FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2003 Vladimír Pravňan

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

EKONOMICKÁ A FINANČNÁ MATEMATIKA

Zbierka úloh z teórie hier

Diplomová práca

Diplomant: Vladimír Pravňan

Vedúca diplomovej práce: RNDr. Elena Šikudová

Bratislava 2003

Prehlasujem že som túto diplomovú prácu
vypracoval samostatne na základe vedomostí
získaných štúdiom a s pomocou uvedenej literatúry.

Vladimír Pravňan

Ďakujem vedúcej diplomovej práce RNDr. Elene Šikudovej za odborné vedenie, praktické pripomienky a poskytnutú literatúru.

OBSAH

Úvod

Pôvodným impulzom pre rozvoj teórie hier bola analýza bežných spoločenských a hazardných hier. Táto problematika sa sporadicky objavovala v prácach matematikov už od 17. storočia. No základy teórie hier, ako ju poznáme dnes, vytvorila publikácia „Teória hier a ekonomické správanie" (The Theory of Games and Economic Behavior) od matematika Johna von Neumanna a ekonóma a štatistika Oskara Morgensterna v roku 1944. No nebola to prvá publikácia z tejto oblasti. John von Neumann publikoval svoju prvú prácu o teórii hier už v roku 1928.V nasledujúcich rokoch sa zaoberalo teóriou hier mnoho ľudi, z ktorých je pre väčšinu ľudí najznámejší John Nash. Jeho práce sa zaoberali hlavne existenciou ekvilibriá.

Teória hier sa zaoberá modelovaním konfliktných situácií, ktoré nazývame hry, hlavne vďaka formálnej analógii v užšom slova zmysle medzi nimi, a ich analýzou. Hry sú hrané, teda konflikty sa dejú, kedykoľvek ľudia navzájom na seba pôsobia. Ak jazdíme autom po preplnenej mestskej ulici, hráme hru s ostatnými vodičmi áut. Manažer supermarketu robiaci rozhodnutia o cene, ktorá rozhoduje, či si to kúpime, hrá hru so zákazníkmi a ostatnými supermarketami. Teória hier nám síce svojou analýzou hier neposkytne odpovede na všetky svetové problémy, no povie nám, čo sa stane , keď sa ľudia ovplyvňujú v racionálnom jednaní, čo je v terajšej dobe analýz najdôležitejšie. Zaraďuje sa medzi ekonomicko – matematické disciplíny, aplikovatelné nielen v oblasti ekonomického rozhodovania, ale aj v ekonomickej teórii (pri modelovaní rôznych trhových štruktúr), v sociológii (pri štúdiu správania jedincou a skupín), v politológii (analýza volebných systémov a pravidiel, procesu vzniku koalícií rôznych spoločenských zoskupení, princípu uzatvárania dohôd a kompromisov) a vo vojenských vedách (plánovanie vojenských operací). Bol by som rád, keby sa táto posledná aplikácia teórie hier využívala čo najmenej.

Mojím cieľom bolo vytvoriť zbierku úloh k predmetu Teória nekooperatívnych hier. Zbierku, ktorá pomôže študentom pred písomkou, poskytne teoretický základ k riešeniu príkladov a pripraví študentov na ďalšie predmety patriace k teórii hier, kde využijú vedomosti nadobudnuté aj z tejto zbierky.

Zbierka začína slovníkom zákadných pojmov použitých v tejto zbierke. Ďalej je zbierka rozdelená do troch kapitol. Prvé dve sa členia na podkapitoly, v ktorých je obsiahnutá teória, vzorové príklady a zadania príkladov, ktorých riešenia sa nachádzajú v tretej kapitole. Celá zbierka sa v podstate venuje hľadaniu rôznych ekvilibrií rôznymi spôsobmi. Prvá kapitola sa zaoberá hrou v strategickej forme, ktorou sa zapisujú statické hry, v ktorých robia hráči simultánne rozhodnutia, teda hráči sa rozhodujú naraz, pričom nevedia dopredu nič o budúcom rozhodnutí protihráča. V takejto hre sa pridelia hráčom, výplatné funkcie a množiny stratégií. Potom sa skúma, čo sa stane, keď si hráči vyberú stratégie, ktoré maximalizujú ich výplatu. V tejto kapitole sa venujem dominantným a dominovaným stratégiam, hľadaniu ekvilibrií hier prostredníctvom nich, Nashovemu ekvilibriu, vzťahmi medzi Nashovým ekvilibriom a ekvilibriámi nájdenými prostredníctvom uvedených stratégií, a kombinovaným stratégiam. Druhá kapitola sa venuje hrám v rozvinutej forme, ktorou sa zapisujú dynamické hry. V takýchto hrách sa hráči nerozhodujú naraz, ale postupne, pričom vedia o predchádzajúcich rozhodnutiach protihráčov. Takéto hry zapisujeme vo forme grafu, ktorý nazývame stromom hry. Grafické znázornenie hry nám uľahčuje pochopiť vzťah medzi kombinovanou a pochodovou stratégiou, nájsť ekvilibrium nájdené v podhrách pomocou spätnej indukcie.

