FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY UNIVERZITY KOMENSKÉHO
Ekonomická a finančná matematika

Optimalizácia zásobovania lokálneho skladu

Diplomová práca

Diplomant: Juraj Katriak
Vedúci diplomovej práce: ing. Rastislav Rázus

Bratislava 2003

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, marec 2003.

Juraj Katriak

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce ing. Rastislavovi Rázusovi, ako aj prof. Pavlovi Brunovskému a doc. Margaréte Halickej za cenné rady a pripomienky.

Obsah

1 Úvod

Zásoby výrobných firiem môžu tvoriť viac ako 20% ich celkového imania a u obchodných firiem to môže byť až 50% celkového imania. Sú to teda veľké a nákladné investície, ktoré je potrebné efektívne riadiť. Práve toto je predmetom teórie zásob. Zjednodušene sa dá povedať, že pri riadení zásob ide o to, aby zabezpečenie všetkých potrieb výroby, resp. odbytu bolo dosiahnuté s minimálnymi celkovými nákladmi. V minulosti boli zásoby považované za nutné zlo, dnes však vieme, že ich efektívne riadenie je dôležitou súčasťou celkového úspechu firmy.

Nutnosť existencie zásob vo firmách vyplýva z časového nesúladu obstarania a potreby jednotlivých komodít. Lambert a kol. [2] špecifikuje päť dôvodov, pre ktoré firmy udržujú zásoby: 1) umožňujú firme dosiahnuť efekty (úspory) založené na rozsahu výroby (tzv. *economies of scale*) - napr. cenové diskonty pri objednaní väčšieho množstva, 2) vyrovnávajú dopyt a ponuku - napr. pri sezónnych komoditách, 3) umožňujú špecializáciu výroby, 4) poskytujú ochranu pred nepredvídateľnými výkyvmi v dopyte a dodacej lehote, 5) poskytujú akýsi tlmič medzi kritickými spojmi v distribučnom kanále.

Základným problémom matematickej teórie modelovania zásob je určenie správneho množstva tovarov objednávaného v správny čas. Ide teda o nájdenie optimálnej objednávacej, resp. skladovacej politiky, ktorá pri dodržaní určitých obmedzení nastaví doby objednania, objednávané množstvá, príp. poistné hladiny a pod. tak, aby všetky relevantné očakávané náklady spojené s objednávaním a skladovaním boli minimálne.

V tejto práci sa zaoberáme viactovarovým modelom zásob. Viactovarové modely sa snažia postihnúť situáciu, kedy skladovací systém obsahuje množstvo rôznych tovarov, ktorých stav a objednávanie sú vzájomne prepojené prostredníctvom rôznych požiadaviek, resp. obmedzení. Takýmito prepojeniami môžu byť napr. zľavy pri spoločnej objednávke, spoločná miera obsluhy (pomer uspokojených požiadaviek k celkovému počtu požiadaviek), alebo iné obmedzenia na skladovacie kapacity, objednávané množstvá, alebo celkový kapitál viazaný v zásobách. Pri existencií takýchto spoločných obmedzení predstavujú viactovarové modely rozšírenie oproti jednotovarovým modelom, nakoľko minimálne očakávané náklady sa nedajú rozložiť na sumu minimálnych očakávaných nákladov pre jednotlivé tovary.

Cieľom práce je vytvoriť na základe teórie Markovovských rozhodovacích procesov viactovarový model zásob. Tento model má byť dostatočne flexibilný na zahrnutie požiadaviek a obmedzení prichádzajúcich z praxe.

Práca je členená nasledovne. V kapitole 2 je stručný prehľad teórie Markovovských rozhodovacích procesov. Pritom sme sa zamerali na tú časť teórie, ktorú využívame v kapitole 3 na formuláciu zásobovacieho modelu. V tejto kapitole tiež presnejšie vymedzujeme oblasť použitia nášho modelu. V kapitole 4 sú numerické výsledky pre konkrétne hodnoty parametrov modelu.

2 Markovovské rozhodovacie procesy

2.1 Teória MRP

Teória markovovských rozhodovacích procesov (*Markov Decision Processes*), tiež známa pod názvami sekvenciálna stochastická optimalizácia, stochastické riadenie s diskrétnym časom, alebo diskrétne stochastické dynamické programovanie, sa zaoberá sekvenciálnou optimalizáciou stochastických systémov s diskrétnym časom. Základným objektom je stochastický systém s diskrétnym časom, ktorého vývoj je v čase riaditeľný. Každá riadiaca politika definuje stochastický proces a hodnotu s ním spojenej účelovej funkcie. Cieľom je zvoliť "najlepšiu" riadiacu politiku.

Rozhodnutia, ktoré robíme v skutočnom živote, majú zvyčajne dva dopady: (i) prinášajú, alebo šetria peniaze, čas, alebo iné zdroje a (ii) ovplyvňujú budúci vývoj. Existuje veľa situácií, kde rozhodnutia, s ktorými je spojený najväčší zisk teraz, nemusia byť najlepšie vzhľadom na budúci vývoj. Rozhodovacie procesy modelujú takéto situácie a poskytujú výsledky o štruktúre a existencí najlepších politík, ako aj o metódach ich hľadania. Markovovské rozhodovacie procesy (MRP) sú také rozhodovacie procesy, v ktorých budúci vývoj závisí výlučne na súčasnom stave. Tento predpoklad nie je veľmi reštriktívny, ako by sa na prvý pohľad mohlo zdať, nakoľko je na nás, čo označíme ako "súčasný stav".

MRP zaujímali vedcov po praktickej aj teoretickej stránke, vďaka čomu sa dostali do popredia záujmu v oblasti operačného výskumu. Od svojho zavedenia v 50-tych rokoch minulého storočia sa MRP stali dôležitou oblasťou výskumu s bohatou a hlbokou teóriou a množstvom aplikácií. MRP sa stali základným nástrojom na riešenie mnohých problémov operačného výskumu (kam patrí aj riadenie zásob), elektronického inžinierstva a počítačovej vedy.

Počas prvých tridsiatich rokov rozvoja teórie MRP, približne do začiatku osemdesiatych rokov 20. storočia, bol výskum koncentrovaný na rovnice optimality a klasické metódy ich riešenia, t.j. iteráciu hodnôt a politík (*policy and value iteration*). Algoritmy iterácie hodnôt sú známe aj pod názvami spätná indukcia a dynamické programovanie (DP). Princíp dynamického programovania sa vo svojej klasickej podobe dá aplikovať len na problémy s vhodnou účelovou funkciou. Pre niektoré účelové funkcie, alebo ak je cieľom optimalizovať jednu účelovú funkciu pri ohraničeniach na ďalšie účelové funkcie (*multiple criteria problems*), sa princíp DP zväčša nedá aplikovať priamo. Výskum sa počas posledných dvoch desaťročí sústredil práve na takéto problémy. Ďalším zaujímavým smerom súčasného výskumu v oblasti riešenia MRP sú aproximatívne metódy riešenia (*neuro-dynamic programming*, resp. *reinforcement learning*), ktorými sa často dajú obísť problémy vznikajúce pri použití klasických metód riešenia.

V nasledujúcich častiach tejto kapitoly poskytneme stručný prehľad hlavných výsledkov teórie MRP, pričom sa zameriame na oblasti, ktoré budeme v ďalšej časti práce využívať. Pre podrobnejší prehľad odkazujeme na literatúru [12],[13].

2.2 Stochastické procesy

Stochastický proces sa v literatúre zavádza ako trieda (systém) $\{X_t, t \in \underline{T}\}$, kde $\underline{T} \subset \mathbf{R}$, náhodných veličín $X_t : \Omega \to \mathbf{R}^n$ definovaných na spoločnom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$. Množina $\underline{T}$ sa zvyčajne chápe ako množina časových okamihov. V závislosti na charaktere množiny $\underline{T}$ delíme stochastické procesy na procesy s diskrétnym časom (parametrom), ak $\underline{T}$ je diskrétna (spočítateľná, alebo konečná) a na procesy so spojitým časom, ak $\underline{T}$ nie je diskrétna. Pri procese s diskrétnym časom môžeme množinu $\underline{T}$ stotožniť s množinou $\{1, 2, \ldots\}$ (resp. $\{1, 2, \ldots, T\}$) a proces chápať ako postupnosť náhodných veličín $X_1, X_2, \ldots$. Ďalej sa budeme zaoberať procesmi s diskrétnym časom.

Stavom stochastického procesu $\{X_t, t \in \underline{T}\}$ nazývame také $x \in \mathbf{R}^n$, pre ktoré existuje aspoň jedno $t \in \underline{T}$ také, že $\mathbb{P}\{x - \epsilon < X_t < x + \epsilon\} > 0$ pre ľubovolné $\epsilon \in \mathbf{R}^n_+$, pričom jednotlivé nerovnosti sú myslené po zložkách. Množinu všetkých stavov stochastického procesu nazývame stavový priestor, označíme ho $\mathbf{X}$. Ak je stavový priestor diskrétny, tak stochastický proces nazývame reťazec. V ďalšom sa zameriame na reťazce.

2.2.1 Markovovské procesy

Reťazec s diskrétnym časom nazveme Markovovským procesom ak má Markovovu vlastnosť, t.j. ak pre každé $t \in \underline{T}$ a každú t-ticu $(x_1, \ldots, x_t)$ prvkov z $\mathbf{X}$ platí

$$\mathbb{P}\{X_t = x_t | X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}\} = \mathbb{P}\{X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}\}.$$

Pre Markovovské reťazce (Markovovské procesy s diskrétnym stavovým priestorom) definujeme

$$p_t(j|i) := \mathbb{P}\{X_{t+1} = j | X_t = i\},$$

pre všetky $i, j \in \mathbf{X}$ a všetky $t \in \underline{T}$. Pravdepodobnosť $p_t(j|i)$ nazývame (podmienená) pravdepobnosť prechodu zo stavu i do stavu j v čase t. Ak pravdepodobnosti prechodu nezávisia od času, tak príslušný reťazec nazývame homogénny a označíme $p(j|i) = p_t(j|i)$, $t \in \underline{T}$.

Od pravdepodobností prechodu $p_t(j|i)$ sa s využitím Markovovej vlastnosti dá pomerne jednoducho prejsť k absolútnym pravdepodobnostiam stavov $p_t(i) := \mathbb{P}(X_t = i)$, $i \in \mathbf{X}$ a $t \in \underline{T}$. Pre podrobný postup odkazujeme na literatúru [14].

2.3 Markovovské rozhodovacie procesy

Základným rozdielom medzi Markovovským rozhodovacím procesom a "obyčajným" Markovovským procesom je, že v prípade MRP môžeme ovplyvňovať dynamiku procesu vonkajšími zásahmi. Toto ovplyvňovanie je motivované optimalizáciou nákladov (príp. prínosov) spojených s dynamikou procesu.

MRP pozostáva z nasledovných objektov:

(i) množiny časových okamihov $\underline{T}$,

(ii) stavového priestoru $\mathbf{X}$,

(iii) priestoru riadení $\mathbf{A}$,

(iv) množín prípustných akcií $A(x)$, v stave x,

(v) pravdepodobností prechodu $p(y|x,a)$,

(vi) funkcie nákladov $r(x,a)$,

(vii) funkcie koncových nákladov $f(x)$,

(viii) diskontného faktora β.

Popíšeme význam jednotlivých objektov. Máme stochastický systém so stavovým priestorom $\mathbf{X}$, ktorý pozorujeme v časových okamihoch $t \in \underline{T}$. O množine $\underline{T}$ predpokladáme, že je diskrétna. Ak je konečná, stotožníme ju s množinou $\{0, 1 \ldots, T-1\}$ a hovoríme o MRP na konečnom časovom horizonte. Ak nie je konečná, stotožníme ju s množinou $\{0, 1 \ldots\}$ a hovoríme o MRP na nekonečnom časovom horizonte. Popíšeme dynamiku systému. Keď sa systém v čase $t \in \underline{T}$ nachádza v stave x_t, zvolíme akciu a_t z množiny $A(x)$. Po zvolení akcie čas pokročí o jednotku a systém prejde do nového stavu x_{t+1} podľa pravdepodobnostného rozdelenia $p(\cdot|x_t, a_t)$, pričom vzniknú náklady $r(x_t, a_t)$. V prípade MRP na konečnom časovom horizonte po zvolení akcie v čase $T-1$ systém prejde do stavu x_T a vzniknú koncové náklady veľkosti $f(x_T)$. Pri MRP na nekonečnom horizonte koncové náklady neuvažujeme. V niektorých aplikáciách sú náklady, ktoré vzniknú v každom kroku náhodnou veličinou. V týchto prípadoch interpretujeme $r(x,a)$ a $f(x)$ ako očakávané náklady. Všetky náklady, ktoré vznikajú počas priebehu procesu sú diskontované faktorom $\beta \in (0, 1]$.

Akciu a_t volíme na základe informačnej množiny, ktorú máme v čase výberu akcie k dispozícií. Typické informačné množiny sú:

Otvorená slučka (*open-loop*). V každom kroku máme k dispozícií len informáciu o začiatočnom stave systému.

Regulácia (*feedback*). V každom kroku máme k dispozícií informáciu o súčasnom stave systému.

Uzavretá slučka (*closed-loop*). V každom kroku máme k dispozícií informáciu o kompletnej histórií systému (t.j. o všetkých minulých stavoch).

Je zrejmé, že pri použití otvorenej slučky (riadenia založené na otvorenej slučke sa niekedy označujú ako programové riadenia) nezískame lepšiu hodnotu optimalizačného kritéria ako pri regulácií. Vzhľadom na markovovský charakter (tento vyplýva zo skutočnosti, že pravdepodobnosti prechodu závisia len na súčasných stavoch a akciách, nie však na vývoji v minulosti) optimalizovaného procesu však regulácia a uzavretá slučka dajú rovnakú hodnotu optimalizačného kritéria. Otvorená slučka sa používa v situáciách, kedy je potrebné určiť všetky akcie vopred, použitie regulácie a uzavetej slučky predpokladá možnosť volenia akcií "za behu", v jednotlivých časových okamihoch. V ďalšom budeme používať reguláciu.

