

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2003

MARTIN GUZI

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

EKONOMICKÁ A FINANČNÁ MATEMATIKA



DIPLOMOVÁ PRÁCA

**BEZARBITRÁŽNE MODELOVANIE VÝVOJA
ÚROKOVÝCH MIER S APLIKÁCIOU
NA OPTIMALIZÁCIU PORTFÓLIA DLHOPISOV**

2003

DIPLOMANT: MARTIN GUZI

VEDÚCI PRÁCE: MGR. IGOR MELICHERČÍK, PHD.

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

ČESTNE PREHLASUJEM, ŽE SOM TÚTO DIPLOMOVÚ PRÁCU VYPRACOVAL SAMOSTATNE
S VYUŽITÍM UVEDENEJ LITERATÚRY.

.....

POĎAKOVANIE

ĎAKUJEM VEDÚCEMU DIPLOMOVEJ PRÁCE IGORovi MELICHERČÍKovi ZA VŠETOK ČAS, KTORÝ MI VENOVAL, A TAKTIEŽ ZA UŽITOČNÉ RADY A PODNETY, KTORÉ MI POMOHLI PRI PÍSANÍ TEJTO PRÁCE A VYTVÁRANÍ PROGRAMU. ÚPRIMNE ĎAKUJEM SVOJIM RODIČOM ZA VŠESTRANNÚ PODPORU POČAS CELÉHO ŠTÚDIA.

Obsah

Úvod	2
1 O úrokovej miere	3
2 Optimalizácia portfólia dlhopisov	6
2.1 Deterministický Buy&hold model	6
2.2 Rozšírenia modelu	8
2.3 Model so stochastickým vývojom úrokových mier	9
2.4 Lineárny a kvadratický model	11
2.5 Arbitrážna úloha	13
3 Základné princípy modelov úrokovej miery	14
4 Modely časovej štruktúry úrokových mier	16
4.1 Hull-White model	18
4.2 Trinomické stromy	19
5 Praktická časť	24
Záver	32
Literatúra	33
Prílohy	34

Úvod

Investovanie peňažných prostriedkov do dlhopisov je jednou z možností ako zhodnotiť náš majetok. Vhodnou investíciou do portfólia kupónových dlhopisov si môžeme zabezpečiť stabilný a pravidelný príjem v budúcnosti. Navyiac treba spomenúť, že riziko takejto investície v prípade štátnych dlhopisov je prakticky nulové - samozrejme na úkor nižšieho výnosu.

V prípade, že sa rozhodneme pre takúto investíciu, stojíme pred otázkou, ako zostaviť portfólio dlhopisov tak, aby nám prinieslo, čo najvyšší zisk. Práve tento problém rieši naša diplomová práca.

Samotná práca je členená nasledovne: V prvej kapitole uvedieme základné pojmy a vlastnosti úrokových mier. V druhej kapitole sformulujeme model, ktorý určí, aké dlhopisy máme vybrať do nášho portfólia tak, aby sme maximalizovali náš výnos na konci sledovaného obdobia. Konečný výnos z dlhopisov priamo závisí od vývoja úrokovej miery, preto model rozšírime o možnosť rebalancovania portfólia počas sledovaného obdobia. Predaj niektorých držaných dlhopisov za účelom nákupu iných, nám umožní reagovať na zmenu vývoja úrokových mier a v konečnom dôsledku dosiahnuť vyšší zisk na konci. Tento prístup si však vyžaduje informácie o budúcom vývoji úrokových mier. Budeme preto uvažovať množinu pravdepodobných scenárov vývoja úrokovej miery. Zavedieme tiež funkciu užitočnosti, ktorá nám umožní zohľadniť investorovu averziu k riziku (nechut' riskovať).

V tretej kapitole spomenieme základné princípy modelov časovej štruktúry úrokových mier. V štvrtej kapitole popíšeme postup generovania scenárov úrokovej miery. Na modelovanie úrokovej miery použijeme jedno-faktorový Hull-White model. Jeho hlavnou výhodou je, že v sebe obsahuje časovo závislé parametre, ktoré sú volené tak, aby model presne vystihoval súčasnú (pozorovanú) časovú štruktúru. Stochastický vývoj úrokovej miery zobrazíme do podoby trinomických stromov, pričom kladieme dôraz na nearbitrážnosť namodelovaných úrokových mier.

V poslednej piatej kapitole sú uvedené výsledky našich experimentov. Porovnávali sme výhody modelov s kvadratickou funkciou užitočnosti s modelmi, v ktorých maximalizujeme očakávaný výnos počas sledovaného obdobia. V strome úrokovej miery môžeme meniť pravdepodobnosti v uzloch a týmto spôsobom zvýhodniť alebo potlačiť niektoré zo scenárov úrokovej miery. Budeme skúmať vplyv tejto zmeny na výsledky optimalizácie.

Kapitola 1

O ÚROKOVEJ MIERE

V každej svetovej mene je kótovaných veľa rôznych druhov úrokových mier, ako sú napr. hypotekárne, depozitné, úverové alebo bezrizikové úrokové miery. Úroková miera patrí k základným ekonomickým veličinám, ktoré vplývajú na stabilitu národnej meny, ale aj výmenného kurzu. Na jej vývoj má určite vplyv viacero faktorov.

Každá úroková miera sa viaže k nejakému vopred stanovenému časovému obdobiu. My budeme pracovať s celou škálou úrokových mier, často označovanou ako časová štruktúra (term structure).

Pod pojmom časová štruktúra úrokových mier môžeme rozumieť aj vzťah medzi výnosmi z bezrizikových dlhopisov, ktoré sa líšia len rôznou dĺžkou ich doby splatnosti. A práve tento vzťah je už po mnoho rokov záujmom mnohých ekonómov a finančných analytikov. Z kompletnej časovej štruktúry úrokových mier totiž vieme vyčítať informácie o budúcich očakávaniach na trhu. Čo teda ovplyvňuje tvar výnosovej krivky? Prečo je niekedy rastúca a inokedy zase klesajúca? Bolo navrhnutých viacero teórií, ktoré sa pokúšajú vysvetliť pohyby vo výnosovej krivke, tie ale pôsobia dosť nejednotne:

Teória očakávaní: Výnos z dlhých dlhopisov sa rovná očakávanému výnosu z opakovanej investície do série krátkych dlhopisov. Čiže dlhodobé úroky sú determinované očakávaniami vo vývoji krátkodobých úrokov. Teória predpokladá, že investori disponujú perfektným odhadom budúcich úrokových mier, no budúcnosť v reálnom svete je neistá.

Teória segmentácie trhu (Culbertson): Vychádza z toho, že preferencie investorov závisia len na dĺžke doby do splatnosti a dlhopisy s rôznou dobou splatnosti sa obchodujú na navzájom oddelených trhoch. Ceny dlhopisov s rôznou dobou splatnosti sú preto nekorelované. Nie je potreba zvyhodňovať niektoré aktíva pred inými. Z toho potom vyplýva, že nemusí nutne existovať nejaká spojitosť medzi krátko-, stredno- a dlhodobým úrokom.

Teória preferencie likvidity (Hicks): Preferujú sa výnosy z krátkodobých aktív, pred dlhodobejšími. Dôsledkom toho sa dlhodobé aktíva stávajú výnosnejšie, aby viac motivovali investorov. V prospech tejto teórie hovorí aj to, že výnosová krivka má zvyčajne rastúci charakter.

Cena dlhopisov je silne prepojená s úrokovými mierami. Keďže štátne dlhopisy sa považujú za bezrizikové, tak vo svojich cenách implicitne obsahujú tieto

úrokové miery, dokonca ešte plnšiu škálu úrokových mier, akou disponuje peňažný trh. *Dlhopis* je cenný papier, v ktorom sa jeho vypisovateľ zaväzuje majiteľovi dlhopisu vyplatiť nominálnu hodnotu dlhopisu v deň splatnosti. Dlhopisy, ktoré okrem nominálnej hodnoty vyplácajú aj stanovené pravidelné úrokové platby (kupóny) sa nazývajú kupónové dlhopisy. Kupón býva stanovený spravidla ako percento z nominálnej hodnoty dlhopisu a vypláca sa pravidelne raz alebo dvakrát do roka až do splatnosti dlhopisu. Dlhopisy, ktoré nevyplácajú kupóny sa nazývajú *diskontné dlhopisy* alebo aj s nulovým kupónom. Bezcupónové dlhopisy sa obchodujú vždy pod nominálnu hodnotu, aby prinášali výnos.

Nech $P(t, T)$ označuje cenu bezcupónového dlhopisu v čase t (deň obchodovania), vyplácajúceho jednu jednotku hotovosti v čase T (deň splatnosti), $T > t$, kde čas je meraný v rokoch. Zrejme $P(T, T) = 1$. Náš výnos z držby dlhopisu počas obdobia $\langle t, T \rangle$ je rovný:

$$\frac{1 - P(t, T)}{P(t, T)} = \frac{1}{P(t, T)} - 1$$

Úrokovú mieru, pri ktorej by sme dosiahli rovnaký výnos (pri spojitom úročení) za dané obdobie nazveme *výnos do splatnosti dlhopisu*. Formálne to zapíšeme takto:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln P(t, T), \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle$$

Pod *časovou štruktúrou úrokových mier* (term structure) potom rozumieme funkciu, ktorá spája výnos $R(t, T)$ s maturitou T . Vidíme, že medzi výnosom do splatnosti a cenou dlhopisu existuje priama závislosť, teda pre dané $R(t, T)$ proces ceny dlhopisu je určený týmto vzťahom:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle$$

Teoreticky by teda nemal byť rozdiel medzi $R(0, T)$ a výnosovou krivkou určenou zo skupiny cien diskontných dlhopisov $P(0, T)$, keďže

$$P(0, T) = e^{-R(0, T)T}, \quad \forall T \in \langle 0, T^* \rangle$$

Musíme si ale uvedomiť, že tvar výnosovej krivky sa každý deň priamo odvíja od cien dlhopisov a ďalších derivátov na trhu. * Rozdiely vo výnosoch do rôznych maturít odrážajú rôzne názory trhu o budúcich úrokových mierach. Zvyčajne je výnosová krivka rastúca, z dôvodu vyššej neistoty z budúcnosti. Ak sú však úrokové miery príliš vysoké a trh očakáva ich pokles, výnosová krivka je invertovaná a výnosy z dlhších dlhopisov sú nižšie ako z kratších.

Forwardú mieru $f(t, T, T + \Delta t)$, $t \leq T$, budeme interpretovať ako spojitý úročený budúci úrok na veľmi krátky okamžik $\langle T, T + \Delta t \rangle$. Pomer ceny dlhopisov s

*Tú istú výnosovú krivku by sme mali získať aj z trhových cien Swapov alebo Forwardov. Ak nie vzniká priestor pre arbitrážne príležitosti.

maturitou T a $T + \Delta t$ je potom daný vzťahom:

$$\frac{P(t, T + \Delta t)}{P(t, T)} = e^{-f(t, T, T + \Delta t)\Delta t}$$

Z toho získame vyjadrenie pre forwardovú mieru:

$$f(t, T, T + \Delta t) = -\frac{\ln P(t, T + \Delta t) - \ln P(t, T)}{\Delta t}$$

Ak necháme $\Delta t \rightarrow 0$, tak dostávame *okamžitú forwardovú mieru*

$$f(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[-\frac{\ln P(t, T + \Delta t) - \ln P(t, T)}{\Delta t} \right] = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T}$$

alebo ekvivalentne:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right), \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle$$

Na rozdiel od cien dlhopisov je okamžitá forwardová miera skôr len matematickou idealizáciou, ako naozaj pozorovanou veličinou na trhu. Existuje však akceptovaný prístup (napr. [11]) modelovania cien dlhopisov práve pomocou exogénnej špecifikácie forwardovej miery $f(t, T)$, $t \leq T \leq T^*$.

Tradičné stochastické modely sú založené na exogénnej špecifikácii krátkodobej úrokovej miery. Budeme používať označenie r_t pre *okamžitú úrokovú mieru* (short-rate) pre bezrizikové požičiavanie v čase t na veľmi krátky časový okamžik $\langle t, t + \Delta t \rangle$. Definujeme spojitý stochastický proces B^\dagger :

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right) \quad (1.1)$$

Na B , s počiatkom $B_0 = 1$, potom môžeme nazerať ako na hodnotu jednej koruny v čase t , spojite reinvestovanej pri úrokovej miere r_t .

Medzi základné vlastnosti úrokovej miery, ktoré by sme mali zohľadniť pri modelovaní short-rate procesu patria:

- konzistentnosť, úrok by nemal byť záporný a tiež veľmi vysoký
- efekt spätnej väzby (mean-reversion), veľmi vysoké úroky majú tendenciu klesať a naopak, veľmi nízke zvyknú rásť k nejakej dlhodobej priemernej úrovni. Zvýšenie úrokov vedie k spomaleniu ekonomiky, klesá teda dopyt po pôžičkách, čo má za následok zníženie úrokov
- rôznorodá volatilita úrokov, pričom krátkodobé úroky zvyknú byť volatilnejšie
- volatilita krátkodobých úrokov sa mení v závislosti od ich hodnoty

[†]Predpokladáme, že krátkodobý úrok sleduje adaptívny stochastický proces, a že všetky výberové cesty tohto procesu sú integrovateľné v Lebesguovom zmysle.

