FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITY KOMENSKÉHO

V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2003

Martina Líšková

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITY KOMENSKÉHO

V BRATISLAVE

Katedra ekonomických a finančných modelov

ŠTÚDIUM MOŽNOSTI APLIKÁCIE NIEKTORÝCH FYZIKÁLNYCH PRINCÍPOV V EKONOMICKEJ TEÓRII

Diplomová práca

Diplomant : Martina Líšková

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

„ Viem, že nič neviem… ˝

(Sokrates)

Prehlasujem, že som na tejto práci pracovala samostatne, len s využitím vedomostí získaných štúdiom a použitím uvedenej literatúry.

Zároveň chcem touto cestou poďakovať svojmu diplomovému vedúcemu, doc. RNDr. Júliusovi Vankovi, PhD., za odborné vedenie, jeho cenné rady a pripomienky, uvedenie do novej problematiky a trpezlivosť.

Martina Líšková

Obsah

Úvod

Ekonómia nie je celkom exaktnou vedou, ale skôr spoločenskovednou disciplínou. Vďaka tomu sú jej základné princípy a smerovanie ovplyvnené zmenami v spoločnosti. Niekoľkokrát sa už podstatne modifikovali, napriek tomu že ide o dosť mladú vednú disciplínu. Preto pri jej skúmaní určitý „ nadhľad nad vec " môže mať iba človek nezaujatý niektorým z jej všeobecne uznávaných princípov. Takýto prístup nových myšlienok zvonka môže priniesť nesmierny pokrok na ceste k správnemu pochopeniu jej zákonitostí.

„ Verím, že mikroskopické simulácie zohrajú dôležitú úlohu v ekonómii a financiách. Ak ľudia mimo ekonómie a financií – možno práve fyzici - prídu s predvedením riešenia tohoto problému, nebude to po prvýkrát, čo outsidedri budú mať závažný podiel v tejto oblasti. "

(Z listu laureáta Nobelovej ceny za ekonómiu Harry M. Markowitza
„ ekonofyzikovi " Dietrichovi Staufferovi.)

Významným spôsobom do rozvoja ekonómie zasiahla už matematika. Samozrejme jej základný aparát sa v ekonómii využíva permanentne, avšak prístup teórie hier, Nashovo ekvilibrium i štatistický prístup k fluktuáciám cenových zmien je prínosom matematikov, venujúcich sa iba matematickým problémom.

V posledných rokoch sa mnohí fyzici začali venovať oblastiam financií a ekonómie. Najmä po skončení obdobia studenej vojny, kedy poľavil masívny výskum vo fyzike, našli vedci priestor a uplatnenie aj v iných oblastiach. Mnohí sa obrátili k štúdiu zákonitostí trhu a stali sa prekvapujúco úspešnými na finančných burzách. Veľa spoločností si do svojich analytických tímov začalo pozývať fyzikov. Ďalší sa začali venovať ekonomickej teórii a ekonomickému modelovaniu.

Čo môžu vniesť do ekonómie fyzici? Čím sa odlišujú od klasických ekonómov a prečo by mali prísť k lepším uzáverom? Nesmiernou výhodou fyzikov je ich široká skúsenosť s empirickým skúmaním a analýzou dát. Bežne prichádzajú do styku s množstvom napozorovaných údajov a výsledkov, na základe ktorých aktívne budujú nové teórie. Ekonómovia sa naproti tomu snažia iba využiť dáta na potvrdenie vlastných názorov a teórií.

Podstatným rozdielom je aj celkový prístup k problému. Ekonómovia, najmä finanční analytici, sa snažia nájsť odpoveď na praktickú otázku AKO ? (ako vytvoriť ideálne portfólio, ako odhadnúť posun, ako zabezpečiť krytie...). Fyzika financií sa zaoberá skôr hlbším problémom PREČO ? (prečo pozorujeme isté charakteristiky v reálnych časových radoch cenových zmien? prečo rovnica Blacka-Scholesa nie vždy platí?...) Vysvetlením príčiny sa samozrejme odpoveď na ako? stáva jednoduchou a jasnou.

Významnou výhodou pre fyzikov je hlboko preskúmaná oblasť štatistickej fyziky. Majú k dispozícii viaceré nástroje na prácu s dynamikou v hromadných systémoch, pozostávajúcich z mnohých interagujúcich čiastok (trh je systémom podobným). Práve preto je štatistický prístup v ekonofyzike prvotný a dosiaľ stále najčastejší.

Vo všeobecnosti sa fyzici tejto novej hraničnej disciplíny snažia o aplikáciu rôznorodých fyzikálnych metód na ekonomické prostredie. Fyzika sa zaoberá prírodnými javmi, človek a jeho potreby sú súčasťou prírody a vychádzajú z nej. Preto sa aj trh, ktorého podstatu tvoria ľudia, riadi podobnými zákonitosťami. Môžeme stožniť pojmy ako *ekonómia prírody*, jej racionálne správanie sa, a *prirodzenosť, prírodnosť trhového mechanizmu*. Preto by pohľad na trh cez fyzikálne princípy nemal vzbudzovať nedôveru, ale skôr sa javiť úplne prirodzený.

Prvotnou snahou diplomovej práce je systematizácia doterajších poznatkov a pohľad na súčasný stav na poli ekonofyziky. Zameriava sa najmä na trh a jeho dynamiku, arbitráž, princíp efektívnosti a ich interpretáciu vo fyzikálnom chápaní. Podáva stručný výťah z doterajšieho prínosu ekonofyzikov.

Hlavným cieľom bolo aplikovať Hamiltonov formalizmus na makroekonomickú teóriu. Dôraz sa kladie na hľadanie ekvivalentov základných fyzikálnych veličín a pojmov (ako napríklad energia, poloha, rýchlosť, hybnosť, lagrangián, hamiltonián) v ekonómii. Ich presným priradením a použitím princípov symetrie by vystúpili zákony zachovania. Výskyt takýchto zachovávajúcich sa veličín by znamenal značný pokrok v skúmaní trhovej dynamiky aj v celej makroekonómii.

2. Z krátkej histórie ekonofyziky

Začiatočné spojivá medzi ekonómiou a fyzikou siahajú až do roku 1936, keď Majorana prišiel s priekopníckou prácou postavenou na myšlienke jednoduchej analógie medzi štatistickými zákonmi vo fyzike a v sociálnych vedách. Pre mnohých vedeckých pracovníkov v prírodných vedách môže byť prekvapením, že prvé použitie mocninového rozdelenia a matematickej formulácie náhodnej prechádzky je práve v sociálnych odboroch. Napríklad štatistické rozdelenie obyvateľstva podľa príjmu v stabilnej ekonomike spĺňa vzťah

$$y \sim x^{-\nu} \qquad (1)$$

kde y je počet ľudí s príjmom minimálne x. S týmto poznatkom prišiel taliansky ekonóm Pareto už pred 100 rokmi, odhadol exponent ν na 1,5 a vyhlásil, že jeho výsledok je všeobecný a platný bez ohľadu na rozdielnosť národov, miest a podobných okrajových podmienok. [1].

Významný pojem škálovania a fraktálov priniesol v roku 1975 Mandelbrot, je predmetom skúmania v ekonómii dodnes.

Majoranov neortodoxný prístup však upadol do zabudnutia. Až v 50–tych rokoch niektorí fyzici opäť začali výskum v oblasti sociálnych a ekonomických systémov. Boli to najmä Kadanoff, Montroll a skupina vedcov pôsobiacich v Santa Fe Institute. Výskum v tejto oblasti sa začal rýchlo rozvíjať a bol vlastne alternatívou už známych tradičných prístupov vo financiách a finančnej matematike. Dôležitým rozdielom bolo, že fyzici sa pozerali na ekonomické dáta empiricky. Priniesli do tohto odboru poznatky štatistickej fyziky s vyše 30 ročnou tradíciou.

K skutočnému nástupu ekonofyziky však došlo len pred pár rokmi. Fyzici začali publikovať vo väčšom množstve, konzultovať jednotlivé prístupy medzi sebou. Konajú sa mnohé konferencie. Prelomovým bol rok 1998, kedy na jednom zo stretnutí došlo k nezhode s ortodoxnými ekonómami. Príspevky fyzikov boli z ich strany odmietnuté. Podnietilo to vznik virtuálneho inštitútu, ktorý nemá fyzickú, iba čiste internetovú základňu.

Združuje viaceré známe mená ako Per Bak, Rosario Mantegna, Dietrich Stauffer, Enrico Scalas, Valery Kholodnyi, Sorin Solomon, Yi-Cheng Zhang, Joe McCauley. Venuje sa zverejňovaniu príspevkov a diskusii.

Je samozrejmé, že s novým ponímaním sa objavujú časté protiargumenty. Tvrdia napríklad, že nemožno stotožniť použitie a analýzu ekonomických dát a experimentálnych výsledkov vo fyzikálnych pokusoch. Je nemožné uskutočniť väčšie experimenty vo finančnej a ekonomickej sfére na potvrdenie alebo vyvrátenie skúmaných teórií. Vieme, že takéto priblíženie nie je síce obvyklé pre finančné dáta, ale prečo by sme nemohli, keď to bez problémov funguje v tak rozvinutých oblastiach ako astrofyzika, fyzika atmosféry a geofyzika, použiť na testovanie súbory zaznamenaných dát?