V každom kroku môžeme voliť konkrétnu akciu, alebo pri všeobecnejšom prístupe, pravdepodobnostné rozdelenie na množine prípustných akcií $A(x)$. Rozhodnutia prvého typu sa nazývajú deterministické (*nonrandomized*) a rozhodnutia druhého typu stochastické (*randomized*).

MRP sa podľa charakteru stavových a riadiacich množín delia na diskrétne (*discrete*) a spojité (*non-discrete*). Zameriame sa na diskrétne MRP.

2.3.1 Diskrétne MRP

MRP sa nazýva konečný, ak stavová množina a množiny možných akcií sú konečné. MRP sa nazýva diskrétny, ak tieto množiny sú diskrétne.

Značná časť výskumu a aplikácií MRP sa zaoberá práve diskrétnymi MRP. Výhodou diskrétnych MRP je, že pri ich štúdiu nepotrebujeme dodatočné predpoklady o merateľnosti jednotlivých objektov, z ktorých pozostávajú. Ďalšou motiváciou pre ich štúdium je aproximatívne riešenie spojitých modelov. Pri optimalizácií spojitých MRP sa totiž v praxi často postupuje tak, že sa jednotlivé množiny modelu diskretizujú a ďalej sa optimalizuje diskrétny MRP.

Pravdepodobnosti prechodu sú $p(j|i,a)$, $i,j \in \mathbf{X}$ a $a \in A(i)$. Predpokladáme, že $p(\mathbf{X}|i,a) = 1$, pre všetky $i \in \mathbf{X}$ a všetky $a \in A(i)$. Trajektóriou nazveme postupnosť $\{(x_0,a_0),(x_1,a_1),\ldots\}$. Históriou do času t nazveme časť trajektórie $\{(x_0,a_0),\ldots,(x_{t-1},a_{t-1}),x_t\}$ a označíme ju h_t, $t \in \underline{T}$. Nech $H_t = (\mathbf{X} \times \mathbf{A})^t \times \mathbf{X}$ je priestor histórií do času $t \in \underline{T}$.

Deterministická politika (riadenie) π je postupnosť zobrazení π_t, $t \in \underline{T}$, z H_t do A takých, že $\pi_t(h_t) = \pi_t(\{(x_0,a_0),\ldots,(x_{t-1},a_{t-1}),x_t\}) \in A(x_t)$. Ak pre každé t zobrazenie π_t závisí len na x_t, tak príslušnú politiku nazveme Markovovskou. Inak povedané Markovovská politika π je definovaná zobrazeniami $\pi_t : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ takými, že $\pi_t(x) \in A(x)$ pre všetky $x \in \mathbf{X}$ a $t \in \underline{T}$. Markovovskú politiku π nazývame stacionárnou, ak zobrazenia π_t nezávisia na t, t.j. stacionárna politika je definovaná jediným zobrazením $\pi : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$, $\pi(x) \in A(x)$ pre všetky $x \in \mathbf{X}$. Označme Π, Π^M, Π^S množiny všetkých deterministických, Markovovských, resp. stacionárnych politík. Potom platí $\Pi^S \subseteq \Pi^M \subseteq \Pi$.

Ako sme spomenuli vyššie, akcie je možné voliť aj náhodne. Stochastickou politikou π rozumieme postupnosť pravdepodobností prechodu $\pi_t(a_t|h_t)$ z H_t do A takú, že $\pi_t(A(x_t)|h_t) = 1$, $t \in \underline{T}$. V takomto prípade je akcia a_t v čase $t \in \underline{T}$ náhodnou veličinou s rozdelením $\pi_t(\cdot|h_t)$. Politika π sa nazýva Markovovská stochastická ak $\pi_t(a_t|h_t) = \pi_t(a_t|x_t)$, ak naviac jednotlivé pravdepodobnosti π_t nezávisia na čase t, tak príslušnú politiku nazývame stacionárnou. Stochastická stacionárna politika je teda definovaná pravdepodobnostným rozdelením π takým, že $\pi(A(x)|x) = 1$ pre všetky $x \in \mathbf{X}$. Pravdepodobnosti prechodu sú v prípade stacionárnej stochastickej politiky π tvaru $p^\pi(j|i) = \sum_{a \in A(i)} \pi(a|i)p(j|x,a)$. Označme Π^R, Π^{RM}, Π^{RS} množiny všetkých stochastických, stochastických Markovovských, resp. stochastických stacionárnych politík. Potom máme $\Pi^{RS} \subseteq \Pi^{RM} \subseteq \Pi^R$ a $\Pi^S \subseteq \Pi^{RS}$, $\Pi^M \subseteq \Pi^{RM}$ a $\Pi \subseteq \Pi^R$.

Každá stacionárna politika π (stochastická, alebo deterministická) definuje pre ľubovolný začiatočný stav x Markovovský reťazec s pravdepodobnosťami prechodu $p^\pi_x(j|i)$. Označme $\mathbb{P}^\pi_x$ absolútnu pravdepodobnosť stavov v tomto reťazci (t.j. $\mathbb{P}^\pi_x(x_t = y)$ udáva pravdepodobnosť, že stav v čase t pri počiatočnom stave x a politike π je y) a $\mathbb{E}^\pi_x$ operátor strednej hodnoty vzhľadom na túto pravdepodobnosť; $\mathbb{P}^\pi_x(x_0 = x) = 1$, $\mathbb{E}^\pi_x[x_0] = x$.

Označme v prípade konečného časového horizontu

$$v_t(x,\pi,\beta,f,T) := \mathbb{E}^\pi_x[\sum_{s=t}^{T-1} \beta^{s-t} r(x_s,a_s) + \beta^{T-t} f(x_T)],$$

resp. pri fixovanom β, T a f

$$v_t(x,\pi) = v_t(x,\pi,\beta,f,T)$$

celkové náklady počas krokov $t, \ldots, T$, $t \in \underline{T}$, $x \in \mathbf{X}$, $\beta \in [0,1]$, $\pi \in \Pi^R$, kedykoľvek je operátor strednej hodnoty dobre definovaný (pre presné predpoklady pozri [13]). Ak $\beta \in [0,1)$ hovoríme o celkových diskontovaných nákladoch. Pri úlohách na nekonečnom časovom horizonte celkové náklady nezávisia na koncových nákladoch f. V takomto prípade označíme (pri fixovanom $\beta \in [0,1]$)

$$v(x,\pi) = v(x,\pi,\beta) = \mathbb{E}_x^\pi[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s r(x_s, a_s)]$$

celkové náklady na nekonečnom časovom horizonte. Ak je funkcia nákladov r ohraničená, tak celkové náklady na nekonečnom horizonte sú dobre definované pre ľubovolné $\beta \in [0,1)$. V prípade $\beta = 1$ sú potrebné ďalšie predpoklady, nakoľko suma môže divergovať. V tomto prípade je niekedy výhodnejšie uvažovať očakávané náklady na jednotku času (priemerné náklady)

$$w(x,\pi) = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}_x^\pi[\sum_{s=0}^{t-1} r(x_s, a_s)].$$

Ďalšie optimalizačné kritériá sa dajú nájsť napr. v [13].

Nech teda máme pre ľubovolnú politiku π definované optimalizačné kritérium (účelovú funkciu) $g(x,\pi)$. Označme

$$G(x) = \inf_{\pi\in\Pi^R} g(x,\pi).$$

Politiku π nazývame (silne) optimálnou pre kritérium g ak $g(x,\pi) = G(x)$ pre všetky $x \in \mathbf{X}$.

Pre jednotlivé optimalizačné kritériá zavedené vyššie definujeme hodnotové funkcie:

$$\begin{aligned} V_t(x) = V_t(x,\beta,f) &:= \inf_{\pi\in\Pi^R} v_t(x,\pi,\beta,f), \\ V(x) = V(x,\beta) &:= \inf_{\pi\in\Pi^R} v(x,\pi,\beta), \\ W(x) &:= \inf_{\pi\in\Pi^R} w(x,\pi). \end{aligned}$$

Uvedieme rovnice optimality pre tieto funkcie. Rovnice optimality vo všeobecnosti predstavujú len nutné podmienky optimality pre jednotlivé kritériá. Presné predpoklady, za ktorých sú rovnice aj postačujúcimi podmienkami a za ktorých sú (jednoznačne) riešiteľné, sú napr. v [13].

$$V_t(x) = \inf_{a\in A(x)}\{r(x,a) + \beta\,\mathbb{E}[V_{t+1}(x_{t+1})|x_t = x, a_t = a]\}, \qquad t \in \underline{T}, x \in \mathbf{X}$$

v prípade konečného horizontu, pričom $V_T(x) = f(x)$, pre všetky $x \in \mathbf{X}$. Rovnica optimality na nekonečnom horizonte (pre prípad celkových nákladov) je

$$V(x) = \inf_{a \in A(x)} \{r(x,a) + \beta\, \mathbb{E}[V(x_1)|x_0 = x, a_0 = a]\}, \qquad x \in \mathbf{X}.$$

Pre priemerné náklady platia rovnice

$$\begin{aligned} W(x) &= \inf_{a \in A(x)} \{\mathbb{E}[W(x_1)|x_0 = x, a_0 = a]\}, \qquad x \in \mathbf{X}, \\ W(x) + h(x) &= \inf_{a \in A'(x)} \{r(x,a) + \mathbb{E}[h(x_1)|x_0 = x, a_0 = a]\}, \qquad x \in \mathbf{X}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} A'(x) = \{a \in A(x) \quad &: \quad \mathbb{E}[W(x_1)|x_0 = x, a_0 = a] = \\ &= \inf_{a \in A(x)} \{\mathbb{E}[W(x_1)|x_0 = x, a_0 = a]\}\}, \qquad x \in \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Rovnice sa nazývajú prvá a druhá rovnica optimality pre priemerné náklady. Pripomenieme, že W má význam optimálnych priemerných nákladov na jednotku času. Funkcia h je ľubovolná ohraničená funkcia. Veľa aplikácií modelu s priemernými nákladmi má vlastnosť (pozri napr. [13]), že funkcia W nezávisí od počiatočného stavu, t.j. je konštantná. V takomto prípade prvá rovnica optimality triviálne platí, $A'(x) = A(x)$ a druhá rovnica optimality je tvaru

$$W + h(x) = \inf_{a \in A(x)} \{r(x,a) + \mathbb{E}[h(x_1)|x_0 = x, a_0 = a]\}, \qquad x \in \mathbf{X},$$

ktorý sa často označuje jednoducho ako rovnica optimality pre priemerné náklady.

Poznámky.
1. V prípade konečného časového horizontu pripúšťame nestacionárnosť objektov, z ktorých je zložený MRP. Potom máme $r(x,a) = r_t(x,a)$, $p(\cdot|x,a) = p_t(\cdot|x,a)$ a $A(x) = A_t(x)$. Rovnica optimality ostáva v platnosti.
2. Namiesto pravdepodobností prechodu je niekedy výhodnejšie uvažovať, že na systém v jednotlivých časových okamihoch pôsobia náhodné veličiny u_t, $t \in \underline{T}$. O týchto potom predpokladáme, že sú vzájomne nezávislé a ich pravdepodobnostné rozdelenie je vopred známe (pričom jednotlivé u_t nemusia byť rozdelené rovnako). Dynamika systému je potom daná stavovou rovnicou

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, u_t)$$

pre $t \in \underline{T}$ (F môže v prípade konečného časového horizontu závisieť aj na čase t). Markovovskosť procesu $\{X_t, t \in \underline{T}\}$ je zrejmá z nezávislosti náhodných veličín u_t a z tvaru stavovej rovnice. Rovnice optimality ostávajú v platnosti aj pre tento prípad (jediná zmena je vo výpočte strednej hodnoty). Prípad s pravdepodobnosťami prechodu sa dá previesť na prípad s náhodnými veličinami a naopak.
3. Funkciu r chápeme ako náklady, ktoré vzniknú v každom časovom okamihu $t \in \underline{T}$. V dôsledku toho sa snažíme účelovú funkciu minimalizovať. V literatúre sa r niekedy chápe ako prínos, v takomto prípade je prirodzené účelovú funkciu maximalizovať. Modifikácia predošlého pre tento prípad je viac-menej formálna.
4. MRP môžu byť použité aj na modelovanie reálnych procesov s "konečnou pamäťou", t.j. procesov, ktorých budúci vývoj závisí na konečnom (fixnom) počte predošlých stavov, alebo akcií. V takomto prípade stačí vhodne zvoliť stavovú premennú (príklad takéhoto modelu sa je v časti 3.4).

2.4 Metódy riešenia MRP

Riešenie MRP priamym využitím rovníc optimality sa v literatúre označuje ako iterácia hodnôt. Postup v prípade konečného horizontu je nasledovný. Cieľom je nájsť funkciu $V_0(x)$. Postupujeme spätne od známej funkcie $V_T(x) = f(x)$. Túto dosadíme do rovnice optimality pre $t = T - 1$ a minimalizáciou určíme funkciu V_{T-1}. Takto postupujeme až po $t = 0$. Optimálnu politiku v jednotlivých časových krokoch nájdeme ako argument minima v príslušných rovniciach optimality (pričom predpokladáme, že RO predstavuje aj postačujúcu podmienku optimality; presné predpoklady napr. v [13]). Tento postup sa označuje aj ako spätná indukcia.

V prípade nekonečného časového horizontu je situácia trochu iná. Tu je rovnica optimality funkcionálnou rovnicou pre funkciu V a teda nám nedáva návod na jej výpočet. Túto funkcionálnu rovnicu musíme riešiť numericky. Zvolíme funkciu V^0 (napr. $V^0 \equiv 0$) a dosadíme ju do pravej strany rovnice. Minimalizáciou dostaneme funkciu V^1. Túto opäť dosadíme do pravej strany rovnice a prejdeme k V^2, atď. Tento aproximatívny numerický postup sa nazýva aj aproximácia v priestore hodnotových funkcií. Treba povedať, že vo všeobecnosti nie je zaručné, že postup konverguje k riešeniu príslušnej funkcionálnej rovnice.

