pre kladné x^* použijeme diferenciálny počet a dostaneme $\widehat{x} = \ln(x^*)$, a teda $f^*(x^*) = \ln(x^*) \cdot x^* - x^*$. Konjugovaná funkcia k $f(x) = e^x$ je teda

$$f^*(x^*) = \begin{cases} -\infty & \text{pre} \quad x^* < 0 \\ 0 & \text{pre} \quad x^* = 0 \\ \ln(x^*) \cdot x^* - x^* & \text{pre} \quad x^* > 0 \end{cases}$$

Nie pre všetky funkcie má konjugovaná funkcia nekonečné hodnoty. Napríklad pre funkciu $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ dostaneme $f^*(x^*) = \frac{1}{q}|x^*|^q$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Graf tejto funkcie f ako aj f^* je na obrázku.Pre túto funkciu si rýchlo všimneme, že platí $(f^*)^* = f$. Ako je to pri ostatných funkciách?



Obr. 2.2: Funkcia $\frac{|x|^p}{p}$ a konjugovaná funkcia k nej pre p=1.4

Všimnime si bližšie, že konjugovaná funkcia je vlastne bodové suprémum tých afinných funkcií $g(x) = \langle x, x^* \rangle - \mu$, pre ktoré $(x, \mu) \in \operatorname{epi} f$. Ale aj f je bodové suprémum afinných funkcií $h(x) = \langle x, x^* \rangle - \mu^*$ takých, že $(x^*, \mu^*) \in \operatorname{epi} f^*$. Preto platí

$$f(x) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\},$$

a teda konjugovaná funkcia f^{**} k f^* je f. Vlastnosti konjugovanej funkcie zhŕňa nasledujúca veta.

Veta 2.10. Nech f je konvexná funkcia. K nej konjugovaná funkcia f^* je uzavretá konvexná funkcia, ktorá je vlastná práve vtedy, keď f je vlastná. Zároveň platí

$$(\operatorname{cl} f)^* = f^* \qquad \text{a} \qquad f^{**} = f.$$

Počas rozprávania o konvexných množinách sme zaviedli pre každú konvexnú množinu takzvanú *opornú funkciu*, definovanú ako

$$\delta^*(b \,|\, C) = \sup\{\langle x, b \rangle \,|\, x \in C\}.$$

Pri hľadaní opornej funkcie teda hľadáme suprémum na množine C. To je však to isté, ako keby sme na celom $\mathbf{R}^n$ hľadali suprémum funkcie, ktorá je definovaná ako

$$f(x) = \begin{cases} \langle x, b \rangle & x \in C \\ -\infty & x \notin C\,, \end{cases}$$

alebo ináč $f(x) = \langle x, b \rangle - \delta(x \,|\, C)$, kde

$$\delta(x \,|\, C) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ \infty & x \notin C. \end{cases}$$

Funkciu δ nazývame *indikátorová funkcia* množiny C, pretože nám „indikuje“ , či daný bod patrí alebo nepatrí množine C. Platí teda

$$\delta^*(b \,|\, C) = \sup\{\langle x, b\rangle - \delta(x \,|\, C)\}.$$

Pri takomto zápise je zrejmé, že oporná funkcia a indikátorová funkcia uzavretej konvexnej množiny C sú navzájom konjugované. Túto aj ďalšie vlastnosti opornej funkcie zhŕňa nasledujúca veta.

Veta 2.11. Oporná a indikátorová funkcia uzavretej konvexnej množiny sú navzájom konjugované. Funkcia je opornou funkciou neprázdnej konvexnej množiny práve vtedy, keď je vlastná, konvexná a kladne homogénna (pre kladne homogénnu funkciu $f(x)$ platí $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pre $\lambda > 0$).

Dôkaz. Už sme dokázali vzájomnú konjugovanosť opornej a indikátorovej funkcie.
Majme nejakú neprázdnu konvexnú množinu. Jej indikátorová funkcia je vlastná konvexná funkcia. Potom podľa Vety 2.10 je konjugovaná funkcia k nej (a teda oporná funkcia tejto množiny) uzavretá vlastná konvexná funkcia. Dokážeme, že je kladne homogénna. Platí

$$\delta^*(\lambda b \,|\, C) = \sup\{\langle \lambda b, x\rangle \,|\, x \in C\} = \sup\{\lambda\langle b, x\rangle \,|\, x \in C\} = \lambda\delta^*(b \,|\, C).$$

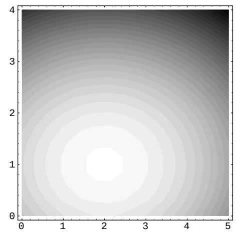
Opačne, majme uzavretú, konvexnú a kladne homogénnu funkciu $f(x)$. K nej konjugovaná funkcia je konvexná, vlastná a uzavretá. Dokážeme, že je opornou funkciou nejakej množiny. Rátajme konjugovanú funkciu k nej. Platí

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^*\rangle - f(x)\} = \sup\{\lambda\langle\lambda^{-1}x, x^*\rangle - \lambda f(\lambda^{-1}x\} = \lambda \sup\{\langle y, x^*\rangle - f(y)\} = \lambda f^*(x^*).$$

Lenže vlastnosť $f(x) = \lambda f(x)$ pre všetky $\lambda > 0$ má iba funkcia, ktorá nadobúda iba hodnoty 0 a ∞. Takáto funkcia je indikátorovou funkciou neprázdnej uzavretej konvexnej množiny, a teda k nej konjugovaná funkcia je opornou funkciou tejto množiny. □

2.5 Maximum konvexnej funkcie

Hľadanie maxima konvexnej funkcie na konvexnej množine je veľmi odlišné od hľadania minima. Hlavný rozdiel je, že kým lokálne minimum konvexnej funkcie je zároveň globálnym, takáto vlastnosť neplatí pre lokálne maximá. Konvexná funkcia môže mať niekoľko lokálnych maxím, ktoré nemusia byť zároveň globálnymi. Ako príklad je tu funkcia f definovaná na obdĺžniku, ktorá nadobúda lokálne maximá v každom vrchole, ale iba v jednom ide aj o globálne maximum. Zároveň neexistuje žiaden efektívny spôsob ako o danom bode zistiť, či je



Obr. 2.3: Úrovňové hladiny konvexnej funkcie

aj globálnym maximom, jedine nájsť všetky a porovnať hodnoty funkcie f. Napriek týmto problémom vieme aspoň niektoré vlastnosti maxima konvexnej funkcie.

Veta 2.12. Nech f je konvexná funkcia a C konvexná množina taká, že $C \subseteq \operatorname{dom} f$. Ak $\max\{f(x) \mid x \in C\}$ sa nadobúda v nejakom bode $x_0 \in \operatorname{ri} C$, potom f je na C konštantná.

Dôkaz. Vetu dokážeme sporom. Nech sa maximum f na C nadobúda v bode $x_0 \in \operatorname{ri} C$. Nech x je ľubovoľný iný bod z množiny C. Pretože $x_0 \in \operatorname{ri} C$, existuje také malé $\varepsilon > 0$, že aj bod $z = x_0 + \varepsilon(x_0 - x)$ patrí do C. Vyjadrime si $x_0 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}x + \frac{1}{1+\varepsilon}z$. Pretože f je konvexná, platí

$$f(x_0) = f\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}x + \frac{1}{1+\varepsilon}z\right) \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}f(x) + \frac{1}{1+\varepsilon}f(z). \tag{2.1}$$

Pretože v x_0 nadobúda f maximum na C, platí $f(z) \leq f(x_0)$ a $f(x) \leq f(x_0)$. Keby ale platilo $f(x) < f(x_0)$, po dosadení do (2.1) by sme dostali $f(x_0) < f(x_0)$, čo nie je možné. Preto musí platiť $f(x) = f(x_0)$. □

Dôsledok 2.1. Nech C je konvexná, uzavretá množina, f je konvexná funkcia ohraničená na C. Potom f nadobúda maximum na C v jej hraničnom bode.

Kapitola 3

Úloha konvexného programovania

Mnoho z reálnych ekonomických problémov sa dá previesť na úlohu minimalizovať konvexnú funkciu na konvexnej množine. Pokiaľ je táto množina riešením sústavy rovníc a nerovníc, sú natoľko špecifické, že sa pre ne vytvorila osobitná teória. V tejto kapitole zhrnieme niektoré základné výsledky použiteľné pre úlohy konvexného programovania.

Pod úlohou konvexného programovania (ÚKP) budeme myslieť úlohu nájsť minimum účelovej funkcie $f_0(x)$ na konvexnej množine C za ohraničení

$$\begin{array}{rclcrcl} f_1(x) & \leq & 0, & \ldots, & f_r(x) & \leq & 0 \\ f_{r+1}(x) & = & 0, & \ldots, & f_m(x) & = & 0, \end{array}$$

kde C je podmnožina $\mathbf{R}^n$, f_i sú konvexné funkcie na C pre $i = 0, 1, \ldots, r$ a afinné funkcie pre $i = r + 1, \ldots, m$.