Oblastí ekonómie, v ktorých začali fyzici pracovať, je veľa. Široké uplatnenie našla najmä štatistická fyzika. Postupnosť zmien v cenách finančných aktív je stochastický proces, takže sa sústredili na jeho rozdelenie. Pokúšali sa vytvoriť teoretický model, ktorý by zahŕňal základné črty reálnych finančných trhov [1]. V časových radoch finančných dát bola zistená vysoká korelácia. Dalším okruhom je oceňovanie finančných derivátov, kde zavádzajú pre finančnú sféru netypické pojmy, napr. rozmerové symetrie [2]. Oslabili viaceré predpoklady Black & Scholesovho modelu [3] prihliadajúc na výber portfólia a možnosť jeho dynamickej optimalizácie. Zaujímavé výsledky do tejto problematiky vnáša aj teória kvantovania [4].

Prístupov k trhu ako celku je tiež niekoľlko. Najčastejšie ho považujú za systém veľkého množstva častíc, ktoré medzi sebou vzájomne interagujú. Prenášanou interakciou býva tovar alebo peniaze, takto ho možno prirovnať k hre s nulovým súčtom [5]. Podobným systémom je aj látka so zabudovanými senzormi, ktoré majú aj schopnosť pôsobenia na ňu [6]. Vcelku úspešne sa začalo pristupovať k trhu aj ako k elektrodynamickému poľu [7], [8]. Tu svoje miesto opäť našli symetrie, a tiež kalibračné symetrie. Významne sa venuje skúmaniu v tejto oblasti Kholodnyi [9].

3. Základné ekonofyzikálne modely trhu

Táto kapitola podáva stručný výklad najzaujímavejších pohľadov, ktoré priniesli fyzici v posledných rokoch. Predstavuje rôzne možnosti chápania trhového mechanizmu a prirovnania k viacerým fyzikálnym systémom. Nové prístupy dávajú základ neskorším snahám o aplikáciu hamiltonovho formalizmu.

3.1 Dynamika trhu z pohľadu všeobecnejších kriviek ponuky a dopytu [10]

Na trhu statkov sa podľa neoklasického modelu dosahuje rovnováha vyrovnaním ponuky a dopytu. Obe sú funkciou ceny a tá je spoločným prvkom, prispôsobovaním ktorého sa dosiahne zhoda. Tento takzvaný „ zákon ponuky a dopytu " nachádza uplatnenie doteraz. Pokladá sa za fundamentálny a takmer neotrasiteľný.

Základné predpoklady na trhu statkov :

1. Ponuka S a dopyt D sú len funkciou ceny P a nezávisia explicitne na čase t. Premenné S, D, P tvoria endogénnu množinu (trh) $E = \{S, D, P\}$
2. Ponuka (dopyt) je rastúcou (klesajúcou) funkciou ceny a má všade kladný (záporný) sklon. Obe krivky sa pretínajú v bode ekvilibria, prislúchajúca rovnovážna cena vyprázdni trh.
3. Množina exogénnych veličín G , ktoré môžu ovplyvniť trh, je vylúčená z úvah. Predpokladáme teda, že G je prázdnou množinou.

Niektoré predpoklady uvedeného procesu sú však napadnuteľné. Granik sa v [10] venuje zovšeobecneniu analýzy.

Ponuka aj dopyt sú podľa neho funkciou nielen ceny, ale aj času. Ďalej predpokladá výskyt exogénnych veličín (G neprázdna), ktoré často spôsobujú posun na strane ponuky, ako i dopytu, a preto jednoduchý zákon prezentovaný vyššie nemôže platiť. Trh sa stáva zo statického typu $E = \{S, D, P\}$ novou dynamickou množinou $E = \{S(t), D(t), P(t)\}$, kde sú endogénne premenné časovo závislé. Popiera aj monotónnosť ponukovej a dopytovej krivky.

Granik zavádza pojem „ charakteristickej ceny ″ P_S, resp. P_D, pre výrobcu a spotrebiteľa. P_S zahŕňa všetky náklady a očakávaný zisk. Rozdiel trhovej ceny a charakteristickej ceny $P(t) - P_S$, čistá cena, priamo určuje správanie sa ponuky a stimuluje záujem predajcu. Ak je kladná, ponuka tovaru $S(t)$ rastie, ak záporná, klesá. P_S je interpretovaná ako cenová hranica pre predajcu, nad ktorou je ponuka tovaru rastúca a pod ňou klesajúca. Podobne pre spotrebiteľa máme charakteristickú cenu P_D. Ak je trhová cena nad touto hranicou, dopyt po tovare klesá, pod naopak rastie.

Uvažujme podľa [10] uzavretý deterministický trh bez exogénnych premenných a stochastických výkyvov. Pre dynamiku trhu dostávame nasledujúci systém diferenciálnych rovníc :

$$\dot{S}(t) = a[P(t) - P_S] + k[D(t) - S(t)] \tag{2}$$

$$\dot{D}(t) = b[P_D - P(t)] \tag{3}$$

$$\dot{P}(t) = c[D(t) - S(t)] \tag{4}$$

Ich riešením autor v [3] prichádza k zaujímavým záverom. Vzájomný vzťah P_D a P_S, počiatočných podmienok $P(0), D(0)$ ovplyvňuje významne pohyb trhu. Definujeme pomer

$$\alpha = \frac{P_D}{P_S} \tag{5}$$

Ak je α rovné 1, trh je symetrický a neexpanduje, ale sa ani nedostáva do kolapsu. Pre $\alpha \neq 1$ sa charakteristické ceny pre predajcu a kupujúceho líšia a asymetrický trh je nestabilný, môže boomovať, v lepšom prípade oscilovať. Toto kritérium stability je značne odlišné od tradičného ponímania klasikov. Navyše charakteristická cena predajcu nie je spotrebiteľovi známa a opačne, teda reálny nestabilný trh má svoje opodstatnenie a nie je len akousi praktickou nedokonalosťou teoretického modelu.

3.2. Trh ako elektrodynamické pole [7], [8]

Proces poznávania vo fyzike prináša nové vedomosti, ktoré sa zvyknú roztrieďovať do jednoduchých blokov, často spolu súvisiacich (fundamentálnym príkladom je elektrina a magnetizmus). Tieto bloky znalostí je možné použiť na riešenie všetkých problémov s podobnou podstatou. Napríklad opis dokonalých systémov pozostávajúcich z veľkého počtu elementov, ktoré medzi sebou vzájomne interagujú, nachádza uplatnenie aj mimo fyziky. Už dávno je známe, že tento blok poznatkov sa využíva v teórii mestského rozvoja, riešení dopravných zápch a v ekonomických otázkach.

Trh ako systém účastníkov so vzájomnými interakciami môžeme takto prirovnať k podobným fyzikálnym problémom a využiť už známe vedomosti z fyziky.

3.2.1 Princíp arbitráže

Na pochopenie podstaty trhu sa musíme sústrediť aj na motiváciu a príčinu jeho pohybu. Jedným z takýchto dôvodov, najmä na finančných trhoch, je arbitráž. Jej základnou myšlienkou je možnosť „ zarobiť z prázdneho vrecka ", príležitosť profitovať bez akéhokoľvek rizika. V [7] autor pripúšťa existenciu krátkodobých arbitrážnych príležitostí. Cenové zmeny zapríčiňujú situácie, kedy sú niektoré z aktív pri tej istej miere rizika atraktívnejšie ako iné. Vďaka racionalite účastníkov však tento stav nikdy nemôže byť dlhodobý. Kúpou ziskového a predajom neprofitujúceho aktíva sa „ diera na trhu zapláta ". Podmienku pre neexistenciu arbitáže môžeme vyjadriť ako okamžité prispôsobovanie sa pomocou vyššie uvedeného procesu, čo v skutočnosti znamená nekonečnosť rýchlosti toku peňazí.

Rozsiahla časť fyziky sa venuje presunom hmoty alebo energie, silám spôsobujúcim tieto pohyby, dynamike nerovnováhy a dejom v ekvilibriu. Vo fyzike financií preto pristupuje, oproti tradičnému pohľadu finančnej matematiky, skúmanie toku peňazí.

Predpokladáme, že máme na trhu doláre a libry s výmenným kurzom $F(t)$ v čase t a zodpovedajúcimi úrokovými mierami r_1 a r_2. Potom podmienkou bezarbitrážneho trhu je

$$F(t).(1+r_2) = F(t+dt).(1+r_1) \tag{6}$$

Pokiaľ by bola niektorá zo strán rovnice (6) väčšia ako druhá (napr. pravá), pôžičkou libier v čase t , ich následnou transformáciou na doláre, podržaním po čas $t + dt$ a potom opačnou výmenou na libry by sme dosiahli zisk z nuly.