V prípade konečného aj nekonečného horizontu sa minimalizácia v jednotlivých krokoch riešenia dá len málokedy prevádzať analyticky. Zväčša je potrebné pre každý stav $x \in \mathbf{X}$ hľadať numericky optimálnu akciu $a \in A(x)$. Toto je pre väčšie priestory riadení problematické. Problémy vznikajú aj pri väčších rozmeroch stavového priestoru, kde problémom môže byť už zapamätanie si jednotlivých funkcií V_t (tieto si pri numerickom riešení musíme pamätať vo forme "tabuľky", ktorá každému stavu x udáva hodnotu $V(x)$).

Oproti iterácií hodnôt stojí iterácia politík. Tu sa od politiky π^k prechádza k politike π^{k+1} tak, aby sa hodnota účelovej funkcie zlepšila. Použitie tejto metódy je tiež obmedzené väčšími rozmermi stavového, resp. riadiaceho priestoru.

Iterácia hodnôt a politík sa považujú za klasické prístupy k riešeniu rovníc optimality. Oba tieto prístupy majú svoje výhody aj nevýhody (pozri napr. [15], [13], kde sú obe metódy podrobnejšie analyzované).

Praktické problémy formulované ako MRP sa len zriedka dajú riešiť použitím klasických algoritmov dynamického programovania. Dôvodom je výpočtový čas potrebný na generovanie optimálnych politík, ktorý rastie exponenciálne s počtom premenných v modeli (tento problém sa v literatúre označuje ako "kliatba dimenzionality"). Naviac, prístup DP predpokladá exaktný model, čím máme na mysli predovšetkým znalosť pravdepodobností prechodu. V komplexných systémoch takýto model často nie je k dispozícií a jednotlivé veličiny musíme simulovať. Moderné metódy riešenia MRP sú založené na dvoch hlavných myšlienkach: (i) použitie simulácie na odhadnutie veličín, čím odpadnú problémy s požiadavkou na presný model a (ii) použitie parametrickej reprezentácie funkcií modelu, čím sa znížia nároky na výpočtový čas a pamäť. Parametrické reprezentácie a s nimi spojené algoritmy sa dajú rozdeliť do troch skupín:

(a) *Parametrizované hodnotové funkcie:* Namiesto počítania s presnou hodnotovou funkciou v sa v prípade veľkého stavového priestoru zvolí parametrizácia $\tilde{v} : \mathbf{X} \times \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$, ktorá poskytuje dobrú aproximáciu $\tilde{v}(x, w) \approx v(x)$ hodnotovej funkcie pre vhodnú hodnotu parametra w. Funkcia $\tilde{v}$ sa nazýva aproximačná architektúra. Existujú rôzne metódy konštrukcie aproximačných architektúr (napr. použitím polynómov, lineárnej kombinácie "bázových" funkcií, agregácie stavov a pod.). Kombinácia základných myšlienok DP s takouto parametrickou reprezentáciou sa označuje "neuro-dynamické programovanie", alebo "reinforcement learning". Základný postup v týchto metódach je (i) získať dobrú aproximáciu hodnotovej funkcie DP a (ii) použiť túto na konštrukciu politík, ktoré sú blízko optimálnym.

(b) *Parametrizované politiky:* V tomto prístupe sa uvažuje trieda politík popísaná vektorom parametrov θ. Pomocou simulácie sa odhadne hodnota účelovej funkcie pri použití politiky z uvažovanej triedy a následne sa zmení hodnota parametra θ v smere, v ktorom klesá hodnota účelovej funkcie.

(c) *"Actor-critic" metódy:* Tretí prístup je kombináciou prvých dvoch. Zahŕňa parametrizáciu politiky (*actor*) a hodnotovej funkcie (*critic*).

Tieto metódy sú zatiaľ po teoretickej stránke málo preskúmané, ale v praxi bolo zaznamenaných niekoľko úspešných aplikácií ([16]). Na nájdenie vhodnej parametrizácie je zvyčajne nutné postupovať metódou pokusov a chýb.

2.5 Zhrnutie

V tejto kapitole sme čitateľovi poskytli úvod do teórie MRP. Zamerali sme sa pri tom na MRP s diskrétnymi množinami stavov a riadení, kedy je teória trochu jednoduchšia a prehľadnejšia ako v spojitom prípade. Spomenuli sme základné metódy riešenia - iteráciu hodnôt a politík. Tiež sme uviedli stručný prehľad moderných aproximatívnych metód, ktorými sa dajú obísť problémy s dimenzionalitou v DP.

3 Formulácia zásobovacieho problému ako MRP

3.1 Stručne k vývoju teórie zásob a zásobovacím modelom

Matematická teória zásob má v oblasti operačného výskumu dlhú tradíciu. Už v roku 1913 diskutoval Harris [10] základný Economic Order Quantity" model, ktorý je dnes súčasťou každej učebnice teórie zásob. K zavedeniu zložitejších matematických metód však prišlo až v období po druhej svetovej vojne. Analyzovali sa predovšetkým jednotovarové problémy. Základ stochastických modelov tohto typu položili Arrow, Harris a Marschak vo svojej práci z roku 1951 ([9]). Skoro paralelne k rozvoju stochastických jednotovarových a jednoskladových modelov sa autori začali zaoberať aj stochastickými zásobovacími problémami vo viacvrstvových systémoch (*multiechelon models*). V tejto dobe sa rozvíjali aj deterministické modely, a to predovšetkým aplikáciou dynamického programovania na skladovací problém s premenlivou mierou dopytu, napr. v práci Wagnera a Whitina [11]. V osemdesiatych a deväťdesiatych rokoch bola teória obohatená o množstvo deterministických aj stochastických modelov, ktoré sa zaoberajú viactovarovými systémami ako aj optimálnymi politikami vo viacvrstvových distribučných, resp. skladovacích výrobných systémoch. V súčasnosti výskum pokračuje jednak zovšeobecňovaním klasických modelov, ako aj vytváraním aproximatívnych a simulačných metód riešenia. Rozsiahly prehľad literatúry je napr. v [1].

Je zrejmé, že v priebehu takéhoto dlhého výskumu vzniklo veľké množstvo rôznych zásobovacích modelov. Uvedieme základné predpoklady, ktoré identifikujú jednotlivé modely:

- *Informácia o dopyte.*
  Podľa predpokladu o druhu informácie o dopyte rozdeľujeme modely na modely s úplnou informáciou o dopyte (deterministické modely) a modely s čiastočnou informáciou (stochastické modely).

- *Časové správanie sa dopytu.*
  Dopyt sa môže vyskytovať spojite v čase, alebo len v diskrétnych časových okamihoch.

- *Kontrola stavu tovarov na sklade.*
  Rozlišujeme modely s v čase spojitou kontrolou stavu tovarov (transakčne orientované modely, alebo modely so signalizáciou zmien) a modely s periodickou kontrolou. V modeloch s periodickou kontrolou sa stav tovarov kontroluje len v istých časových okamihoch.

- *Dĺžka časového horizontu.*
  Rozlišujeme jednoperiódové a viacperiódové modely, ktoré môžu mať konečný alebo nekonečný plánovací horizont.

- *Počet druhov tovarov.*
  Jednotovarové modely sú založené na predpoklade, že celkové náklady sa dajú rozložiť na sumu nákladov jednotlivých tovarov. Vo viactovarových modeloch sa uvažuje s úsporami, ktoré vzniknú pri koordinácií objednávania jednotlivých tovarov.

- *Dodacie lehoty.*
  Dodacie lehoty môžu deterministické alebo stochastické.

- *Nákladové funkcie.*
  V zásobovacích modeloch sa zväčša uvažujú tri druhy nákladov: náklady na objednávku (fixné a variabilné náklady objednávky), náklady na skladovanie a náklady na deficit.

- *Spôsob penalizácie deficitu.*
  Deficit vzniká, keď sa vyskytne dopyt po tovare, ktorý nie je na sklade. Deficit môže byť penalizovaný priamo nákladmi na deficit, ktoré sa však v praxi dajú len ťažko vyčísliť. Preto sa od nich v niektorých modeloch upúšťa a deficit sa penalizuje nepriamo, prostredníctvom požiadavky na minimálnu mieru obsluhy (pomer uspokojených požiadaviek k celkovému počtu požiadaviek) jednotlivých tovarov, alebo celého systému.

- *Správanie sa odberateľov pri deficite.*
  Podľa správania sa zákazníkov v prípade vzniku deficitu rozdeľujeme skladovacie modely na modely s odloženou spotrebou (*Backorder Case*), kedy sa predpokladá, že neuspokojený dopyt bude krytý z nasledovnej dodávky a modely so stratenými predajmi (*Lost Sales Case*). Tretia teoretická možnosť je, že časť neuspokojeného dopytu sa stratí a časť bude krytá z nasledovnej dodávky.

- *Časové správanie sa parametrov modelu.*
  Parametre modelu (napr. hodnoty parametrov pravdepodobnostného rozdelenia dopytu, hodnoty parametrov nákladových funkcií a pod.) môžu byť v čase konštantné (statické modely), alebo premenlivé (dynamické modely).

- *Zohľadnenie ďalších obmedzení.*
  Model môže zohľadňovať obmedzenia na kapacitu skladu, celkový kapitál viazaný v zásobách a pod.

Aj keď tento prehľad nie je úplný, dá sa podľa neho zostaviť množstvo rôznych modelov zásob.

3.2 Popis predpokladov modelu

V tejto práci analyzujeme jednoskladový viactovarový model zásob s periodickou kontrolou stavu zásob a jedným dodávateľom. Popíšeme dôvody, pre ktoré sme zvolili takýto prístup k optimalizácií zásobovania.

Predpoklad jedného skladu je daný cieľom tejto práce - optimalizovať zásobovanie v lokálnom sklade. V praxi majú podniky samozrejme viaceré odbytové miesta, pri ktorých sú potrebné sklady. Náš model by sa dal použiť v situácií s viacerými skladmi nasledovným spôsobom. Jednotlivé sklady určia požiadavky na objednávané množstvá podľa nášho modelu. Tieto požiadavky následne odošlú do centrály podniku, ktorá zabezpečí dodanie požadovaných tovarov do jednotlivých skladov. Takýto postup zrejme nie je optimálny. Optimálne riešenie by sme získali minimalizáciou nákladov v modeli, v ktorom sú zahrnuté všetky skladovacie miesta spolu s centrálou. Keďže takýto model je veľmi zložitý, zvyčajne sa zavádzajú zjednodušujúce predpoklady, čím ale získavame riešenia, ktoré v praxi nie sú optimálne z pohľadu jednotlivých skladov.

Koordinácia objednávania viacerých tovarov môže podniku priniesť podstatné úspory. To platí predovšetkým v prípade, kedy sú s každou objednávkou spojené pomerne veľké fixné náklady, nezávislé od objednávaného množstva. Uvidíme, že v prípade absencie takýchto nákladov sa náš m-tovarový model rozpadá na m jednotovarových modelov. V tejto súvislosti treba spomenúť aj tzv. nákladovú ABC analýzu skladovaných tovarov. Ak zoradíme tovary podľa celkových nákladov spojených s ich udržiavaním na sklade zistíme, že
približne 20% tovarov na seba viaže 80% celkových nákladov (skupina A),
približne 30% tovarov na seba viaže 15% celkových nákladov (skupina B),
približne 50% tovarov na seba viaže len 5% celkových nákladov (skupina C).
Toto pravidlo sa nazýva aj Paretov zákon, alebo pravidlo 80-20. Starostlivou optimalizáciou zásobovania tovarov v skupine A môžme dosiahnuť značné úspory na nákladoch. Na tento účel sa používajú práve viactovarové modely. Na optimalizáciu tovarov v skupine B a C sa používajú jednoduchšie metódy (v skupine B to môžu byť jednotovarové modely a v skupine C jednoduché pravidlá typu "objednať, keď nie je na sklade"). Takáto klasifikácia má zmysel len v prípade, kedy sa skladuje veľké množstvo tovarov. Vtedy je totiž prakticky nemožné (z dôvodu výpočtovej náročnosti) optimalizovať objednávanie všetkých tovarov pomocou viactovarového modelu a použitie jednoduchších metód môže byť neefektívne. Podrobnejšie o ABC analýze napr. v [2].

Predpoklad, ktorý asi najvýraznejšie odlišuje zásobovacie modely, je predpoklad o momentoch kontroly stavu skladu. Podľa tohto predpokladu rozlišujeme modely so signalizáciou zmien (*continous review models*) a modely s periodickou kontrolou (*periodic review models*). V modeloch so signalizáciou zmien sa stav skladu kontroluje spojito v čase. V minulosti sa argumentovalo proti používaniu takýchto modelov tým, že je obtiažne mať v každom časovom okamihu k dispozícií presný stav skladu. V súčasnosti však takáto argumentácia už neobstojí. Model s periodickou kontrolou sme zvolili z nasledovných dôvodov. V praxi sa informácie o stave skladu využívajú zväčša len v diskrétnych časových momentoch, napr. objednávky sa vystavujú len raz denne, alebo týždenne v rovnakom dni; informácia o stave skladu medzi týmito časovými okamihmi nie je využitá. Naviac, v prípade koordinácie objednávania viacerých tovarov je periodická kontrola v praxi lepšie implementovateľná ako spojitý prístup. Periodický prístup je výhodný aj z pohľadu matematického modelovania - ako ukážeme ďalej, dodatočné predpoklady sa dajú pomerne jednoducho zahrnúť do modelu, bez toho, aby sme ho museli celý meniť.

Predpoklad jedného dodávateľa je v praxi taktiež nerealistický. My však nebudeme uvažovať úspory, ktoré by bolo možné dosiahnuť koordináciou vzhľadom na rôznych dodávateľov. V situácií, kedy má podnik viacero dodávateľov teda rozdelíme tovary do skupín podľa dodávateľa a každú skupinu optimalizujeme osobitne.