Označme si

$$\begin{array}{lll} C_i & = \{x \mid f_i(x) \leq 0\} & i = \ 1, 2, \ldots, r, \\ C_i & = \{x \mid f_i(x) = 0\} & i = \ r + 1, \ldots, m \\ C_0 & = C \cap C_1 \cap \ldots \cap C_m. & \end{array}$$

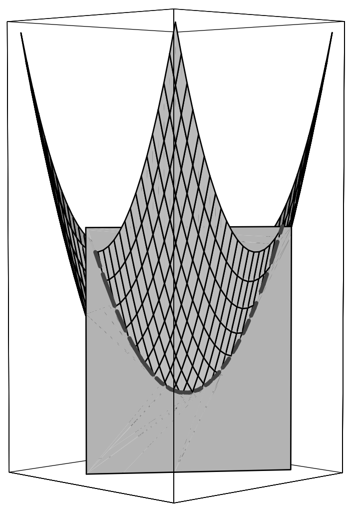
Zrejme C_0 je konvexná podmnožina $\mathbf{R}^n$. Aby sme nemali problémy s hodnotami funkcií f_i mimo C, definujeme si tzv. *rozšírenú účelovú funkciu* pre celý priestor

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{pre} \quad x \in C_0 \\ +\infty & \text{pre} \quad x \notin C_0 \end{cases}.$$

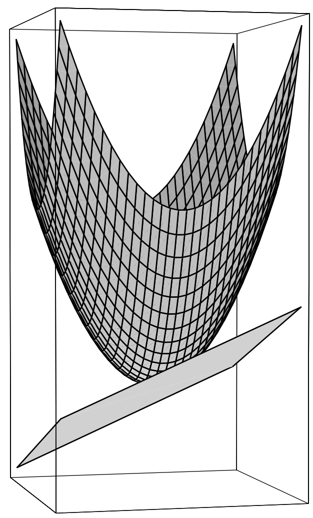
Riešenie úlohy konvexného programovania je teraz ekvivalentné s hľadaním minima funkcie f a minimová množina funkcie f bude množina optimálnych riešení (ÚKP).

3.1 Motivácia

Predstavme si pre jednoduchosť funkciu $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ a jednoduchú lineárnu väzbu. Funkcia



(a) väzba v tvare rovnosti



(b) rovina oddeľujúca** x_0 **od epigrafu

$f(x)$ je konvexná a preto je konvexný aj jej epigraf. Zároveň zrejme bod, v ktorom sa nadobúda minimum (označme ho x_0) je na hranici tohto epigrafu, ináč by existoval bod s menšou hodnotou účelovej funkcie. Avšak potom podľa Vety 1.6 sa dá tento bod *skutočne oddeliť* od epigrafu funkcie f, teda existuje afinná funkcia $h(x) = \langle x, b\rangle + \beta$ taká, že platí

$$\begin{aligned} h(x) &\leq f(x) \qquad \text{pre} \quad x \neq x_0 \\ h(x) &= f(x) \qquad \text{pre} \quad x = x_0. \end{aligned}$$

Vytvorme funkciu $K(x) = f(x) - h(x) = f(x) - \langle b, x\rangle - \beta$. Tá má podľa toho, čo sme dokázali, minimum v bode x_0. Čo sme teda urobili? Zostrojili sme funkciu, ktorá má voľný extrém v rovnakom bode ako mala naša pôvodná funkcia viazaný extrém. Graficky si to môžeme predstaviť tak, že sme graf funkcie „otočili“ tak, že „stojí “ na bode x_0. Z konštrukcie funkcie h je však zrejmé, že nie je daná jednoznačne, vektorov b s danými vlastnosťami môže pre niektoré funkcie existovať viac. Toto bol však iba jednoduchý príklad, v ktorom sme previedli hľadanie viazaného extrému na hľadanie neviazaného extrému. Ako môžeme funkciu upravovať v prípade zložitejších ohraničení či už v tvare rovností alebo nerovností, to sa dozvieme v nasledujúcej kapitole.

3.2 Kuhn-Tuckerove koeficienty

Majme úlohu konvexného programovania

$$\begin{aligned} \text{Minimalizovať } f_0(x) \quad &\text{na} \quad \text{množine } C \text{ za ohraničení} \\ f_1(x) &\leq 0, \dots f_r(x) \leq 0 \\ f_{r+1}(x) &= 0, \dots, f_m(x) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ nazveme *vektor Kuhn-Tuckerovych koeficientov* pre (ÚKP), ak

- $\lambda_i \geq 0$ pre $i = 1, 2, \dots, r$
- infimum konvexnej funkcie $f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$ na C je konečné a rovné optimálnej hodnote (ÚKP).

Tieto koeficienty súvisia s tým, čo sme si hovorili v predchádzajúcej časti – hľadáme takú funkciu, ktorá má voľný extrém v tom bode, kde mala pôvodná funkcia viazaný extrém. Viac o Kuhn-Tuckerovych koeficientoch hovorí nasledujúca veta:

Veta 3.1. Nech (ÚKP) je úloha konvexného programovania a $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ jej vektor Kuhn-Tuckerovych koeficientov. Ďalej nech $h = f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m$ a D je množina, na ktorej h nadobúda svoje infimum na $\mathbf{R}^n$. Označme I množinu tých indexov, pre ktoré $1 \leq i \leq r$ a zároveň $\lambda_i = 0$. Označme J doplnok I v množine $\{1, 2, \dots, m\}$. Nech D_0 je množina bodov $x \in D$ takých, že

$$\begin{aligned} f_i(x) &= 0 \qquad \forall i \in J, \\ f_i(x) &\leq 0 \qquad \forall i \in I. \end{aligned}$$

Potom D_0 je množinou optimálnych riešení (ÚKP).

Dôkaz. Označme f rozšírenú účelovú funkciu pre (ÚKP). Potom podľa predpokladu platí $\inf h = \inf f$ a $\inf f$ je konečné. Pre každé prípustné riešenie x platí

$$\lambda_i f_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

a teda platí

$$f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) \leq f_0(x).$$

Teda $h(x) \leq f(x)$ pre všetky x, pričom rovnosť nastáva v prípade ak

$$\lambda_i f_i(x) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m.$$

To však platí presne pre $x \in D_0$, pretože práve pre tieto x platí $f_i(x) = 0$ pre $i \in J$ a $\lambda_i = 0$ pre $i \in I$. Z toho vyplýva, že D_0 je minimová množina funkcie f a je podmnožinou minimovej množiny funkcie h. Minimová množina funkcie f je ale zároveň množinou optimálnych riešení úlohy (ÚKP). $\square$

Dôsledok 3.1. Nech (ÚKP) je úloha konvexného programovania a $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ je jej vektor Kuhn-Tuckerovych koeficientov. Predpokladajme, že všetky funkcie $f_0, f_1, \ldots, f_m$ sú uzavreté. Potom ak sa minimum funkcie

$$h = f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m$$

nadobúda v jedinom bode $\widehat{x}$, tento bod je zároveň jediným optimálnym riešením (ÚKP).

3.3 Perturbačná funkcia

Predstavme si funkciu $f_0(x)$ ako cenu za x, potom (ÚKP) je úloha minimalizovať cenu pri obmedzeniach (3). Predstavme si, že by sme si mohli zmeniť obmedzenia na

$$\begin{aligned} f_i(x) \le \tau_i \qquad i &= 1, 2, \ldots, r, \\ f_i(x) = \tau_i \qquad i &= r+1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{3.2}$$

pričom jednotková cena za zmenu i-teho obmedzenie by bola τ_i^*. Potom celková cena za zmenu vektora obmedzení by bola $\langle \tau, \tau^* \rangle$. Skúsme zistiť, či sa nám oplatí „kúpiť“ si nejaké „mäkšie“ obmedzenia – *perturbácie*. Zaveďme *perturbačnú funkciu* p tak, že označíme infimum $f_0(x)$ pri obmedzeniach (3.2) ako $p(\tau)$. Optimálne riešenie pôvodnej (ÚKP) je teda $p(0)$. Cena za x pri perturbácii τ bude

$$p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) + \tau_1 \tau_1^* + \tau_2 \tau_2^* + \cdots + \tau_m \tau_m^{ast} = p(\tau) + \langle \tau, \tau^* \rangle.$$

Perturbácia τ sa „oplatí kúpiť,“ ak $p(\tau) + \langle \tau, \tau^* \rangle < p(0)$.
Skúsme nájsť také ceny τ^*, aby sa neoplatilo kúpiť žiadnu perturbáciu. Hľadajme

$$\inf_\tau p(\tau) + \langle \tau, \tau^* \rangle.$$

Platí

$$p(\tau) = \inf_x \{ f_0(x) \mid f_i(x) \le \tau_i \,,\, f_j(x) = \tau_j \} \;\; pre \; i = 1, \ldots, r, \quad j = r+1, \ldots, m$$

a preto

$$\inf_\tau \{ p(\tau) + \langle \tau, \tau^* \rangle \} = \inf_{x,\tau} \{ f_0(x) + \langle \tau, \tau^* \rangle \mid f_i(x) \le \tau_i \,, f_i(x) = \tau_i \}.$$

To je pre $\tau^* \ge 0$ rovné

$$\inf_x \{ f_0(x) + \tau_1^* f_1(x) + \tau_2^* f_2(x) + \cdots + \tau_m^* f_m(x) \},$$

pre iné τ^* je výraz rovný $-\infty$. Preto pre konečné $p(0)$ a τ^* spĺňajúce

- $\tau^* \geq 0$
- $\inf_x\{f_0(x) + \tau_1^* f_1(x) + \tau_2^* f_2(x) + \cdots + \tau_m^* f_m(x)\} = p(0)$

platí nerovnosť

$$p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) + \tau_1\tau_1^* + \tau_2\tau_2^* + \cdots + \tau_m\tau_m^* \geq p(0)$$

vždy. Takéto τ^* ale spĺňa podmienky kladené na *Kuhn-Tuckerove koeficienty*. Platí teda:

Veta 3.2. Ak optimálna hodnota (ÚKP) je konečná, tak vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ je vektor Kuhn-Tuckerovych koeficientov práve vtedy, keď pri cenách $\tau_i^* = \lambda_i$ sa „neoplatí kúpiť“ žiadna perturbácia.