Každá arbitráž je spojená s tokom aktív po dvoch rôznych cestách so spoločným začiatkom a koncom. V predchádzajúcom príklade je jednou z ciest uvedený postup, ktorý tu reprezentuje cash. Druhou je držba libier počas celého časového úseku dt, čo je dlh. Získané výnosy musia byť po oboch dráhach rovnaké, alebo zjednodušene integrál po uzavretej krivke c, pozostávajúcej z dvoch už spomínaných, rovný nule.

$$R(c) = F^{-1}(t).(1 + r_2)^{-1}.F(t + dt).(1 + r_1) - 1 \tag{7}$$

Podobný postup môžeme použiť pre držbu dolárov. Prezentuje vlastne pohyb po krivke v opačnom smere $(-c)$:

$$R(-c) = F(t).(1 + r_2).F^{-1}(t + dt).(1 + r_1)^{-1} - 1 \tag{8}$$

Príležitosť k zárobku je daná výrazom

$$R = R(c) + R(-c) \tag{9}$$

Teda bezarbitrážnou podmienkou, ekvivalentnou (6), je

$$R(c) = R(-c) = R = 0 \tag{10}$$

3.2..2 Elektrodynamické pole

Illinski hovorí, že „ cash " sa pohybuje od aktív pod cenou k preceneným, „ debts " zas opačne. Ak podľa [7] *„ cash " vyhlásime za častice nesúce silový potenciál, „ debts " budú častice s opačným nábojom*. Takýto tok súčasne ovplyvňuje cenu samotného aktíva. Takže *finančný systém sa správa rovnako ako systém častíc v silovom poli, ktoré je nimi súčasne tvorené i pozmeňované*. *Za silové pole považujeme hraničné výnosy, a nimi spôsobený tok peňazí (cash, debts) za prúd nábojov*. Na riešenie môžeme použiť poznatky klasickej elektrodynamiky, avšak neprebiehajúcej v tradičnom troj-rozmernom priestore, ale neobvyklom diskrétnom priestore (tu máme iba 2 body : doláre a libry, medzi ktorými aktívum „ skáče ").

Rôzne fyzikálne teórie sú postavené na rôznych, vnútorne daných symetriách. Napríklad všeobecná teória relativity predpokladá nezávislosť výberu súradnicovej sústavy pre opis pohybu. V kvantovej elektrodynamike nezáleží na počiatočnej fáze vlnovej funkcie. Teórie slabých a silných interakcií vykazujú invariantnosť, čiže symetriu výberu objektu. Táto invariantnosť sa vyskytuje aj v našom príklade. Môžeme pracovať s dolármi alebo centmi, výsledný pohyb je rovnaký. Tieto symetrie vo fyzike nesú názov kalibračné. Vyrastá tzv. Gauge Theory of Arbitrage (GTA) [7]. Odlišuje sa od teórie elektrodynamiky len nahradením lokálnej grupy kvantových fázových rotácií grupou rozšírenia použitých finančných aktív.

Základom GTA je pohyb v geometrickom priestore majúcom charakter zväzkov vlákien. Pozostáva z bázy B a vlákien F pripojených ku každému bodu bázy. Uvažujeme pohyb častice pozdĺž vlákien, takisto ako medzi vláknami. Jej poloha je určená x- čiastkovou koordinátou bázy, a y- koordináta rovná $F(x)$ vo vlákne prislúchajúcom x.

Vráťme sa teraz k podmienke neexistencie arbitráže (10). Rozdiel medzi počiatočnou hodnotou presúvaného množstva a jeho hodnotou v tom istom bode po transporte pozdĺž uzavretej krivky je vo fyzike daný tenzorom krivosti zväzku vlákien. Keď obchodované množstvo a jeho zmenu považujeme za pohyb častice v poli zväzku vlákien, hraničná miera výnosu je ekvivalentom intenzity elektrického poľa a obe predstavujú element krivkového tenzora. Vo fyzike sú rozdiely v paralelnom pohybe po rôznych dráhach vždy príznakom vplyvu síl na pohyb. Hodnota R v (7) je štvorcom krivkového tenzora a teda tak ako v elektromagnetickom poli ju považujeme za energiu poľa. Snahu o bezarbitrážny trh je možné prirovnať k minimalizácii energie.

3.3. Trh ako systém agentov napojených na senzory na trhu [6]

V mikroelektromechanických systémoch sa často používa sieť senzorov zasadených do určitej hmoty, ktoré aktívne monitorujú a vyhodnocujú stav, a následne odpovedajú na podnety z prostredia podľa určitého kontrolného programu. Za špeciálny prípad takéhoto kontrolného programu považuje Granik v [6] trhový mechanizmus. Predpokladáme vzorku agentov pripodobnených senzorom, ktorí interagujú, kalkulujú, obchodujú a súťažia o zdroje. Takáto kontrola trhu rozdelená medzi individuálnych účastníkov dovoľuje systému ako celku adaptovať sa na zmeny prostredia alebo výkyvy u jednotlivých agentov. Celková dynamika trhu je kombináciou lokálneho sa správania nielen agentov, ale aj látky medzi nimi. Výmena informácií medzi agentmi závisí na jej vlastnostiach a na ich vzájomnej geometrickej vzdialenosti.

Jednoduchým a názorným príkladom fyzikálneho systému tohoto typu je n hmotných bodov spojených pružinkami so susedmi. Používa sa najmä pre opis systémov blízko nestabilných bodov. Bez kontrolného mechanizmu aj malá výchylka ktoréhokoľvek bodu vedie k rozkmitaniu celého systému. Dynamiku môžeme popísať rovnicami :

$$\dot{x}_i = v_i \tag{11}$$

$$\dot{v}_i = k(x_{i-1} - x_i) + k(x_{i+1} - x_i) + f.x_i - g.v_i + H_i, \tag{12}$$

x_i zodpovedá výchylke hmotného bodu i, v_i je odpovedajúca rýchlosť, k tuhosť pružiny, f destabilizačný silový koeficient, g tlmiaci silový koeficient. H_i je kontrolná sila pridaná agentom pôsobiacim na hmotný bod i.

Problémom kontroly je otázka, akou silou pôsobiť na hmotné body, teda ako stanoviť H_i , aby sme sa udržali v nestabilnom bode.

3.3.1 Trhový mechanizmus ako kontrola systému

Na klasickom trhu vystupujú výrobcovia a spotrebitelia s rôznymi preferenciami a obmedzeniami, ktoré sú definované pomocou ich úžitkových funkcií. Budeme špecifikovať ich strety na trhu ako predávajúcich a kupujúcich. Spotrebitelia sú horespomínanými agentmi, podľa príkladu vlastne hmotnými bodmi. Výrobcovia sú separovaní a sú externým zdrojom sily, alebo ináč energie, ktorú tu budeme považovať za obchodovaný tovar alebo aktívum. Konzumenti začínajú so špecifickým množstvom peňazí. Všetok zisk producentov, získaný vďaka kúpnej sile spotrebiteľov, je rovnakou časťou podelený medzi konzumentov. Takto sa celkové množstvo peňazí v systéme zachováva. Predpokladajme trhový mechanizmus, ktorý zrovná ponuku a dopyt, určí rovnovážnu cenu a obchodované množstvo energie. Každý agent (spotrebiteľ) si kúpi určitú silu (energiu), za rovnovážnu trhovú cenu a touto akciou pôsobí na trh. Množstvo P , o ktoré má záujem, vyplýva z jeho úžitkovej funkcie, ktorá má tendenciu pôsobiť proti vychýleniu z rovnovážnej polohy a strate na zárobku. Jedným z mnohých príkladov úžitkovej funkcie s týmito vlastnosťami je :

$$U_i = -\frac{1}{2w_i} \cdot p \cdot P^2 + b \cdot P \cdot |X_i| \qquad (13)$$

kde $X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{ij}$ je lineárna kombinácia výchyliek všetkých hmotných bodov, udáva informáciu o stave celého systému, b určuje dôležitosť tohto vplyvu. p je cena energie a w_i zárobok agenta. Zoberieme iba prípad, keď spotrebiteľ uvažuje len vlastnú výchylku z rovnováhy ($a_{ij} = 1$ pre $i = j$, ináč je 0). Maximalizáciou úžitku dostávame funkciu dopytu pre spotrebiteľa :

$$P_i(p) = b \cdot |X_i| \frac{w_i}{p} \qquad (14)$$

Celkový dopyt na trhu :

$$P^d(p) = \frac{b}{p} \sum |X_i| \cdot w_i \qquad (15)$$

Podobne sa výrobca snaží o maximalizáciu svojho zisku $\rho = p \cdot P - C(P)$, pričom môžeme brať napríklad nákladovú krivku $C(P) = \frac{1}{2a} P^2$. Dostávame funkciu ponuky :

$$P(p) = ap \qquad (16)$$

a celkovej ponuky :

$$P^s(p) = nap \qquad (17)$$

Klasickým zákonom ponuky a dopytu máme podľa rovnice $P^d(p) = P^s(p)$ danú cenu:

$$p_{trade} = \sqrt{\frac{b}{na} \cdot \sum_{i=1}^{n} |X_i| \cdot w_i} \qquad (18)$$

Vráťme sa teraz k otázke kontroly systému. V prípade trhu ho môžeme ovládať externe viacerými spôsobmi, napríklad určením lineárnej závislosti medzi vplyvom agenta na trh a výchylkou agenta ($H_i = -c \cdot x_i$) , horným ohraničením sily vlastnenej agentom (vlastnenej energie, množstva nakúpeného tovaru) ($P \le P_{\max}$), alebo nerovnomerným rozdeľovaním zisku. Simuláciami vykonanými v [6] sa ukázalo, že trh ako samotný funguje lepšie bez riadenia. Takto sa lepšie spamätáva v situáciách, keď niektorý z agentov prepadne krachu.

3.4. Teória hraničnej efektívnosti trhu [5]

Ďalšou obľúbenou teóriou modernej ekonómie je hypotéza efektívneho trhu (Efficient Market Hypotesis, ďalej len EMH) [5]. Je to v podstate analóg podmienky bezarbitráže na finančnom trhu. Ak by boli ceny predpovedateľné, ziskovú príležitosť by racionálni obchodníci rýchlo zlikvidovali. Trhová cena sa teda bude správať náhodne. Avšak zabúda sa na to, že na využitie arbitrážnej príležitosti potrebujú špekulanti značný kapitál a nie je to príležitosť bezriziková.