Optimalizácia nášho modelu je motivovaná minimalizáciou nákladov. V súlade so štandardnými predpokladmi o nákladovej štruktúre v zásobovacích modeloch uvažujeme tri druhy nákladov: náklady na objednávku, skladovanie a deficit. Náklady objednávky sú náklady, ktoré rastú s počtom objednávok. Súčasťou týchto nákladov sú predovšetkým náklady na dopravu, kontrolu dodávky, uskladnenie a pod. Náklady na skladovanie sú náklady, ktoré rastú s veľkosťou skladovaných zásob. Tieto pozostávajú napr. z nákladov na poistenie, na ušlé zisky z finančných prostriedkov viazaných v zásobách, z nákladov súvisiacich s technologickou údržbou skladovaného materiálu a pod. Náklady na deficit sú najťažšie vyčísliteľnými nákladmi. Tieto náklady vznikajú, ak sa vyskytne dopyt po tovare, ktorý nie je na sklade. Často sa stotožňujú s ušlým ziskom, nákladmi na reklamu na získanie nových zákazníkov a pod. Pre presnejšie vymedzenie jednotlivých druhov nákladov a metód ich vyčíslovania, ako aj pre niektoré ďalšie druhy nákladov odkážeme na [2].

V ďalšom formálne zapíšeme naše predpoklady o skladovacom systéme a vytvoríme matematický model. Optimalizáciu modelu potom formulujeme ako Markovovský rozhodovací proces.

3.3 Matematická formulácia modelu

3.3.1 Predpoklady

Uvažujme sklad, ktorého úlohou je uspokojovať dopyt po zásobovaných tovaroch. Zaveďme nasledovné predpoklady:

- $m \in \mathbf{N} = \{1, \ldots\}$ druhov tovarov.

- periodická kontrola stavu skladu. Uvažované periódy označíme $0, \ldots, T$ a $\underline{T} := \{0, \ldots, T\}$. Predpokladáme, že rozhodnutia o objednávanom množstve tovarov môžeme robiť "za behu", na začiatku každej periódy $t \in \underline{T-1}$. V ďalšom "časom t" myslíme začiatok t-tej periódy.

- okamžitá dodávka. Od tohto predpokladu neskôr upustíme.

- označme x_t stav skladu v čase t pred objednávkou, $x_t = (x_t^1, \ldots, x_t^m)^T$, $t \in \underline{T}$, y_t stav skladu v čase t po objednávke (a dodávke, nakoľko predpokladáme okamžitú dodávku), $y_t = (y_t^1, \ldots, y_t^m)^T$, $t \in \underline{T-1}$, t.j. $z_t = y_t - x_t$ je vektor objednaných množstiev, $t \in \underline{T-1}$. Vektor x_t, $t \in \underline{T}$ predstavuje stavovú premennú a vektor y_t, $t \in \underline{T-1}$ riadiacu premennú. V ďalšom budeme "stavom v čase t" rozumieť stav skladu v čase t pred objednávkou a "akciou v čase t" stav skladu v čase t po objednávke.

- stavový priestor, t.j. množina všetkých možných stavov tovarov na začiatku periódy t pred objednávkou, je $X := \mathbf{R}^m$, $t \in \underline{T}$. Stav na začiatku nultej periódy pred objednávkou, $x_0 \in X$, považujeme za daný.

- priestor riadení je $Y = X$. Množina prípustných akcií (rozhodnutí o veľkosti objednávky, resp. o veľkosti y_t) v čase t a stave $x \in X$ je $Y_t(x) = \{y \in Y : x \leq y \leq a_t\}$[1], kde $a_t \in \mathbf{R}^m$ interpretujeme ako kapacitu skladu v čase t.

- dopyty v jednotlivých časových periódach sú nezávislé m-rozmerné náhodné vektory $u_t = (u_t^1, \ldots, u_t^m)^T$ s nezápornými zložkami a známym rozdelením P_t, $t \in \underline{T-1}$. Neskôr ukážeme, že od predpokladu nezávislosti sa dá upustiť. Distribučnú funkciu vektora u_t (zložky u_t^i) označíme $P_t(\cdot)$ $(P_t^i(\cdot))$. Nech $t \in \underline{T-1}$ a $x \in X$ stav v čase t. Ak $y \in Y_t(x)$ je

[1] Ak $x, y \in \mathbf{R}^m$ tak $x \leq y$ znamená $x^i \leq y^i$ pre všetky $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x < y$ znamená $x \leq y$ a zároveň $x \neq y$.

zvolená akcia a $u \in \mathbf{R}_+^m = \{x \in \mathbf{R}^m : 0 \leq x\}$ je dopyt v perióde t, potom stav skladu na konci periódy t (resp. na začiatku nasledovnej periódy pred objednávkou) je $F_t(x, y, u) : X \times Y \times \mathbf{R}_+^m \to X$. Špeciálne rozoberieme prípady

(i) $F_t(x, y, u) \equiv F(y - u) = y - u$,

(ii) $F_t(x, y, u) \equiv F(y - u) = (y - u)^+ :=$
$= (\max\{y^1 - u^1, 0\}, \ldots, max\{y^m - u^m, 0\})^T$.

V prípade (i) je dopyt, ktorý počas periódy nebolo možné uspokojiť, uspokojený v nasledovnej perióde (prípad odloženej spotreby - BACKORDER) a v prípade (ii) nie je uspokojený vôbec (prípad stratených predajov - LOST SALES). Vzhľadom na to, že dopyt v jednotlivých časových periódach je nezáporný je zrejmé, že sa stavový priestor na začiatku každej periódy $t \in \underline{T}$ v prípade (i) redukuje na $\{x \in \mathbf{R}^m : x \leq a_t\}$ a v prípade (ii) na $\{x \in \mathbf{R}^m : 0 \leq x \leq a_t\}$, $t \in \underline{T}$ (to všetko za predpokladu, že $x_0 \leq a_0$). V súlade s týmto označíme $X_t = \{x \in X : x \leq a_t\}$ v prípade odloženej spotreby, resp. $X_t = \{x \in X : 0 \leq x \leq a_t\}$ v prípade stratených predajov, $t \in \underline{T}$ (pričom predpokladáme, že dopredu vyberieme jeden z prípadov (i), resp. (ii) a že toto rozhodnutie už nemeníme; môžme teda obe množiny označiť rovnako).

- tri druhy nákladov: náklady na objednávku, náklady na skladovanie a náklady na deficit.

  (i) náklady na objednávku $K_t : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$ v čase $t \in \underline{T-1}$ sú funkciou objednaného množstva. Pozostávajú z fixných a variabilných nákladov:

$$K_t(z) = k_t \delta(\sum_{i=1}^{m}(z^i)) + c_t^T z, \qquad t \in \underline{T-1},$$

  kde $k_t \in \mathbf{R}_+$, $t \in \underline{T-1}$ sú fixné náklady objednávky, $\delta(x) = 1$, pre $x > 0$, $\delta(0) = 0$ a $c_t = (c_t^1, \ldots, c_t^m)^T \in \mathbf{R}_+^m$, $t \in \underline{T-1}$ sú variabilné náklady objednávky,

  (ii) náklady na skladovanie jednotky i-teho tovaru počas časovej periódy $t \in \underline{T-1}$ označíme h_t^i, $h_t = (h_t^1, ..., h_t^m)^T \in \mathbf{R}_+^m$,

  (iii) náklady na deficit jednotky i-teho tovaru za časovú periódu $t \in \underline{T-1}$ označíme g_t^i, $g_t = (g_t^1, \ldots, g_t^m)^T \in \mathbf{R}_+^m$.

Nech y je akcia v čase $t \in \underline{T-1}$. Potom očakávané náklady na skladovanie a deficit v periόde t sú[2]:

$$
\begin{aligned}
L_t(y) &:= \sum_{i=1}^{m} h_t^i \int_0^{y^i} (y^i - u) dP_t^i(u) + g_t^i \int_{y^i}^{\infty} (u - y^i) dP_t^i(u) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (h_t^i + g_t^i) \int_0^{y^i} P_t^i(u) du + g_t^i(\mu_t^i - y^i).
\end{aligned}
$$

Označme ďalej

$$
r_t(x, y) := K_t(y - x) + L_t(y), \qquad t \in \underline{T-1}
$$

celkové náklady na objednávku, skladovanie a deficit v periόde t, ak stav skladu pred objednávkou bol x a stav skladu po objednávke y. Predpokladáme, že na konci plánovacieho obdobia vzniknú náklady vo výške $r_T(x_T) = -c_T^T x_T$, kde $c_T \in \mathbf{R}^m$ (pripúšťame záporné zložky vektora c_T) a $x_T \in X$ je stav skladu v čase T .

- diskontný faktor $\beta_t = 1/(1+i_t)$, kde $i_t \geq 0$ je úroková sadzba v periόde t.

3.3.2 Matematický model

Zhrňme predpoklady zavedené vyššie. Dynamika procesu je daná stavovou rovnicou

$$
x_{t+1} = F_t(x_t, y_t, u_t), \qquad t \in \underline{T-1},
$$

t.j. špeciálne v prípade odloženej spotreby

$$
x_{t+1} = y_t - u_t, \qquad t \in \underline{T-1},
$$

resp.

$$
x_{t+1} = (y_t - u_t)^+, \qquad t \in \underline{T-1}
$$

pri stratených predajoch. Ohraničenia na stav a riadenie sú

$$
x_t \in X_t, \qquad t \in \underline{T},
$$

$$
y_t \in Y_t(x), \qquad x \in X_t, t \in \underline{T-1}.
$$

[2]Označenie $\int \ldots dP(x)$ znamená Stieltjesov integrál podľa funkcie $P(x)$. Výhodou tohto značenia je spoločný zápis pre diskrétne aj spojité typy rozdelení náhodných premenných.

Stav skladu na začiatku plánovacieho obdobia $x_0 \in X_0$, považujeme za daný.

Úlohou je nájsť takú (deterministickú) Markovovskú politiku $\pi := (\pi_0, \ldots, \pi_{T-1}) \in \Pi^M$, kde $\pi_t : X_t \to Y$ také, že $\pi_t(x) \in Y_t(x)$, $t \in \underline{T-1}$, ktorá pri danom x_t minimalizuje očakávané diskontované náklady v periódach $t, \ldots, T-1$ pre každé $x_t \in X_t$ a pre každé $t \in \underline{T-1}$. Takúto politiku nazveme optimálnou objednávacou politikou. Formálna definícia Markovovskej politiky je v kapitole 2. Pripomenieme len, že ak je daná Markovovská politika π a stav v čase t je x_t, tak zvolíme akciu $y_t = \pi_t(x_t)$, t.j. objednávané množstvo bude $\pi_t(x_t) - x_t$.

Očakávané diskontované náklady v periódach $t, \ldots, T$ v závislosti na zvolenej politike π a stave x sú:

$$v_{t,\pi}(x) = \mathbb{E}^{\pi}[\sum_{s=t}^{T-1} \gamma_{t,s} r_s(x_s, y_s) + \gamma_{t,T} r_T(x_T)|x_t = x], \qquad t \in \underline{T-1}, \qquad (1)$$

kde $\gamma_{t,t} = 1$, $\gamma_{t,s+1} = \gamma_{t,s}\beta_s$, pre $s \in \{t+1, \ldots, T-1\}$.

Označme $v_t(x) := \inf_{\pi \in \Pi^M} v_{t,\pi}(x)$, $x \in X$. Politiku $\hat{\pi}$ nazývame (silne) optimálnou, ak $v_{t,\hat{\pi}}(x) = v_t(x)$ pre všetky $x \in X$ a pre všetky $t \in \underline{T-1}$. Aplikáciou princípu optimality teórie dynamického programovania na tento model dostávame rovnicu optimality(RO) v tvare

$$v_T(x) = r_T(x) \qquad \text{pre } \forall x \in X_T$$

$$v_t(x) = \inf_{y \in Y_t(x)} \{r_t(x,y) + \beta_t \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty v_{t+1}(F_t(y,u))\, dP_t(u)\}, \qquad t \in \underline{T-1},$$

pre $x \in X_t$. Pri našich predpokladoch sa dá ukázať (dôkaz v [4]), že RO je v našom modeli nutnou a postačujúcou podmienkou optimality a že infímum v RO sa dosahuje v prípade stratených predajov aj odloženej spotreby (a teda, že existuje optimálna objednávacia politika). Môžeme teda písať

$$v_t(x) = \min_{y \in Y_t(x)} \{r_t(x,y) + \beta_t \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty v_{t+1}(y-u) dP_t(u)\}, \qquad t \in \underline{T-1}$$

v prípade odloženej spotreby, resp.

$$v_t(x) = \min_{y \in Y_t(x)} \{r_t(x,y) + \beta_t \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty v_{t+1}((y-u)^+) dP_t(u)\}, \qquad t \in \underline{T-1}$$

v prípade stratených predajov. Funkcia $v_t(x)$ udáva minimálne diskontované očakávané náklady na udržiavanie skladu v periódach $t, t+1, ..., T$ ak stav skladu na začiatku periódy t je x.

Tento matematický model sa nazýva viactovarový AHM model podľa autorov jeho prvej verzie z roku 1951 - Arrowa, Harrisa a Marschaka ([9]).