Kapitola 2

OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA DLHOPISOV

V tejto kapitole poskytneme návod ako postupovať pri zostavovaní portfólia dlhopisov. Najprv predstavíme základný model, ktorý z informácií o súčasnej úrokovej krivke, určí, aké dlhopisy máme vybrať do nášho portfólia tak, aby sme maximalizovali náš výnos na konci sledovaného obdobia. Spomenieme aj ďalšie možné rozšírenia tohto modelu.

Výnos z dlhopisov priamo závisí od budúceho vývoja úrokových mier, ktorý nepoznáme. Popíšeme model so stochastickým vývojom úrokovej miery, ktorý rieši tento problém. Tento model potom sformulujeme ako úlohu lineárneho a kvadratického programovania. V závere kapitoly predstavíme úlohu, na hľadanie arbitrážnych príležitostí v strome úrokových mier.

2.1 Deterministický Buy&hold model

Začneme modelom, ktorý nazývame *buy & hold*. To znamená, že na začiatku sa rozhodneme, koľko ktorých dlhopisov budeme držať a portfólio už počas sledovaného obdobia nebudeme meniť. Najprv si definujeme premenné, ktoré budú vystupovať v modeli:

$T = \{0, \dots, m\}$: Sledované časové obdobie si rozdelíme na m -časových intervalov podľa toho, ako často dlhopisy vyplácajú kupóny (napr. jeden rok). Začíname v čase $t = 0$ (súčasnosť). V tomto okamžiku nakupujeme prvé dlhopisy. Predpokladáme, že pred časom 0 nevlastníme žiadne dlhopisy. Uvažujeme časový horizont $t = m$, teda $m + 1$ sledovaných časových okamžikov.

$U = \{1, \dots, n\}$: Skupina všetkých dlhopisov, ktoré máme k dispozícii. Počet ponúkaných dlhopisov v množine U označíme n .

$F_{i,t}$: Výnos plynúci z dlhopisu i v čase t . $F_{i,t}$ môže nadobúdať aj záporné hodnoty, preto kladné hodnoty budú znamenať náš zisk a záporné naše výdavky. Napr. pre dlhopis, ktorý kúpime dnes za cenu P_i , s nominálnou hodnotou 1, ročným kupónom c_i a dobou splatnosti 4 roky, dostaneme

$$F_{i,\cdot} = \{-P_i, c_i, c_i, c_i, 1 + c_i, 0, \dots, 0\},$$

kde P je cena dlhopisu, ktorú treba zaplatiť za dlhopis, preto je so záporným znamienkom.

L_t : Môže nastať prípad, keď investor chce počas sledovaného obdobia investovať ešte ďalšie peniaze alebo naopak predpokladá, nejaké priebežné výdaje. Toto je možné zahrnúť do modelu pomocou parametra L_t . Ak očakávame v čase t investície, L_t bude záporné, ak výdaje, tak bude kladné.

B : Hodnota vstupného kapitálu, ktorý máme k dispozícií v čase 0.

$x_i, i \in U$: Množstvo dlhopisu i , ktoré sa rozhodneme nakúpiť v čase 0.

Vo všeobecnosti môžeme zobrať do úvahy možnosť krátkodobej investície alebo úveru. Úrokové miery odporúčame nastaviť radšej konzervatívnejšie, aby nebol výnos v banke príliš atraktívny, tento model by potom stratil zmysel. Pribudnú nám ďalšie parametre:

r_t : Množstvo peňazí uložených v banke na čas $(t, t + 1)$ pri úrokovej miere ρ_t .

b_t : Množstvo peňazí, ktoré si požičiavame na čas $(t, t + 1)$ pri úrokovej miere β_t .

Naším cieľom bude nájsť spôsob ako vybrať optimálne zloženie portfólia dlhopisov, teda také, ktoré nám prinesie najväčší výnos na konci sledovaného obdobia. Hodnotu portfólia na konci označme h . Model zapíšeme takto:

$$\mathbf{MAX-B\&H} : \max_{x,h,r,b} h \quad (2.1)$$

$$\sum_{i \in U} F_{i,0} x_i + b_0 + B = r_0 \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in U} F_{i,t} x_i + (1 + \rho_t) r_{t-1} + b_t = L_t + r_t + (1 + \beta_t) b_{t-1}, \quad t \geq 1 \quad (2.3)$$

$$b_m = 0 \quad (2.4)$$

$$r_m = h \quad (2.5)$$

$$x_i, r_i, b_i \geq 0, \quad i \in U \quad (2.6)$$

V každom sledovanom okamžiku požadujeme, aby boli splnené tieto rozpočtové ohraničenia:

V čase $t = 0$ musí platiť, že výdaje na nákup dlhopisov sú rovné hodnote finančných prostriedkov, ktoré máme k dispozícií. (podmienka 2.2).

Vo všetkých ostatných časových okamžikoch sme tiež obmedzení výškou nášho rozpočtu. To znamená, že môžeme minúť (priebežné výdaje) iba toľko peňazí, koľko v danom čase dostaneme, či už z vyplatených kupónov a nominálov alebo z krátkodobých bankových vkladov. (podmienka 2.3).

Požičiavanie ďalších peňazí je v poslednom okamžiku samozrejme zakázané (podmienka 2.4).

Naopak, investíciu v poslednom okamžiku môžeme interpretovať ako náš celkový zisk (podmienka 2.5). Tu treba ešte spomenúť, že do celkového zisku sa tiež počíta výnos z predaja všetkých dlhopisov, ktoré vlastnime v poslednom okamžiku.

Poslednou podmienkou sú ohraničenia typu nerovností, ktoré zabezpečujú, aby sme nešli v dlhopisoch do krátkych pozícií. Taktiež množstvo peňazí, ktoré investujeme a požičiavame v banke musí byť nezáporné. Optimalizačnou funkciou je h , ktorú maximalizujeme pri premenných x_i, h, r_t, b_t .

2.2 Rozšírenia modelu

Základný model môžeme priblížiť realite rozšírením o ďalšie vlastnosti. Medzi také patria:

- *Funkcia užitočnosti.* Vyššie výnosy so sebou nesú aj väčšie riziko. Zavedením funkcie užitočnosti môžeme zohľadniť investorovu chuť riskovať (averziu k riziku). Mala by mať tieto vlastnosti:
 1. Funkcia musí byť *rastúca*, aby nepotláčala rast.
 2. U riziko averzných investorov je funkcia *konkávna*.
- *Rebalancovanie (prerovnanie) portfólia.* Pod týmto budeme rozumieť zmeny v zložení portfólia. Predaj niektorých držaných dlhopisov za účelom nákupu iných, nám umožní reagovať na zmenu vývoja úrokových mier a v konečnom dôsledku dosiahnuť vyšší zisk na konci. Predpokladajme, že úrokové miery sa vyvíjajú podľa nejakého scenára s . V čase $t = 1$ sa rozhodneme zmeniť portfólio. Nech x_i sú množstvá dlhopisov, ktoré sme nakúpili v čase $t = 0$ a y_i^s , $i \in U$ množstvá dlhopisov v portfóliu po prerovnaní. Označme P_i^s , $i \in U$ ceny dlhopisov pri danom scenári s vývoja úrokovej miery v čase $t = 1$. Upustíme od transakčných nákladov, teda celková hodnota portfólia pred zmenou sa musí rovnať hodnote nového portfólia. Medzi rozpočtové ohraničenia v modeli nám pribudne táto podmienka:

$$\sum_{i \in U} P_i^s x_i = \sum_{i \in U} P_i^s y_i^s$$

Zavedením stochastickým parametrov do modelu sa detailnejšie zaoberáme v ďalšom odseku. Rebalancovanie portfólia viackrát počas sledovaného obdobia si vyžaduje prídanie ďalších stavových parametrov.

- *Transakčné náklady.* S každým obchodom (predaj alebo kúpa) sú spojené transakčné náklady, a to buď fixné alebo variabilné. Optimálne portfólio s veľkým množstvom dlhopisov, ale v malých množstvách, nebude zrejme v praxi výnosné, práve kvôli veľkým nákladom na jeho vytvorenie a prípadné rebalancovanie. Tieto výdavky môžeme explicitne zaviesť do modelu. Použijeme premennú $z_i = \{0, 1\}$, $i \in U$, ak $x_i > 0$ potom $z_i = 1$. Naše výdavky (výnosy) spojené s nákupom (predajom) dlhopisov potom vzrastú (poklesnú) o túto sumu,

$$C \sum_{i \in U} z_i$$

kde C vyjadruje fixný poplatok z každého obchodovaného aktíva. Vzťah medzi x_i a z_i potom vyjadruje táto nerovnosť

$$x_i \leq M z_i$$

kde M bude vhodne veľké číslo, ktorým môžeme limitovať výšku transakčných nákladov.

Variabilné alebo proporciálne transakčné náklady sú úmerné cene dlhopisu a môžeme ich vyjadriť jednoduchým prirátaním k cene aktíva. Na rozdiel od fixných nákladov teda ich zavedenie vôbec nezvyšuje výpočtovú náročnosť modelu.

- *Diverzifikácia portfólia.* Pri niektorých viac rizikových aktívach môžeme stanoviť, akú maximálnu časť portfólia môže tvoriť dané aktívum. Predpokladajme, že investor chce, aby jeho pozícia v skupine dlhopisov $V \subset U$ netvorila viac ako $1/p$ celého portfólia (pre $p \in \mathbb{N}$). Vhodným ohraničením potom bude:

$$\sum_{i \in V} P_i x_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i \in U} P_i x_i$$

Samozrejme, môžeme použiť ďalšie ohraničenia na iné skupiny dlhopisov. Namiesto hodnoty dlhopisov môžeme tiež limitovať ich počet, stačí napísať túto podmienku bez P_i .

- *Obchodovanie s balíkom dlhopisov.* Z pohľadu obchodníka je oveľa atraktívnejšie obchodovanie s dlhopismi vo väčších množstvách ako po jednotlivých kusoch. Do modelu môžeme zaviesť ohraničenia, ktoré stanovujú minimálne limity, či už na počet alebo hodnotu obchodovaných dlhopisov.

Každé zlepšenie modelu vedie často k zvýšeniu náročnosti výpočtu, preto sme od mnohých vlastností pri praktických experimentoch upustili.

2.3 Model so stochastickým vývojom úrokových mier

Najväčším problémom modelu *Buy&hold* je, že nemáme všetky informácie o budúcich hodnotách jeho parametrov. Poznáme len hodnotu vstupného kapitálu, priebežné výdaje alebo investície a ceny dlhopisov vypisovaných na začiatku sledovaného obdobia. Nepoznáme však ceny dlhopisov vypisovaných v iných časoch a ani súčasnú hodnotu dlhopisov na konci sledovaného obdobia. Bez nej nemôžeme určiť náš zisk na konci. Hodnota dlhopisu závisí od doby, ktorú má daný dlhopis do splatnosti, od aktuálnych úrokových mier v čase určovania súčasnej hodnoty dlhopisu a od výšky transakčných nákladov. Hlavnou neznámou je teda krivka úrokových mier. Za predpokladu, že by sme poznali krivku úrokových mier v každom okamžiku, vedeli by sme si vypočítať ceny dlhopisov aj súčasnú hodnotu dlhopisov na konci sledovaného obdobia.

Keďže ju však nepoznáme, musíme ju nejako predpovedať, odhadnúť alebo náhodne vygenerovať s určitou pravdepodobnosťou. Scenárom úrokovej miery budeme nazývať budúci vývoj úrokovej miery počas sledovaného obdobia, ktorému vieme

priradiť nejakú pravdepodobnosť, s akou nastane. Nepredvídateľnosť vývoja úrokových mier potom bude vyjadrovať množina scenárov úrokovej miery, S . Je zrejmé, že výber scenárov je veľmi dôležitý pre správnosť výsledku optimalizácie. Množina scenárov by preto mala zohľadňovať tieto vlastnosti:

1. *Komplexnosť*. Súbor scenárov by mal obsahovať rôzne kombinácie poklesov a nárastov úrokovej miery. V dostatočnej miere by mali byť zastúpené 'normálne', ale nemal by zabúdať ani na extrémne a málo pravdepodobné situácie vývoja úrokovej miery.
2. *Konzistentnosť* úrokových mier je rovnako dôležitá. Každému časovému horizontu prislúcha iný úrok. V scenári musíme zohľadniť tieto vzájomné korelácie.
3. Množina scenárov by mala byť malá, každým scenárom sa nám totiž znásobuje počet premenných v modeli. Pre veľkú množinu S sa model môže stať neriešiteľným.