3.4 Existencia Kuhn-Tuckerovych koeficientov

Zaujímavou otázkou je, za akých podmienok je zaručená existencia vektora Kuhn-Tuckerovych koeficientov pre (ÚKP). Niektoré sú zhrnuté v nasledujúcich vetách. Ďalšou zaujímavou otázkou by bola jednoznačnosť týchto koeficientov, týmto problémom sa však nebudeme zaoberať.

Veta 3.3. Nech (ÚKP) je úloha konvexného programovania. Označme I množinu indexov $i \neq 0$ takých, že f_i nie je afinná. Predpokladajme, že optimálne riešenie (ÚKP) nie je $-\infty$ a že úloha má aspoň jedno prípustné riešenie $x \in \operatorname{ri} C$, pre ktoré $f_i(x) < 0$ pre $i \in I$. Potom existuje vektor Kuhn-Tuckerovych koeficientov pre (ÚKP).

Dôsledok 3.2. Nech (ÚKP) je úloha konvexného programovania, ktorá má iba nerovnostné ohraničenia, teda $r = m$. Predpokladajme, že optimálne riešenie úlohy nie je $-\infty$, a že existuje aspoň jedno $x \in C$ také, že

$$f_1(x) < 0, \quad f_2(x) < 0, \quad \ldots, \quad f_m(x) < 0.$$

Potom existuje vektor Kuhn-Tuckerovych koeficientov pre (ÚKP).

Dôsledok 3.3. Nech (ÚKP) je úloha konvexného programovania s iba lineárnymi ohraničeniami, teda

$$f_i(x) = \langle a_i, x\rangle - \alpha_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Ak optimálne riešenie (ÚKP) nie je $-\infty$ a úloha má prípustné riešenie $x \in \operatorname{ri} C$, potom existuje vektor Kuhn-Tuckerovych koeficientov pre (ÚKP).

Kapitola 4

Mikroekonomická teória firmy

Mikroekonomická teória firmy sa zaoberá správaním sa firiem – producentov – na trhu. Hlavnou charakteristikou firmy je pritom takzvaná produkčná funkcia, ktorá popisuje pre každú kombináciu vstupov zodpovedajúce množstvo výstupov, ktoré daná firma vie zo vstupov vyprodukovať za časovú jednotku. Hoci vo všeobecnosti môže byť výstupov niekoľko naraz, my sa budeme zaoberať iba prípadom, keď firma produkuje jediný výstup. Odvodíme niektoré vlastnosti produkčnej funkcie, pomocou ktorých budeme riešiť úlohu minimalizácie nákladov a maximalizácie zisku. Následne dokážeme niekoľko vlastností nákladovej funkcie a funkcie zisku. Všetky tieto vlastnosti dokážeme pre čo najvšeobecnejšiu produkčnú funkciu – zaobídeme sa bez predpokladu o diferencovateľnosti produkčnej funkcie. Zároveň však ukážeme, ako by tieto vlastnosti vyzerali za silnejších predpokladov.

4.1 Produkčná množina

Hlavným cieľom každej firmy je maximalizovať svoj zisk. Prostriedkom k tomu je produkcia výrobkov či služieb – výstupu. Na ich výrobu potrebuje firma vstupy – materiál, energiu, prácu. Existuje však mnoho možností ako vyrobiť jednotlivé výstupy – použiť odlišný materiál alebo nahradiť časť pracovníkov strojmi. Produkčná množina popisuje všetky možnosti, ktoré daná firma má.

Označme najprv vektor vstupov do výroby $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, pričom pre ekonomickú interpretáciu predpokladáme $x \geq 0$. Fixujme časovú jednotku. *Technológiou* nazveme taký vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \mathbf{R}^{n+1}$, pre ktorý vie firma zo vstupov x vyrobiť množstvo výstupu y. Každú firmu charakterizuje množina všetkých technológií Y, ktorými je schopná produkovať. Od tejto množiny očakávame splnenie určitých axióm. Samozrejme, jednotlivé publikácie majú každá vlastné axiómy, takže tie použité v tejto práci nemusia byť s nimi zhodné. Porovnanie jednotlivých axiomatík obsahuje napríklad práca [3].

Axiómy produkčnej množiny podľa práce [1]

(A1) Pre všetky $x \in \mathbf{R}^n_+$ platí $(x, 0) \in Y$.

(A2) Ak $(0, y) \in Y$ potom platí $y = 0$.

(A3) Ak $(x, y) \in Y$ potom pre všetky $z \geq x$ platí $(z, y) \in Y$.

(A4) Y je konvexná.

(A5) Y je uzavretá.

Tieto axiómy majú nasledovné zdôvodnenie:

(A1) Nulové množstvo produktu sa dá vyrobiť z ľubovoľného množstva vstupov.

(A2) Z nulového množstva vstupov sa dá vyrobiť iba nulové množstvo výstupu.

(A3) Ak neznížime množstvo vstupov, neklesne nám výstup.

(A4) Nech (x, y) a $(\widehat{x}, \widehat{y})$ sú technológie z Y. Pokúsime sa odôvodniť, prečo by malo platiť

$$(\alpha x + (1 - \alpha)\widehat{x}, \alpha y + (1 - \alpha)\widehat{y}) \in Y.$$

Nech sa diel $\alpha \in [0, 1]$ z časovej jednotky produkuje technológiou (x, y) a zvyšný čas technológiou $(\widehat{x}, \widehat{y})$. Spolu sa pritom vyprodukuje $\alpha y + (1 - \alpha)\widehat{y}$ jednotiek výstupu a minie sa $\alpha x + (1 - \alpha)\widehat{x}$ jednotiek vstupov. Preto platí

$$(\alpha x + (1 - \alpha)\widehat{x}, \alpha y + (1 - \alpha)\widehat{y}) \in Y.$$

(A5) Predpoklad uzavretosti je čisto matematicko-technická záležitosť.

4.2 Produkčná funkcia

Pre každú technologickú množinu Y môžeme teraz definovať *produkčnú funkciu*

$$f(x) = \max\{y \,|\, (x, y) \in Y\}.$$

Produkčná funkcia popisuje maximálne možné množstvo výstupu, ktoré sa dá vyprodukovať z daných vstupov. Pretože snahjou firmy je minimalizovať náklady, bude sa snažiť vyrábať čo najefektívnejšie. Preto zo vstupov x bude produkovať množstvo $f(x)$ a nie menej (hoci je to technologicky možné).
Na produkčnú funkciu sa prenášajú vlastnosti z produkčnej množiny. Pretože však v mikroekonómii pracujeme väčšinou s produkčnou funkciou, je dobré si tieto vlastnosti odvodiť. Sú zhrnuté v nasledujúcej vete.

Veta 4.1 (Vlastnosti produkčnej funkcie).

(P1) Funkcia f je definovaná, teda pre všetky $x \geq 0$ platí $f(x) < \infty$.

(P2) Funkcia f je konkávna.

(P3) Platí $f(0) = 0, \quad f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbf{R}^n_+$.

(P4) Ak $\widehat{x} \geq x$, potom tiež $f(\widehat{x}) \geq f(x)$.

(P5) Ak $f(x_0) > 0$ pre nejaké x_0, potom $f(x) > 0$ pre každé $x \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$.

(P6) Ak funkcia f spĺňa vlastnosti (P1)-(P4), potom

$$Y = \{(x, y) \,\big|\, 0 \leq x, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

je technologická množina.

Dôkaz.

(P1) Z uzavretosti množiny Y vyplýva, že ak $\sup\{y \,\big|\, (x, y) \in Y\} < \infty$, tak existuje aj $f(x) = \max\{y \,\big|\, (x, y) \in Y\}$. Predpokladajme, že to neplatí, teda že existuje také x, pre ktoré $\sup\{y \,\big|\, (x, y) \in Y\} = \infty$. Potom $(x, k) \in Y$ pre všetky $k \in N$. Označme $\alpha_k = \frac{1}{k}$. Platí $\alpha_k \in [0, 1]$. Pretože $(0, 0) \in Y$ a množina Y je konvexná, patrí do Y aj konvexná kombinácia bodov(x, k) a $(0, 0)$, konkrétne aj $\alpha_k(x, k) + (1 - \alpha_k)(0, 0)$, teda aj bod $(\frac{x}{k}, 1)$ pre všetky $k \in N$. Postupnosť týchto bodov by mala mať vzhľadom k uzavretosti množiny Y limitu v Y, avšak touto limitou je bod $(0, 1) \notin Y$. To je hľadaný spor a teda platí $f(x) < \infty$ pre všetky $x \geq 0$.