Poznámky.
1. Model sme formulovali so spojitými stavovými priestormi a priestormi riadení. V takomto prípade sú potrebné dodatočné predpoklady o merateľnosti týchto priestorov. Tieto sa dajú nájsť napr. v [13], my predpokladáme, že sú splnené. Pri numerickom výpočte optimálnej objednávacej politiky však zväčša jednotlivé priestory diskretizujeme. Naše výsledky platia aj v prípade diskrétneho stavového priestoru a priestoru riadení, t.j. v prípade $X = \mathbf{Z}^m$.
2. Model nepredpokladá konštantnú dĺžku periódy. Sklad teda môžeme inventarizovať napr. počas týždňa každý deň a cez víkend nie. Samozrejme, v takomto prípade treba nastaviť hodnoty jednotlivých parametrov tak, aby zodpovedali dĺžke periódy, na ktorú sa vzťahujú.
3. Pri optimalizácií nákladov v praxi sa zväčša uvažuje nekonečný časový horizont. V tomto prípade treba zaručiť, že minimálna hodnota účelovej funkcie je konečná, čo sa môže dosiahnuť uvažovaním úrokovej miery väčšej ako 1. Alternatívou je uvažovať namiesto celkových diskontovaných nákladov priemerné náklady (pozri kapitolu 2).
4. V praxi je často náročné odhadnúť výšku nákladov na deficit. Preto sa niekedy namiesto nich (alebo súčasne s nimi) uvažuje s požiadavkou na minimálnu mieru obsluhy. Takáto požiadavka sa dá do nášho modelu ľahko zahrnúť. Nech je pre všetky t dané $\alpha_t = (\alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^m)^T$, kde α_t^i je (požadovaná) pravdepodobnosť toho, že v perióde t nenastane deficit i-teho tovaru. Nájdime najmenšiu hodnotu s_t^i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $t \in \underline{T-1}$ tak, aby platilo

$$P(u_t^i \leq s_t^i) \geq \alpha_t^i,$$

t.j. $s_t^i = s_t^i(\alpha_t^i)$ (pri danom rozdelení u_t). Teraz stačí zmeniť riadiaci priestor[3]:

$$\bar{Y}_t(x) := \{y \in Y_t : y \geq x \vee s_t\} = \{y \in \mathbf{R}^m : a_t \geq y \geq x \vee s_t\},$$

kde $s_t = (s_t^1, \ldots, s_t^m)^T$, pričom predpokladáme, že $a_t \geq s_t$.
5. Spoločné obmedzenie na kapacitu skladu môžme taktiež docieliť zmenou riadiaceho priestoru. Nech teda $a_t \in \mathbf{R}_+$ je spoločné obmedzenie na kapacitu skladu (toto môže vyjadrovať napr. celkový objem, hmotnosť, alebo celkový kapitál viazaný v zásobách a pod.), nech ďalej $a_t^i \in \mathbf{R}_+$, $i = 1, \ldots, m$ sú objemy (resp. hmotnosti, ceny a pod.) jednotlivých tovarov. Zmenený priestor

[3]Nech $x, y \in \mathbf{R}^m$. Definujeme $x \vee y := (\max\{x^1, y^1\}, \ldots, \max\{x^m, y^m\})^T$.

prípustných akcií v čase $t \in \underline{T-1}$ a stave $x \in X_t$ bude:

$$\bar{Y}_t(x) = \{y \in \mathbf{R}^m : a_t \geq \sum_{i=1}^{m} a_t^i y^i; y \geq x\}.$$

6. Všimnime si, že pre $k_t \equiv 0$ sa model rozpadá na m jednotovarových modelov. V takomto prípade totiž môžme v celkových diskontovaných nákladoch zameniť poradie sumácie a (1) bude pre $t \in \underline{T-1}$:

$$v_{t,\pi}(x) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}^{\pi} \Big[\sum_{s=t}^{T-1} \gamma_{t,s} \Big(c_s^i (y_s^i - x_s^i) + L_s^i(y_s^i) \Big) - \gamma_{t,T} (c_T^i x_T^i) | x_t^i = x^i \Big],$$

kde

$$L_t^i(y^i) = h_t^i \int_0^{y^i} (y^i - u) dP_t^i(u) + g_t^i \int_{y^i}^{\infty} (u - y^i) dP_t^i(u).$$

3.3.3 Eliminácia variabilných nákladov

Model sa dá transformovať na prípad $c_t = 0$, $t \in \underline{T}$. Definujme:

$$\hat{v}_T(x) := v_T(x) + c_T^T x = 0,$$

$$\hat{v}_t(x) := v_t(x) + c_t^T (x - \mu_t) + b_t, \qquad \text{kde } \mu_t = E(u_t).$$

Dosadením RO v prípade odloženej spotreby dostaneme:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_t(x) &= c_t^T (x - \mu_t) + b_t + \min_{y \in Y_t(x)} \{ k_t \delta (\sum_{i=1}^{m} (y^i - x^i)) + c_t^T (y - x) + L_t(y) + \\
&\quad \beta_t \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \hat{v}_{t+1}(y - u) - c_{t+1}^T (y - u - \mu_{t+1}) - b_{t+1} dP_t(u) \} \\
&= \min_{y \in Y_t(x)} \{ k_t \delta (\sum_{i=1}^{m} (y^i - x^i)) + (c_t - \beta_t c_{t+1})^T (y - \mu_t) + L_t(y) + \\
&\quad \beta_t \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \hat{v}_{t+1}(y - u) \, dP_t(u) \} + b_t - \beta_t b_{t+1} + \rho_t c_{t+1}^t \mu_{t+1}.
\end{aligned}$$

Položme

$$\begin{aligned}
b_T &= 0 \\
b_t &= \beta_t (b_{t+1} - c_{t+1}^T \mu_{t+1}), \qquad t \in \underline{T-1}.
\end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned}
(c_t - \beta_t c_{t+1})^T (y - \mu_t) + L_t(y) &= \sum_{i=1}^{m} (c_t^i - \beta_t c_{t+1}^i)(y^i - \mu_t^i) + \\
&\quad (h_t^i + g_t^i) \int_0^{y^i} P_t^i(u)du + g_t^i(\mu_t^i - y^i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\hat{h}_t^i + \hat{g}_t^i) \int_0^{y^i} P_t^i(u)du + \hat{g}_t^i(\mu_t^i - y^i) \\
&=: \hat{L}_t(y),
\end{aligned}$$

kde $\hat{g}_t = g_t - (c_t - \beta_t c_{t+1})$, $\hat{h}_t = h_t + (c_t - \beta_t c_{t+1})$ sú nové vektory nákladov na deficit a skladovanie. Pre $\hat{v}_t(x)$ teraz platí:

$$\hat{v}_t(x) = \min_{y \in Y_t(x)} \{K_t \delta(\sum_{i=1}^{m} (y^i - x^i)) + \hat{L}_t(y) + \beta_t \int_0^{\infty} ... \int_0^{\infty} \hat{v}_{t+1}(y - u) dP_t(u)\}.$$

Týmto sme model s variabilnými nákladmi objednávky v prípade odloženej spotreby transformovali na model bez variabilných nákladov. Variabilné náklady objednávky sa z modelu v prípade stratených predajov dajú eliminovať podobným spôsobom. Platí ([4]), že optimálna politika v transformovanom modeli je optimálnou aj v pôvodnom modeli a naopak. Variabilné náklady objednávky teda nie sú pre teoretickú analýzu modelu podstatné.

3.3.4 Optimálna objednávacia politika

Optimálnu objednávaciu politiku (vieme, že táto v našom modeli existuje; dôkaz v [4]) získame riešením rovnice optimality (vieme, že RO je v našom modeli postačujúcou podmienkou optimality; dôkaz tiež v [4]). Tu si treba uvedomiť, že pri riešení RO minimalizujeme pre každé $t \in \underline{T-1}$ a pre každé $x \in X_t$ funkciu m premenných a že vo väčšine prípadov treba túto minimalizáciu prevádzať numericky (pozri aj časť 2.4 o metódach riešenia rovníc optimality). O optimálnej objednávacej politike sa dá ukázať, že má štruktúru, ktorej znalosť nám umožní zjednodušiť výpočty.

Uvažujme bez ujmy na všeobecnosti (pozri predošlú časť) model bez variabilných nákladov objednávky. Máme:

$$v_T(x) = 0,$$

$$v_t(x) = \min_{y \in Y_t(x)} \{K_t(y - x) + L_t(y) + \beta_t \int_0^{\infty} ... \int_0^{\infty} v_{t+1}(y - u) dP_t(u)\},$$

pre $t \in \underline{T-1}$, kde $K_t(z) = k_t\delta(\sum_{i=1}^{m}(z^i))$. Označme

$$H_t(y) := L_t(y) + \beta_t \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty v_{t+1}(y-u)dP_t(u).$$

Potom platí:

$$v_t(x) = \begin{cases} H_t(x) & \text{ak v } t\text{-tej perióde neobjednávame nič} \\ k_t + \min\limits_{y \in Y_t(x)} H_t(y) & \text{ak objednávame kladné množstvo aspoň} \\ & \text{jedného tovaru} \end{cases}$$

Z toho dostávame pravidlo:

$$\text{Ak} \quad H_t(x) - \min_{y \in Y_t(x)} H_t(y) =: \Delta H_t \begin{cases} \leq k_t \Rightarrow \text{neobjednávať nič,} \\ > k_t \Rightarrow \text{objednať } \arg\min\limits_{y \in Y_t(x)} H_t(y) - x. \end{cases}$$

Pre $\Delta H_t = k_t$ sú obe alternatívy rovnako dobré a môžeme zvoliť ľubovolnú z nich. Je zrejmé, že množina tých x, pre ktoré sa oplatí objednávať závisí od tvaru funkcie H_t a hodnoty fixných nákladov objednávky k_t. Za predpokladov

(i) $a_t \leq a_{t+1}$, $t \in \underline{T-2}$,

(ii) $\beta_t k_{t+1} \leq k_t$, $t \in \underline{T-2}$

Pfeifer ([4]) ukazuje, že funkcie H_t a v_t sú $(K_t, \bar{x}_t)$-kvázi-konvexné na ${X_t}$[4], $t \in \underline{T}$, kde $\bar{x}_t$ je minimum funkcie $L_t(x)$ na množine X_t (táto funkcia existuje pre všetky $x \in X_t$ a má na X_t minimum, dôkaz v [4]).

Z toho v jednotovarovom prípade (pre $m = 1$) vyplýva ([4], [5]):

- Ak $k_t \geq 0$, $t \in \underline{T-1}$ je optimálna tzv. (s_t, S_t)-politika. Pri tejto politike sa neobjednáva, ak je stav zásob tovaru v čase t vyšší, alebo rovný ako s_t. Tovar je doplnený do svojej objednávacej hranice S_t, ak jeho stav klesne pod s_t, t.j.

$$\pi_t(x) = \begin{cases} x & x \geq s_t \\ S_t & \text{inak} \end{cases}, \qquad t \in \underline{T-1}$$

[4]Nech $X \subset \mathbf{R}^m$ je konvexná oblasť, $\bar{x} \in X$, $K : \mathbf{R}_+^m \to \mathbf{R}_+$. Funkciu $f : X \to \bar{\mathbf{R}}$ nazývame $(K, \bar{x})$-kvázi-konvexnou na X ak (i) $f(x) \leq K(z-x) + f(z)$ pre všetky $x, z \in X$, $\bar{x} \leq x \leq z$ a zároveň (ii) $f(x) \geq f(z)$ pre všetky $x, z \in X$, $x \leq z \leq \bar{x} \vee x$.

- Ak $k_t \equiv 0$, t.j., ak sa nevyskytujú fixné náklady objednávky, je optimálna tzv. BASESTOCK-politika. Je to vlastne limitný prípad (s_t, S_t) politiky pre $s_t = S_t$. Podľa tejto politiky sa tovar v čase t objednáva, akonáhle sa jeho stav vychýli od hladiny S_t, t.j.

$$\pi_t(x) = \max\{x, S_t\}, \qquad t \in \underline{T-1}$$

Vo viactovarom prípade (pre $m \geq 2$) je situácia zložitejšia. Tu vo všeobecnosti nemôžeme očakávať žiaden jednoduchý tvar objednávacej politiky. V závislosti od hodnôt fixných nákladov objednávky k_t platí ([4]):

- Ak $k_t \geq 0$, $t \in \underline{T-1}$ existujú $\sigma_t \subset X_t$, $S_t \in X_t$ a zobrazenie $\bar{S}_t : X_t \to Y$, $\bar{S}_t(x) \in Y_t(x)$ pre všetky $x \in X_t$ také, že

$$\pi_t(x) = \begin{cases} x & x \in \sigma_t \\ S_t & x \notin \sigma_t,\, x \leq S_t \\ \bar{S}_t(x) & \text{inak} \end{cases}, \qquad t \in \underline{T-1}$$

  je optimálna politika, pričom pre σ_t platí $\sigma_t \supset [\bar{x}_t, a_t] := \{x \in \mathbf{R}^m : \bar{x}_t \leq x \leq a_t\}$, kde $\bar{x}_t$ je ako vyššie. Takáto politika sa v literatúre označuje ako (σ_t, S_t)-politika.

- Ak $k_t \equiv 0$ je aj vo viactovarovom prípade optimálna BASESTOCK-politika, t.j.

$$\pi_t(x) = \bar{x}_t \vee x, \qquad \text{pre všetky } x \in X_t, t \in \underline{T-1}$$

  je optimálna politika, kde $\bar{x}_t$ je ako vyššie.

Ako nám znalosť štruktúry optimálnej objednávacej politiky zjednodušuje výpočty? Uvažujme pre názornosť jednotovarový prípad, kedy $k_t \geq 0$, $t \in \underline{T-1}$. Vieme, že v tomto prípade je optimálna (s_t, S_t)-politika. V každom čase $t \in \underline{T-1}$ nám teda stačí určiť body s_t a S_t a nemusíme počítať hodnotu optimálnej politiky π_t pre každý stav $x_t \in X_t$. Postup na určenie týchto bodov môže byť nasledovný. Nech je dané $t \in \underline{T-1}$ a nech poznáme funkciu v_{t+1} (pričom začíname s $t = T-1$, kde máme $v_{t+1}(x) = v_T(x) = r_T(x)$). Zvolíme dostatočne malé $x_t \in X_t$, kde "dostatočne malé" znamená také, aby v ňom bolo optimálne objednávať (v prípade stratených predajov, kedy $X_t = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq a_t\}$ takéto x_t nemusí existovať, potom položíme $s_t = S_t = 0$). Nájdeme $y_t \in Y_t(x_t)$, ktoré minimalizuje pravú stranu príslušnej rovnice optimality. Toto y_t je hľadaným S_t. Ešte nám zostáva určiť s_t. Na jeho nájdenie uvažujeme postupnosť rastúcich stavov $x_t = x_t^0 < x_t^1 < \ldots$. Pre stavy x_t^i, $i = 1, 2, \ldots$ postupne hľadáme príslušné y_t^i, ktoré minimalizujú pravú stranu RO. Táto minimalizácia sa redukuje na porovnanie možností "neobjednávať" a "doplniť sklad do S_t". Najmenší stav x_t^i, pre ktorý je optimálne neobjednávať je hľadaným bodom s_t.