Ako vidno, nájsť vhodnú množinu scénárov, vôbec nie je jednoduché. Generovanie scenárov úrokovej miery preto zaberie najviac času pri príprave modelu. Existuje viacero spôsobov prístupu:

1. Krivku úrokových mier môžeme predpovedať na základe aktuálnej reálnej situácie na finančnom trhu a našich subjektívnych pocitov. Samozrejme ide o veľmi neefektívne riešenie.
2. Môžeme použiť nejaký súbor modelových situácií vývoja krivky úrokových mier. Dobrým príkladom takej množiny je NY-7.[4]. Ide o množinu siedmich scenárov vývoja krivky úrokových mier, ktorú používali finančné inštitúcie v štáte New York, USA. Na tejto množine testovali výnosnosť svojich finančných stratégií. Nevýhodou NY-7 je, že prepokladá len paralelný posun krivky úrokových mier v čase.
3. Ďalším spôsobom je náhodné generovanie vývoja krivky úrokových mier*. Na začiatku sledovaného obdobia je tvar krivky úrokových mier známy. Posun v nasledujúcom časovom okamihu je náhodne vygenerovaný z nejakého náhodného rozdelenia, napríklad z normálneho rozdelenia s vhodne zvolenou strednou hodnotou a disperziou. V každom ďalšom časovom okamihu postupujeme rovnako, až dospejeme k vývoju krivky úrokových mier počas celého sledovaného obdobia. Opakovaním celého procesu si môžeme nagenerovať ľubovoľne veľkú množinu scenárov.
4. My sme zvolili oveľa sofistikovanejší prístup. Vývoj krátkodobej úrokovej miery modelujeme jedno-faktorovým modelom Hull-White. Tento model sme si vybrali kvôli viacerým jeho výhodám. Spôsob modelovania je detailnejšie opísaný v štvrtej kapitole.

*Tento prístup najdeme v práci [9].

B&H model, ktorým sme začali, teraz rozšírime tak, že portfólio budeme optimalizovať vzhľadom na množinu scenárov úrokovej miery. Parametre, ktorých hodnota je závislá od scenára, budeme nazývať stochastickými. (upustíme od pojmu 'náhodný', nemôžeme predsa optimalizovať náhodnú premennú:). Pre $\forall s \in S$ teda vieme určiť

$$(F_{i,t}^s, L_t^s, P_{i,t}^s)_{t \in T, i \in U}$$

Tieto hodnoty sú vstupom do modelu. S každým scenárom poznáme aj pravdepodobnosť jeho realizácie p_s . Ukážeme, ako bude vyzerat' model, ak sa rozhodneme rebalancovať portfólio v čase $t = 1$. V modeli pribudne ďalšia stavová premenná y_i^s , ktorá bude označovať množstvo dlhopisu i v portfóliu v čase $t = 1$, ak sa úrok vyvíja podľa scenára s . Zavedieme funkciu užitočnosti $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Cieľom stochastického modelu je nájsť takú stratégiu (x, y^s, r^s, b^s) , ktorá maximalizuje náš úžitok pri danej množine scenárov S :

$$\begin{aligned} \text{MAX-S} & : \max_{x,y,h,r,b} \sum_{s \in S} p_s V(h^s) \\ \sum_{i \in U} F_{i,0} \cdot x_i + b_0 + B & = r_0 \\ \sum_{i \in U} F_{i,t}^s \cdot y_i^s + (1 + \rho_t) \cdot r_{t-1}^s + b_t^s & = L_t^s + r_t^s + (1 + \beta_t) \cdot b_{t-1}^s, \quad t \geq 1 \\ \sum_{i \in U} P_{i,1}^s \cdot x_i & = \sum_{i \in U} P_{i,1}^s \cdot y_i^s \\ b_m^s & = 0 \\ r_m^s & = h^s \\ x_i, y_i^s, r_i^s, b_i^s & \geq 0, \quad i \in U \end{aligned}$$

Ohraničenie sú rovnaké ako v modeli MAX-B&H, akurát nám pribudla podmienka súvisiaca s rebalancovaním portfólia v čase $t = 1$.

2.4 Lineárny a kvadratický model

Teraz predstavíme 2 modely, ktoré sme použili v našich experimentoch. Pre zjednodušenie výpočtovej náročnosti sme od mnohých vlastností upustili. Zvolili sme tieto parametre:

- *Časový horizont.* Dĺžka sledovaného obdobia je 3. V čase $t = 0$ zostavíme počiatočné portfólio. Dĺžka časového okamžiku je jeden rok.
- *Dlhopisy.* K dispozícii máme 3 bezkupónové dlhopisy s nominálnou hodnotou 1 a s maturitami 3,5 a 10 rokov. Cenu i -teho dlhopisu pri scenári s na konci t -tej periódy označme $P_{i,t}^s$, kde $i, t \in \{1, 2, 3\}$.
- *Rebalancovanie.* Tu sme predpokladali, že prerovnávanie portfólia sa uskutoční bez ďalších investícií, a že dlhopis nakupujeme a predávame za rovnakú cenu.

Rebalancujeme dvakrát a to na konci prvej a druhej periódy. Stavové premenné y_i^s a z_i^s budú označovať množstvo dlhopisu i v našom portfóliu v časoch $t = 1$ a $t = 2$.

- *Investovanie a požičiavanie* si peňazí v banke sme zakázali. Taktiež sme vylúčili možnosť priebežných investícií alebo výdajov. Jediným zdrojom finančných prostriedkov je vstupný kapitál na začiatku B . (Neskôr sme povolili aj krátke pozície v dlhopisoch)
- *Funkcia užitočnosti*. Použili sme kvadratickú funkciu užitočnosti. Ide o konkávnú funkciu s bodom obratu v bode $\frac{1}{\alpha}$, čo znamená, že funkcia je rastúca na intervale $(-\infty, \frac{1}{\alpha})$. Parametrom α môžeme zohľadniť akceptovateľné riziko pri investovaní. Pre veľké hodnoty α úloha nemá zmysel, pretože by sme potláčali prirodzený zisk. Pre menšie α pripúšťame vyšší výnos, ale aj vyššie riziko. Tvar funkcie:

$$V(x) = x - \frac{1}{2}\alpha x^2$$

Formulácia lineárneho modelu:

$$\begin{aligned} \text{MAX-LP} & : \max_{x,h,r,b} \sum_{s \in S} p_s \cdot h^s \\ \sum_{i \in U} F_{i,0} \cdot x_i + B & = 0 \\ \sum_{i \in U} P_{i,1}^s \cdot x_i & = \sum_{i \in U} P_{i,1}^s \cdot y_i^s \\ \sum_{i \in U} P_{i,2}^s \cdot y_i^s & = \sum_{i \in U} P_{i,2}^s \cdot z_i^s \\ \sum_{i \in U} P_{i,3}^s \cdot z_i^s & = h^s \\ x_i, y_i^s, z_i^s & \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Formulácia kvadratického modelu:

$$\begin{aligned} \text{MAX-QP} & : \max_{x,h,r,b} \sum_{s \in S} p_s \left[h^s - \frac{1}{2}\alpha (h^s)^2 \right] \\ \sum_{i \in U} F_{i,0} \cdot x_i + B & = 0 \\ \sum_{i \in U} P_{i,1}^s \cdot x_i & = \sum_{i \in U} P_{i,1}^s \cdot y_i^s \\ \sum_{i \in U} P_{i,2}^s \cdot y_i^s & = \sum_{i \in U} P_{i,2}^s \cdot z_i^s \\ \sum_{i \in U} P_{i,3}^s \cdot z_i^s & = h^s \\ x_i, y_i^s, z_i^s & \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Výsledky experimentov sú popísané v piatej kapitole.

2.5 Arbitrážna úloha

Dôležitou podmienkou pri optimalizácii dlhopisov je, aby sa v strome úrokovej miery (z ktorého generujeme scenáre) nenachádzali arbitrážne príležitosti. Za predpokladu, že sú povolené krátke (záporné) pozície v dlhopisoch počas obchodovania a v čase $t = 0$ máme nula peňazí, maximum, čo z nich vieme vyrobiť na konci sledovaného obdobia pri ľubovoľnom scenári, musí byť znova nula. Ak by toto neplatilo, existovala by presne daná stratégia obchodovania s dlhopismi, pomocou ktorej by sme vedeli z nuly vyrobiť bezrizikový zisk. Potom by nám samozrejme nič nebránilo v tom, aby sme túto stratégiu zopakovali viackrát a zarobili ľubovoľne veľa. Naše optimalizácie by stratili zmysel.

Táto úloha slúži na vyhľadávanie arbitrážnych príležitostí v strome úrokových mier. Počiatočný kapitál je 0, sú povolené krátke pozície a pridali sme podmienku nezápornosti na koncový stav portfólia pri každom scenári.

Formulácia nearbitrážnej úlohy:

$$\begin{aligned}
 \text{MAX-A} & : \sum_{s \in S} p_s \cdot h^s \\
 \sum_{i \in U} F_{i,0} \cdot x_i & = 0 \\
 \sum_{i \in U} P_{i,1}^s \cdot x_i & = \sum_{i \in U} P_{i,1}^s \cdot y_i^s \\
 \sum_{i \in U} P_{i,2}^s \cdot y_i^s & = \sum_{i \in U} P_{i,2}^s \cdot z_i^s \\
 \sum_{i \in U} P_{i,3}^s \cdot z_i^s & = h^s \\
 h^s & \geq 0, \quad \forall s \in S \\
 x_i, y_i^s, z_i^s & \in \mathbb{R}, \quad i \in U
 \end{aligned}$$

Jediným správnym výsledkom, ktorý bude potvrdzovať nearbitrážnosť úrokov je $\sum_{s \in S} p_s \cdot h^s = 0$.

Kapitola 3

ZÁKLADNÉ PRINCÍPY MODELOV ÚROKOVEJ MIERY

Definícia 3.1 *Stochastický proces $S_n = \{S_n(t); t = 0, 1, \dots, T\}$ je parametrická množina náhodných veličín $S_n(t)$ definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pre $\forall t = 0, \dots, T$.*

Definícia 3.2 *Filtrácia na (Ω, \mathcal{F}) je systém $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ σ -algebier $\mathcal{M}_t = \mathcal{F}$, takých, že $\forall s, 0 \leq s \leq t$ platí $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$.*

Definícia 3.3 *Adaptovaný stochastický proces $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa nazýva martingal vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ a miere \mathbb{P} , ak*

- i) Z_t je \mathcal{M}_t merateľná pre $\forall t$
- ii) $E[|Z_t|] < \infty$
- iii) $E_P[Z_{t+s} | \mathcal{F}_t] = Z_t$, pre $\forall s, t \geq 0$

Časovú štruktúru úrokovej miery budeme modelovať pomocou stochastických procesov. Sústreďme sa na term structure modely, ktoré vychádzajú z určitých predpokladov pravdepodobnostného správania sa short-rate. Zavedieme nasledujúce predpoklady:

- Uvažujeme $T + 1$ časových okamžikov, v ktorých prebieha obchodovanie alebo spotreba, $t = 0, 1, \dots, T$.
- Ω je konečná množina s $K < \infty$ prvkami, ktoré nazývame udalosti alebo presne špecifikované stavy sveta v budúcnosti. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$
- \mathbb{P} je pravdepodobnostná miera na množine Ω , $P(\omega) > 0$ pre $\forall \omega \in \Omega$.
- Definujeme neklesajúci stochastický proces $B = \{B_t; t = 0, 1, \dots, T\}$, s $B_0 = 1$ a $B_t(\omega) > 0$ pre všetky t a ω . Na B môžeme nazerať ako na časovú hodnotu peňazí, ak v čase 0 depozitujeme 1 korunu. Miera výnosu z časového okamžiku $(t - 1, t)$ je potom definovaná ako $r_t = (B_t - B_{t-1})/B_{t-1} \geq 0, t = 1, \dots, T$.

V čase $t = 0$ je každá udalosť $\omega \in \Omega$ možnou. Niektoré udalosti sú viac pravdepodobnejšie ako iné, ale žiadna nie je istá. V čase $t = T$ vieme s určitou rozhodnosťou, ktorá udalosť nastala. Stochastický vývoj informácie v čase môžeme veľmi dobre popísať stromom, v ktorom bude existovať cesta z vrcholu v čase $t = 0$ do každého vrcholu v čase $t = T$. Od term structure modelov sa vyžadujú nasledovné vlastnosti:

1. Musia byť multiperiodické. Multiperiodické modely patria medzi široko používané vo finančnej praxi. Oproti jednoperiodickým modelom sa správajú oveľa realistickejšie.
2. Miera výnosu r musí sledovať striktné pozitívny, predvídateľný proces. Pod týmto budeme rozumieť, že úroková miera, pre bezrizikové požičiavanie, na časový interval $(t - \Delta t, t)$ je známa v čase $t - \Delta t$. Nazveme ju bezrizikový alebo okamžitý úrok (short-rate) r_t .
3. Definujeme τ , také že $1 \leq \tau \leq T$. Bezakupónový dlhopis s dobou splatnosti τ potom v čase τ vypláca jednotku hotovosti. Jeho cena v čase t je určená adaptovaným procesom $P(\cdot, \tau) = \{P(t, \tau); 0 \leq t \leq \tau\}$. Zrejme $P(\tau, \tau) = 1$. $P(t, \tau)$ nie je definované pre $t > \tau$.