Slovník základných pojmov

Teória hier – analyzuje konfliktné situácie s cieľom vypracovnia doporučení pre rozumné činnosti každého z protivníkov počas konfliktu
- skúma modely konfliktných situácii

Hra - model konfliktnej situácie, v ktorej sú dané stratégie protivníkov a matica výplat
-formálny zápis situácie, pri ktorej sa jedinci zúčastňujú strategickej iterácie

Strategická iterácia
1. HRÁČI - Kto sa hry zúčastňuje?
2. PRAVIDLÁ - Kto je na rade? Čo všetko vie daný hráč? Čo všetko môže urobiť?
3. VÝSLEDOK - Ako sa skončí hra, pre všetky kombinácie akcií jednotlivých hráčov?
4. VÝPLATA - Ako si hráči cenia jednotlivé výsledky?

Hráči - individualisti, ktorý robia rozhodnutia
-snažia sa maximalizovať svoj úžitok výberom akcie
-strany zúčastňujúce sa konfliktu
- množina hráčov sa označuje N = {1,2, ... ,n}

Akcia/výber - rozhodnutie hráča i (vetva v strome hry)
- voľba čo môže spraviť
-označenie a_i, i = 1, ... ,n

Množina akcií - množina všetkých možných akcií hráča i
-označenie $A_i = (a_i)$, i = 1, ... ,n

Profil akcií - usporiadaná množina pozostávajúca po jednej akcii pre každého z n hračov
-označenie $a = (a_1,...,a_n)$

Stratégia - pravidlo, ktoré hráčovi i hovorí, aký má urobiť výber/akciu v každom okamihu (v každom uzle)
-označenie s_i, i = 1, ... ,n

Množina stratégií - množina všetkých možných stratégií hráča i
-označenie $S_i = (s_i)$, i = 1, ... ,n

Strategický profil - usporiadaná množina pozostávajúca po jednej stratégií pre každého z n hráčov
-označenie $s=(s_1,...,s_n)$

Výplata – úžitok, ktorý získajú hráči po tom čo všetci hráči použili svoje stratégie a hra je dohraná

Konečná hra – hra s konečným počom stratégií pre každého hráča, ktorých počet je tiež konečný

- dá sa riešiť pomocou lineárneho programovania

Nekonečná hra – hra s nekonečným počom stratégií pre každého hráča
- nedá sa riešiť pomocou lineárneho programovania, neexistuje univerzálana metóda riešenia, pre každý typ hier je nutné použiť iný spôsob riešenia, pokial ovšem vôbec je nejaký spôsob známy

Hra s nekonštantným súčtom - pri rôznych výsledkoch dostaneme rôzne súčty výplat

Nekooperatívna hra – hra, v ktorej nie je prípustný vznik koalícií

Dynamická hra - hráči, ktorý sa rozhodujú neskôr v hre, vedia pre aké akcie sa rozhodli ostatný hráči pred nimi
- dá sa zapísať vo forme stromu (rozvinutá forma hry)

Statická hra - v tejto hre je absencia informácií o protihráčových akciach, rozhodujem sa práve teraz (papier,kameň,nožnice), rozhodnutia hráčov su simultánne
- rieši sa pomocou dominancie

Inteligentný/racionálny hráč - rozhoduje sa tak, aby boli jeho rozhodnutia čo najvýhodnejšie