Vo viactovarových prípadoch je postup o niečo zložitejší. Znalosť štruktúry optimálnej objednávacej politiky nám však aj tu pomáha značne urýchliť jej výpočet .

V ďalšom uvedieme niekoľko zovšeobecnení nášho modelu. Uvidíme, že tieto zovšeobecnenia sa po teoretickej stránke dajú pomerne jednoducho implementovať do dynamického programu. To však spravidla len za cenu zväčšenia stavového priestoru, čo zase zvyšuje výpočtové nároky.

3.4 Dodacia lehota

3.4.1 Deterministická dodacia lehota

Doteraz sme vychádzali z predpokladu, že stav zásob sa dá na začiatku periódy okamžite doplniť. Takéto zjednodušenie je obhájiteľné len pri veľkých periódach (vzhľadom na dodaciu lehotu). Obyčajne sa musí počítať s dodacími lehotami, a to aj v prípade, že tovar pochádza z vlastného podniku. Pod dodacou lehotou totiž máme na mysli celý rad činností počnúc zistením objednávaných množstiev jednotlivých tovarov až po uskladnenie dodávky. Zovšeobecníme teda AHM model pre prípad nezanedbateľnej dodacej lehoty.

Predpokladajme najprv, že dodacia lehota je deterministická, dĺžky $\tau \in \{2, 3, \ldots\}$ periód a pre jednoduchosť predpokladajme neohraničenú kapacitu skladu. Označme:

$x_t \in \mathbf{R}^m$	stav skladu v čase t po dodávke objednávky z periódy $t-\tau$
$z_j \geq 0$	množstvo objednané na začiatku j-tej predchádzajúcej periódy, $j = 1, \ldots, \tau - 1$,
$z_0 \geq 0$	množstvo objednané na začiatku uvažovanej periódy.

Potom platí:

$$x_{t+1} = x_t - u_t + z_{\tau-1}, \qquad t \in \underline{T-1}$$

v prípade odloženej spotreby, resp.

$$x_{t+1} = (x_t - u_t)^+ + z_{\tau-1}, \qquad t \in \underline{T-1}$$

v prípade stratených predajov. Na opísanie stavu systému nepostačuje celkové množstvo tovarov na ceste ako dodatočná stavová premenná. Na prechod z času t do času $t+1$ si potrebujeme pamätať jednotlivé objednávky

$z_i \in \mathbf{R}_+^m$, $i = 1, \dots, \tau - 1$. Rovnica optimality v prípade odloženej spotreby bude mať tvar

$$\begin{aligned} v_T(x, z_1, \dots, z_{\tau-1}) &= r_T(x), \\ v_t(x, z_1, \dots, z_{\tau-1}) &= \min_{z_0 \geq 0}\{\hat{r}_t(x, z_0) + \\ &\beta_t \int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}(x + z_{\tau-1} - u, z_0, \dots, z_{\tau-2}) dP_t(u)\}, \end{aligned}$$

kde $\hat{r}_t(x, z) = K_t(z) + c^T z + L_t(x)$. Prípad stratených predajov je analogický. Vidíme, že pri väčšom τ (resp. m) dostaneme stavový priestor veľkosti, ktorá sa v rozumnom čase nedá výpočtovo zvládnuť. Pre $\tau = 1$ však stavový priestor zväčšovať nemusíme. RO v prípade odloženej spotreby pre $\tau = 1$ bude

$$\begin{aligned} v_t(x) &= \min_{z_0 \geq 0}\{\hat{r}_t(x, z_0) + \\ &\beta_t \int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}(x + z_0 - u) dP_t(u)\}. \end{aligned}$$

Pri väčších hodnotách τ by sme teda mohli postupovať tak, že zmeníme dĺžku periódy tak, aby sa zhodovala s dĺžkou dodacej lehoty[5].

3.4.2 Stochastická dodacia lehota

V ďalšom budeme skúmať prípad stochastickej dodacej lehoty. Predpokladajme teda, že dodacia lehota τ je diskrétna náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty $1, 2, \dots$. Pre jednoduchosť predpokladáme, že môže byť najviac jedna dodávka na ceste. Označenia:

q_t	pravdepodobnosť, že dodacia lehota je rovná t, $t = 1, 2, \dots$,
$Q(t)$	distribučná funkcia náhodnej premennej τ,
φ_{n+1}	pravdepodobnosť prechodu zo stavu "po n periódach je dodávka na ceste" k stavu "v $(n+1)$-vej perióde dodané",
$z_1 \in R_+^m$	vektor objednaných množstiev,
n	počet periód, koľko je dodávka na ceste.

[5] So zväčšujúcou sa dĺžkou periódy sa zväčšujú jednotkové náklady na skladovanie a deficit, kým náklady na dodávku ostávajú konštantné. Predĺženie periódy má teda za následok relatívne zmenšenie nákladov na dodávku. Vyvstáva potom otázka, či tieto náklady z modelu nevynechať. V takomto prípade by sa totiž model rozpadol na m jednotovarových modelov, ktoré vieme efektívne riešiť. Zväčšovanie dĺžky periódy sa však neodporúča ([5]), nakoľko takto vzrastie neistota v dopyte počas periódy, čo zasa zvyšuje náklady na skladovanie, resp. deficit.

Platí:

$$\varphi_{t+1} = P(\tau = t+1|\tau > t) = \frac{q_{t+1}}{1-Q(t)} \qquad t \geq 0.$$

V prípade odloženej spotreby platí:

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_t - u_t + z_1 & \text{s pravdepodobnosťou } \varphi_{t+1} \\ x_t - u_t & \text{s pravdepodobnosťou } 1-\varphi_{t+1} \end{cases}$$

RO sa v tomto prípade rozdelí na nasledovné dve rovnosti

$$v_t(x, z_1, n) = L_t(x) + \beta_t\varphi_{n+1}\int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}(x-u+z_1, 0, 0)dP_t(u) +$$
$$\beta_t(1-\varphi_{n+1})\int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}(x-u, z_1, n+1)dP_t(u),$$

pre $z_1 > 0$ a pre $z_1 = 0$

$$\begin{aligned} v_t(x, 0, n) &= \min_{z\geq 0}\{K_t(z) + L_t(x) + \\ &\quad \beta_t\varphi_1 \int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}(x-u+z, 0, 0)dP_t(u) + \\ &\quad \beta_t(1-\varphi_1)\int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}(x-u, z, 1)dP_t(u)\}. \end{aligned}$$

Systém je teda možné riadiť len v prípade, že $z_1 = 0$ čo zodpovedá predpokladu o nanajvýš jednej dodávke na ceste.

V prípade stratených predajov máme:

$$x_{t+1} = \begin{cases} (x_t - u_t)^+ + z_1 & \text{s pravdepodobnosťou } \varphi_{t+1} \\ (x_t - u_t)^+ & \text{s pravdepodobnosťou } 1-\varphi_{t+1}. \end{cases}$$

Rovnica optimality bude tvaru

$$\begin{aligned} v_t(x, z_1, n) &= L_t(x) + \beta_t\varphi_{n+1}\int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}((x-u)^+ + z_1, 0, 0)dP_t(u) + \\ &\quad \beta_t(1-\varphi_{n+1})\int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}((x-u)^+, z_1, n+1)dP_t(u), \end{aligned}$$

pre $z_1 > 0$ a pre $z_1 = 0$

$$\begin{aligned} v_t(x_t, 0, n) &= \min_{z \geq 0} \{K_t(z) + L_t(x) + \\ &\quad \beta_t \varphi_1 \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty v_{t+1}((x-u)^+ + z, 0, 0) dP_t(u) + \\ &\quad \beta_t (1-\varphi_1) \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty v_{t+1}((x-u)^+, z, 1) dP_t(u)\}. \end{aligned}$$

3.5 Autokorelovaný dopyt

Doteraz sme predpokladali, že dopyty v jednotlivých periódach sú vzájomne stochasticky nezávislé. V niektorých prípadoch sa však predpoklad nezávislosti ukazuje ako značne nerealistický (pozri napr. [3]). V týchto prípadoch je rozumnejšie predpokladať, že pravdepodobnostné rozdelenie dopytu v uvažovanej časovej perióde závisí od dopytov v $k \in \mathbf{N}$ predchádzajúcich periódach:

$$P_t(u) = P_t(u|u_1, u_2, \ldots, u_k),$$

kde u_i označuje dopyt v i-tej predchádzajúcej perióde a k je fixné číslo. Takto sme dospeli k systému, v ktorom náhodné veličiny naň pôsobiace už nie sú vzájomne nezávislé. Tento problém sa dá obísť za cenu zväčšenia stavového priestoru. Postup ukážeme na markovovskom prípade procesu dopytu, kedy:

$$P_t(u) = P_t(u|u_1).$$

Pozorovanie u_1 z predchádzajúcej periódy vstúpi do rovnice optimality ako stavová premenná:

$$\begin{aligned} v_t(x, u_1) &= \min_{y \in Y_t(x)} \{K_t(y-x) + L_t(y, u_1) + \\ &\quad \beta_t \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty v_{t+1}(y-u, u) dP_t(u|u_1)\}, \end{aligned}$$

kde $L_t(y, u_1)$ sú očakávané náklady na skladovanie a deficit v perióde $t \in \underline{T-1}$ pri rozdelení dopytu $P_t(u|u_1)$.

Takýmto spôsobom môžme do modelu zahrnúť realistické procesy dopytu - napr. v uvedenom markovovskom prípade by proces dopytu mohol byť modelovaný AR(1) procesom[6].

[6]Proces AR(1) vyhovuje rovnosti $u_t = \mu_0 + \alpha(u_{t-1} - \mu_0) + \epsilon_t$, kde $|\alpha| < 1$, ϵ_t sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny, z rozdelenia $N(0, \sigma_\epsilon)$ a μ_0 je dlhodobá stredná hodnota procesu.

3.6 Modely s prognózou

V niektorých situáciách existuje informácia o budúcom priebehu dopytu, na základe ktorej sú vytvárané (zväčša krátkodobé) prognózy. Tieto chceme zohľadniť v našom modeli. Zdrojom informácie o budúcom dopyte môže byť napr. štatistická analýza dopytu v minulosti, alebo zmluva s veľkoodberateľom a pod.

V praxi sa niekedy zavádza trojkrokový postup. V prvom kroku sa určí prognóza dopytu. V druhom kroku sa určia poistné zásoby, ktoré majú zabrániť vzniku deficitu. V treťom kroku sa vypočíta optimálna objednávacia politika pomocou deterministického modelu, v ktorom sa za deterministický dopyt zoberie prognóza určená v prvom kroku. Takýto postup vedie k riešeniam, ktoré sú spravidla suboptimálne. Optimálne riešenia získame, keď prognózu dopytu integrujeme do dynamického programu.

Uvažujme najprv prípad, kedy máme k dispozícií predpoveď na jednu periódu dopredu.

3.6.1 Endogénna prognóza

Rozlišujeme dva druhy prognóz: exogénnu a endogénnu prognózu. V prípade endogénneho prístupu sa predpoveď odvádza z dopytu pozorovaného v minulých periódach. Sem patrí aj prípad autokorelovaného dopytu. Predchádzajúce pozorovania $u_1, u_2, \ldots$ zrhnieme do postačujúcej štatistiky w_0 a ďalej počítame s podmieneným rozdelením

$$P_t(u_t|w_0).$$

Informácia w_0 získaná z minulých hodnôt dopytu $u_1, u_2, \ldots$ sa považuje za predpoveď dopytu u_t v uvažovanej perióde t. Na konci uvažovanej periódy je známa presná hodnota u_t a môžeme určiť predpoveď w_1 na ďalšiu periódu:

$$w_1 = g_t(u_t, w_0).$$

Dôležité je, aby sa nová prognóza w_1 dala určiť len z hodnôt starej prognózy w_0 a aktuálneho pozorovania u_t. Potom je totiž možné integrovať proces predpovedania do rovnice optimality, ktorá bude vyzerať nasledovne:

$$\begin{aligned} v_t(x, w_0) &= \min_{y \in X_t(x)} \{K_t(y-x) + L_t(y_t, w_0) + \\ &\quad \beta_t \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty v_{t+1}(y-u, g_t(u, w_0)) dP_t(u|w_0)\}, \end{aligned}$$

kde $L_t(y, w)$ sú očakávané náklady na skladovanie a deficit v perióde $t \in \underline{T-1}$ pri rozdelení dopytu $P_t(u|w)$.

3.6.2 Exogénna prognóza

Pri exogénnej prognóze je zdroj informácie mimo modelu. Takáto situácia nastáva napr. keď sa v podniku prognózy určujú v inom oddelení ako riadenie zásob. Prognostické oddelenie zostaví predpovede na základe makroekonomických údajov a údajov o podniku. Kým v endogénnom prípade môžme pomocou funkcie g_t pri známom dopyte v uvažovanej perióde určiť (deterministicky) predpoveď na nasledovnú periódu, má prognóza v tomto prípade pre zásobovacie oddelenie náhodný charakter:

w_0 je najnovšia prognóza. Predpovedá dopyt v uvažovanej perióde.

u je dopyt v uvažovanej perióde, s rozdelením $P_t(u|w_1)$.

w_1 je (zatiaľ neurčená) predpoveď na nasledovnú periódu. Táto je pre nás náhodnou veličinou, keďže predpovedací mechanizmus nepoznáme. Náhodná veličina w_1 má známe rozdelenie $R_t(w_1)$.