V každom čase t existuje súbor bezakupónových dlhopisov $\{P(t, t+1), P(t, t+2), \dots, P(t, \tau)\}$, ktorý nazývame *časová štruktúra cien bezakupónových dlhopisov*. V term structure modeloch sa nesmú nachádzať žiadne arbitrážne príležitosti, musí preto existovať rizikovo-neutrálna pravdepodobnostná miera Q , pri ktorej sú diskontované ceny dlhopisov martingaly. Teda $Q(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$ je taká, že

$$P(s, \tau) = B_s E_Q[P(t, \tau)/B_t | \mathcal{F}_s], \quad 0 \leq s \leq t \leq \tau, \forall \tau \quad (3.1)$$

Ak si uvedomíme, že $P(t, \tau) = B_t/B_\tau$ a $B_t/B_s = (1 + r_{s+1}) \dots (1 + r_t)$, a položíme $t = \tau$ dostaneme dôležitý vzťah pre diskontný dlhopis, pri rizikovo-neutrálnej miere Q :

$$P(s, \tau) = E_Q[B_s/B_\tau | \mathcal{F}_s] = E_Q[1/\{(1 + r_{s+1}) \dots (1 + r_t)\} | \mathcal{F}_s], \quad 0 \leq s \leq \tau \quad (3.2)$$

Kedže $r_t > 0$, z rovnice 3.2 vidieť, že $P(s, \tau)$ je, pri fixovanom s , striktné klesajúcou funkciou τ . Ak zoberieme $\tau = s + 1$ dostaneme

$$r_{s+1} + 1 = \frac{1}{P(s, s+1)}, \quad s = 0, 1, \dots, T-1 \quad (3.3)$$

V term structure modeloch s určitosťou poznáme budúce hodnoty niektorých cenných papierov (napr. hodnotu bezakupónových dlhopisov v čase splatnosti). Najprv teda špecifikujeme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s rizikovo-neutrálnou pravdepodobnostnou mierou \mathbb{P} . Potom špecifikujeme proces pre okamžitú úrokovú mieru r (ktorej pravdepodobnostné správanie bude s ohľadom na \mathbb{P}). V konečnej fáze pomocou 3.2 dopočítame ceny bezakupónových dlhopisov. Term structure model bude takto konzistentný so súčasťou časovou štruktúrou úrokových mier a nemusí nás znepokojovať pravdepodobnostné správanie úrokových mier a bezakupónových dlhopisov v reálnom svete.

Kapitola 4

MODELY ČASOVEJ ŠTRUKTÚRY ÚROKOVÝCH MIER

Úroková miera ako taká je vo všeobecnosti ovplyvňovaná veľkým množstvom rozličných faktorov. Jedným z nich je aj doba splatnosti čiže maturita. Ako už bolo spomenuté, závislosť medzi výnosom bezkupónového dlhopisu a dobou splatnosti vyjadruje výnosová krivka. Avšak, ako sa mení čas, menia sa aj jednotlivé hodnoty úroku a navyše sa zvykne meniť aj samotný tvar krivky. V tejto kapitole sa budeme zaoberať modelmi, ktoré opisujú pravdepodobnostné správanie sa všetkých úrokových mier a sú spojené s pohybmi celej krivky. Rozlišujeme dva základné typy modelov:

Rovnovážne (equilibrium) modely, zvyčajne vychádzajú z predpokladov o ekonomických veličinách, z ktorých potom určia proces pre riziko-neutrálnu okamžitú úrokovú mieru (short-rate) r . Výstupom z modelu je potom počiatočná term structure. Príkladom rovnovážneho modelu je Vašíčkov model, ktorý vychádza z predpokladu stochastického vývoja úrokovej miery a bezarbitrážneho prístupu v ekonómii. Tieto modely sú formulované v riziko-neutrálnom svete a pre praktické použitie je potrebné ich nakalibrovať. To je aj hlavná nevýhoda týchto modelov, pretože nie vždy vystihujú počiatočnú výnosovú krivku dostatočne presne.

Nearbitrážne (no-arbitrage) modely, sa od rovnovážnych líšia tým, že pôvodná term structure je vstupom do modelu, takže tvar výnosovej krivky priamo ovplyvňuje budúci vývoj úrokových mier. To znamená, že ak je počiatočná term structure rastúca (klesajúca), vedie to k zvýšeniu (poklesu) r v riziko-neutrálnom svete. Výsledkom je, že model automaticky presne vystihuje súčasný stav.

Ďalej si odvodíme všeobecný nearbitrážny model. Použijeme túto symboliku:

$P(t, T)$: cena bezkupónového dlhopisu s dobou splatnosti T v čase t

$v(t, T)$: volatilita ceny $P(t, T)$

$F(t, T)$: okamžitá forwardová miera v budúcom okamžiku $\langle T, T + \Delta t \rangle$, dohodnutá v čase t

$r(t)$: okamžitá bezriziková úroková miera v čase t

$f(t, T_1, T_2)$: forwardová miera dohodnutá v čase t na obdobie $\langle T_1, T_2 \rangle$

$dz(t)$: diferenciál Wienerovho procesu

Cena $P(t, T)$ v riziko-neutrálnom svete sleduje tento proces:

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T)P(t, T)dz(t) \quad (4.1)$$

Volatilita $v(t, T)$, vo všeobecnosti, môže byť ľubovoľnou funkciou minulých ale i súčasných hodnôt P . V čase maturity dlhopisu však volatilita klesá k nule:

$$v(t, t) = 0$$

Vzťah medzi forwardovou mierou a cenou dlhopisu je určený nasledovne:

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln [P(t, T_1)] - \ln [P(t, T_2)]}{T_2 - T_1} \quad (4.2)$$

Úpravou 4.1 dostávame:

$$d \ln [P(t, T_1)] = \left[r(t) - \frac{v(t, T_1)^2}{2} \right] dt + v(t, T_1) dz(t)$$

a

$$d \ln [P(t, T_2)] = \left[r(t) - \frac{v(t, T_2)^2}{2} \right] dt + v(t, T_2) dz(t)$$

čo po dosadení do 4.2 dáva:

$$df(t, T_1, T_2) = \frac{v(t, T_2)^2 - v(t, T_1)^2}{2(T_2 - T_1)} dt + \frac{v(t, T_1) - v(t, T_2)}{T_2 - T_1} dz(t) \quad (4.3)$$

Vidíme, že v riziko-neutrálnom svete proces pre f závisí iba od volatilit v . Ak položíme $T_1 = T$ a $T_2 = T + \Delta t$, potom pre $\Delta t \rightarrow 0$ namiesto $f(t, T_1, T_2)$ môžeme písať $F(t, T)$. Ďalej sa nám výraz pri $dz(t)$ zmení na $v_T(t, T)$ a výraz pri dt zapíšeme ako $v(t, T)v_T(t, T)$, kde index označuje príslušnú parciálnu deriváciu. Dostávame:

$$dF(t, T) = v(t, T)v_T(t, T)dt - v_T(t, T)dz(t)$$

čo bez ujmy na všeobecnosti môžeme zapísať v tvare:

$$dF(t, T) = v(t, T)v_T(t, T)dt + v_T(t, T)dz(t) \quad (4.4)$$

Ak sú nám teda známe hodnoty $v(t, T)$ pre všetky t a T , vieme v riziko-neutrálnom svete určiť proces $F(t, T)$. Volatility $v(t, T)$ sú preto postačujúce pre definovanie jedno-faktorového modelu úrokovej miery. Naším cieľom je zostaviť model úrokovej miery, na základe exogénnej špecifikácie short-rate r_t . Odvodíme proces pre r_t z informácií o volatilitte ceny dlhopisu a počiatočnej term structure. Keďže:

$$F(t, t) = F(0, t) + \int_0^t dF(\tau, t) \quad \text{a} \quad r(t) = F(t, t)$$

dosadením do 4.4:

$$r(t) = F(0, t) + \int_0^t v(\tau, t)v_t(\tau, t)d\tau + \int_0^t v_t(\tau, t)dz(\tau)$$

Derivovaním výrazu podľa t a využitím, že $v(t, t) = 0$, dostaneme riziko-neutrálny proces pre r v čase t :

$$\begin{aligned} dr(t) = & F_t(0, t)dt + \left\{ \int_0^t [v(\tau, t)v_{tt}(\tau, t) + v_t(\tau, t)^2] d\tau \right\} dt + \\ & + \left\{ \int_0^t v_{tt}(\tau, t)dz(\tau) \right\} dt + [v_t(\tau, t)|_{\tau=t}] dz(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Tento proces pre r je plne konzistentý s riziko-neutrálnym procesom pre cenu dlhopisu 4.1, z ktorého sme vychádzali. Bližšie si popíšeme výrazy na pravej strane rovnice 4.5. Prvý výraz vyjadruje, že úrok r bude závisieť od počiatočného sklonu forwardovej krivky. Štvrtý výraz, že štandardná odchýlka r je $v_t(\tau, t)|_{\tau=t}$. Druhý a tretí výraz sú komplikovanejšie, hlavne v prípade ak $v(\tau, t)$ je stochastické. Volatilitu $v(\tau, t)$ musíme voliť tak, aby proces $r(t)$ bol Markovovský. Markovovské procesy totiž môžeme vyjadriť vo forme rekombinujúcich trinomických stromov s lineárne rastúcim počtom uzlov v čase. U ne-Markovovských procesov počet uzlov v strome rastie exponenciálne.

Špeciálnym prípadom je $v(\tau, t) = (T - t)\sigma$, kde σ je konštanta. Rovnica 4.5 sa nám takto redukuje na spojitú verziu Ho&Lee modelu

$$dr = [F_t(0, t) + \sigma^2 t] dt + \sigma dz(t)$$

Hull a White neskôr ukázali, že $r(t)$ spĺňa podmienku Markovovského procesu aj pre oveľa širšiu triedu nestochastických volatilit, ktoré vieme zapísať v tvare:

$$v(t, T) = x(t) [y(T) - y(t)]$$

Proces r má potom takýto všeobecný tvar:

$$dr = [\theta(t) - \phi(t)r] dt + \sigma(t)dz(t)$$

Zo zjednodušenej verzie tohto modelu budeme vychádzať pri výstavbe stromov úrokovej miery.

4.1 Hull-White model

V roku 1986 Ho&Lee publikovali prvý nearbitrážny model vo forme binomického stromu. Model bol skonštruovaný na oceňovanie množiny dhopisov bez požiadavky na explicitné preferencie investorovho zisku. Predpokladáme spojitú úročenie, short-rate r charakterizuje potom tento proces:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz$$

kde konštanta σ je štandardná odchýlka a funkcia $\theta(t)$ je volená tak, aby model presne vystihoval počiatočnú term structure. V rovnovážnych modeloch drift (koeficient pri dt) zvyčajne nezávisí od času. Rovnovážne modely preto môžeme previesť na nearbitrážne rozšírením driftovej časti o funkciu závislú od času. Takto vznikol aj známy Hull&White model rozšírením Vašíčkovho modelu* pridaním časovej závislosti do mean-reversion.

Jedno-faktorový Hull&White model bol publikovaný v roku 1990 [6]. Proces pre short-rate r , je definovaný nasledovne

$$dr = [\theta(t) - ar] dt + \sigma dz$$

kde a a σ sú konštanty, $\theta(t)$ je neznáma funkcia, ktorú môžeme vyjadriť analyticky v tvare:

$$\theta(t) = \frac{\partial}{\partial t} F(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (4.6)$$

kde $F(0, t)$ je forwardová miera v čase 0 na dobu t a poznáme ju z počiatočnej term structure.

Množina volatilit v modeli je určená oboma parametrami σ a a . To nám umožňuje pracovať s oveľa širšou škálou volatilit ako napríklad v modeli Ho&Lee. Volatilita ceny bezkupónového dlhopisu s dobou splatnosti T v čase t je

$$\frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(T-t)}]$$

Jednou z nevýhod modelu Hull-White je, že pripúšťa aj záporné úrokové miery. Tento nedostatok odstránime vhodným nastavením parametrov a a σ . Ďalej si popíšeme procedúru výstavby trinomického stromu pomocou Hull-White modelu.