Yi-Cheng Zhang predstavuje v [5] túto príležitosť ako konkávnu pravdepodobnosť. S hraničnou pravdepodobnosťou klesajúcou v čase je čoraz ťažšie profitovať, je potrebný väčší kapitál a risk stúpa. Preto sa síce princíp efektivity trhu zachováva, ale nie v absolútnom zmysle, na ten je potrebný nekonečný kapitál, a ziskovosť klesá až k nule.

Platnosť (sila) EMH je určená možnosťou predpovedať ďalší vývoj ceny z predchádzajúcich dát. Za cenový vývoj považujeme funkciu $x(t)$, jej zmena je $\Delta x(t) = x(t) - x(t-1)$. Uvažujme binárnu postupnosť cenovej zmeny, pričom nárast ($\Delta x > 0$) označíme +1, pokles –1. Na určenie možnej predpovedateľnosti budúceho vývoja z minulých dát je podstatné poznať podmienenú pravdepodobnosť $p(i|+)$ $\left(p(i|-)\right)$ nastatia udalosti +1 (-1), za podmienky daného vektora i predchádzajúcich cien. Ak je rovnako pravdepodobné, že nastane pokles aj rast : $p(i|+) = p(i|-) = \frac{1}{2}$, potom cena je interpretovaná ako náhodný proces a EMH platí. Avšak ak sú pravdepodobnosti rozličné, trh nie je efektívny a vzniká príležitosť zarobiť.

Keď vyhlásime ceny za náhodnú prechádzku, rad jej odchýlok tvorí nekorelovaný reťazec. Vo fyzike je takýto reťazec kompletne neusporiadaný, a hovoríme, že „ *entropia sa maximalizuje* ". Ak sú pohyby ceny korelované, entropia nedosahuje svoju maximálnu hodnotu. Uvažujme aktuálnu hodnotu entropie pri danej variácii cien a jej maximum. Rozdiel nazývame negatívna entropia a je mierou predpovedateľnosti.

Na vyjadrenie entropie použijeme vzorec pre Shannon entropy [11] , upravený pre podmienenú pravdepodobnosť $p(i|j)$ - nastatie udalosti j za predpokladu, že predchádzajúci vývoj cien bol i.

$$H(p) = -\sum_i p(i) \sum_j p(i|j) \cdot \log p(i|j) \tag{19}$$

Pre binárne udalosti i, j je maximálna entropia rovná 1, takže negatívna entropia je :

$$\Delta H = 1 - H \tag{20}$$

Pri nulovej negatívnej entropii je udalosť j úplne nepredpovedateľná.

Ak uvažujememe dozadu iba jednu časovú jednotku, teda i je jednorozmerné, platí $\Delta H \approx \rho^2$, kde $\rho = |1 - 2p|$, p je pravdepodobnosť , že cena bude pokračovať v pôvodnom smere pohybu.

Ziskovosťou na bežnom klasickom trhu sa zaoberajú teórie portfólia a CAPM (Capital Asset Pricing Model), ktoré určujú akým spôsobom zvoliť portfólio, aby účastník profitoval. Ignorujú však fakt, že nemôžu zarábať všetci, ale niekto musí peniaze na finančný trh vniesť. Existujú však aj takíto „ hlúpi " agenti na trhu? Rozdelením účastníkov na dve skupiny - podľa ich úspešnosti - dostávame známu hru s nulovým súčtom, keďže celkové množstvo peňazí sa pri výmene zachováva.

Yi-Cheng Zhang v [5] rozdeľuje trh na producentov a špekulantov. Producenti majú zisk z aktivít mimo finančného trhu, trh im slúži len ako prostredie potrebné na finančné operácie. Špekulanti sa zaoberajú vyhľadávaním neefektívností trhu, snažia sa jemne načasovať svoje konanie tak, aby mali výhodu z cenového posunu. Toto rozdelenie vyzerá byť veľmi nespravodlivé voči výrobcom, ale tí sú ochotnými platičmi. Možno to prirovnať ku vzťahu poistenca a poisteného. Obe strany sú spokojné, hoci priemerný cash-flow je iba jedným smerom.

Vráťme sa teraz k otázke efektívnosti trhu. Ako bolo spomenuté, arbitrážna príležitosť nemôže byť zlikvidovaná dokonale, bol by k tomu potrebný nekonečný kapitál. Každý z investorov vkladá iba časť svojho kapitálu, za optimálnu časť pokladá autor $\rho \cdot C$, C je investorovi dostupný kapitál a ρ hraničná neefektívnosť trhu - koeficient vystupujúci vo vzťahu pre mieru neefektívnosti trhu – negatívnej entropii $\Delta H \approx \rho^2$. Ďalší dodatočne vkladaný kapitál síce zvýši efektívnosť, ale poškodí investora. Optimálny vklad kapitálu je $v \sim \frac{1}{\rho}$. Potom kapitál C spĺňa mocninové rozdelenie

$$C \sim \frac{1}{\rho^{\gamma}} \sim \frac{1}{H^{\frac{\gamma}{2}}} \quad , \quad \gamma = 2 \,. \tag{21}$$

Exponent γ závisí na presnom type trhových interakcií, ale mocninová závislosť je splnená pre široké spektrum trhov.

3.5. Hamiltonián na finančných trhoch [12]

Rozdelenie pravdepodobnosti cenových zmien na trhu cenných papierov nie je gaussovské. Jeho centrálna časť spĺňa požiadavky Lévyho rozdelenia a konce vykazujú iné mocninové rozdelenie. Takéto prekrytie dvoch rozdelení zabezpečí vlastnosť škálovania – možnosť zvoliť si interval zaznamenávania dát. Autokorelovanosť finančných časových radov však závisí od veľkosti tohto intervalu. Pri denných dátach nie je pozorovaná, kým pri štvorminútových intervaloch sa už vyskytuje.

Nedávne pozorovania vzájomnej korelácie medzi trhovými aktívami dali základ myšlienke prirovnať vývoj finančných trhov k neusporiadaným systémom ako napríklad spinové sklá. Podľa [12] časové rady cenových zmien môžeme zakódovať do postupnosti orientácií spinov - hore a dole.

Uvažujme trh s N aktívami, alebo portfólio veľkosti N. Opäť sa sústredíme len na znamienko zmeny ceny. Časová postupnosť zmien je radom orientácií spinov $S_i = \pm 1$ $i = 1,...N$. Hamiltonián systému je definovaný ako stredný dosah spinových interakcií v modeli:

$$H(S,h) = \sum_{<i,j>} J_{ij} \cdot S_i \cdot S_j - \sum_i h_i \cdot S_i \quad , \tag{22}$$

J_{ij} sú interakčné koeficienty, konštantné. h_i zabezpečuje zahrnutie pôsobenia vonkajšieho poľa. Na určenie J_{ij} používa [13] teóriu premenlivých reakcií, ktorá spája nedôverčivosť (očakávaný risk) s kovarianciou C_{ij} medzi dynamickými premennými S_i. C_{ij} sa zvykne interpretovať ako časový priemer empirických dát za pozorovaný čas.

Energetické spektrum portfólia je dané vlastnými hodnotami hamiltoniánu $H(S,0)$. Hustota pravdepodobnosti energie pre ľubovoľnú množinu dát empiricky vyplýva z relatívnej frekvencie za pozorovaný čas :

$$p(E) = \frac{P\left(E - \frac{\Delta E}{2} \leq H(S,0) \leq E + \frac{\Delta E}{2} \right)}{\Delta E} \tag{23}$$

4. Základné pojmy z teoretickej mechaniky [14], [15]

Pre jednoduchšie chápanie trhového deja ako dynamického systému sa snažíme o aplikáciu zaužívaných prístupov fyziky. K tomu je však potrebné krátke uvedenie do základných pojmov teoretickej mechaniky. Tomuto cieľu sa venuje nasledujúca kapitola.

4.1 Základné pojmy a Lagrangeove rovnice

Polohu hmotného bodu alebo sústavy hmotných bodov v n-rozmernom priestore určuje polohový vektor $r(x_1,\dots x_n)$. Jeho okamžitá rýchlosť v je daná deriváciou polohy podľa času a zrýchlenie a druhou deriváciou súradníc polohy.

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \tag{24}$$

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r} \tag{25}$$

Nech sa voľný hmotný bod (sústava hmotných bodov) pohybuje v priestore s n stupňami voľnosti (teda ani jedna z jeho súradníc nie je nijak ohraničená) pod vplyvom vonkajšej (aktívnej) sily $F = F(r,v,t)$. Potom spĺňa Newtonovu pohybovú rovnicu $\dot{p} = F$, kde $p = m.v$ je hybnosť telesa, m jeho hmotnosť. Ak hmotnosť nezávisí od v, môžeme písať vzťah v tvare $m.a = F$.