Rovnica optimality:

$$\begin{aligned} v_t(x, w_0) &= \min_{y \in Y_t(x)} \{K_t(y-x) + L_t(y, w_0) + \\ &\quad \beta_t \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+1}(y-u, w_1) dR_t(w_1) dP_t(u|w_0)\}. \end{aligned}$$

3.6.3 Posuvný horizont

Navrhneme teraz prístup k zahrnutiu predpovedí do optimalizácie, ktorý je vhodný pre použitie v praxi. Tu zväčša nejestvuje žiaden prirodzený koniec plánovacieho horizontu, a preto sa tento považuje za nekonečný (aj keď napr. pri sezónnych tovaroch môže byť koniec sezóny považovaný za koniec plánovacieho horizontu; nasledovný postup je po malých úpravách použiteľný aj v takomto prípade).

Uvažujme teda nekonečný plánovací horizont a predpokladajme, že v každom čase t, v ktorom máme možnosť robiť rozhodnutia o objednávke, máme k dispozícii predpovede $w_0, \dots, w_{\tau-1}$ na $\tau \in \mathbf{N}$ periód dopredu. Teda rozdelenie dopytu v periódach $t, t+1, \dots, t+\tau-1$ je postupne $P_t(u|w_0), \dots,$ $P_{t+\tau-1}(u|w_{\tau-1})$. Pre získanie hodnotovej funkcie v_t (a teda aj optimálnej objednávacej politiky v čase t) postupujeme v dvoch krokoch.

V prvom kroku riešime stacionárnu úlohu na nekonečnom horizonte, kde za stacionárne rozdelenie dopytu vezmeme $P_{t+\tau-1}(u|w_{\tau-1})$. Riešime teda funkcionálnu rovnicu

$$v(x) = \min_{y \in Y_{t+\tau-1}(x)} \Big\{ K_{t+\tau-1}(y-x) + L_{t+\tau-1}(y, w_{\tau-1}) +$$

$$\beta_{t+\tau-1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty v(y-u) dP_{t+\tau-1}(u|w_{\tau-1}) \Big\},$$

kde hodnoty všetkých parametrov sú rovnaké ako v perióde $t + \tau - 1$. Riešenie tejto rovnice považujeme za odhad hodnotovej funkcie $v_{t+\tau}$ udávajúcej minimálne očakávané diskontované náklady v periódach $t + \tau, t + \tau + 1, \dots$. O odhade hovoríme, pretože rozdelenie dopytu v periódach $t+\tau, t+\tau+1, \dots$ sa v skutočnosti môže meniť (rovnako ako hodnoty ostatných parametrov modelu).

V druhom kroku nájdeme v_t. Za tým účelom riešime nestacionárnu úlohu na konečnom horizonte dĺžky τ. Príslušná rovnica optimality je:

$$\begin{aligned} v_{t+s}(x) &= \min_{y \in Y_{t+s}(x)} \Big\{ K_{t+s}(y-x) + L_{t+s}(y, w_s) + \\ & \qquad \beta_{t+s} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty v_{t+s+1}(y-u) dP_{t+s}(u|w_s) \Big\} \end{aligned}$$

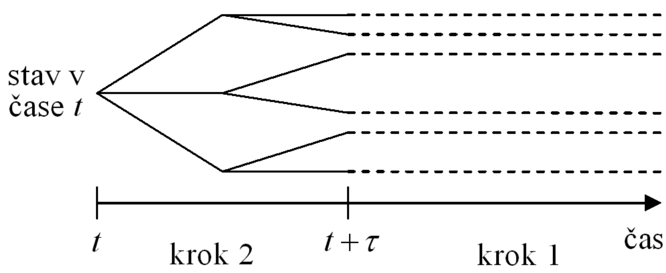
pre $s = \tau - 1, \dots, 0$, kde za "štartovaciu" funkciu $v_{t+\tau}$ dosadíme odhad získaný v predošlom kroku. Všimnime si, že jednotlivé predpovede, na rozdiel od prístupov uvedných vyššie, nefigurujú v rovnici optimality ako stavové premenné. Toto je možné vďaka tomu, že máme k dispozícii predpovede až do konca uvažovaného časového horizontu. Riešením tejto úlohy získame hľadanú hodnotovú funkciu v_t a môžme spraviť rozhodnutie o objednávke. Ak v čase t pozorujeme stav skladu x tak optimálne rozhodnutie o objednávanom množstve (resp. stave skladu po objednávke) získame ako argument minima v rovnici pre $v_t(x)$. Schematické znázornenie tohto dvojkrokového postupu je na obrázku 1.

V čase $t+1$ máme k dispozícii novú predpoveď dopytu v perióde $t+\tau$ (pričom predpovede dopytu v periódach $t+1, \dots, t+\tau-1$, ktoré boli k dispozícii už v čase t, môžu byť taktiež upravené) a môžme opät aplikovať popísanú dvojkrokovú metódu na získanie hodnotovej funkcie v_{t+1}. Tento postup sa v literatúre označuje ako posuvný horizont (*rolling horizon*).

Poznámka.
Pri aplikácií popísaného postupu riešime v každom čase (v kroku 1) funkcionálnu rovnicu pre v. Na tento účel môžme použiť numerický algoritmus popísaný v časti 2.4 o metódach riešenia MRP. Tento algoritmus generuje postupnosť funkcií v^k, ktorá konverguje k hľadanej funkcií v. Na jeho použitie je potrebné zvoliť štartovaciu funkciu v^0. Za v^0 môžeme výhodne zobrať

riešenie funkcionálnej rovnice z predošlej periódy. Za predpokladu, že predpovedaný dopyt sa veľmi nezmení takto môžeme značne urýchliť konvergenciu numerického algoritmu.

Obr. 1: Riešenie úlohy na nekonečnom horizonte, získané v kroku 1 považujeme za aproximáciu funkcie $v_{t+\tau}$, ktorú použijeme v kroku 2 ako "štartovaciu" funkciu úlohy na konečnom horizonte.



3.7 Zhrnutie

V tejto kapitole sme uviedli a zdôvodnili naše predpoklady o skladovacom systéme a vytvorili sme matematický model. Optimalizáciu modelu sme formulovali ako Markovovský rozhodovací proces. Uviedli sme vlastnosti optimálnej politiky pre špeciálne prípady fixných nákladov objednávky. Základný model sme potom zovšeobecnili pre nezanedbateľnú dodaciu lehotu a autokorelovaný dopyt. Na záver sme ukázali ako možno do modelu integrovať predpovede dopytu.

Treba poznamenať, že v praxi náš model nie je použiteľný na plne automatizované objednávanie tovarov. Dôvodom sú naše predpoklady o skladovacom systéme, ktoré aj keď sú pomerne všeobecné, nemusia vždy odrážať realitu s dostatočnou presnosťou (napr. sme implicitne predpokladali, že z každého tovaru môžme objednať ľubovolné množstvo (pri dodržaní obmedzení na kapacitu skladu), čo v praxi nemusí byť vždy splnené). Výsledky optimalizácie modelu sú myslené skôr ako záchytný bod pre určenie finálnych objednávok jednotlivých tovarov.

4 Numerické príklady

4.1 Štruktúra optimálnych politík

Uvažujme pre názornosť model s dvoma ($m = 2$) tovarmi. Pravdepodobnostné rozdelenie dopytu po každom z nich je uvedené v tabuľke 1. Ďalšie parametre modelu sú v tabuľke 2. Všetky parametre sú stacionárne, rovnako

Tabuľka 1: Pravdepodobnostné rozdelenie dopytu po tovaroch.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_1(i)$	0.05	0.1	0.14	0.19	0.21	0.16	0.1	0.05
$p_2(i)$	0.01	0.12	0.13	0.22	0.21	0.16	0.15	-

Tabuľka 2: Ďalšie parametre modelu

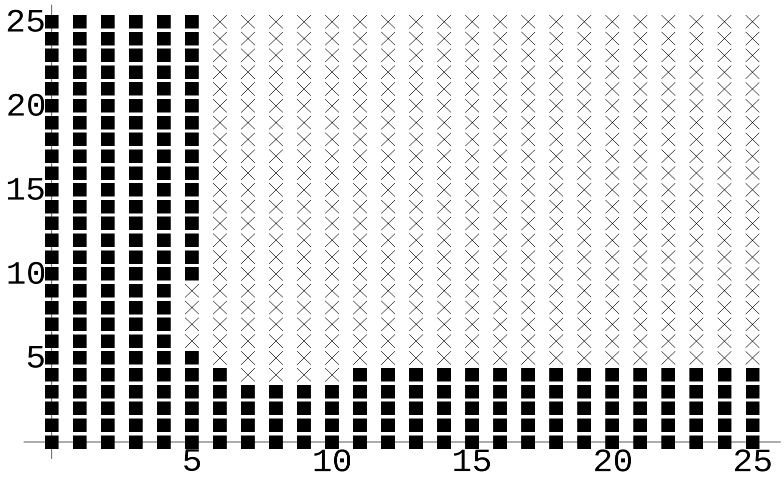
k	450	β	1	T	10
c_1	4	h_1	15	g_1	1500
c_2	3	h_2	20	g_2	680
a_1	20	a_2	20		

ako rozdelenie dopytu (pre význam jednotlivých parametrov pozri časť 3.3.1). Uvažujeme prípad so stratenými predajmi a okamžitou dodávkou.

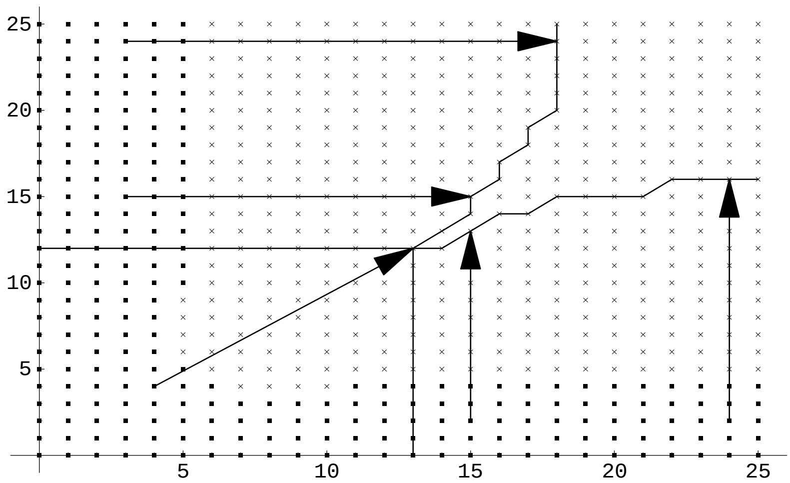
Na obrázku 2 je zobrazená optimálna objednávacia politika v čase $t = 0$. Na osiach sú množstvá jednotlivých tovarov na začiatku plánovacieho obdobia (t.j. x_0). Krížik znamená, že pre daný počiatočný stav je v čase $t = 0$ optimálne neobjednávať a štvorček znamená, že sa objednávať bude. T.j. napríklad pre $x_0 = (6, 4)^T$ sa pri optimálnej politike bude objednávať, ale pre $x_0 = (7, 8)^T$ nie.

Objednávané množstvá sú naznačené na obrázku 3. Pre stavy $x_0 \leq (13, 12)^T$, pre ktoré sa bude objednávať budú objednané množstvá $z_0 = (13, 12)^T - y_0$. Pre $x_0 \not\leq (13, 12)^T$, pre ktoré je optimálne objednávať, sa doplní vždy len jedna zložka do hranice zobrazenej na obrázku 3 (t.j. napr. pre $x_0 = (0, 20)^T$ bude $y_0 = (18, 20)^T$). Vidíme, že optimálna politika má v súlade s časťou 3.3.4 naozaj tvar (σ_t, S_t). Pritom $S_0 = (13, 12)^T$ (pozri obrázok 3) a množina σ_0 zodpovedá množine stavov, pre ktoré sa v čase $t = 0$ pri optimálnej politike nebude objednávať (označené krížikmi).

Obr. 2: Optimálna objednávacia politika.



Obr. 3: Množstvá objednávané pri optimálnej politike.



Všimnime si, že v stave $(11, 4)^T$ sa bude objednávať, ale v stave $(10, 4)^T$ nie. Intuícia nám však hovorí, že ak sa v stave s 11-timi jednotkami tovaru 1 objednáva, malo by sa objednávať aj v stavoch s jeho nižšou zásobou. Na príklade modelu s deterministickým dopytom, kde sa dá počítať "na prstoch" ukážeme, že takáto neintuitívna politika môže byť naozaj optimálna.