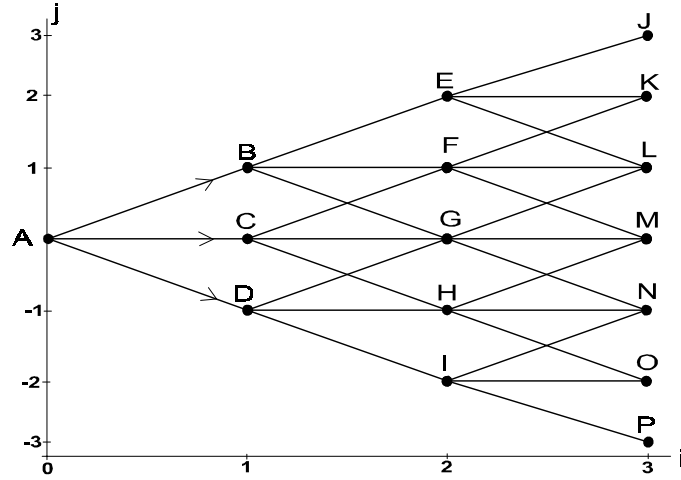
4.2 Trinomické stromy

Strom úrokovej miery je diskretnou reprezentáciou stochastického procesu short-rate r , podobne ako strom cien akcií reprezentuje proces, ktorý sleduje cena akcie. Hlavný rozdiel je v tom, že v stromoch s akciami zvyčajne uvažujeme konštantný diskontný úrok v každom uzle. V stromoch úrokovej miery je tento úrok pre každý uzol iný. Na reprezentáciu úrokových mier sa javia ako vhodnejšie trinomické stromy, ktoré oproti binomickým ponúkajú jeden stupeň voľnosti navyše. To nám umožní zohľadniť mean-reversion vlastnosť úrokových mier. Výstavbu stromu úrokovej miery rozdelíme do troch krokov.

Prvý krok

Všade budeme uvažovať spojitú úročenú. Časovým krokom v strome je Δt a budeme predpokladať, že úroková miera počas intervalu Δt (označme ju R) sleduje rovnaký stochastický proces ako okamžitý úrok r . Teda:

*Vašíčkov model: $dr = a(b - r) dt + \sigma dz$, kde a, b sú konštanty.



Obrázok 1 Ukážka trinomického rekombinujúceho stromu.

$$dR = [\theta(t) - aR] dt + \sigma dz \quad (4.7)$$

Začneme tým, že skonštruujeme najprv strom pre novú premennú R^* , ktorá je na začiatku nulová a sleduje tento proces:

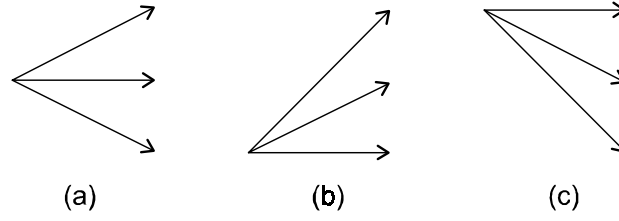
$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz \quad (4.8)$$

Proces R^* je symetrický okolo nuly a premenná $R^*(t + \Delta t) - R^*(t)$ má normálne rozdelenie (z vlastnosti Brownovho pohybu). Ak zanedbáme členy Δt vyššieho rádu, dostaneme, že stredná hodnota tejto premenej je $-aR^*(t)$ a variancia $\sigma^2 \Delta t$. Definujeme ΔR ako rozstup úrokov na strome v rovnakom časovom okamžiku. Parametre Δt a ΔR musia byť zvolené tak, aby sa hodnota ΔR nachádzala medzi $\sigma\sqrt{3\Delta t}/2$ a $2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Ako vhodné nastavenie z pohľadu minimalizácie chyby sa odporúča [7] :

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

Pre uzol (i, j) v strome potom dostaneme $R^* = j\Delta R$ a $t = i\Delta t$, ($i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$), kde t je časová premenná. V každom uzle trinomického stromu máme na výber tri možnosti prechodu do ďalšieho uzla. Definujeme si pravdepodobnosti prechodu hornou, strednou a dolnou vetvou v každom uzle ako p_u, p_m, p_d . Tieto pravdepodobnosti nastavíme tak, aby boli splnené podmienky strednej hodnoty a variance pre R^* v každom intervale Δt . Spolu s podmienkou, že súčet pravdepodobností v uzle sa musí rovnať 1, dostaneme tri rovnosti pre štandardný strom (vetvenie typu a) :

$$\begin{aligned} p_u \Delta R - p_d \Delta R &= -aj \Delta R \Delta t \\ p_u \Delta R^2 + p_d \Delta R^2 &= \sigma^2 \Delta t + a^2 j^2 \Delta R^2 \Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d &= 1 \end{aligned}$$



Obrázok 2 Tri spôsoby vetvenia v trinomickom strome.

Ak dosadíme za $\Delta R^2 = 3\sigma^2 \Delta t$, dostaneme riešenie

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - aj \Delta t}{2} \\ p_m &= \frac{2}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 \\ p_d &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + aj \Delta t}{2} \end{aligned}$$

Všimnime si, že pravdepodobnosti v uzloch závisia iba od j a nie od i , teda nie od časového okamžiku, ale iba od polohy uzla v strome. Taktiež pravdepodobnosti v strome sú symetricky rozdelené, teda napríklad pravdepodobnosti v uzle B sú rovnaké ako v uzle D .

V strome musíme zvoliť vhodné vetvenie (pozri obrázok 2) tak, aby všetky pravdepodobnosti v strome boli pozitívne. Pre väčšinu prípadov je štandardné vetvenie a) postačujúce. V prípade, že parameter $a > 0$ (mean-reversion), odporúča sa [1] stanoviť maximálnu šírku stromu (označme ju j_{\max}), na najmenšie celé číslo väčšie ako $0.184/(a\Delta t)$. Vo všetkých uzloch (i, j_{\max}) sa potom mení vetvenie na typ c). Príslušné pravdepodobnosti v tomto uzle nastavíme takto:

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - 3aj \Delta t}{2} \\ p_m &= -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 + 2aj \Delta t \\ p_d &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - aj \Delta t}{2} \end{aligned}$$

Taktiež definujeme $j_{\min} = -j_{\max}$ a v uzloch (i, j_{\min}) sa potom mení vetvenie na typ b).a pravdepodobnosti nastavíme takto:

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + aj \Delta t}{2} \\ p_m &= -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2aj \Delta t \\ p_d &= \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + 3aj \Delta t}{2} \end{aligned}$$

Takto sme dostali strom, ktorý reprezentuje proces R^* a v ktorom máme správne nastavené riziko-neutrálne pravdepodobnosti v každom uzle.

Druhý krok

V tejto časti výstavby ide o zmenu stromu pre proces R^* na proces R . Štruktúra stromu zostane zachovaná, akurát úroky v uzloch musíme nastaviť tak, aby presne vystihovali súčasnú term structure. Definujeme si novú premennú α :

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t) \quad (4.10)$$

použitím rovníc 4.7 a 4.8 môžeme α napísať takto:

$$d\alpha = [\theta(t) - a\alpha(t)] dt$$

Ak vychádzame z predpokladu, že r aj R sleduje ten istý proces, použitím 4.6 dostaneme riešenie pre α :

$$\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (4.11)$$

To nám stačí na to, aby sme zo stromu pre R^* pripočítaním $\alpha(t)$ vytvorili strom pre R . Tento jednoduchý prístup však nie je dostatočne presný, čo spôsobí, že strom úrokových mier nebude spĺňať podmienku nearbitráže.

Použijeme preto presnejšiu iteratívnu metódu výpočtu $\alpha(t)$. Tento spôsob je oveľa všeobecnejší a môže byť použitý pre všetky stromy, nielen v prípade, keď funkciu $\theta(t)$ vieme vyjadriť analyticky.

Definujeme $\alpha_i(t) = R(t) - R^*(t)$, pre $t = i\Delta t$. Definujeme $Q_{i,j}$ ako súčasnú (v čase $t = 0$) hodnotu cenného papiera, ktorý vypláca jednu korunu vtedy, ak je v čase $t = i\Delta t$ dosiahnutý uzol (i, j) , inak nič. Hodnota $Q_{0,0} = 1$ a úrok α_0 na periódu Δt poznáme z počiatočnej term structure. Ukážeme si spôsob ako napočítať hodnoty α_i a $Q_{i,j}$ tak, aby v strome neboli arbitrážne príležitosti, a aby presne vystihoval súčasnú časovú štruktúru.

Predpokladajme teraz, že poznáme všetky $Q_{i,j}$ do času $i \leq m$, ($m \geq 0$). Nasledujúcim krokom je určenie hodnoty α_m . Cenu bezkupónového dlhopisu, vypísaného v čase 0, s dobou splatnosti $(m+1)\Delta t$, označme P_{m+1} . Ak α_0^{m+1} je príslušná úroková miera na obdobie $(m+1)$ v čase $t = 0$, potom:

$$P_{m+1} = e^{-(m+1)\alpha_0^{m+1}\Delta t} \quad (4.12)$$

Cenu toho istého dlhopisu vieme napísať aj pomocou α_m . Úroková miera v uzle (m, j) je $\alpha_m + j\Delta r$. Teda:

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t} \quad (4.13)$$

kde n_m je šírka stromu (počet uzlov na každej strane od stredového uzla) v čase $m\Delta t$. Úpravou 4.13 dostaneme:

$$\alpha_m = \frac{\sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t} - \ln(P_{m+1})}{\Delta t}$$

Dosadením za P_{m+1} z 4.12 získame α_m . Následne môžeme určiť hodnoty $Q_{i,j}$, pre $i = m + 1$:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} e^{-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t} q(k, j)$$

kde $q(k, j)$ je pravdepodobnosť prechodu z uzla (m, k) do uzla $(m + 1, j)$ a sumujeme cez všetky k , pre ktoré je táto hodnota nenulová.

Postup opakujeme až dostaneme vyjadrenie short-rate v každom uzle stromu. Pre naše účely však potrebujeme poznať celú term structure v každom uzle stromu, nielen hodnotu short-rate, aby sme vedeli oceniť dlhopisy s rôznou maturitou.

Tretí krok

V tejto poslednej časti si ukážeme, ako z informácií o short-rate dorátame v každom uzle stromu ďalšie úroky v časovej štruktúre. Postupovať budeme tak, že najprv vyrátame úrok na obdobie $2\Delta t$ v každom uzle, následne úrok na obdobie $3\Delta t$ atď. Predpokladajme, že je nám známy úrok na obdobie $(m - 1)\Delta t$, ($m \geq 2$) v celom strome. Úrok na obdobie $m\Delta t$ v uzle (i, j) označme γ^m . Z uzla (i, j) sa vieme dostať do susedných uzlov $(i + 1, j + 1)$, $(i + 1, j)$, $(i + 1, j - 1)$. Nech p_1, p_0, p_{-1} sú príslušné pravdepodobnosti prechodu a označme $\beta_1^{m-1}, \beta_0^{m-1}, \beta_{-1}^{m-1}$ úroky na obdobie $(m - 1)\Delta t$ v týchto uzloch. Hodnotu γ^m určíme tak, aby sme správne ocenili bezkupónový dlhopis vypísaný v čase $i\Delta t$, ktorý vypláca jednotku v čase $(m + i)\Delta t$. Využijeme to, že cena toho dlhopisu z pohľadu susedného uzla $(i + 1, j)$ je $e^{-(m-1)\beta_0^{m-1}\Delta t}$. Nech α_i je hodnota short-rate v uzle (i, j) pre cenu dlhopisu dostaneme:

$$e^{-m\gamma^m \Delta t} = p_1 e^{-(\alpha_i + (m-1)\beta_1^{m-1})\Delta t} + p_0 e^{-(\alpha_i + (m-1)\beta_0^{m-1})\Delta t} + p_{-1} e^{-(\alpha_i + (m-1)\beta_{-1}^{m-1})\Delta t}$$

z toho už potom ľahko vyjadríme γ^m

$$\gamma^m = \frac{\alpha_i}{m} - \frac{\ln \left[p_1 e^{-(m-1)\beta_1^{m-1}\Delta t} + p_0 e^{-(m-1)\beta_0^{m-1}\Delta t} + p_{-1} e^{-(m-1)\beta_{-1}^{m-1}\Delta t} \right]}{m\Delta t}$$

Týmto spôsobom dorátame časovú štruktúru v každom uzle. Pritom platí, že ak chceme určiť úrok v uzle (i, j) na obdobie $m\Delta t$, musíme mať strom aspoň dĺžky $(m + i)$.