Ak sa hmotný bod nemôže voľne pohybovať, ale mu vopred zadané podmienky ohraničujú pohyb na istú čiaru alebo plochu (napr. guľôčka zavesená na nitke alebo v kotúľajúca sa v miske), hovoríme o viazanom pohybe. Tento sa deje v tzv. konfiguračnom priestore $M = \{r, \phi_\alpha(r) = 0, \alpha = 1,\dots k\}$. Príslušné podmienky $\phi_\alpha(r) = 0$ nazývame väzbami naloženými na systém. Vonkajšia pôsobiaca sila sa rozkladá na aktívnu (tangenciálnu k väzbovej ploche) a statickú (kolmú na plochu). Pohyb hmotného bodu spôsobuje len aktívna sila, statická vyvoláva opačne orientovanú reakciu väzieb. Pohyb bodu skúmame najskôr pri infinitezimálnom posunutí δr_i, ktoré vyhovuje väzbám a vychádza nám obmedzenie $grad_i \phi_\alpha . \delta r_i = 0$. Z Newtonovej rovnice dostávame $(\dot{p} - F).\delta r = 0$, kde F je iba aktívna sila, keďže reakcie väzieb sú kolmé na virtuálne posunutia. Tieto rovnice spolu s väzbovými obmedzeniami tvoria d'Alembertov - Lagrangeov princíp:

$$(\dot{p} - F).\delta r = 0 \qquad \alpha = 1,...k \tag{26}$$

$$grad_i \phi_\alpha . \delta r_i = 0 \tag{27}$$

$$\phi_\alpha (r) = 0 \tag{28}$$

Každá väzba znižuje počet stupňov voľnosti systému o 1. Takže ak máme k väzieb ($\alpha = 1,...k$), počet stupňov voľnosti je $n - k$. Parametrizáciou $r = r(q)$ konfiguračného priestoru prejdeme k novým, zovšeobecneným súradniciam $q_a, a = 1,...n-k$. Tieto už nie sú obmedzené, pričom bod sa pri použití týchto súradníc pohybuje len v danom konfiguračnom priestore. Zovšeobecnené súradnice spĺňajú druhú (27) aj tretiu (28) podmienku d'Alembertovho-Lagrangeovho princípu. Pomocou vzťahu $\delta r = \frac{\partial r}{\partial q_a} . \delta q_a$ zavedieme zovšeobecnené sily $Q_a = F_i \cdot \frac{\delta r_i}{\delta q_a}$. Prvá podmienka (26) potom prejde na $\dot{p}\frac{\partial r}{\partial q_a} - Q_a = 0$, čo po definovaní kinetickej energie $T = \frac{1}{2} m_k . \dot{r}_k^{\,2}$ dáva Lagrangeove pohybové rovnice II.druhu:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a \tag{29}$$

Ak je aktívna sila F konzervatívna, teda jej ľubovoľný krivkový integrál s pevnými hraničnými polohami v priestore nezávisí od cesty, má potenciál a možno ju vyjadriť $F = -(gradU)$, kde U je potenciálna energia sústavy, nezávislá od zovšeobecnených rýchlostí $(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_a} = 0)$. Obdobne pre Q_a platí $Q_a = -\frac{\partial U}{\partial q_a}$.

Zavedením Lagrangeovej funkcie (lagranžiánu) $L(q, \dot{q})$ ako rozdielu kinetickej a potenciálnej energie $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ pohybové rovnice nadobudnú tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_a}=0 \tag{30}$$

Lagrangeove rovnice II.druhu (nazývané aj Lagrangeove-Eulerove), používané najmä v tomto tvare, tvoria systém $n-k$ obyčajných diferenciálnych rovníc druhého rádu, z ktorých možme určiť $n-k$ zovšeobecnených súradníc $q_a(t)$ ako funkcie času. Pretože sa neviažu na osobitnú súradnicovú sústavu (napr. karteziánsku) sú veľmi výhodné pri štúdiu všeobecných zákonov fyziky. Hoci neobsahujú reakcie väzieb, v plnej miere berú do úvahy vplyv väzieb na pohyb mechanickej sústavy.

Bez ujmy na platnosti rovníc môžeme uvažovať aj zovšeobecnený potenciál $U(q,\dot{q},t)$, potom lagranžián je tiež funkciou času.

4.2 Hamiltonove rovnice

Na opis všeobecných mechanických dejov sa namiesto zovšeobecnených rýchlostí častejšie používajú zovšeobecnené hybnosti sústavy. Zaviedol ich Hamilton ako nové premenné

$$p_a=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \tag{31}$$

pričom $q_a(t), p_a(t)$ sú kanonické (kanonicky združené) premenné. Z Lagrangeových rovníc plynie vzťah $\dot{p}_a=\frac{\partial L}{\partial q_a}$. Pomocou výpočtu úplného diferenciálu funkcie $L(q,\dot{q},t)$ sa dostávame k Hamiltonovej funkcii $H(q,p,t)$

$$\begin{aligned} &d(p_j.\dot{q}_j-L)=\dot{q}_j.dp_j-\dot{p}_j.dq_j-\frac{\partial L}{\partial t}.dt \\ &H=p_j.\dot{q}_j-L(q_j,\dot{q}_j,t) \end{aligned} \tag{32}$$

Porovnaním so všeobecným vyjadrením diferenciálu H máme Hamiltonove kanonické rovnice

$$\begin{aligned} \dot{q}_j&=\frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j&=-\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{33}$$

ktoré sú ekvivalentné s Lagrangeovými rovnicami II.druhu. Sú však iba prvého rádu a je ich dvojnásobný počet.

4.3 Zákony zachovania

Riešenie pohybových rovníc je však náročná úloha a vo fyzike si ju často uľahčujeme univerzálnymi zákonitosťami mechaniky, známymi ako zákony zachovania. Vďaka nim môžeme skúmať daný pohyb bez riešenia pohybových rovníc. Existujú totižto funkcie premenných sústavy $q_a, \dot{q}_a$, ktoré sú pri pohybe konštantné. Tieto funkcie nazývame integrálmi pohybu a závisia len od počiatočných podmienok. V mechanike sú dôležité integrály pohybu súvisiace s homogénnosťou a izotropnosťou priestoru a času. Veta Emy Noetherovej udáva súvislosť medzi symetriami fyzikálnych sústav a zákonmi zachovania :

„ Ku každej transformácii súradníc (ku ktorej existuje inverzná) voči ktorej je integrál účinku invariantný, existuje integrál pohybových rovníc, a teda zákon zachovania. "

Pojem účinku vysvetlíme neskôr, pre terajšie potreby je postačujúce si pod ním predstaviť samotný lagranžián.

V praktických výpočtoch sú zákony zachovania najlepšie pozorovateľné pri výskyte cyklických súradníc. Ak do lagranžiánu nevstupuje niektorá zovšeobecnená súradnica $q_a(t)$, nazývame ju cyklickou. Z príslušnej Lagrangeovej rovnice vyplýva konštantnosť výrazu $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$, teda zovšeobecnená hybnosť $p_a(t)$ sa zachováva.

Napríklad ak je cyklická niektorá karteziánska súradnica, Lagrangeova funkcia je invariantná voči posunutiu sústavy pozdĺž tejto súradnice a zachováva sa príslušná hybnosť. Pri cyklickosti uhlovej súradnice máme invariantnosť voči otočeniu a zachovávanie momentu hybnosti.

Podobne to platí pre Hamiltonovu funkciu, kde je zachovanie hybnosti zrejmé zo (33).

Čas možno takisto považovať za súradnicu. Úplnou deriváciou Lagrangeovej funkcie podľa času použitím (30) dostávame

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_a}.\dot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}.\ddot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\cdot \dot{q}_a\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{34}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{35}$$

Ak vo vyjadrení lagranžiánu čas nevystupuje, potom $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, a keďže výraz v zátvorke je podľa (32) Hamiltoniánom, tento ostáva konštantný. Upravme definíciu kinetickej energie na $\dot{q}_a \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = 2T$. Nech potenciálna energia nie je funkciou rýchlostí $U = U(q_a)$. Potom Hamiltonián nám v podstate vyjadruje celkovú energiu uzavretej sústavy, danú súčtom kinetickej a potenciálnej energie.

$$H = 2T - L = T + U \tag{36}$$

Homogénnosť času priamo súvisí so zákonom zachovania energie.

4.4 Zákony zachovania pri kalibračných symetriách [16]

Diskrétne sústavy so súradnicami $q_a(t)$ je lepšie pre potreby teórie modelov s viacerými agentmi zovšeobecniť na sústavy so spojite sa meniacimi súradnicami $\varphi(\bar{x},t)$. Ide tu o prístup cez charakteristiku poľa. Lagranžián sa transformuje na „ nový " lagranžián ℓ:

$$L(q_a, \dot{q}_a, t) \to \ell\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, x_n\right) \tag{37}$$

Pozmenia sa aj pohybové rovnice :

$$\frac{d}{dx_n}\left(\frac{\partial \ell}{\partial\left(\partial\varphi / \partial x_n\right)}\right) - \frac{\partial \ell}{\partial \varphi} = 0 \tag{38}$$

Uvažujme napríklad pohyb elektrónu v elektromagnetickom poli. Jeho lagranžián je invariantný voči fázovým transformáciám $\psi(x) \to e^{i\alpha} \cdot \psi(x)$, kde $\psi(x)$ je vlnová funkcia vystupujúca ako premenná lagranžiánu a α konštantná fáza. Tejto symetrii zodpovedá zákon zachovania prúdu.

Všetky doteraz spomínané symetrie spôsobovali zachovávanie nejakej veličiny, ktorá sa takto stáva nemerateľnou (napríklad vyššieuvedená fáza α) – môže byť zvolená ľubovoľne a rovnaká v celom priestore a čase – máme *globálnu invariantnosť*. Zaujímavým prípadom sú však zákony zachovania existujúce aj pri meniacich sa veličinách – tzv. *lokálne zákony zachovania.*

Objasníme si ich na predchádzajúcom príklade elektrónu. Predpokladajme, že fáza je ľubovoľnou funkciou priestorových súradníc a času $\alpha(x)$. Ide teda o transformáciu $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)} \cdot \psi(x)$. Symetriu lagranžiánu voči takejto transformácii nazývame kalibračnou, a je príčinou lokálneho zákona zachovania.