Uvažujme model so stratenými predajmi a okamžitou dodávkou s parametrami uvedenými v tabuľke 3. Optimálna objednávacia politika je znázornená na obrázku 4. Tu platí: $S_1 = (5,6)^T$ a $S_0 = (10,12)^T$. Pozrime sa bližšie na stav $\bar{x}_0 = (5,4)^T$. V tomto stave prichádzajú do úvahy dve politiky: objednať teraz a v čase $t = 1$ neobjednávať (politika π_1), alebo teraz neobjednávať a objednať až v čase $t = 1$ (politika π_2). Ďalšie dve možné politiky sú: neobjednávať vôbec a objednať v oboch periódach. Vzhľadom na pomerne veľké náklady na deficit môžme prvú z nich hneď vylúčiť a druhá sa redukuje na politiku π_1. Celkové náklady pri politike π_1 budú:

$$\begin{aligned} N_{\pi_1}(\bar{x}_0) &= k + c^T(S_0 - \bar{x}_0) + L(S_0) + L(S_0 - (u^1,u^2)^T) \\ &= 600 + (4,3)(5,8)^T + L((10,12)^T) + L((5,6)^T) \\ &= 849, \end{aligned}$$

pričom uvažujeme s nulovými koncovými nákladmi ($c_T = 0$). Pripomenieme, že v deterministickom prípade platí $L(y) = \sum_{i=1}^{m} L^i(y^i)$, kde

$$L^i(y^i) = \begin{cases} g^i(u^i - y^i) & \text{ak } y^i < u^i \\ h^i(y^i - u^i) & \text{ak } y^i \geq u^i. \end{cases}$$

Celkové náklady pri politike π_2 budú:

$$\begin{aligned} N_{\pi_2}(\bar{x}_0) &= L(\bar{x}_0) + k + c^T(S_1 - (\bar{x}_0 - (u^1,u^2)^T)^+) + L(S_1) \\ &= L((5,4)^T) + 600 + (4,3)(5,6)^T + L((5,6)^T) \\ &= 838. \end{aligned}$$

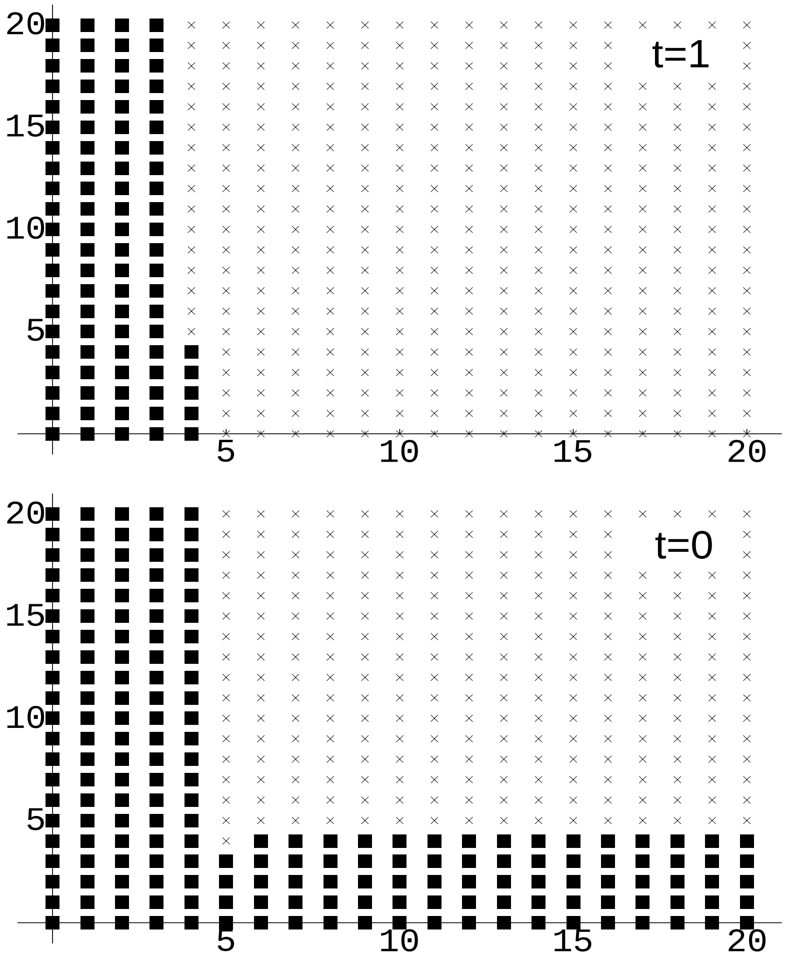
Teda v bode $\bar{x}_0$ je naozaj optimálnou politika π_2. Napr. v bode $\tilde{x}_0 = (6,4)^T$ platí naopak $N_{\pi_1}(\tilde{x}_0) = 845 < 851 = N_{\pi_2}(\tilde{x}_0)$ a teda optimálnou je politika π_1.

Tento jednoduchý príklad nám potvrdil, že optimálne politiky môžu mať vo všeobecnosti zložitú, neintuitívnu štruktúru. To je často dôvodom (popri výpočtovej náročnosti), prečo sa v praxi upúšťa od hľadania optimálnych politík a pristupuje sa k rôznym heuristickým riešeniam.

Tabuľka 3: Parametre modelu s deterministickým dopytom.

k	600	T	2	β	1
u^1	5	a^1	20	c^1	4
u^2	6	a^2	20	c^2	3
h^1	17	g^1	500		
h^2	20	g^2	100		

Obr. 4: Optimálna politika v čase $t = 0$ a $t = T - 1 = 1$ v modeli s deterministickým dopytom.



4.2 Porovnanie koordinovaného a nezávislého objednávania

V ďalšom porovnáme koordinované objednávanie dvoch tovarov s nezávislým objednávaním. Pravdepodobnostné rozdelenie dopytu po oboch tovaroch je ako v časti 4.1. Ďalšie parametre modelu a výsledky pre jednotlivé tovary pri nezávislom objednávaní sú v tabuľke 4. Všetky parametre sú naďalej stacionárne.

Vieme, že optimálna politika v jednotovarovom prípade je typu (s_t, S_t). Teda, podľa výsledkov v tabuľke 4, sa napr. tovar 1 v čase $t = 0$ bude

Tabuľka 4: Parametre a výsledky pri nezávislom objednávaní ($k = 150$, $T = 10$, $\beta = 1$)

Tovar	$E[u_i]$	h	g	c	s_0	S_0	Náklady
1	3.54	10	1550	4	6	14	1469
2	3.58	16	60	10	2	9	1591
				Spolu			3060

objednávať, ak jeho stav y_0^1 bude nižší ako 6 jednotiek a objednané množstvo bude $14 - y_0^1$ jednotiek. Náklady uvedené v tabuľke sú minimálne očakávané náklady na začiatku plánovacieho horizontu (v čase $t = 0$) pri počiatočnom stave $y_0^i = 0$, $i = 1, 2$.

V tabuľke 5 je porovnanie minimálnych nákladov pri nezávislom objedná-

Tabuľka 5: Porovnanie nezávislého a koordinovaného objednávania pre rôzne hodnoty k (ostatné parametre ako v tab. 4)

k	Koord.	Nezáv.
0	1172	1172
	(100)	(100)
50	1666	2064
	(100)	(124)
100	2154	2662
	(100)	(124)
150	2535	3060
	(100)	(121)
200	2774	3407
	(100)	(123)
500	3808	4565
	(100)	(120)

vaní s nákladmi pri koordinácií objednávok pre rôzne hodnoty fixných nákladov objednávky k (hodnoty ostatných parametrov sú ako v tabuľke 4). Pri nulovej hodnote k sú očakávané náklady v oboch modeloch rovnaké, nakoľko pre $k = 0$ sa m-tovarový model rozpadá na m jednotovarových modelov. Rovnaká situácia nastane aj pre dostatočne veľké k (vzhľadom na náklady na deficit), kedy sa neoplatí objednávať vôbec. Pre zmysluplné hodnoty k

však vidíme, že už pri dvoch tovaroch môže koordinácia ich objednávania viesť k značným úsporám na nákladoch.

V literatúre sa zväčša očakávané náklady vo viactovarovom modeli porovnávajú so súčtom očakávaných nákladov v príslušných jednotovarových modeloch; my sa pridržiavame tohto prístupu. V skutočnosti však budú očakávané náklady pri nezávislom objednávaní o niečo menšie ako súčet očakávaných nákladov pre jednotlivé tovary. Niekedy sa totiž môže stať, že oba tovary objednáme v rovnakej perióde (aj keď nezávisle na sebe) a teda fixné náklady objednávky sa zarátajú len raz (predpokladáme, že oba tovary sú od rovnakého dodávateľa). Presnejšie by teda bolo odhadnúť očakávané náklady pri nezávislom objednávaní simuláciou.

Poznámky.
Na hľadanie optimálnych politík v uvedených príkladoch sme použili štandardnú spätnú indukciu (pozri napr. [17]). Pri minimalizácií v jednotlivých krokoch algoritmu spätnej indukcie sme využili známe (pozri časť 3.3.4) vlastnosti optimálnej politiky, t.j. napr. ak v časovom kroku t máme určený bod S_t, tak pre stavy $x \geq S_t$ odpadá minimalizácia úplne. Algoritmy sme implementovali v softvérovom balíku *Mathematica*. Uvedomujeme si, že tento softvér nie je vhodný na praktické použitie, zvolili sme ho pre jednoduchosť programovania a grafického výstupu. Program s podrobnejším popisom je v prílohe.

5 Záverečné poznámky

V práci sme analyzovali problém optimalizácie zásobovania lokálneho skladu. Zamerali sme sa pritom na podskupinu tovarov, so zásobovaním ktorých sú spojené najväčšie náklady (t.j. na skupinu A, podľa nákladovej ABC klasifikácie). Úlohu optimalizácie zásobovania týchto tovarov sme formulovali ako Markovovský rozhodovací proces. Ukázali sme vlastnosti optimálnej objednávacej politiky v našom modeli. Základný model sme rozšírili o predpoklady nezanedbateľnej dodacej lehoty a autokorelovaného procesu dopytu. Tiež sme ukázali, ako možno do modelu integrovať prognózy dopytu. Riešením nášho modelu je objednávacia politika, ktorá minimalizuje očakávané náklady spojené s prevádzkou skladu. Takáto objednávacia politika sa však v praxi vo všeobecnosti nedá presne implementovať. Dôvodom je napr. nemožnosť objednať ľubovolné množstvo tovaru, čo sme v našom modeli predpokladali. Ďalším obmedzením použitia politík získaných riešením nášho modelu je ich zložitá štruktúra, na ktorú sme poukázali v poslednej časti práce. Na druhej strane používanie takýchto politík je motivované značnými úsporami, ktoré sa dajú pri ich implementácií dosiahnuť. Zaujímavým námetom na budúci výskum v tejto oblasti je aplikácia moderných metód riešenia MRP na náš model.

Príloha

Program na výpočet hodnotovej funkcie v prípade stratených predajov

```
OptOperator[X_, P_, r_, VT_, beta_] :=
  Module[{nGridPoints, Dim, Expect, i, j, k},
    Dim = Length[X[[1]]];
    nGridPoints = Length[X];

    Expect = beta*Table[Sum[
            VT[VectorPos[X[[k]] - P[[i, Range[Dim] ]] ] ]
              *P[[i, Dim + 1 ]]
            , {i, 1, Length[P]}], {k, 1, nGridPoints}];

    S = X[[ArgMin[Table[
              r[minX, X[[k]]] + Expect[[k]]
              , {k, 1, nGridPoints}]]]];

    Interpolation[
      Table[
        Join[X[[j]],
          {If[isGreaterEq[X[[j]], S],
              r[X[[j]], X[[j]]] + Expect[[j]],
              Min[Table[r[X[[j]], X[[k]]] + Expect[[k]]
                  , {k, 1, nGridPoints}]]
              ]}
          ]
        , {j, 1, nGridPoints}], InterpolationOrder -> 1]
    ]
```

Parametre programu sú postupne: zoznam bodov, v ktorých má byť hodnotová funkcia vypočítaná (pričom predpokladáme, že tieto tvoria mriežku v stavovom priestore), matica s hodnotami a príslušnými pravdepodobnosťami dopytu, funkcia nákladov v príslušnej perióde, hodnotová funkcia z predošlej periódy (resp. nasledovnej, nakoľko pri spätnej indukcií sa postupuje od konca časového horizontu k jeho začiatku) a diskontný faktor v príslušnej perióde.

Výstupom programu je hodnotová funkcia v perióde, na ktorú sa vzťahujú parametre programu, lineárne interpolovaná medzi bodmi mriežky zo vstupu. Interpolácia má zmysel predovšetkým vtedy, ak riešime úlohu, ktorá vznikla diskretizáciou spojitej úlohy. V prípade spojitého rozdelenia dopytu je niekedy namiesto jeho diskretizácie výhodnejšie aproximovať strednú hodnotu v rovnici optimality simuláciou; modifikácia nášho programu pre tento prípad je jednoduchá.

Hodnotové funkcie v jednotlivých časových krokoch dostaneme viacnásobným spustením príkazov

```
V = OptOperator[X, U, r, VT, beta];
VT[x_] := V[x[[1]], x[[2]]];
```

pričom predpokladáme, že pri prvom spustení je funkcia `VT[x_]` definovaná podľa koncových nákladov.

Literatúra

[1] Klose, Andreas; Tüshaus, Ulrich. *Prioritäre Einsatzgebiete analytischer Methoden und der Simulation in der Lager-bewirtschaftung*, Arbeitsbericht 1994:09-20:1, Universität St. Gallen

[2] Lambert, D. M.; Stock, J. R.; Ellram, L. M. *Logistika*, Computer Press, Praha 2000

[3] Kučera, J. *Analýza spotreby a tvorba prognóz s aplikáciami na hypermarkety*, Diplomová práca, FMFI UK, 2003.

[4] Pfeifer, A. *Optimal policies in multiproduct inventory models*, Operations Research - Spektrum, 4:79-89, 1982.

[5] Bartmann, D.; Beckmann, J. *Lagerhaltung - Modelle und Methoden*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989

[6] Ohno, K.; Ishigaki T. *A multi-item continuous review inventory system with compound Poisson demand*, Mathematical Methods of Operations Research, Springer-Verlag, 2001.

[7] Himmelberg, C.J.; Parthasarathy, T.; Van Fleck, F.S. *Optimal Plans for dynamic programming problems*, Mathematical Methods of Operations Research 1:390-394, Springer-Verlag, 1976. Citované podľa [4].

[8] Veinott, A.F.*Optimality policy for a multi-product dynamic, nonstationary inventory problem*, Management Science 12:206-222, 1965. Citované podľa [4].

[9] Arrow, Kenneth J; Harris, T.; Marschak, J. *Optimal inventory policy*, Econometrica, 19:250-272, 1951.

[10] Harris, F. *How many parts to make at once*, Factory, The Magazine of Management, 10:135-152, 1913.

[11] Wagner, H. M., Whitin, T. M. *Dynamic version of the economic lot size model*, Management science, 9:89-96, 1958

[12] Bertsekas, D.P. *Dynamic Programming and Optimal Control: Volume I, Athena Scientific*, Bellmont, MA, 2000 (second edition). Citované podľa [13].

[13] Feinberg, E.A.; Shwartz, A. *Handbook of Markov Decision Processes*, Kluwer, 2002

[14] Kalas, J. *Markovove reťazce*, Univerzita Komenského v Bratislave, 1993

[15] Barto, A.G.; Bradtke, S.J.; Singh, S.P. *Learning to Act using Real-Time Dynamic Programming*, Department of Computer Science, University of Massachusetts, 1993.

[16] Marbach, P.; Tsitsiklis, J.N. *Simulation-Based Optimization of Markov Reward Processes*

[17] Halická, M. *Optimálne riadenie I*, Učebné texty, ÚAM MFF UK, Bratislava 1999