Kapitola 5

PRAKTICKÁ ČASŤ

V tejto kapitole prezentujeme výsledky optimalizácie portfólia dlhopisov. Na modelovanie budúceho vývoja úrokovej miery sme použili Hull-White model. Stochastický vývoj úrokovej miery vyjadríme v podobe trinomického stromu (pozri obrázok 1). Údaje o term structure v každom uzle stromu vidieť v tabuľke na obrázku 2. Každú cestu z uzla A do niektorého z uzlov J, K, L, M, N budeme nazývať *scenárom* úrokovej miery. Jednotlivým scenárom vieme priradiť pravdepodobnosť nastatia. Pri každom prevedenom experimente, nás zaujímajú tieto výsledky:

1. *Priemerný výnos* portfólia počas sledovaného obdobia. Ak p^s je pravdepodobnosť scenára $s \in S$ a v_T^s je hodnota nášho portfólia na konci pri danom scenári s , potom priemerným výnosom budeme nazývať:

$$E[v_T] = \sum_{s \in S} p^s v_T^s$$

2. *Rozptyl* výnosov portfólia pri jednotlivých scenároch určíme ako štandardnú odchýlku, z hodnôt v_T^s :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{s \in S} p^s (v_T^s - E[v_T])^2}$$

3. *Užitočnosť*, v prípade kvadratických funkcií nás bude zaujímať hodnota úžitku, vzhľadom na parameter α :

$$E[U(v_T)] = \sum_{s \in S} p^s \left[v_T^s - \frac{1}{2} \alpha (v_T^s)^2 \right]$$

4. V každom experimente sledujeme zloženie portfólia v čase $t = 0$.

Optimalizačnú úlohu riešime pre tri typy úloh, použijeme modely, ktoré sme naformulovali v kapitole 2:

Úloha LP : Maximalizujeme priemerný výnos, model MAX-LP.

Úloha QP: Maximalizujeme úžitok pri danej miere rizika (parameter α), model MAX-QP.

Úloha QP+SP: Úloha QP rozšírená o možnosť krátkych pozícií (short position) počas obchodovania. To znamená, že povolíme, aby sa v portfóliu nachádzali aj záporné množstvá dlhopisov.

Každý experiment pre úlohy QP prevedieme pri rôznych hodnotách parametra α . Na začiatku vždy začíname so 100 korunami a jedná sa o obdobie 3 rokov. Hodnota $\frac{1}{120}$ teda bude charakterizovať investora minimalizujúceho riziko, hodnota $\frac{1}{130}$ reprezentuje investora so zdravou túžbou po zisku a nakoniec hodnota $\frac{1}{150}$ riziko-obľubujúceho investora. Najviac nás budú zaujímať výsledky, ktoré dosiahneme pre $\alpha = \frac{1}{130}$. Do portfólia vyberáme z troch bezkupónových dlhopisov, s nominálnou hodnotou 1 a maturitami 3, 5 a 10 rokov.

Úrokové miery v strome sú napočítané tak, že strom nepripúšťa arbitrážne príležitosti. Túto vlastnosť sme otestovali pomocou modelu MAX-A. V uzloch stromu nastavíme pravdepodobnosti p_u, p_m, p_d inak, takto sa nearbitrážnosť stromu zachová, a skúmame dôsledky tejto zmeny na skladbu a výnos portfólia. Uvažujeme množinu 27 scenárov vývoja úrokovej miery.

Experiment 25/50/25: Tento experiment si popíšeme detailnejšie. Pravdepodobnosti v uzloch stromu nastavíme nasledovne: $p_u = 0.25, p_m = 0.5, p_d = 0.25$, teda simulujeme prípad, kedy nepredpokladáme, výrazný rast ani pokles úrokových mier. Parameter α je nastavený na $\frac{1}{130}$. Výsledky experimentu sú zobrazené v obrázku 3. V ľavej časti tabuľky je 27 scenárov zapísaných ako cesty v strome (obrázok 1) a ich pravdepodobnosť nastatia. V ďalších stĺpcoch potom vidíme výnos portfólia pri jednotlivých scenároch v rôznych úlohách. V dolnej časti tabuľky sú uvedené výsledky optimalizácie. Vidíme, že najvyšší výnos sme dosiahli v úlohe QP+SP a najmenší rozptyl (teda aj riziko) v úlohe QP. Zloženie portfólia na začiatku je pre každú úlohu iné. Riešením je samozrejme kompletná stratégia, ktorá popisuje ako máme reagovať na zmenu úrokovej miery v jednotlivých uzloch stromu, pozri obrázok 4.

Ďalšie experimenty sme previedli pri rôznych nastaveniach p_u, p_m, p_d v uzloch a skúmali sme aj vplyv parametra α na výsledok úloh QP a QP+SP. Súhrnné výsledky sú zobrazené v obrázku 5. Zvolili sme nasledujúce nastavenie pravdepodobností ($p_u/p_m/p_d$):

Experiment RN: v strome sme nechali pôvodné riziko-neutrálne pravdepodobnosti. Tento experiment uvádzame iba pre porovnanie.

Experiment 40/20/40: zvýraznili sme scenáre vývoja úrokovej miery, ktoré predstavujú rast alebo pokles úrokov. V tomto prípade sme dosiahli najlepšie výsledky (vysoký výnos a malý rozptyl) v úlohe QP+SP.

Experiment 33/33/33: pravdepodobnosti v uzloch sú nastavené rovnomerne v celom strome a každý scenár má rovnakú pravdepodobnosť nastatia.

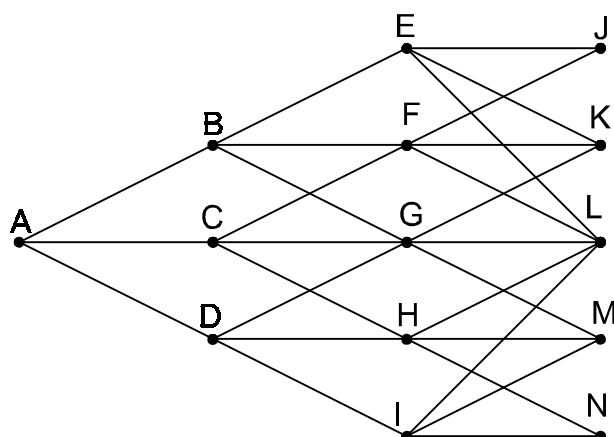
Experiment 20/30/50: simulujeme situáciu, keď očakávame pokles úrokov v budúcnosti. Z teórie vieme, že pokles úrokov je spojený s rastom cien dlhopisov a investícia do dlhých dlhopisov je tomto prípade najlepším riešením. V úlohách LP a QP dosahujeme najväčšie výnosy práve v tomto experimente. Zloženie

portfólia na začiatku v prípade úlohy LP jasne ukazuje investíciu do 10 ročného dlhopisu.

Experiment B&H: chceli sme overiť, či priebežne rebalancované portfólio je naozaj výhodou a prináša vyšší výnos na konci, v porovnaní so stratégiou buy&hold. Modely MAX-LP a MAX-QP sme zjednodušili a spravili z nich buy&hold modely. Model MAX-QP sa nám v tomto prípade redukuje na mean-variance model, kde ku zadanej miere rizika (volatility), hľadáme maximálny zisk. Experimenty sme previedli za rovnakých počiatočných podmienok. Výsledky sú v poslednom obrázku 6.

Zhrnutie a význam experimentov:

1. Priemerný výnos v úlohe QP je vždy o niečo menší ako v úlohe LP. Na druhej strane rozptyl výnosov je oveľa vyšší v úlohach LP. V kvadratickom modeli môžeme parametrom α regulovať náš celkový výnos z portfólia. Vhodným nastavením dosiahneme stabilnejšie výnosy, menej citlivé od budúceho vývoja úrokových mier.
2. Pre veľmi malé hodnoty α sa úloha QP redukuje na LP, preto sa výsledky úlohy QP pre menšie hodnoty α približujú výsledkom LP.
3. Priemerný výnos v úlohe QP+SP je stále vyšší v porovnaní s QP pre dané α . Možnosť ísť do krátkych pozícií v dlhopisoch je totiž výhodou a umožňuje spraviť vyšší výnos. Tu by sme mohli zvážiť možnosť ohraničenia našej zápornej pozície, aby sme sa vyhli príliš vysokým záporným pozíciám.
4. Úloha LP sa zrúti v prípade, ak pripustíme krátke pozície v modeli MAX-LP.
5. Začiatkové pozície v portfóliu LP a QP nie sú vo všetkých prípadoch rovnaké. Na základe toho môžeme povedať, že výsledkom úloh LP a QP sú rozličné stratégie obchodovania.
6. Úlohy QP a QP+SP sú citlivé na výber parametra α , s menším α (vyššie akceptovateľné riziko) rastie výnos, úzitočnosť aj rozptyl.
7. Ukázali sme, že modely s rebalancovaním portfólia dávajú vyššie výnosy pri rovnakých počiatočných podmienkach ako modely, ktoré sledujú stratégiu buy&hold.

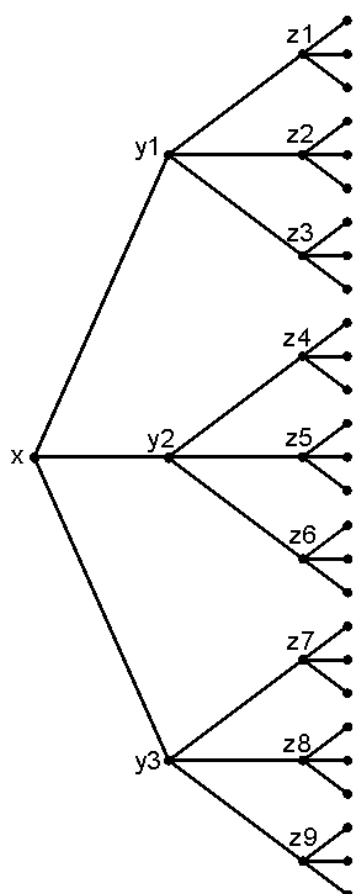
Obrázok 1 **Strom úrokovej miery šírky 2 a dĺžky 3.**

perióda	uzol	Term Structure (v %)									
	rok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	A	4.72	4.99	5.07	5.08	5.09	5.24	5.38	5.33	5.28	5.23
	1	B	7.00	6.90	6.78	6.69	6.78	6.86	6.73	6.61	6.49
		C	5.26	5.25	5.21	5.20	5.36	5.51	5.44	5.37	5.31
		D	3.53	3.61	3.65	3.71	3.94	4.16	4.15	4.14	4.13
2	E	8.71	8.49	8.32	8.37	8.41	8.19	7.99	7.80		
	F	6.98	6.84	6.76	6.88	6.99	6.84	6.70	6.57		
	G	5.25	5.20	5.19	5.39	5.57	5.49	5.41	5.34		
	H	3.52	3.55	3.63	3.91	4.16	4.13	4.12	4.11		
	I	1.78	1.91	2.06	2.42	2.74	2.78	2.83	2.87		
3	J	8.62	8.46	8.58	8.65	8.39	8.16	7.95			
	K	6.88	6.82	7.02	7.16	6.97	6.81	6.66			
	L	5.15	5.17	5.46	5.67	5.55	5.45	5.37			
	M	3.42	3.53	3.89	4.18	4.13	4.10	4.08			
	N	1.69	1.88	2.33	2.69	2.71	2.75	2.79			

Obrázok 2 **Term structure v jednotlivých uzloch stromu.** Počiatočná TS je v uzle A. Nastavenie modelu Hull&White: $dt = 1$, $a = 0.1$, $\sigma = 0.01$

25/50/25			alfa=1/130	
scenár	pp	LP	QP	QP+SP
A B E J	1.56%	114.18	111.69	120.35
A B E K	3.13%	124.97	122.25	129.60
A B E L	1.56%	136.79	133.81	129.26
A B F J	3.13%	116.43	115.59	125.91
A B F K	6.25%	116.43	115.59	119.06
A B F L	3.13%	116.43	115.59	122.57
A B G K	1.56%	106.22	117.24	126.11
A B G L	3.13%	116.27	117.42	123.00
A B G M	1.56%	127.26	117.62	126.14
A C F J	3.13%	107.17	116.41	125.97
A C F K	6.25%	107.17	116.41	118.79
A C F L	3.13%	107.17	116.41	122.58
A C G K	6.25%	106.06	116.21	118.58
A C G L	12.50%	116.09	116.41	107.06
A C G M	6.25%	127.06	116.62	118.58
A C H L	3.13%	116.09	113.94	122.26
A C H M	6.25%	127.06	116.65	118.46
A C H N	3.13%	139.07	119.62	125.77
A D G K	1.56%	98.58	114.64	125.97
A D G L	3.13%	107.90	114.85	122.75
A D G M	1.56%	118.10	115.09	126.00
A D H L	3.13%	107.90	114.96	121.99
A D H M	6.25%	118.10	117.50	118.34
A D H N	3.13%	129.26	120.28	125.57
A D I L	1.56%	127.11	119.90	129.12
A D I M	3.13%	127.11	119.90	129.64
A D I N	1.56%	127.11	119.90	119.08
<i>Rozptyl</i>		8.98	2.81	6.14
<i>Výnos</i>		117.55	117.06	120.33
<i>Užitočnosť</i>		0.00	64.33	64.50
v čase 0	<i>dlhopis1</i>	116.43	107.68	7477
	<i>dlhopis2</i>	0.00	0.00	-12826
	<i>dlhopis3</i>	0.00	12.68	6111

Obrázok 3 Výsledky experimentu 25/50/25. Výnos portfólia pri jednotlivých scenároch.



perióda	Uzol	LP	QP	QP+SP
		116.43	107.68	7477
1	x	0.00	0.00	-12826
		0.00	12.68	6111
2	y1	116.43	93.87	1713
		0.00	0.00	-2890
		0.00	34.26	1479
	y2	0.00	116.41	7979
		0.00	0.00	-13713
		169.06	0.00	6543
	y3	0.00	86.26	1908
		0.00	0.00	-2990
		157.13	41.60	1326
3	z1	0.00	0.00	-3236
		0.00	0.00	5976
		199.21	194.87	-2946
	z2	116.43	115.59	3628
		0.00	0.00	-6289
		0.00	0.00	3154
	z3	0.00	115.33	2230
		0.00	0.00	-3674
		169.33	3.04	1755
	z4	107.17	116.41	3831
		0.00	0.00	-6655
		0.00	0.00	3339
	z5	0.00	114.15	7872
		0.00	0.00	-13535
		169.06	3.29	6466
	z6	0.00	85.25	3843
		0.00	0.00	-6316
		169.06	41.78	2876
z7	0.00	112.34	2302	
	0.00	0.00	-3799	
	157.13	3.66	1815	
z8	0.00	88.10	3762	
	0.00	0.00	-6181	
	157.13	39.12	2816	
z9	127.11	119.90	-3448	
	0.00	0.00	6129	
	0.00	0.00	-2840	

Obrázok 4 **Kompletná stratégia obchodovania v experimente 25/50/25.** V každom uzle poznáme zloženie nášho portfólia. Treba si uvedomiť, že na konci (v čase $t = 3$) máme 27 rôznych stavov pre množinu cien dlhopisov, ale iba 9 možných stavov zloženia nášho portfólia, z1 až z9.