Vo fyzike sa lokálne kalibračné teórie a prislúchajúce zákony zachovania ukazujú ešte dôležitejšími ako globálne. Ponúkajú podstatne širšiu informáciu o skúmanom deji a jeho podstate. Touto problematikou sa z hľadiska ekonofyziky zaoberá Kholodnyi.

4.5 Princíp najmenšieho účinku

Uvažujeme pohyb mechanickej sústavy počas určitého konečného časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Vyberieme si reprezentujúci bod sústavy, ktorý sa bude pohybovať v konfiguračnom priestore po istej trajektórii. Hamiltonov princíp (najmenšieho účinku) hovorí, že bod sa bude pohybovať tak, aby extremalizoval integrál

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt \qquad (39)$$

Funkcionál S nazývame účinok alebo akcia. Čiže súradnice sústavy budú zodpovedať pohybu po krivke s minimálnym účinkom. Pomocou metód variačného počtu možno z Hamiltonovho princípu odvodiť Lagrangeove rovnice, teda riešením extremalizácie (39) naozaj dostávame skutočný pohybový stav sústavy.

5. Aplikácia teoretickej mechaniky na trh

Hamiltonovský formalizmus, zavedenie Lagrangeových rovníc a výskyt symetrií fyzikom nesmierne uľahčuje výpočty mnohých typov zložitých, ale i jednoduchších mechanických pohybov. Vzhľadom k tomu, že už bola načrtnutá predstava trhu ako určitého dynamického problému, pokúsime sa v nasledovnej kapitole o jeho presnú formuláciu ako pohybu v priestore. Potom bude možné riešenie pomocou princípov mechaniky.

5.1 Makroekonómia. Ramseyov problém a jeho prirovnanie k fyzikálnemu problému pohybu hmotného bodu

Skúsme sa teraz venovať základným známym makroekonomickým problémom. Vo väčšine z nich sa snažíme o maximalizáciu úžitku zo spotreby. Model zahŕňa viaceré premenné ako napr. kapitál k, spotreba c, dôchodok y, úrok b. Keďže pracuje v trhovom prostredí, vystupujú tu aj podmienky zadané trhom - miera úspor s, amortizácia kapitálu δ, miera rastu populácie n, daňové zaťaženie g.... Niekedy je v ekonómii diskutabilné, ktoré veličiny považovať za premenné a ktoré za konštanty určené pre model zvonka. Na tieto veličiny bývajú uvalené rozličné ohraničenia, takže premenné nie sú voľné. Najčastejšie sa jedná o ohraničenie spotreby.

Riešime problém maximaliácie celkového úžitku zo spotreby, odúročeného k jednému časovému okamihu :

$$\max \int e^{-b.t} u(c) dt \tag{40}$$

za podmienky

$$c = f(k) - (n + \delta - g).k + \dot{k} \tag{41}$$

Pomocou Lagrangeovej metódy hľadania viazaného extrému prejdeme k :

$$\max \int e^{-b.t}\left(u(c)+\lambda.\left(c-f(k)+(n+\delta+g).k-\dot{k}\right)\right)dt \qquad (42)$$

λ sú Lagrangeove multiplikátory. Integrovaný výraz sa v ekonómii a teórii optimálneho riadenia nazýva lagranžiánom alebo hamiltoniánom.

Kladieme si otázku, či neexistuje nejaká podobnosť s fyzikálnym chápaním tohoto pojmu. V oboch prípadoch totižto ide o extremalizáciu funkcionálu – intergrálu, pričom sú na systém uvalené väzby.

Takto zvolený ekonomický model akoby sa pohyboval v súradnicovom priestore, kde podmienky určujú obmedzenia (väzby) a vytyčujú konfiguračný priestor. Podobne ako vo fyzike, do konečného lagranžiánu vstupujú zovšeobecnené súradnice, ktoré zohľadňujú pohybové obmedzenia. Pri jeho ekonomickej iterpretácii sú priamo súčasťou lagranžiánu väzbové rovnice v základnom tvare. Prirovnanie extremalizácie celkového úžitku k princípu minimálneho účinku nie je prekvapivé a priamo sa nabáda.

$$L \sim e^{-b.t}\left(u(c)+\lambda.\left(c-f(k)+(n+\delta+g).k-\dot{k}\right)\right)$$
$$\phi_\alpha = 0 \sim c-f(k)+(n+\delta+g).k-\dot{k}=0$$

Všeobecná teória optimálneho riadenia metódami variačného počtu prichádza pri riešení problému $\max \int F(x,\dot{x},t)dt$ k Eulerovým rovniciam $\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}})-\frac{\partial F}{\partial x}=0$.

Za súradnice systému budeme považovať kapitál, spotrebu a lagrangeove multiplikátory. Prislúchajúce pohybové rovnice sú :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{k}})-\frac{\partial L}{\partial k}=0 \qquad \lambda.\left(f'(k)-.(n+\delta+g+b)\right)+\dot{\lambda}=0 \qquad (43)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{c}})-\frac{\partial L}{\partial c}=0 \qquad u'(c)-\lambda=0 \qquad (44)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}})-\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \qquad c-f(k)+(n+\delta-g).k-\dot{k}=0 \qquad (45)$$

Zderivovaním a dosadením (44) do (43) dostávame sústavu diferenciálnych rovníc pre c a k.

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}\left(f'(k) - .(n + \delta + g + b)\right) \tag{46}$$

$$\dot{k} = c - f(k) + (n + \delta - g).k \tag{47}$$

Je zjavné, že skúmať takýto systém rovníc nie je jednoduché, najmä pri snahe o zachovanie všeobecnosti produkčnej a úžitkovej funkcie. Nie je to ani dostatočne názorné. Makroekonómia tu prechádza ku určeniu rovnováhy v ktorej je $\dot{c} = \dot{k} = 0$, a dopracováva sa ku tzv. Zlatému pravidlu kapitálu $f'(k) = n + \delta + g + b$. Po analýze stability však vyjde najavo, že tento stav je nestabilný. Takže veľmi malá zmena vonkajších podmienok zapríčiní úplné vybočenie z rovnováhy a takýto výsledok nemá praktickú hodnotu.

Ideou zjednodušenia tejto úlohy je *nájsť takú súradnicovú sústavu, kde by vo vyjadrení lagranžiánu bola viditeľná cyklickosť niektorej súradnice*. Potom by existoval zodpovedajúci *zákon zachovania*. Takto by sme získali veličiny, ktoré sa v makroekonomickom systéme nemenia, čo by bolo nesmiernym prínosom a novým náhľadom na teóriu. Avšak nájsť tú správnu transformáciu súradníc nie je vôbec jednoduchá záležitosť. Býva to problémom aj vo fyzike, kde je priestor názorný a ľahko predstaviteľný. O to zložitejšie je to pri ekonomickom „ spotrebno-kapitálovom " priestore. Nevieme dokonca ani intuitívne naznačiť možnú transformáciu takýchto súradníc.

5.2 Všeobecná teória rovnováhy

Prenesme sa teraz zo všeobecných makroekonomických úvah na trh statkov. Uvažujeme trh, na ktorom sa nachádza n tovarov, ich množstvá označíme $x = (x_1, \ldots x_n)$. Máme tu určenú nejakú úžitkovú funkciu $U(x_1, \ldots x_n)$, spĺňajúcu obvykle kladené požiadavky (konkávnosť, klesajúce výnosy...). Spotrebiteľ sa správa racionálne, čiže maximalizuje svoje potreby ohodnotené úžitkovou funkciou s ohľadom na svoje rozpočtové ohraničenie $M = p.x = const$., kde M je množstvo peňazí a p vektor cien

$$\max \int U(x) - \lambda \cdot (M - p \cdot x) \cdot dx \tag{48}$$

Ekvilibrium sa nadobúda v riešení :

$$p_i = \lambda \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (49)$$

K týmto cenám reálny trh dospeje prispôsobovacím procesom – postupným vyrovnávaním ponuky a dopytu. Hovoríme o jave „ neviditeľnej ruky " na trhu, zavedenom už klasikmi. Hospodárstvo podľa nich cieli k stavu všeobecnej rovnováhy.

5.3 Sporná definícia užitočnosti

Nejednoznačnosť definície úžitkovej funkcie nie je zanedbateľným faktom. Známe sú iba požiadavky kladené na funkciu ako rastúcosť a konkávnosť, spôsobujúcu pokles hraničného úžitku. Mohli by sme uvažovať triedu funkciií s požadovanými vlastnosťami, ale táto je dobre definovaná iba lokálne, nie globálne, lebo nie je invariantná voči nelineárnym transformáciám súradníc (množstiev tovarov x). Taktiež treba vziať do úvahy fakt, že uspokojenie ľudských potrieb je komplexnejšia záležitosť, ako je definovaná v predpokladoch úžitkovej funkcie. Mirowski kritizuje existenciu úžitku ako funkcie premenných ponuky a dopytu [17].