(P2) Fixujme x_1, x_2. Označme $M_1 = f(x_1)$ a $M_2 = f(x_2)$. Z konvexnosti Y vyplýva, že $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha M_1 + (1 - \alpha)M_2) \in Y$, a preto

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \max\{y \,\big|\, (\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, y) \in Y\} \geq$$

$$\geq \alpha M_1 + (1 - \alpha)M_2 = \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Tým sme dokázali konkávnosť funkcie f.

(P3) Z axiómy (A2) vyplýva, že $\{y \,\big|\, (0, y) \in Y\} = \{0\}$, preto

$$f(0) = \max\{y \,\big|\, (0, y) \in Y\} = 0.$$

Čo sa týka druhej časti tvrdenia, $f(x) \geq 0$, pretože $(x, 0) \in Y$ pre všetky $x \in \mathbf{R}^n_+$.

(P4) Vezmime si $\widehat{x} \geq x$. Potom z (A3) vyplýva, že

$$\{y \,|\, (x, y) \in Y\} \subseteq \{y \,|\, (\widehat{x}, y) \in Y\}.$$

Preto

$$\max\{y \,|\, (x, y) \in Y\} \leq \max\{y \,|\, (\widehat{x}, y) \in Y\}.$$

(P5) Tvrdenie dokážeme sporom. Nech pre nejaké $x_0 \in \mathbf{R}^n_+$ platí $f(x_0) > 0$. Vieme, že $f(0) = 0$. Vezmime ľubovoľné $x \in \mathbf{R}^n_+$. Sporom predpokladajme, že $f(x) = 0$. Skúmajme $f(kx)$ pre $k \in N$. Z konkávnosti a monotónnosti funkcie f vyplýva, že aj $f(kx) = 0$. Zároveň však pre všetky $\widehat{x} \geq x_0$ musí platiť $f(\widehat{x}) > 0$ a pre nejaké k_0 bude aj $k_0 x \geq x_0$, pretože $x \in \operatorname{int} \mathbf{R}^n_+$. To je spor a preto platí (P5).

(P6) Tvrdenie sa dokáže jednoducho overením vlastností.

□

Vzhľadom na (P6) môžeme firmu jednoznačne charakterizovať jej produkčnou funkciou.

4.2.1 Príklady produkčných funkcií

V tejto časti si predstavíme niekoľko príkladov produkčných funkcií, ktoré sa v príkladoch používajú najčastejšie. Avšak každá funkcia, ktorá spĺňa dané predpoklady, môže byť produkčnou funkciou.

Leontieffova produkčná funkcia

Predstavme si produkt, na výrobu ktorého je nutné použiť nejaký presný pomer surovín – napríklad koláč sa pečie z presného pomeru múky, cukru, vajec a tuku. Ak nemáme k dispozícii cukor alebo múku, koláč neupečieme. Hovoríme preto o dokonale nezameniteľných (či dokonale komplementárnych) vstupoch. Takúto situáciu opisuje Leontieffova produkčná funkcia

$$f(x) = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n\}.$$

Produkčná funkcia dokonale zameniteľných vstupov

Existujú vstupy, ktoré môžeme vo výrobe dokonale zamieňať – napríklad môžeme mäso vysmažiť na masle miesto na oleji, alebo na výrobu poličiek použijeme miesto malého balenia klincov väčšie. Tomuto prípadu zodpovedá produkčná funkcia

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

Cobb-Douglasova produkčná funkcia

Predchádzajúce príklady boli istým spôsobom extrémne – vstupy v nich boli alebo absolútne nezameniteľné, alebo naopak úplne zameniteľné. Predstavme si ale prípad, v ktorom budú síce vstupy zameniteľné, ale iba čiastočne, a na výrobu výstupu bude treba nenulové množstvo z každého vstupu. Tento prípad sa dá charakterizovať Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou

$$f(x) = Cx_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}.$$

4.3 Minimalizácia nákladov

Aby firma dosahovala čo najvyšší zisk, musí produkovať efektívne. To značí, že sa musí snažiť vyrábať tak, aby mala čo najnižšie náklady na výrobu. Pod nákladmi pritom myslíme priamo náklady na zaplatenie vstupov, a nie napríklad paušálnu platbu za telefón či nájomné za budovu, ktorých výška nezávisí od produkčného plánu. V tejto časti sformulujeme úlohu minimalizácie nákladov a dokážeme, že za určitých predpokladov vždy existuje taká kombinácia vstupov, ktorá minimalizuje náklady. Napokon si definujeme nákladovú funkciu a dokážeme niektoré jej vlastnosti.

4.3.1 Náklady

Predpokladáme, že firma funguje v ideálne konkurenčnom prostredí. To znamená, že nedokáže ovplyvňovať situáciu na trhu, a teda ceny vstupov ako aj výstupu sú pre ňu pevne dané. Náklady preto môže firma ovplyvniť iba zvolením technológie. Označme $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbf{R}^n$ vektor cien vstupov. Budeme pritom predpokladať $w > 0$, pretože za vstup do výroby ťažko možno považovať niečo s nulovou cenou. Pri spotrebe vstupov x bude mať teda firma náklady na výrobu $\langle w, x\rangle$.

4.3.2 Úloha minimalizácie nákladov

Jednou zo základných snáh firmy je minimalizovať výrobné náklady. Pre danú cenovú hladinu w a požadované množstvo výstupu y sa firma snaží minimalizovať svoje náklady zvolením vhodnej technológie. Úlohou je teda nájsť takú kombináciu vstupov $\widehat{x}$, aby platilo

- $f(\widehat{x}) \geq y$
- $\langle w, \widehat{x}\rangle \leq \langle w, x\rangle$ pre všetky x také, že $f(x) \geq y$. (4.1)

Označme si množinu vstupov, z ktorých sa dá vyrobiť požadované množstvo výstupu ako

$$Y(y) = \{x \in \mathbf{R}^n_+ \mid f(x) \geq y\}.$$

Pretože funkcia $f(x)$ je konkávna, je funkcia $-f(x)$ konvexná. Podľa Vety 2.3 potom platí, že množina

$$\{\, x \,|\, -f(x) \leq -y\} = \{\, x \,|\, f(x) \geq y\} = Y(y)$$

je konvexná. Všimnime si zároveň, že minimalizovať funkciu $\langle w, x\rangle$ je ekvivalentné s maximalizovaním funkcie $\langle -w, x\rangle$. Úloha minimalizácie nákladov sa teda dá preformulovať na úlohu

$$\text{Max}\{\langle -w, x\rangle \,|\, x \in Y(y)\},$$

teda na úlohu maximalizovať lineárnu funkciu na konvexnej množine. Keďže nevieme, či sa maximum nadobúda, preformulujme úlohu na hľadanie supréma. Tu si však môžeme všimnúť, že podľa (1.2) platí

$$\sup\{\langle -w, x\rangle \,|\, x \in Y(y)\} = \delta^*(-w \,|\, Y(y)).$$

Úlohou teda je nájsť opornú funkciu ku konvexnej množine $Y(y)$.

4.3.3 Existencia riešenia úlohy minimalizácie nákladov

Otázkou teraz je, či a za akých podmienok je zaručená existencia riešenia úlohy, teda za akých podmienok vieme zaručiť, že bude existovať nejaká kombinácia vstupov $\widehat{x}$, ktorá spĺňa (4.1). Postupne odvodíme všetky potrebné tvrdenia.

Veta 4.2. Pre vektor cien $w > 0$ platí $-\delta^*(-w \,|\, Y(y)) \geq 0$.