Neinteligentny/neracionálny účastník – charakterizuje ho náhodný mechanizmus rozhodovania (označovaný ako príroda).
- tiež označovaný ako **pseudohráč**

1
Strategická forma hry

Strategická forma hry (resp. hra v normálnom tvare) – ***G(N,S,u)***

N – množina hráčov

$N = \{ 1, \dots , n \}$

S – množina strategických profilov hry

$S = S_1 x S_2 x \dots x S_{n-1} x S_n$

$S_{-i} = S_1 x S_2 x \dots x S_{i-1} x S_{i+1} x \dots x S_n$

S_i - množina strategií i-teho hráča

$s \in S$

$s = (s_1, s_2, \dots , s_n)$

$s_{-i} = (s_1, s_2, \dots , s_{i-1}, s_{i+1}, \dots , s_n)$

$s = (s_i, s_{-i})$

s_i - statégia i-teho hráča

u – výplatná funkcia

$u: S \rightarrow R$

$u(s) = (u_1(s), u_2(s), \dots , u_n(s))$

$u_i(s)$ - výplata i-teho hráča pri použití strategického profilu s

($u_i(s)$ sa často zapisuje ako matica výplat)

Maticová hra je daná maticou výplat rozmeru mxn, častejšie tabuľkou. Jednotlivé riadky predstavujú stratégie jedného hráča (je ich m) a jednotlive stĺpce stratégie druhého hráča (je ich n). Tieto stratégie tiež nazývame **čistými** alebo **rýdzymi stratégiami.** Pri troch hráčoch maticová hra pozostáva z viacerých matíc, ktorých prvky sú usporiadané trojice. O počte matíc rozhoduje počet stratégií tretieho hráča.

Bimatica je matica, ktorej prvky sú usporiadané dvojice výplat hráčov. Opisuje maticovú hru 2 hráčov s nekonštantným súčtom. Jej prvky sú usporiadané dvojice, kde prvé číslo je výplata prvého hráča a druhé výplata druhého.

1.1 Nashove ekvilibrium

Nashove ekvilibrium strategickej formy hry *G(N,S,u)* je taký strategický profil s^*, že platí $u(s^*) = u(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u(s_i, s^*_{-i})$ pre všetky $i \in N$ a všetky $s_i \in S_i$.
(Koncept vzájomne najlepších reakcií vzhľadom na stratégie protihráčov. Každý hráč si vyberie najlepšiu svoju stratégiu.)

<u>*Poznámka 1*</u>*: Množinu Nashových ekvilibrií hry G označujeme* ***NE****.*

<u>Príklad</u>

Pod jedným stromom v oáze sedia dve opice, malá a veľká. Sú hladné a na strome rastie jediné zázračné jablko, obsahujúce 10 MJ. Ak vylezie na strom veľká opica spáli 2 MJ a strasie jablko. Malá ho začne hneď jesť. Malá opica pri výstupe na strom nespáli nič. Ak začne jesť jablko malá opica, tak odje 4 MJ. Ak začne jesť veľká, tak malej nechá len zbytky, hodné 1 MJ. Ak sa obidve dostanú k jablku naraz, tak malej sa ujdú 3 MJ.
i) Napíšte strategickú formu tejto hry.
ii) Nájdite Nashove ekvillibria.

<u>Riešenie</u>

i) *Máme 2 opice, čiže* ***N={1,2}****.*
Každá opica má na výber ísť hore (H) alebo ostať dole (D), čo sú vlastne jej akcie (v tomto prípade aj stratégie). Teda $A_1 = A_2 = \{H,D\}$.
Funkciu výplat zapíšeme v tvare bimatice na nasledujúcej strane

MO

		H	***D***
VO	***H***	5,3	4,4
	D	9,1	0,0

ii) *Nashove ekvilibriá hľadáme tak, že v riadkoch hľadáme maximum z výplat MO a v stĺpcoch maximum z výplat VO. Vlastne hľadáme stratégiu, ktorá nás privedie k najlepšej výplate pre jedného hrača pri tej istej stratégií druhého hráča. (Ak je to hra s troma hráčmi, tak pre tretieho hľadáme maximum v rovnakých bunkách tabuliek, teda maticiach výplat) Bunka tabuľky, ktorá obsahuje obe maximá je Nashove ekvilibrium.* ***NE = { (H,D), (D,H) }***