RN	alfa=1/120		alfa=1/130		alfa=1/150		
	LP	QP	QP+SP	QP	QP+SP	QP	QP+SP
<i>Rozptyl</i>	4.56	0.60	1.11	2.21	4.40	3.85	10.89
<i>Výnos</i>	117.05	116.53	116.81	116.81	118.05	117.02	120.44
<i>Užitočnosť</i>		59.95	59.95	64.31	64.38	71.33	71.69
<i>dĺhopsis1</i>	116.43	116.43	-943.10	116.43	-4447.10	116.43	-11177.00
<i>dĺhopsis2</i>	0.00	0.00	1852.60	0.00	7974.90	0.00	19735.00
<i>dĺhopsis3</i>	0.00	0.00	-887.90	0.00	-3818.40	0.00	-9449.00

25/50/25	alfa=1/120		alfa=1/130		alfa=1/150		
	LP	QP	QP+SP	QP	QP+SP	QP	QP+SP
<i>Rozptyl</i>	8.98	0.77	1.60	2.81	6.14	4.45	15.19
<i>Výnos</i>	117.55	116.60	117.42	117.06	120.33	117.33	126.07
<i>Užitočnosť</i>		59.95	59.96	64.33	64.50	71.38	72.32
<i>dĺhopsis1</i>	116.43	113.91	1818.80	107.68	7477.00	115.38	18454.00
<i>dĺhopsis2</i>	0.00	0.00	-2966.30	0.00	-12826.00	0.00	-31953.00
<i>dĺhopsis3</i>	0.00	3.65	1413.10	12.68	6111.00	1.52	15223.00

40/20/40	alfa=1/120		alfa=1/130		alfa=1/150		
	LP	QP	QP+SP	QP	QP+SP	QP	QP+SP
<i>Rozptyl</i>	10.77	1.05	1.21	3.96	3.70	5.71	9.14
<i>Výnos</i>	118.60	116.77	119.53	117.70	128.90	118.14	147.29
<i>Užitočnosť</i>		59.95	59.99	64.36	64.94	71.51	74.70
<i>dĺhopsis1</i>	116.43	111.29	3580.00	97.17	15288.00	96.72	37760.00
<i>dĺhopsis2</i>	0.00	0.00	-6038.00	0.00	-26448.00	0.00	-65624.00
<i>dĺhopsis3</i>	0.00	7.45	2878.90	27.92	12610.00	28.57	31289.00

33/33/33	alfa=1/120		alfa=1/130		alfa=1/150		
	LP	QP	QP+SP	QP	QP+SP	QP	QP+SP
<i>Rozptyl</i>	10.03	0.93	1.63	3.49	6.21	5.13	15.36
<i>Výnos</i>	118.11	116.69	118.93	117.40	125.95	117.74	139.98
<i>Užitočnosť</i>	0.00	59.95	59.98	64.34	64.79	71.44	73.88
<i>dĺhopsis1</i>	116.43	112.26	3671.20	100.97	13532.00	103.77	33025.00
<i>dĺhopsis2</i>	0.00	0.00	-6197.00	0.00	-23387.00	0.00	-57369.00
<i>dĺhopsis3</i>	0.00	6.04	2954.80	22.40	11151.00	18.35	27352.00

20/30/50	alfa=1/120		alfa=1/130		alfa=1/150		
	LP	QP	QP+SP	QP	QP+SP	QP	QP+SP
<i>Rozptyl</i>	12.07	1.76	1.51	6.11	5.58	12.07	13.79
<i>Výnos</i>	125.39	117.94	119.18	121.39	127.08	125.39	142.78
<i>Užitočnosť</i>	0.00	59.97	59.99	64.57	64.85	72.50	74.19
<i>dĺhopsis1</i>	0.00	93.41	3459.50	45.49	13813.00	0.00	33859.00
<i>dĺhopsis2</i>	0.00	0.00	-5839.60	0.00	-23923.00	0.00	-58932.00
<i>dĺhopsis3</i>	168.78	33.37	2793.90	102.83	11443.00	168.78	28189.00

Obrázok 5 Výsledky experimentov, pri rôznych nastaveniach pravdepodobností v uzloch stromu.

40/20/40		1/120	1/130	1/250	1/1300
	LP	QP	QP	QP	QP
<i>Rozptyl</i>	12.64	0.04	0.16	1.53	12.64
<i>Výnos</i>	116.57	116.43	116.43	116.45	116.57
<i>Užitočnosť</i>	0.00	59.95	64.29	89.32	111.28
<i>dlhopis1</i>	0.00	116.05	114.99	102.32	0.00
<i>dlhopis2</i>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>dlhopis3</i>	168.78	0.55	2.08	20.46	168.78

33/33/33		1/120	1/130	1/250	1/1700
	LP	QP	QP	QP	QP
<i>Rozptyl</i>	12.16	0.03	0.11	1.04	12.16
<i>Výnos</i>	116.52	116.43	116.43	116.44	116.52
<i>Užitočnosť</i>	0.00	59.95	64.29	89.32	112.49
<i>dlhopis1</i>	0.00	116.16	115.42	106.50	0.00
<i>dlhopis2</i>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>dlhopis3</i>	168.78	0.38	1.46	14.39	168.78

20/30/50		1/120	1/130	1/150
	LP	QP	QP	QP
<i>Rozptyl</i>	11.82	1.62	6.14	11.82
<i>Výnos</i>	123.92	117.45	120.32	123.92
<i>Užitočnosť</i>	0.00	59.96	64.49	72.27
<i>dlhopis1</i>	0.00	100.52	56.00	0.00
<i>dlhopis2</i>	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>dlhopis3</i>	168.78	23.06	87.60	168.78

Obrázok 6 **Výsledky experimentov pri použití modelov typu Buy&Hold.** Pri tejto stratégii dosahujeme nižší výnos ako v modeloch s rebalancovaním.

Záver

Diplomová práca bola venovaná optimalizáciám dlhopisových portfólií. Predstavili sme modely, ktorých riešením je kompletná stratégia obchodovania počas sledovaného obdobia s cieľom dosiahnuť, čo najvyšší výnos. Použili sme modely s lineárnou a kvadratickou maximalizačnou funkciou, s lineárnymi ohraničeniami. Ceny dlhopisov priamo závisia od aktuálnych úrokov. Pri optimalizácií sme preto uvažovali s množinou pravdepodobných scenárov vývoja úrokovej miery. V práci sme podrobne opísali výstavbu trinomických stromov úrokovej miery použitím jedno-faktorového modelu Hull-White.

Generovanie scenárov úrokovej miery aj modely pre optimalizáciu sme podľa uvedenej teórie naprogramovali v systéme Matlab. Výpis programu je uvedený v prílohe tejto práce. V experimentoch sme ukázali, že má zmysel používať kvadratické funkcie užitočnosti, pretože poskytujú možnosť regulovať naše riziko pri investovaní a tým dosiahnuť stabilnejšie výnosy z portfólia. V kvadratických modeloch tiež môžeme povoliť krátke pozície v dlhopisoch. Potvrdili sme, že modely s rebalancovaním portfólia nám umožňujú dosiahnuť vyšší zisk v porovnaní s modelmi typu buy&hold.

V budúcnosti by sme mohli otestovať aj iné typy funkcií užitočnosti, museli by sme si však rozmyslieť, aký by to malo význam a z numerickej stránky, či by sme dokázali optimalizovať takéto úlohy.

Literatúra

- [1] J.C.Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall, fourth edition, 2000
- [2] M.W.Baxter, A.J.O. Rennie, *Financial Calculus - An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] Stanley R.Pliska, *Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models*, Blackwell Publishers 1997.
- [4] Soren S.Nielsen, *Mathematical Modeling and Optimization with Applications in Finance*, 1997
- [5] M.Musiela, M.Rutkowski, *Martingal Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, New York, second edition, 1998
- [6] J.Hull, A.White, *Pricing Interest Rate Derivative Securities*, 1990
- [7] J.Hull, A.White, *One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities*, The Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1993
- [8] J.Cox, J.Ingersoll, S.Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, 1985
- [9] I. Luknár, *Optimalizácia portfólia dlhopisov pri stochastickom vývoji úrokových mier*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2002
- [10] M. Alexová, *Dvojfaktorové modely derivátov úrokových mier so stochastickou volatilitou*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2002
- [11] M. Vojtek, *Stochastické modely úrokovej miery a ich kalibrácia na trhové dáta*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 2001
- [12] J.Kotian, *Vyhľadávanie arbitrážnych príležitostí na výnosovej krivke*, Bratislava, Diplomová práca FMFI UK, 1999

Prílohy

V prílohe uvádzame výpis programu vytvoreného v systéme MATLAB 5.3, v ktorom sme vykonali všetky experimenty. Program je rozdelený do 2 častí.

Program *stromy.m* generuje strom úrokovej miery. Vstupom je počiatočná term structure. Nastavíme tiež príslušnú hodnotu časového kroku a vhodnú dĺžku a šírku stromu. Výsledkom je term structure v každom uzle stromu.

V programe *max.m* potom prebieha samotná optimalizácia portfólia dlhopisov. Vstupom môže byť ľubovoľná množina bezkupónových dlhopisov. Maturita dlhopisu nesmie byť väčšia, ako je dĺžka stromu, aby sme ho vedeli oceniť. Výsledky experimentov sú zhrnuté v piatej kapitole.

```

% MARTIN GUZI 2003
% OPTIMALIZACIA DLHOPISOV, diplomova praca FMFI UK
% stromy.m (1/2)

period=9; % 9 period v stome mi umozni ocenit 10 rocny dlhopis
jmax=2; % max sirka stromu
a=0.1; % mean-reversion level
dt=1; % casovy krok v rokoch
sigma=0.01; % volatilita
dR=sigma*sqrt(3*dt); % urokovy krok
% pocet vrcholov v strome
node=0;
for i=0:period
    if i<=jmax node=node+(2*i+1);
    else node=node+jmax*2+1;
    end
end

clear urok; % pociatocna term structure
%rocne uroky
urok(1,:)=[4.7200 4.9900 5.0700 5.0815 5.0930 0 5.3800 0 0 5.2340];
urok(1,6)=1/2*urok(1,5)+1/2*urok(1,7);
urok(1,8)=2/3*urok(1,7)+1/3*urok(1,10);
urok(1,9)=1/3*urok(1,7)+2/3*urok(1,10);
urok=urok/100;
%generujem stlpce 1-6 v matici tree [cislo_uzlu i j dosiahnutelne_uzly]
tree=zeros(node,10);
tree(:,1)=(1:node)';
poz=1;
for i=1:(period+1)
    if (i)<=jmax tree(poz:(poz+2*i-2),2)=i-1;
        tree(poz:(poz+2*i-2),3)=-((1-i):(i-1))';
        poz2=poz+(2*i-1);
        for ii=0:(2*i-2) tree(poz+ii,4:6)=(poz2+ii):(poz2+ii+2);
        end
        poz=poz+(2*i-1);
    else tree(poz:(poz+jmax*2),2)=i-1;
        tree(poz:(poz+jmax*2),3)=-(-jmax:jmax)';
        poz2=poz+jmax*2+1;
        for ii=1:(2*jmax-1)
            if ii==1 tree(poz,4:6)=(poz2+ii-1):(poz2+ii+1);
            end
            if ii==(2*jmax-1) tree(poz+ii+1,4:6)=(poz2+ii-1):(poz2+ii+1);
            end
            tree(poz+ii,4:6)=(poz2+ii-1):(poz2+ii+1);
        end
        poz=poz+jmax*2+1;
    end
end
%generujem pravdepodobnosti v uzloch stromu, stlpce 7-9 v matici tree
tree(node+1,2)=100;
for i=1:node
    pom=a*tree(i,3)*dt;
    if (tree(i,2)>=jmax) & (tree(i,2)>tree(i-1,2))
        tree(i,7)=7/6+(pom^2-3*pom)/2;
        tree(i,8)=-1/3-pom^2+2*pom;
        tree(i,9)=1/6+(pom^2-pom)/2;
    elseif (tree(i,2)>=jmax) & (tree(i,2)<tree(i+1,2))
        tree(i,7)=1/6+(pom^2+pom)/2;
        tree(i,8)=-1/3-pom^2-2*pom;
        tree(i,9)=7/6+(pom^2+3*pom)/2;
    else
        tree(i,7)=1/6+(pom^2-pom)/2;
        tree(i,8)=2/3-pom^2;
        tree(i,9)=1/6+(pom^2+pom)/2;
    end
end