Dôkaz. Pre všetky $x \in Y(y)$ platí $x \geq 0$, a preto pre $w > 0$ platí

$$-\delta^*(-w \,|\, Y(y)) = -\sup\{\langle -w, x\rangle \,|\, x \in Y(y)\} \geq 0.$$

□

Veta 4.3. Ak pre $y \geq 0$ je množina $Y(y)$ neprázdna, tak platí

$$-\delta^*(-w \,|\, Y(y)) = \inf\{\langle x, w\rangle \,|\, x \in Y(y)\} < \infty.$$

Dôkaz. Vezmime ľubovoľné $\bar{x} \in Y(y)$. Platí $\langle \bar{x}, w\rangle < \infty$, preto platí

$$-\delta^*(-w \,|\, Y(y)) = \inf\{\langle x, w\rangle \,|\, x \in Y(y)\} \leq \langle \bar{x}, w\rangle < \infty.$$

□

Veta 4.4. Ak pre $y \geq 0$ je množina $Y(y)$ neprázdna, potom pre každé $w > 0$ existuje $\widehat{x} \in Y(y)$ také, že

$$-\delta^*(-w \,|\, Y(y)) = \langle \widehat{x}, w\rangle.$$

Dôkaz. Uvažujme postupnosť $x^{(k)} \in Y(y)$ takú, že

$$\lim_{k\to\infty} \langle w, x^{(k)} \rangle = \inf\{\langle w, x\rangle \mid x \in Y(y)\} = -\delta^*(-w \mid Y(y)).$$

Dokážeme, že je ohraničená. Predpokladajme, že postupnosť $x^{(k)}$ nie je ohraničená. Potom existuje index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ taký, že postupnosť $x_i^{(k)}$ je neohraničená, a teda sa z nej dá vybrať podpostupnosť divergujúca do ∞. Nech je to $\{x_i^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Platí

$$\langle w, x^{(k_n)} \rangle \geq w_i x_i^{(k_n)} \to \infty.$$

To je ale spor s predpokladom, že $\langle x, w^{(k)} \rangle \to -\delta^*(-w \mid Y(y))$. Preto postupnosť $x^{(k)}$ je ohraničená a dá sa z nej vybrať konvergentná podpostupnosť $x^{(k_j)} \to \widehat{x}$. Zo spojitosti funkcie f potom vyplýva, že $\widehat{x} \in Y(y)$. □

Týmto sme dokázali, že predpoklad $w > 0$ je dostatočný na to, aby vždy existoval taký vektor vstupov, pre ktorý sú náklady minimálne. Táto podmienka je nutná – predstavme si napríklad firmu vyrábajúcu Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou z dvoch vstupov x_1 a x_2. Produkčná funkcia je teda $f(x) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. Nech ceny vstupov sú napríklad $w_1 = 1$ a $w_2 = 0$. Pri snahe vyrobiť množstvo výstupu 1 použijeme x_1 jednotiek prvého vstupu a aspoň $x_1^{\frac{-\alpha}{\beta}}$ druhého. To nás bude stáť x_1 korún, a teda čím menej prvého vstupu použijeme, tým budú náklady menšie. Optimálne je ho nepoužiť vôbec, čo však zrejme nie je možné, a preto takáto úloha nenadobúda minimum.

4.3.4 Nákladová funkcia

Dokázali sme, že pre $w > 0$ existuje podmienená „funkcia“ dopytu $\widehat{x}(y, w)$ taká, že pri použití technológie $(\widehat{x}, f(\widehat{x}(y, w)))$ budú náklady na výrobu množstva produktu y minimálne. Slovo „funkcia“ je v úvodzovkách, pretože táto funkcia nemusí byť jednoznačne definovaná - pre daný vektor cien môže existovať viac možností ako vyrobiť požadované množstvo výstupu pri rovnakých nákladoch. Preto pod symbolom $\widehat{x}(y, w)$ budeme myslieť ľubovoľné optimálne x. Označme minimálne náklady pri cenách w na výrobu množstva y ako $C(y, w)$. Vieme, že

$$C(y, w) = \langle w, \widehat{x}(y, w) \rangle = -\delta^*(-w \mid Y(y)).$$

V tejto časti odvodíme niektoré vlastnosti nákladovej funkcie. Pozrime sa najprv, ako sa zmenia náklady pri náraste či poklese cien.

Veta 4.5. Ak $\widetilde{w} \geq w$, potom $C(y, \widetilde{w}) \geq C(y, w)$.

Dôkaz. Pre $x \in Y(y)$ a $\widetilde{w} \geq w$ platí $\langle x, \widetilde{w} \rangle \geq \langle x, w \rangle$, a teda aj

$$C(y, \widetilde{w}) = \inf\{\langle x, \widetilde{w} \rangle \mid x \in Y(y)\} \geq \inf\{\langle x, w \rangle \mid x \in Y(y)\} = C(y, w)$$

$\square$

Podarilo sa nám dokázať očakávanú vlastnosť, a to nemožnosť poklesu celkových nákladov pri náraste cien. Čo sa však stane ak sa všetky ceny zmenia rovnako?

Veta 4.6. Pre $\alpha > 0$ platí $C(y, \alpha w)$=$\alpha\, C(y, w)$.

Dôkaz. Pre $\alpha > 0$, $w > 0$ a $x \geq 0$ platí $\langle x, \alpha w\rangle = \alpha\langle x, w\rangle$, a teda

$$C(y, \alpha w) = \inf\{\langle x, \alpha w\rangle \,\big|\, x \in Y(y)\} = \alpha \inf\{\langle x, w\rangle \,\big|\, x \in Y(y)\} = \alpha\, C(y, w).$$

$\square$

Ako by sa dalo očakávať, pri rovnomernej zmene cien celkové náklady na výrobu sa zmenia rovnako ako ceny vstupov.
Ďalej sa pozrime na závislosť funkcie $C(y, w)$ od premenných y a w.

Veta 4.7. Funkcia $C(y, w)$ je konvexná v y.

Dôkaz. Vezmime ľubovoľné y_1, y_2. Označme $\widehat{x}_1 = \widehat{x}(y_1, w)$, $\widehat{x}_2 = \widehat{x}(y_2, w)$, $x_3 = \alpha\widehat{x}_1 + (1-\alpha)\widehat{x}_2$ a $y_3 = \alpha y_1 + (1-\alpha)\, y_2$. Vieme, že produkčná funkcia f je konkávna, a teda platí

$$f(x_3) = f(\alpha\widehat{x}_1 + (1-\alpha)\widehat{x}_2) \geq \alpha\, f(\widehat{x}_1) + (1-\alpha)\, f(\widehat{x}_2) \geq \alpha y_1 + (1-\alpha)\, y_2 = y_3.$$

To znamená, že z množstva vstupov x_3 vieme vyrobiť najmenej množstvo y_3 výstupu. Hľadajme teraz optimálne vstupy $\widehat{x}(y_3, w)$ na výrobu výstupu y_3. Zrejme bude platiť

$$\langle w, x_3\rangle \geq \langle w, \widehat{x}(y_3, w)\rangle.$$

Počítajme

$$\alpha C(y_1, w) + (1-\alpha)C(y_2, w) = \alpha\langle w, \widehat{x}_1\rangle + (1-\alpha)\langle w, \widehat{x}_2\rangle = \langle w, \alpha\widehat{x}_1 + (1-\alpha)\widehat{x}_2\rangle =$$

$$= \langle w, x_3\rangle \geq \langle w, \widehat{x}(y_3, w)\rangle = C(y_3, w) = C(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, w).$$

To ale znamená, že

$$\alpha C(y_1, w) + (1-\alpha)C(y_2, w) \geq C(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, w),$$

teda že $C(y, w)$ je konvexná v y. $\square$

Veta 4.8. Nákladová funkcia $C(y, w)$ je konkávna v premennej w.

Dôkaz. Podľa Vety 2.11 je oporná funkcia ku konvexnej množine konvexná. Pre funkciu nákladov platí $C(y,w) = -\delta^*(-w \,|\, Y(y))$, pričom množina $Y(y)$ je konvexná. Funkcia $\delta^*(w \,|\, Y(y))$ je teda konvexná v premennej $-w$, a podľa Vety 2.7 je konvexná aj v premennej w. Potom funkcia $C(y,w) = -\delta^*(-w \,|\, Y(y))$ je konkávna vo w. □

Veta 4.9. Ak má produkčná funkcia f konštantné výnosy z rozsahu, potom $C(y,w) = y \cdot\ C(1,w)$.

Dôkaz. Ak má produkčná funkcia konštantné výnosy z rozsahu, znamená to, že platí $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$. Označme $\alpha = \frac{1}{y}$ a počítajme

$$C(y,w) = \inf\{\langle w,x\rangle \,|\, f(x) \geq y\} = y \inf\{\frac{1}{y}\langle w,x\rangle \,|\, \frac{1}{y} f(x) \geq 1\} =$$

$$= y \inf\{\alpha\langle w,x\rangle \,|\, \alpha f(x) \geq 1\} = y \inf\{\langle w,\alpha x\rangle \,|\, f(\alpha x) \geq 1\} = y \cdot C(1,w).$$

□

Veta 4.10. Nerovnosť

$$C(y,w) - \lambda y \geq C(y_0,w) - \lambda y_0$$

platí práve vtedy, keď pre $\lambda \geq 0$ platí

$$\inf_x\{\langle w,x\rangle + \lambda(y_0 - f(x))\} = \langle w, \widehat{x}(y_0,w)\rangle. \tag{4.2}$$

Dôkaz. Uvažujme úlohu konvexného programovania

$$\mathrm{Min}\langle x,w\rangle \qquad \text{za podmienky} \qquad y_0 - f(x) \leq 0.$$

Podľa Kapitoly 3 označme $f_0(x) = \langle w,x\rangle$, $f_1(x) = y_0 - f(x)$ a $\tau = y_0 - y$. Potom platí

$$C(y,w) = \inf\{\langle w,x\rangle \,|\, f(x) \geq y\} = p(\tau) \quad \text{a} \quad C(y_0,w) = p(0),$$

kde $p(\cdot)$ je perturbačná funkcia našej úlohy. Akλ je Kuhn-Tuckerov koeficient, potom platí

$$\inf_x\{\langle w,x\rangle + \lambda(y_0 - f(x))\} = \inf_x\{\langle w,x\rangle \,|\, f(x) \leq y_0\} = \langle\langle\rangle\widehat{x}(y_0,w),w\rangle.$$