V (48) sa snažíme o maximalizáciu zovšeobecnenej úžitkovej funkcie, v ktorej je už zahrnuté aj obmedzenie. Avšak týmto spôsobom nie je jednoznačne zadaná, pretože celkový úžitok bude daný integrálom závislým od cesty. Podľa McCauleyho [18] v teórii všeobecnej rovnováhy máme vnútornú nekonzistenciu: ak je daný cenový vektor ako funkcia ponuky a dopytu $p(x)$, v (48) nám itegrál

$$A_r = \int_C p.dx \qquad (50)$$

vo všeobecnosti závisí od integračnej cesty. Teda užitočnosť so zahrnutými ohraničeniami nie je funkciou, ale funkcionálom. Podmienkou nezávislosti tohto integrálu na ceste je z matematickej analýzy [19] existencia takej funkcie F, aby výraz $p.dx$ bol jej úplným diferenciálom. Teda musí platiť $p_i dx_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$, funkciu F môžeme považovať za úžitkovú $U = F$.

Vzťah $$p = \nabla U \tag{51}$$

je podmienkou globálnej existencie úžitkovej funkcie. V opačnom prípade integrál (50) závisí od cesty a môžeme uvažovať iba o lokálnom analógu úžitkovej funkcie.

Nekorektnosť definície úžitkovej funkcie v prípade závislosti integrálu (50) na ceste je ekonómami v praxi bežne zanedbávaná, dokonca ju ani len teoreticky neakceptujú. Takýto prístup môže mať za následok zavádzanie výsledkov a zidealizovanie trhu na nesprávnom mieste.

5.4 Trh ako priestor komodít

Skúsme fyzikálne aplikovať podľa [18] tu predložený model. *Množstvá tovarov* $x = (x_1, \dots x_n)$ *považujme za priestorové súradnice, ceny* $p = (p_1, \dots p_n)$ *za prislúchajúce kanonické hybnosti*. Máme teda $2n$ - rozmerný fázový priestor (x, p).

Podmienka $p = \nabla U$, kde U je skalárnou funkciou komodít x, obmedzuje voľnosť pohybu systému na n - rozmerný cylinder alebo anuloid.

Vzťah (51) je vlastne formálnou neekonomickou interpretáciou Walrasovho zákona $M = p.x$, respektíve podmienkou korektného použitia všeobecnej teórie rovnováhy. Vo fázovom priestore (x, p) máme rovnicou $p = \frac{M}{x}$ dané trajektórie hyperbolického tvaru. Pri takomto systéme nemožno predpokladať rovnovážnu polohu.

Ak je systém neintegrovateľný, čo je typický prípad, zákony zachovania platia len lokálne. Avšak ako vo všetkých problémoch v dynamike, významné sú efekty a popis lokálneho diania, nie globálneho.

5.5 Hamiltonovský prístup

Uvažujme podľa [18] všeobecnú situáciu, kde nevstupuje Walrasova podmienka, ale zohľadňujeme zmenu množstva tovarov opísanú produkčnou funkciou. Tento prípad nám poskytne riešenie dynamiky systému aj pre všeobecnú funkciu, kde nezávislosť (50) nie je splnená. Účinkom bude nie priamo úžitková funkcia, ale jej oddiskontovaná miera. Extremalizujeme výraz

$$A = \int e^{-bt} u(x, v, t) dt \,, \tag{53}$$

kde v je množina kontrolných premenných (alebo „ nástrojov " na trhu, pomocou ktorých môžeme ovplyvniť úžitok). Máme určenú i väzbu systému, tou je produkčná funkcia, ktorú sme doteraz neuvažovali :

$$\dot{x} = s(x, v, t) \tag{54}$$

Teda riešime :

$$\max_v \int e^{-bt} \left(u(x, v, t) + \lambda \left(s(x, v, t) - \dot{x} \right) \right) dt \tag{55}$$

Ide o princíp extremálneho účinku, a prislúchajúci lagranžián sústavy je daný :

$$L = e^{-bt} \left(u(x, v, t) + \lambda \left(s(x, v, t) - \dot{x} \right) \right) \tag{56}$$

Kedže ceny p sme definovali ako kanonické hybnosti, podľa (31) nám pre ne platí:

$p_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \lambda_a$, takže sú vlastne lagrangeovými multiplikátormi.

Keďže extremalizácia prebieha cez kontrolné premenné v , môžeme zanedbať výrazy, kde nevystupujú a riešenie sa zredukuje na:

$$H(x, p, t) = \max_v \left(u(x, v, t) + p.s(x, v, t) \right) \tag{57}$$

Maximum sa nadobúda pri splnení podmienok :

$$\frac{\partial u}{\partial v_i} + p_k \frac{\partial s_k}{\partial v_i} = 0 \tag{58}$$

Tie vedú k vyjadreniu v ako funkcie $v = f(x, p, t)$.

Skutočný hamiltonián podľa (32) je vyjadrený :

$$h(x, p, t) = \max_v \left(w(x, v, t) + \widetilde{p}.s(x, v, t) \right) \tag{59}$$

Zmeny cien a množstiev tovarov sú takto určené rovnicami (33) :

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i} \tag{60}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i} = s_i\left(x, f(x, p, t), t\right) \tag{61}$$

kde $w(x, v, t) = e^{-bt} u(x, v, t)$ je odúročená miera úžitku a súčasne lagranžián L. $\tilde{p} = e^{\pm bt} p$. Vzťahy (60), (61) opisujú dynamiku trhu.

5.6 Intuitívne potvrdenie priradenia veličín

Skúsme uvažovať nad možnosťou výskytu zákona zachovania v takýchto súradniciach. Predpokladajme, že do $L(x, p, t)$ v (56) (respektíve do $h(x, p, t)$ v (59)) nevstupuje súradnica x_a. V praxi to znamená, že úžitok z tovaru a nezávisí od jeho množstva. Spotrebiteľovi je ľahostajné, koľko tovaru bude vlastniť. Mala by sa zachovávať príslušná hybnosť, v našom prípade cena a-teho tovaru p_a. Tento uzáver je skutočne platný aj v praxi. Hoci intuitívne je bližšia skôr predstava nulovej ceny takéhoto tovaru, nie je po hlbšom zvážení pravdivá. Budeme predpokladať, že trh neprejde postupným prispôsobovaním, ale priamo sa ocitneme v situácii, že cena p_a je na určitej úrovni $\overline{p}$. Neexistujú tu žiadne tlaky ani dôvody posunu ceny, keďže tovar je obchodníkom ľahostajný. Nesnažia sa ho ani zbaviť (čo by spôsobovalo znižovanie ceny k nule), pretože im je jedno či ho vlastnia alebo nie. Cena ostáva zachovaná.

Táto v praxi overená skúsenosť teda potvrdzuje, že priradenie veličín bolo korektné.

5.7 Kapitál na trhu a jeho pohyb

Na začiatku kapitoly sme sa zamýšľali nad dynamikou makroekonomického trhu z hľadiska kapitálu a spotreby. Neskoršie prirovnanie statkov k polohe a uvažovaný hamiltonovský prístup nám poskytli nové rovnice (60), (61) pre opis trhu.

Tieto dva výsledky môžeme spojiť, a to pokladaním kapitálu za jeden z tovarov, v tomto prípade ide o jediný tovar. Spotrebu považujme za lineárnu funkciu dôchodku $c = (1-s)y = (1-s)f(k)$. Spotrebné obmedzenie $c = f(k) - (n+\delta-g).k + \dot{k}$ prepíšeme do tvaru

$$\dot{k} = s.f(k) - (n+\delta-g).k \tag{62}$$

čo je ekvivalentné forme (54) .

Extremalizačná funkcia $\max \int e^{-b.t} u(c) dt$ je totožná s (53). Ide tu teda len o jednorozmerný prípad vyššie uvedeného problému. Pod cenou sa kapitálu v praxi často chápe trhový úrok.

5.8 Pohyb v silovom poli

Na základe článku 3.2 prirovnajme dianie na trhu k pohybu už nie v elektrickom, ale ľubovoľnom silovom poli. Podobne ako vyššie, x je poloha hmotného bodu ekvivalentná portfóliu aktív; p hybnosť, čiže cena aktíva. Silové pole si predstavujeme ako už spomínaný model zväzku vlákien, kde je sila v každom jeho priestorobode určená dotyčnicou k vláknu. *Sila* $F = \dot{p}$ *(podľa Newton. zákona) zastupuje hraničné výnosy* $\varepsilon(p)$.

Energiu môžeme chápať ako potenciálnu energiu silového poľa U a je definovaná v každom bode poľa. Akákoľvek zmena polohy hmotného bodu je sprevádzaná zmenou energie, ktorá je určená integrálom zo sily po trajektórii.

$$\Delta U = \int F dx = \int \dot{p} dx \qquad (63)$$

Ak je silové pole konzervatívne, integrál (63) nezávisí na ceste. V tomto prípade je sila určená gradientom potenciálnej energie.

$$\dot{p} = F = \nabla U \qquad (64)$$

5.9 Existencia arbitráže

V kapitole 3.2 sme sa zaoberali finančným trhom, kde priestorové súradnice bolo možné prirovnať k množstvu aktív. Každé aktívum malo určenú cenu p. Pre ideálne fungovanie trhu bola zadaná bezarbitrážna podmienka (10) ktorá hovorí o nezávislosti krivkového integrálu od cesty. Cestou sa rozumie zmena portfólia držaných aktív, čiže pohyb v priestore aktív. Ako bližšie špecifikovať krivkový integrál? Je v podstate výnosom pri danom pohybe aktív. Vzorec (7) pre 2 aktíva sa dá zovšeobecniť na

$$R(c) = \int_C \varepsilon(p) \cdot dx \qquad (65)$$

kde $\varepsilon(p)$ je hraničný výnos z aktíva. Podľa [2] platí

$$\varepsilon(p) = \dot{p} \qquad (66)$$

Celková snaha trhu je maximalizovať zisk.