```

```
end
end
```

stromy.m (2/2)

```
%pociatocne udaje - hodnota Q a shorrrate v case 1
tree(1,10)=1;
tree(2,10)=tree(1,7)*exp(-urok(1,1)*dt);
tree(3,10)=tree(1,8)*exp(-urok(1,1)*dt);
tree(4,10)=tree(1,9)*exp(-urok(1,1)*dt);
ddR=[dR 0 -dR];
P=exp(-2*urok(1,2)*dt);
Q=tree(2:4,10);
urok(2:4,1)=(ddR+log(exp(ddR)*Q/P)/dt)';
%ratam Qij od casu 1
i=2; zz=tree(i,2);
while zz<period
    clear pom; pom=zeros(1,jmax*2+1); y=1;
    while(tree(i,2)==zz)
        if tree(i,3)==jmax
            pom(y)=pom(y)+tree(i,7)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
            pom(y+1)=pom(y+1)+tree(i,8)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
            pom(y+2)=pom(y+2)+tree(i,9)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
        elseif tree(i,3)==-jmax
            y=y-1;
            pom(y)=pom(y)+tree(i,7)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
            pom(y+1)=pom(y+1)+tree(i,8)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
            pom(y+2)=pom(y+2)+tree(i,9)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
            y=y+1;
        else
            pom(y)=pom(y)+tree(i,7)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
            pom(y+1)=pom(y+1)+tree(i,8)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
            pom(y+2)=pom(y+2)+tree(i,9)*tree(i,10)*exp(-urok(i,1)*dt);
            y=y+1;
        end
        i=i+1;
    end
    tree(i:(i+y),10)=pom(1:(y+1))';
    %ratam shorrtrate urok.mieru v case zz
    zz=tree(i,2);
    ss=min(jmax,tree(i,3));
    dd=(-ss:ss)*dR;
    Q=pom(1:(y+1));
    P=exp(-(zz+1)*urok(1,zz+1)*dt);
    urok(i:(i+y),1)=(-dd+log(exp(dd*dt)*Q'/P)/dt)';
end
%ratam n-rate - celu term structure v kazdom uzle stromu
dh=1;
while (dh+1)<=period
    i=2;
    while (tree(i,2)+dh)<=period
        poz=tree(i,4);
        u1=urok(poz:(poz+2),dh);
        u2=tree(i,7:9)*exp(-dh*u1*dt);
        urok(i,dh+1)=1/(dh+1)/dt*(urok(i,1)*dt-log(u2));
        i=i+1;
    end
    dh=dh+1;
end
%kontrola nezapornosti pravdepod. a urok. mier
for i=1:node
    for ii=7:9 if tree(i,ii)<0 disp([i ii tree(i,ii)]); end
    end
    for ii=1:(period+1) if urok(i,ii)<0 disp([i ii urok(i,ii)]); end
    end
end
end
```



```

% MARTIN GUZI 2003
% OPTIMALIZACIA DLHOPISOV, diplomova praca
% pozn.: pred tymto programom je treba spustit 'stromy.m'
max.m (1/3)

B = 100; %peniaze na zaciatku
alfa=1/130; %averzia k riziku

% DLHOPISY zadaj v tvare [FV C MAT]
clear dlhopis;
dlhopis(1,:)= [1 0 3];
dlhopis(2,:)= [1 0 5];
dlhopis(3,:)= [1 0 10];
pocet=length(dlhopis(:,1)); %pocet dlhopisov
node=1+3+5+min(3,jmax)*2+1; %pocet uzlov v strome (3 periody)

% CENA DLHOPISOV V CASE 0
for i=1:pocet
    FV=dlhopis(i,1);
    MAT=dlhopis(i,3);
    C=dlhopis(i,2);
    CF=[zeros(1,MAT-1) FV]; %cash flow dlhopisu
    P=FV*exp(-MAT*urok(1,MAT)*dt); %cena dlhopisu v case 0
    dlhopis(i,4:(4+MAT))=[-P CF];
end

% GENERUJEM SCENARE
clear scenar;
i=2; cas=1; y=5; %predpoklad ze jmax je aspon 2
while tree(i,2)==1
    for yy=4:6
        scl=tree(i,yy);
        for ii=4:6
            scenar(cas,:)= [1 i scl tree(scl,ii)]; cas=cas+1;
        end
    end
    y=y+1; i=i+1;
end

% RN PRAVDEPODOBNOTI - RATAM PP SCENAROV
clear pp;
for i=1:length(scenar(:,1))
    pr=1;
    for y=1:3
        if (tree(scenar(i,y),4)==scenar(i,y+1))
            pr=pr*tree(scenar(i,1),7);
        elseif (tree(scenar(i,y),5)==scenar(i,y+1))
            pr=pr*tree(scenar(i,1),8);
        else
            pr=pr*tree(scenar(i,1),9);
        end
    end
    pp(i)=pr;
end

% GENEROVANIE NOVYCH PRAVDEPODOBNOTI
clear pptree;
pup=0.25; % nastavenie pp prechodu do dalsieho uzla
pmid=0.5;
pdown=0.25;
for i=1:node
    pptree(i,:)= [pup pmid pdown];
end
for i=1:length(scenar(:,1))
    pr=1;
    for y=1:3
        if (tree(scenar(i,y),4)==scenar(i,y+1))

```

```

        pr=pr*pptree(scenar(i,1),1);
elseif (tree(scenar(i,y),5)==scenar(i,y+1))
        pr=pr*pptree(scenar(i,1),2);
else
        pr=pr*pptree(scenar(i,1),3);
    end
end
pp(i)=pr;
end

% CENY DLHOPISOV V KAZDOM BODE STROMU PRI KAZDOM SCENARI
for yy=2:node
    cas=tree(yy,2);
    for i=1:pocet
        MAT=dlhopis(i,3);
        FV=dlhopis(i,1);
        if cas==MAT price(yy,i)=FV;
        else price(yy,i)=FV*exp(-(MAT-cas)*urok(yy,MAT-cas)*dt);
        end
    end
end
clear price2; % mozne ceny dlhopisov na konci 1 periody
clear price3; % a na konci 2 periody
price3(1,1:pocet)=zeros(1,pocet);
price2(1,1:pocet)=zeros(1,pocet);
for i=2:4
    b1=price(tree(i,4),1:pocet);
    b2=price(tree(i,5),1:pocet);
    b3=price(tree(i,6),1:pocet);
    for ii=1:3
        yy=tree(i,3+ii);
        a1=price(tree(yy,4),1:pocet);
        a2=price(tree(yy,5),1:pocet);
        a3=price(tree(yy,6),1:pocet);
        price3=[price3; a1; a2; a3];
    end
    price2=[price2; b1; b2; b3];
end
price3=price3(2:length(price3),:);
price2=price2(2:length(price2),:);

% MATICA Aeq - ROZPOCTOVE PODMIENKY
clear Aeq;
Aeq(1,1:pocet)=dlhopis(:,4)'; %cena v case 0
for i=1:3
    Aeq(i+1,1:pocet)=price(i+1,1:pocet);
    Aeq(i+1,(i*pocet+1):((i+1)*pocet))=-(price(i+1,1:pocet));
    Aeq(i+4,(pocet+1):(2*pocet))=price2(i,1:pocet);
    Aeq(i+4,((3+i)*pocet+1):((4+i)*pocet))=-price2(i,1:pocet);
    Aeq(i+7,(2*pocet+1):(3*pocet))=price2(i+3,1:pocet);
    Aeq(i+7,((6+i)*pocet+1):((7+i)*pocet))=-price2(i+3,1:pocet);
    Aeq(i+10,(3*pocet+1):(4*pocet))=price2(i+6,1:pocet);
    Aeq(i+10,((9+i)*pocet+1):((10+i)*pocet))=-price2(i+6,1:pocet);
end

% MATICA H a f
clear ff; xx=1;
H=zeros(13*pocet,13*pocet);
for i=1:9
    for ii=1:pocet
        ff((i-1)*pocet+ii)=pp(xx:(xx+2))*price3(xx:(xx+2),ii);
    end
    pom1=price3(((i-1)*3+1):i*3,1:pocet);
    pom2=pom1';
    pom1=[pom1(1,:)*pp(xx); pom1(2,:)*pp(xx+1); pom1(3,:)*pp(xx+2)];
end

```

```

H((3*pocet+i*pocet+1):(4*pocet+i*pocet),
  (3*pocet+i*pocet+1):(4*pocet+i*pocet))=alfa*pom2*pom1;
xx=xx+3;
end
f=[zeros(1,4*pocet) ff];

% OTESTUJEME NEARBITRAZNOST UROKOVYCH MIER, matice A,b
clear A; xx=1; yy=1;
for i=1:9
  for ii=1:3
    A(yy, ((3+i)*pocet+1):((4+i)*pocet))=price3(yy,1:pocet);
    yy=yy+1;
  end
end
A(28,:)= -f;
b=[zeros(1,27) 100]';
beq=[-B zeros(1,12)]'; %na zaciatku mame B penazi
lb=zeros(13*pocet,1);

% -----OPTIMALIZACIA (linearna a kvadraticka)-----
% testovanie nearbitraznosti urokovych mier v strome
[x,fval,exitflag,output]=linprog(-f,-A,b,Aeq,beq);
% LP - maximalizujeme ocakavany vynos
[x,fval,exitflag,output]=linprog(-f,[],[],Aeq,beq,lb);
if exitflag<1 disp('optimalizacia neuspesna');end
x1=x; ff1=-fval; o1=output;
% QP - maximalizujeme uzitocnost pre danej miere rizika - alfa
[x,fval,exitflag,output]=quadprog(H,-f,[],[],Aeq,beq,lb);
if exitflag<1 disp('optimalizacia neuspesna');end
x2=x; ff2=-fval; o2=output;
% QO+SP - povolene kratke pozicie
options=optimset('TolPCG',0.001); % nastavenie presnosti optimalizacie
[x,fval,exitflag,output]=quadprog(H,-f,[],[],Aeq,beq,[],[],[],options);
if exitflag<1 disp('optimalizacia neuspesna');end
x3=x; ff3=-fval; o3=output;

%-----VYPIS VYSLEDKOV OPTIMALIZACIE-----
yy=4*pocet+1;
zz1=zeros(1,27); zz2=zz1; zz3=zz1;
for i=1:27
  zz1(i)=price3(i,1:pocet)*x1(yy:(yy+pocet-1));
  zz2(i)=price3(i,1:pocet)*x2(yy:(yy+pocet-1));
  zz3(i)=price3(i,1:pocet)*x3(yy:(yy+pocet-1));
  if mod(i,3)==0 yy=yy+pocet; end
end

%ODCHYLKA/ROZPTYL
och1=0; och2=0; och3=0;
e1=zz1*pp'; e2=zz2*pp'; e3=zz3*pp';
for i=1:27
  och1=och1+pp(i)*(zz1(i)-e1)^2;
  och2=och2+pp(i)*(zz2(i)-e2)^2;
  och3=och3+pp(i)*(zz3(i)-e3)^2;
end
och1=sqrt(och1); och2=sqrt(och2); och3=sqrt(och3);
disp('LP!>odchylka: vynos: uzitocnost: v case0:');
disp([och1 zz1*pp' ff1 x1(1:pocet)']);
disp('QP!>odchylka: vynos: uzitocnost: v case0:');
disp([och2 zz2*pp' ff2 x2(1:pocet)']);
disp('QP+SP!>odchylka: vynos: uzitocnost: v case0:');
disp([och3 zz3*pp' ff3 x3(1:pocet)']);
disp('alfa:');
disp(1/alfa);
% vynosy
[pp' zz1' zz2' zz3']
if ~(sum(pp)==1) disp('pravdepodobnost nesedi!!');end

```