Podľa Vety 3.2 je λ Kuhn-Tuckerov koeficient práve vtedy, keď sa „neoplatí kúpiť " žiadna perturbácia, teda platí pre všetky $\tau \geq 0$

$$p(0) \leq p(\tau) + \lambda\tau,$$

čo po dosadení dáva

$$C(y_0,w) \leq C(y,w) + \lambda(y_0 - y),$$

čo je ekvivalentné s tvrdením vety. □

Veta 4.11. Pokiaľ je množina $Y(y)$ neprázdna, platí

$$\inf_{\bar{w}}\{\langle \bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle - C(y,\bar{w})\} = \langle w, \widehat{x}(y,w)\rangle - C(y,w) = 0.$$

Dôkaz. Vieme, že $C(y,w) = -\delta^*(-w \,|\, Y(y))$. Podľa Vety 2.11 je konjugovanou funkciou k opornej funkcii $\delta^*(-w \,|\, Y(y))$ indikátorová funkcia množiny $Y(y)$. Platí teda

$$\begin{aligned}
C(y,\bar{w}) &= -\delta^*(-\bar{w} \,|\, Y(y)), \\
\langle -\bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle + C(y,\bar{w}) &= \langle -\bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle - \delta^*(-\bar{w} \,|\, Y(y)) \\
\sup_{-\bar{w}}\{C(y,\bar{w}) + \langle -\bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle\} &= \sup_{-\bar{w}}\{\langle -\bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle - \delta^*(-\bar{w} \,|\, Y(y))\} \\
\inf_{\bar{w}}\{\langle \bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle - C(y,\bar{w})\} &= \delta(\widehat{x}(y,w) \,|\, Y(y)). \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Ak je množina $Y(y)$ neprázdna, tak z Vety 4.4 vyplýva, že pre každé $w > 0$ existuje $\widehat{x}(y,w)$ také, že platí $\langle \widehat{x}(y,w), w\rangle = C(y,w)$. Zároveň zrejme $\widehat{x}(y,w)$ patrí $Y(y)$, a teda preň platí $\delta(\widehat{x}(y,w) \,|\, Y(y)) = 0$. To znamená, že pravá strana poslednej rovnosti je rovná nule a infimum sa nadobúda v bode $\bar{w} = w$. Tieto dve tvrdenia spolu dávajú to, čo sme mali dokázať. □

Ostáva ešte zamyslieť sa, ako by zneli Vety 4.10 a 4.11 v prípade diferencovateľnosti funkcií C či f. Toto tvrdenie je známe a nazýva sa Shepardova lema (v niektorých publikáciách tiež Shephardova či Sheppardova lema).

Dôsledok 4.1 (Shepardova lema). Ak nákladová funkcia C je diferencovateľná, potom platí

$$\frac{\partial C}{\partial w}(y,w) = \widehat{x}(y,w)$$

Dôkaz. Veta 4.11 hovorí, že

$$\inf_{\bar{w}}\{\langle \bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle - C(y,\bar{w})\} = \langle w, \widehat{x}(y,w)\rangle - C(y,w) = 0.$$

Ak je C diferencovateľná, funkcia $\langle \bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle - C(y,\bar{w})$ je tiež a nutnou podmienkou na to, aby nadobúdala minimum v bode w je

$$\frac{\partial \langle \bar{w}, \widehat{x}(y,w)\rangle - C(y,\bar{w})}{\partial \bar{w}}(y,w) = 0\,,$$

čo je ekvivalentné s

$$\frac{\partial C}{\partial w}(y,w) = \widehat{x}(y,w).$$

□

Veta 4.12. Ak sú funkcie $C(y,w)$ a $f(x)$ diferencovateľné a $\widehat{x} \in \operatorname{int} \mathbf{R}_+^n$, potom platí

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y_0, w) \quad = \quad \lambda, \tag{4.4}$$

kde λ je také, že platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad = \quad \frac{w_i}{\lambda} \tag{4.5}$$

Dôkaz. Veta 4.10 hovorí, že minimum výrazu $C(y,w) - \lambda y$ sa nadobúda v bode y_0. Preto ak je funkcia $C(y,w)$ diferencovateľná, platí

$$\frac{\partial C(y,w) - \lambda y}{\partial y}(y_0, w) = 0,$$

čo je ekvivalentné s (4.4). Toto platí pre λ, pre ktoré platí (4.2). Ak je funkcia f diferencovateľná a minimum sa nadobúda na $\operatorname{int} \mathbf{R}_+^n$, potom musí platiť

$$\frac{\partial \langle w, x \rangle + \lambda(y_0 - f(x))}{\partial x_i} = 0,$$

čo po úprave dáva (4.5) $\square$

4.4 Maximalizácia zisku

4.4.1 Zisk

Konečným cieľom každej firmy nie je minimalizovať svoje náklady, ale mať maximálny zisk. Budeme sa teda snažiť nájsť takú výšku výstupu y, aby zisk bol maximálny. Označme rovnako ako v predchádzajúcej časti ceny vstupov $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ a množstvá vstupov $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Množstvo výstupu označme y a jeho trhovú cenu p. Stále pritom predpokladáme, že ceny vstupov aj výstupu sú pevne dané trhom a firma sa môže iba rozhodnúť, čo a akou technológiou bude produkovať. Zisk firmy pri množstve produkcie y a použití takej technológie, ktorá minimalizuje náklady, bude teda

$$p \cdot y - C(y, w).$$

4.4.2 Úloha maximalizácie zisku

Úloha maximalizovať zisk má teda tvar

$$\operatorname{Max}\{py - C(y,w)\}.$$

Ako sme dokázali v predchádzajúcej časti, minimálne náklady na výrobu množstva y pri cenách $w > 0$ sú $C(y, w) = \langle w, \widehat{x}(y, w)\rangle$. Úlohu môžeme teda preformulovať na úlohu nájsť

$$\mathrm{Max}\{py - \langle w, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\}.$$

Označme $z = (x, y) \in \mathbf{R}^{n+1}$ a $v = (-w, p) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Pripomeňme si ďalej, že sme si v (P6) ako Y označili technologickú množinu

$$Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1} \,\big|\, x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Dokážeme, že množina Y je konvexná. Majme body $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Y$, čo znamená

$$0 \leq y_1 \leq f(x_1) \qquad \text{a} \qquad 0 \leq y_2 \leq f(x_2). \tag{4.6}$$

Zoberme ich ľubovoľnú konvexnú kombináciu

$$(x, y) = \alpha(x_1, y_1) + (1 - \alpha)(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2).$$

Z vlastnosti produkčnej funkcie (P2) vieme, že funkcia f je konkávna, teda platí

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \leq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2). \tag{4.7}$$

Úpravou vzorca (4.6) a použitím (4.7) dostávame

$$0 \leq y = \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \leq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = f(x).$$

Úloha maximalizácie zisku sa teraz dá napísať v tvare

$$\mathrm{Max}\{\langle v, z\rangle \,\big|\, z \in Y\},$$

kde Y je konvexná množina.

Táto situácia sa nápadne ponáša na situáciu pri hľadaní minimálnych nákladov, kde sme problém tiež previedli na úlohu optimalizovať lineárnu funkciu na konvexnej množine. Rovnako teda napíšeme úlohu v tvare hľadania supréma a dostávame úlohu nájsť $\sup\{\langle v, z\rangle \,\big|\, z \in Y\}$. Ako sme si však všimli už predtým, platí

$$\sup\{\langle v, z\rangle \,\big|\, z \in Y\} = \delta^*(v \,\big|\, Y),$$

úlohou je teda opäť nájsť opornú funkciu, tentokrát ku konvexnej množine Y.

4.4.3 Existencia riešenia úlohy maximalizácie zisku

Podobne ako v prípade úlohy minimalizovať nákladz nás zaujíma, či existujú predpoklady, ktoré zaručia existenciu riešenia úlohy maximalizácie zisku. Bude nás zaujímať, či je maximálny zisk firmy vždy konečný a či preň existuje kombinácia vstupov, pri ktorých sa nadobúda. Pozrime sa teda na jednoduché príklady.