Takže podmienkou bezarbitráže na finančnom trhu je nezávislosť (65) na ceste. Táto istá podmienka nám vystúpila v (63) ako požiadavka konzervatívnosti silového poľa.

V kapitole 5.2 sme rozoberali trh statkov, pričom množstvá statkov boli ekvivalentmi priestorových súradníc . Tento trh sa snaží taktiež o maximalizáciu, a to funkcie úžitku. Prišli sme k problému so samotnou definíciou užitočnosti, lebo integrál $A_r = \int_C p.dx$ je vo všeobecnosti závislý na ceste (časť 5.3). V ideálnom prípade, doteraz uvažovanom ekonómami, sme túto závislosť zanedbávali. Medzi krivkovými integrálmi (63), resp. (65), a (50) je však značná podobnosť. Takisto podmienky (51) a (64) sú takmer totožné.

Rozdiel je jednoduchý : na trhu statkov uvažujeme ceny p , kým na finančnom trhu $\dot{p}$. Táto odlišnosť by mohla byť spôsobená rôznym chápaním a objektom maximalizácie na oboch trhoch.

Pri statkoch ide v podstate o ich výmenu a obchodovanie s nimi pomocou peňazí. Bolo stanovené rozpočtové obmedzenie a teda „ zarába " sa na výhodnej výmene, prípadne podľa hamiltonovského prístupu (článok 5.5) na ich zhodnocovaní vyjadrenom produkčnou funkciou. Maximalizujeme celkový úžitok, pre jeho korektnú definíciu však nesmie byť závislý na ceste, čiže na spotrebnom koši tovarov počas obchodovania. Je určený iba počiatočným a konečným stavom zloženia a množstva vlastnených tovarov.

Finančné aktivity pracujú skôr na využívaní pohybov cien, presnejšie jej zmien $\dot{p}$. Zisk, extremalizovanú veličinu v tomto prípade, takisto obmedzujeme nezávislosťou výberu portfólia počas trvania transakcií. Bezarbitrážna podmienka sa v oboch prípadoch teda adekvátne opiera buď o p alebo $\dot{p}$.

Doterajší prístup ekonómov na trhu statkov a ich úvahy nezohľadňujúce problémy s korektnou definícoiu úžitku by mohli byť teoreticky idealizáciou trhu statkov na takzvaný „ bezarbitrážny ". Praktické skúsenosti na finančných trhoch však potvrdzujú krátkodobé príležitosti k neadekvátnemu zisku. Takže podobne by bolo treba uvažovať aj pri tovaroch a vniesť svetlo do ešte stále nejasných zákonitostí fungovania trhového mechanizmu.

Záver

Trh ako zložitý systém je bez zjednodušenia iba ťažko priamo pochopiteľný. Veľkou pomocou je prirovnanie k už existujúcim a preskúmaným systémom, ktoré fungujú na podobných, ak nie rovnakých princípoch. Práca podala viaceré porovnania so známymi modelmi fyziky. Ich už overený výpočtový aparát môže poskytnúť riešenie mnohých ekonomických problémov. Sú to jednak staršie štatistické prístupy, ale sústredila sa najmä na prehĺbenie novších hamiltonovských metód.

Prirovnanie trhových účastníkov k systému vzájomne interagujúcich bodov prinieslo bližší pohľad na aktivity a pôsobenie jednotlivých obchodníkov na celkový trh. Zároveň načrtlo aj spôsob citlivého výberu kontroly trhu, a možnosť preverenia jeho účinkov vopred simuláciami.

Pri úvahách s veľkým počtom agentov či aktív sa využíva štatistický prístup. Tu je trh chápaný ako neusporiadaný systém. Fyzikálna štatistika prináša iný pohľad na postupnosť cenových zmien. Nový je najmä v konečnom zavedení pojmu entropie, ktorá charakterizuje chaotický systém a je ekvivalentom jeho vnútornej energie.

Veľmi cenným sa ukázala aplikácia pohybu na trhu ako pohybu nabitých častíc v elektromagnetickom poli. Častice predstavujú množstvá obchodovaných peňazí, tzv. cash alebo debts. Silové pole je charakterizované tenzorom hraničných výnosov. Takýto prístup najlepšie zahŕňa dynamiku trhu.

Vlastným prínosom práce je snaha o korektné priradenie fyzikálnych veličín ekonomickým :

vektor polohy = množstvá tovarov, portfólio aktív

vektor hybnosti = vektor cien

Pohyb je viazaný ohraničeniami, napríklad spotrebným alebo produkčným. Takto môžeme stanoviť adekvátny lagranžián a uvažovať základnú snahu trhu o maximalizáciu úžitku alebo zisku, čo je ekvivalentom extremalizácie účinku v mechanike.

Potom možno stotožniť:

účinok = úžitok, zisk

V ďalšej práci by sa dalo s veľmi dobrými vyhliadkami pokračovať v štúdiu stanoveného lagranžiánu smerom k vyneseniu zákonov zachovania.

Pri podrobnejšom pohľade a uvážení už spomínaného dôležitého prirovnania k elektromagnetickému poľu sme zistili, že dianie na trhu sa uskutočňuje v prostredí, ktoré možno modelovať ako silové pole. Pôsobiace sily majú charakter potenciálových a sú v každej polohe určené hraničným výnosom alebo hraničným úžitkom. Úžitok alebo výnos je ekvivalentom zmeny potenciálnej energie.

sila (resp. intenzita silového poľa) = hraničný výnos
energia = úžitok, zisk

V skúmaní sme sa dostali aj k pôvodne neplánovanej analýze arbitráže na trhu. Prišli sme k záveru, že nezávislosť krivkového integrálu zo sily alebo ceny – definuje zisk, úžitok – od integračnej cesty – čiže spôsobu obchodovania – je nutnou podmienkou niektorých stavov trhu. Bežné chápanie úžitkovej funkcie je korektné a adekvátne iba pri platnosti tejto podmienky. Takisto na bezarbitrážnom trhu sa vyžaduje jej striktné splnenie. Tieto špeciálne prípady sú analógom pohybu v silovom poli, ktoré je konzervatívne.

Celkove práca prináša pokus o nové smerovanie súčasných myšlienok ekonofyziky. Priradenie veličín síce nie je exaktne dokázané a odvodené, to by vyžadovalo podstatne hlbšie štúdium problematiky, ktorej záber je veľmi široký. Intuitívne predstavy a doterajšie úspešné aplikácie naznačujú, že širší priemet fyzikálneho myslenia do ekonomických problémov môže sformulovať viaceré zaujímavé smery skúmania, ktoré povedú ku konkrétnym výsledkom a uzáverom.

Použitá literatúra :

[1] R. N. Mantegna, H. E. Stanley : Introduction to Econophysics Correlations and Complexity in Finance, Cambridge University Press, 2000

[2] V. A. Kholodnyi : Valuation and Dynamic Replication of Contingent Claims in a General Market Enviroment Based on the Beliefs-Preferences Gauge Symmetry

[3] M. Baxter, A. Rennie : Financial Calculus – An introduction to derivative pricing, Cambridge University Press, 1998

[4] M. Schaden: Quantum Finance, physics/0203006 v1, 2002

[5] Yi-Cheng Zhang : Toward Theory of Marginally Efficient Markets, cond-mat/5501243 v1, 1995

[6] O. Guenther, T. Hogg, B. A. Huberman : Power Markets for Control Smart Matter, cond-mat/5703074 v1, 1997

[7] K. Ilinski : Gauge Physics of Finance, cond-mat/5411157 v1, 1994

[8] K. Ilinski : Physics of Finance, hep-th/5710144 v1, 1997

[9] V. A. Kholodnyi : Valuation and Dynamic Replication of Contingent Claims in General Market Enviroment Based on the Beliefs-Preferences Gauge Symmetry

[10] V. T. Granik, A. Granik : Economics from a Physicist's point of view: Stochastic Dynamics of Supply and Demand in a Single Market, physics/0207114 v1, 2002

[11] J.-L. Marichal : Entropy of a Choquet Capacity, www.math.byu.edu/~marichal/Mywebpage/internetfiles/EntropyChoquetCapacityEUSFLAT55.pdf

[12] Jun-Ichi Maskawa : Hamiltonian in Financial Markets, cond-mat/0011145 v1, 2000

[13] Jun-Ichi Maskawa : Ordered phase and non-equilibrium fluctuation in stock market, cond-mat/0110120 v1, 2001

[14] M. Brdička, A. Hladík : Teoretická mechanika, Academia Praha, 1987

[15] V. Obetková, A. Mamrillová, A. Košinárová : Teoretická mechanika, Alfa Bratislava, 1990

[16] Uspechi Fizikalnych Nauk 123(4) (1997) 565

[17] P. Mirowski : More Heat than Light. Economics as social physics, physic's as nature's economics, Cambridge , 1989

[18] J. L. McCauley : The Futulity of Utulity, cond-mat/5511251 v3, 2000

[19] M. Barnovská, K. Smítalová : Matematická analýza IV., UK v Bratislave, 1984

[20] B. Felderer, S. Homburg : Makroekonomika a nová makroekonomika, Elita, 1995

[21] T. J. Sargent : Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press, 1997

[22] O. Blanckard, S. Fischer : Lecturies on Macroecomomics, MIT, 1989

[23] Romer : Advanced Macroeconomics, McGrano Hill, 1996