Príklad

Nech firma produkuje Leontieffovskou produkčnou funkciou z dvoch vstupov, teda $f(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. Nech ceny vstupov sú $w = (w_1, w_2)$. Potom pri použití x_1 jednotiek prvého vstupu potrebujeme na výrobu množstva výstupu y aspoň $\left(x1^{-\alpha_1}y\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$. S výrobou budú spojené náklady $w_1x_1 + w_2\left(x1^{-\alpha_1}y\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$. Tie chceme minimalizovať, a pretože je nákladová funkcia diferencovateľná, zderivujeme ju podľa x_1 a dostávame optimálne x_1 rovné

$$\widehat{x}_1 = \Big(\frac{w_1\alpha_2}{w_2\alpha_1} y^{-\frac{1}{\alpha_2}}\Big)^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Celkové náklady tejto firmy potom budú

$$C(y,w) = w_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} w_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_2}} \alpha_1^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} \alpha_2^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} \big(\alpha_1+\alpha_2\big) y^{\frac{1}{\alpha_2+\alpha_2}}.$$

Celkový zisk pri výrobe a predaji y jednotiek výstupu a cene p bude teda

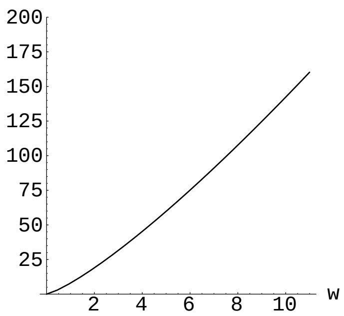
$$\pi(w,p,y) = p\cdot y - w_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} w_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_2}} \alpha_1^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} \alpha_2^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} \big(\alpha_1+\alpha_2\big) y^{\frac{1}{\alpha_2+\alpha_2}}.$$

V prípade, konštantných výnosov z rozsahu, teda keď $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ je to lineárna funkcia y, teda v tomto prípade maximálny zisk existuje len pre cenu výstupu menšiu alebo rovnú ako p, pre

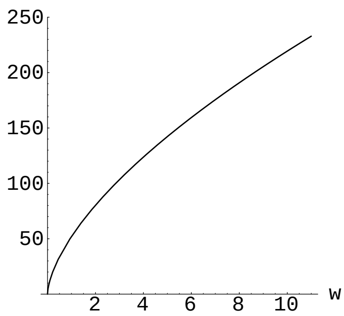
$$p = w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \alpha_1^{-\alpha_1} \alpha_2^{-\alpha_2}$$

a je rovný nule. Pre vyššiu cenu p je optimálny zisk nekonečný. Pre $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ existuje maximálny zisk pri ľubovoľnej cene výstupu a je rovný

$$\pi(w,p) = \big(1-\alpha_1-\alpha_2\big)p^{-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2-1}} \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2-1}} \left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2-1}}$$



Závisloť zisku od p



Závisloť zisku od w_2

Pokiaľ teda uznáme takúto produkčnú funkciu za normálnu, musíme sa zmieriť s tým, že maximálny zisk môže byť (teoreticky) aj nekonečný.

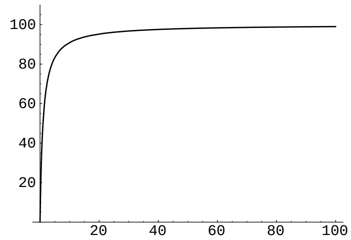
Príklad 2

Predstavme si teraz firmu vyrábajúcu produkčnou funkciou $f(x) = \frac{x}{2} + 50 \cdot (\frac{x}{x+1})$. Platí $f(0) = 0$, funkcia je rastúca, konkávna, spĺňa všetky požiadavky kladené na produkčnú funkciu. Keďže máme len jeden vstup, nemusíme sa trápiť s minimálnymi nákladmi - budeme skúmať zisk v závislosti od spotreby vstupu. Nech $p = 2$ a $w = 1$.

Keď budeme hľadať optimálnu výšku vstupu na maximalizáciu zisku, zistíme, že zisk pri spotrebe x je

$$\pi(x) = pf(x) - wx = 2.(\frac{x}{2} + 50(\frac{x}{x+1})) - x = 100\frac{x}{x+1}.$$

Táto funkcia má suprémum 100, ale v žiadnom bode x sa nenadobúda. To znamená, že sa môže stať, že maximálny zisk nie je nekonečný, ale neexistuje kombinácia vstupov, pri ktorej by sa dosahovalo suprémum.



Závisloť zisku od x

4.4.4 Funkcia zisku

V predchádzajúcej časti sme si ukázali, že na rozdiel od minimalizácie nákladov pri maximalizácii zisku nemáme istotu, že maximálny zisk je konečný, alebo ak aj je, že sa nadobúda. Označme maximálny možný zisk firmy pri cenách vstupov w a cene výstupu p ako

$$\pi(w,p) = \max_y\{p \cdot y - C(y,w)\} = \max\{p \cdot y - \langle w, x\rangle \;\big|\; (y,x) \in Y\}.$$

Pokiaľ existuje y, pre ktoré sa tento maximálny zisk nadobúda, označme ho $\widehat{y}(w,p)$. Tú kombináciu vstupov, pre ktoré sa pri cenách w a množstve výstupu $\widehat{y}(w,p)$ minimalizujú náklady, označme $\widehat{x}(w,p)$. Potom funkciu zisku môžeme prepísať do tvaru

$$\pi(w,p) = p \cdot \widehat{y}(w,p) - \langle w, \widehat{x}(w,p)\rangle = \langle(-w,p),(\widehat{x}(w,p),\widehat{y}(w,p))\rangle = \langle v, \widehat{z}(v)\rangle,$$

kde ako $\widehat{z}(v)$ sme si označili vektor $(\widehat{x}(w,p),\widehat{y}(w,p))$.

Funkcia zisku má podobne ako nákladová funkcia niektoré vlastnosti. Tu je niekoľko z nich.

Veta 4.13. Ak $\widetilde{w} \geq w$, tak $\pi(\widetilde{w},p) \leq \pi(w,p)$.

Dôkaz. Vetu dokážeme sporom. Nech platí $\widetilde{w} \geq w$ a zároveň $\pi(\widetilde{w},p) > \pi(w,p)$. Označme (x,y) tú technológiu, ktorou dosahujeme maximálny zisk pri cenách (w,p) a $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ optimálnu technológiu pri cenách $(\widetilde{w},p)$. Zrejme platí

$$p \cdot y - \langle x, w\rangle = \pi(w,p) < \pi(\widetilde{w},p) = p \cdot \widetilde{y} - \langle \widetilde{x}, \widetilde{w}\rangle.$$

Čo by sa však stalo, keby sme pri cenách (w,p) tiež vyrábali technológiou $(\widetilde{x},\widetilde{y})$? Zisk by bol zrejme $p \cdot \widetilde{y} - \langle w, \widetilde{x}\rangle$. Platí však

$$p \cdot \widetilde{y} - \langle w, \widetilde{x}\rangle = p \cdot \widetilde{y} - \langle w, \widetilde{x}\rangle \pm \langle \widetilde{w}, \widetilde{x}\rangle = p \cdot \widetilde{y} - \langle \widetilde{w}, \widetilde{x}\rangle + \langle(\widetilde{w} - w), \widetilde{x}\rangle.$$

Pretože $\widetilde{x} \geq 0$ a $\widetilde{w} \geq w$, platí$\langle(\widetilde{w} - w), \widetilde{x}\rangle \geq 0$, teda

$$p \cdot \widetilde{y} - \langle w, \widetilde{x}\rangle \geq p \cdot \widetilde{y} - \langle \widetilde{w}, \widetilde{x}\rangle = \pi(\widetilde{w}, p) > \pi(w, p).$$

To je ale spor s predpokladom, že (x, y) je technológia maximalizujúca zisk pri cenách (w, p).

□

Veta 4.14. Pre $\widetilde{p} \geq p$ platí $\pi(w, \widetilde{p}) \geq \pi(w, p)$.

Dôkaz. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade dokážeme vetu sporom. Opäť predpokladajme, že optimálne technológie pri cenách (w, p) resp. $(w, \widetilde{p})$ sú postupne (x, y) a $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Pre spor predpokladajme $\pi(w, p) > \pi(w, \widetilde{p})$. Potom platí

$$p \cdot y - \langle w, x\rangle = \pi(w, p) > \pi(w, \widetilde{p}) = \widetilde{p} \cdot \widetilde{y} - \langle w, \widetilde{x}\rangle.$$

Keby sme pri cenách $(w, \widetilde{p})$ použili technológiu (x, y), zisk by bol

$$\widetilde{p} \cdot y - \langle w, x\rangle = p \cdot y - \langle w, x\rangle + y \cdot (\widetilde{p} - p) \geq p \cdot y - \langle w, x\rangle > \pi(w, \widetilde{p}).$$

To je ale spor s optimálnosťou technológie $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ pri cenách $(w, \widetilde{p})$. □

Veta 4.15. Ak platí $\widetilde{p} = \alpha p$ a zároveň $\widetilde{w} = \alpha w$, potom tiež platí $\pi(\widetilde{w}, \widetilde{p}) = \alpha\pi(w, p)$

Dôkaz. Pre funkciu zisku platí

$$\pi(\widetilde{w}, \widetilde{p}) = \max\{\widetilde{p} \cdot y - \langle \widetilde{w}, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\} \max\{\alpha p \cdot y - \langle \alpha w, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\}.$$

Vďaka lineárnosti skalárneho súčinu môžme vyňať α a dostaneme

$$\pi(\widetilde{w}, \widetilde{p}) = \max\{\alpha p \cdot y - \alpha\langle w, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\} = \alpha \max\{p \cdot y - \langle w, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\} = \alpha\pi(w, p),$$

čo sme chceli dokázať. □

Veta 4.16. Funkcia $\pi(w, p)$ je konvexná v p.

Dôkaz. Vezmime body p_1 a p_2 a ľubovoľné $\alpha \in [0, 1]$ a počítajme

$$\alpha\pi(w, p_1) = \max\{\alpha p_1 \cdot y - \alpha\langle w, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\},$$
$$(1-\alpha)\pi(w, p_2) = \max\{(1-\alpha)p_2 \cdot y - (1-\alpha)\langle w, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\}.$$

Potom $\alpha\pi(w, p_1) + (1-\alpha)\pi(w, p_2)$ je rovné

$$\max\{\alpha p_1 \cdot y - \alpha\langle w, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\} + \max\{(1-\alpha)p_2 \cdot y - (1-\alpha)\langle w, x\rangle \,\big|\, y \leq f(x)\}.$$

Pretože súčet maxím funkcií je väčší alebo rovný maximu zo súčtu funkcií – robíme maximá na rovnakej množine – platí

$$\alpha\pi(w,p_1)+(1-\alpha)\pi(w,p_2)\geq \max\{\big((\alpha p_1+(1-\alpha)p2\big)\cdot y-\langle w,x\rangle \,\big|\, y\leq f(x)\}$$

a teda platí $\alpha\pi(w,p_1)+(1-\alpha)\pi(w,p_2)\geq \pi(w,\alpha p_1+(1-\alpha)p_2)$. $\square$

Veta 4.17. Funkcia $\pi(w,p)$ je konvexná v premennej w.

Dôkaz. Rovnako ako v predošlom dôkaze odvodíme

$$\alpha\pi(w_1,p)=\max\{\alpha p\cdot y-\alpha\langle w_1,x\rangle \,\big|\, y\leq f(x)\},$$
$$(1-\alpha)\pi(w_2,p)=\max\{(1-\alpha)p\cdot y-(1-\alpha)\langle w_2,x\rangle \,\big|\, y\leq f(x)\}.$$

To po spočítaní dá

$$\alpha\pi(w_1,p)+(1-\alpha)\pi(w_2,p)\geq \max\{p\cdot y-\langle(\alpha w_1+(1-\alpha)w_2),x\rangle \,\big|\, y\leq f(x)\}=\pi((\alpha w_1+(1-\alpha)w_2),$$

čo znamená, že funkcia je konvexná v w. $\square$

Veta 4.18. Pre funkciu zisku platí

$$\inf_{(-w,p)}\{\pi(w,p)-\langle(\widehat{x}(\widetilde{w},\widetilde{p}),\widehat{y}(\widetilde{w},\widetilde{p})),(-w,p)\rangle\}=\pi(\widetilde{w},\widetilde{p})-\langle(\widehat{x}(\widetilde{w},\widetilde{p}),\widehat{y}(\widetilde{w},\widetilde{p})),(-\widetilde{w},\widetilde{p})\rangle=0.$$

Dôkaz. Označme si $\widehat{y}(\widetilde{w},\widetilde{p})$ a $\widehat{x}(\widetilde{w},\widetilde{p})$ jednoducho $\widehat{y}$ a $\widehat{x}$. Upravujme rovnosť

$$\begin{aligned}
\pi(w,p) &= \delta^*((-w,p)\,\big|\,Y)\\
\langle(-w,p),(\widehat{x},\widehat{y})\rangle-\pi(w,p) &= \langle(-w,p),(\widehat{x},\widehat{y})\rangle-\delta^*((-w,p)\,\big|\,Y)\\
\sup_v\{\langle v,(\widehat{x},\widehat{y})\rangle-\pi(w,p)\} &= \sup_v\{\langle v,(\widehat{x},\widehat{y})\rangle-\delta^*(v\,\big|\,Y)\}.
\end{aligned}$$

Posledný výraz vpravo je funkcia konjugovaná k $\delta^*(v\,\big|\,Y)$, ktorou je podľa Vety 2.11 indikátorová funkcia množiny Y. Preto platí

$$\sup_v\{\langle v,(\widehat{x},\widehat{y})\rangle-\pi(w,p)\}=\inf_v\{\pi(w,p)-\langle v,(\widehat{x},\widehat{y})\rangle\}=\delta((\widehat{x},\widehat{y})\,\big|\,Y).$$

Keďže $\widehat{x}$ a $\widehat{y}$ sú optimálne riešenia, zrejme pre ne platí $\widehat{y}\leq f(\widehat{x})$, čiže $(\widehat{x},\widehat{y})\in Y$. Potom ale platí $\delta((\widehat{x},\widehat{y})\,\big|\,Y)=0$ a teda

$$\inf_{(-w,p)}\{\pi(w,p)-\langle(-w,p),(\widehat{x}(\widetilde{w},\widetilde{p}),\widehat{y}(\widetilde{w},\widetilde{p}))\rangle\}=0.$$

Toto infimum sa nadobúda pre $w=\widetilde{w}$ a $p=\widetilde{p}$. $\square$

Podobne ako pri minimalizácii nákladov, aj tu existuje za predpokladu diferencovateľnosti funkcie zisku jednoduchšie znenie vety.

Dôsledok 4.2 (Hottelingova lemma). Ak je funkcia zisku $\pi(w,p)$ diferencovateľná, potom predchádzajúca veta sa dá napísať ako

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial p}(w,p) &= \widehat{y}(w,p)\\ \frac{\partial \pi}{\partial w_i}(w,p) &= -\widehat{x}_i(w,p) \qquad \text{pre } i=1,2,\dots n.\end{aligned}$$

Dôkaz. Hottelingova lema hovorí, že funkcia $\pi(w,p)-\langle(-w,p),(\widehat{x}(\widetilde{w},\widetilde{p}),\widehat{y}(\widetilde{w},\widetilde{p}))\rangle$ nadobúda svoje minimum v bode $(\widetilde{w},\widetilde{p})$. Teda ak je funkcia zisku diferencovateľná, potom nutnou podmienkou na to je, aby

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi(\widetilde{w},\widetilde{p})-\langle(-\widetilde{w},\widetilde{p}),(\widehat{x}(\widetilde{w},\widetilde{p}),\widehat{y}(\widetilde{w},\widetilde{p}))\rangle}{\partial p} &= 0,\\ \frac{\partial \pi(\widetilde{w},\widetilde{p})-\langle(-\widetilde{w},\widetilde{p}),(\widehat{x}(\widetilde{w},\widetilde{p}),\widehat{y}(\widetilde{w},\widetilde{p}))\rangle}{\partial w} &= 0.\end{aligned}$$

Po úprave dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi(w,p)}{\partial p}-\widehat{y}(w,p) &= 0,\\ \frac{\partial \pi(w,p)}{\partial w_i}+\widehat{x}(w,p) &= 0, \qquad \text{pre } i=1,2,\dots n,\end{aligned}$$

čo je ekvivalentné s

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi(w,p)}{\partial p} &= \widehat{y}(w,p),\\ \frac{\partial \pi(w,p)}{\partial w_i} &= -\widehat{x}(w,p), \qquad \text{pre } i=1,2,\dots n,\end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať. □

Záver

Cieľom tejto práce bolo spracovať mikroekonomickú teóriu firmy tak, aby sme sa zaobišli bez obmedzujúcich predpokladov ako je predpoklad o diferencovateľnosti produkčnej funkcie. Pomocou konvexnej analýzy sa nám podarilo dokázať, že úloha minimalizácie nákladov má vždy riešenie. Tiež sa nám podarilo odvodiť vlastnosti nákladovej funkcie. Dokázali sme vetu, ktorá je ekvivalentná so Shepardovou lemou, avšak nepožaduje diferencovateľnosť nákladovej funkcie.

Pri úlohe maximalizácie nákladov sme ukázali príklady, keď maximálny možný zisk je nekonečný, alebo je síce konečný, ale nenadobúda sa pre žiadu konečnú kombináciu vstupov. Aj tak sa nám však podarilo odvodiť mnoho vlastností funkcie zisku. Rovnako ako pri minimalizácii nákladov aj tu sa nám podarilo nájsť ekvivalent Hottelingovej lemmy, ktorý nepožaduje diferencovateľnosť funkcie zisku.

Našou ďalšou snahou bolo podobným spôsobom spracovať aj teóriu spotrebiteľa a nájsť ekvivalent Slutského rovnice. To sa nám však zatiaľ nepodarilo, a tak táto úloha ostáva ako výzva do budúcnosti.

Literatúra

[1] P. Brunovský : *Mikroekonómia*, FMFI UK, študijný materiál

[2] A. Mas-Colell, M. D. Whiston, J. R. Green : *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York, 1995

[3] P. Mezovský : *Teória firmy bez predpokladu o diferencovateľnosti produkčnej funkcie*, FMFI UK, 2000

[4] J. Plesník : *Matematické programovanie po základoch lineárneho programovania*, MFF UK, 1987

[5] J. Plesník : *Matematické programovanie*, Prírodovedecká fakulta UK, 1978

[6] F. van der Ploeg : *Mathematical Methods in Economics*, John Wiley & Sons,1986

[7] T. Rockafellar : *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1970

[8] H. R. Varian : *Microeconomic Analysis*, 3rd edition, University of Michigan, 1992

[9] H. R. Varian : *Intermediate Microeconomics–A Modern Approach*, University of California-Berkeley, 1996