MO

		H	***D***
VO	***H***	5,3	***4*,4**
	D	***9*,1**	0,0

1.2 Dominantné a dominované stratégie

Stratégia s_i‘ je **ostro dominovaná** stratégií s_i‘‘ hráča i ak platí

$u_i(s_i‘,s_{-i}) < u_i(s_i‘‘,s_{-i})$ pre všetky $s_{-i} \in S_{-i}$

(Stratégia s_i‘ je ostro dominovaná stratégií s_i‘‘ hráča i ak platí, že pre ktorékoľvek stratégie ostatných hráčov dá s_i‘ nižšiu výplatu ako s_i‘‘ pre hráča i.)

Stratégia s_i‘ je **slabo dominovaná** stratégií s_i‘‘ ak platí

$u_i(s_i‘,s_{-i}) \leq u_i(s_i‘‘,s_{-i})$ pre všetky $s_{-i} \in S_{-i}$

pokiaľ

$u_i(s_i‘,s_{-i}) < u_i(s_i‘‘,s_{-i})$ pre niektoré $s_{-i} \in S_{-i}$.

Poznámka 1: Tiež hovoríme, že s_i‘‘ ostro/slabo dominuje s_i‘.

Poznámka 2: Racionálny hráč nepoužíva ostro dominované stratégie.

Stratégia s_i' je **ostro dominantná** ak platí

$u_i(s_i',s_{-i}) > u_i(s_i,s_{-i})$ pre všetky $s_{-i} \in S_{-i}$ a všetky $s_i \in S_i - \{s_i'\}$

(Ostro dominantná stratégia ostro dominuje všetkym stratégiam hráčov.)

Stratégia s_i' je **slabo dominantná** ak platí

$u_i(s_i',s_{-i}) \geq u_i(s_i,s_{-i})$ pre všetky $s_{-i} \in S_{-i}$ a všetky $s_i \in S_i - \{s_i'\}$

<u>Poznámka 1</u>: Racionálny hráč používa ostro dominantnú stratégi vždy keď existuje.

<u>Poznámka 2</u>: Racionálny hráč obvykle používa slabo dominantnú stratégiu.

Strategický profil $s = (s_1,s_2, \ldots ,s_n)$ tvorí **ekvilibrium ostro dominantných stratégií** *(ďaľej ako **EODS**),* ak pre každého hráča i je s_i ostro dominantná stratégia .

(Takéto ekvilibrium je jediné Nashove ekvilibrium.)

Strategický profil $s = (s_1,s_2, \ldots ,s_n)$ tvorí **ekvilibrium slabo dominantných stratégií** *(ďaľej ako **ESDS**),* ak pre každého hráča i je s_i slabo dominantná stratégia .

(Takéto ekvilibrium je Nashove ekvilibrium, okrem neho existujú aj iné Nashove ekvilibriá.)

<u>Príklad</u>

Zistite, či sa v daných bimaticiach nachádzajú slabo dominované, ostro dominované, slabo dominantné, ostro dominantné stratégie a EODS alebo ESDS.

.

	1	2	3
A	2,1	3,2	4,1
B	1,2	3,4	2,2
C	0,1	2,3	1,3

	1	2	3
A	2,2	3,3	4,2
B	4,3	5,4	6,1
C	0,0	2,4	3,1

<u>Riešenie</u>

Pri hľadaní daných stratégií vlastne porovnávame vektory. V riadkoch porovnávame vektory zložené z výplat prvého hráča, v stĺpcoch z výplat druhého hráča. Pri ostro (resp. slabo) dominantných stratégiach vektor, ktorý jej zodpovedá, musí byť ostro *väčší ako všetky ostatné vo všetkých zložkách (resp. v aspoň jednej). Teda hľadáme stratégiu, ktorá prinesie najväčšiu prípadne rovnakú výplatu, nech si druhý hráč zvolí akúkoľvek stratégiu. Pri ostro (resp. slabo) dominovaných stratégiach musí byť zodpovedajúci vektor ostro menší ako jeden z ostatných vo všetkých zložkách (resp. v aspoň jednej). Teda hľadáme stratégiu, ktorá prinesie najnižšiu prípadne rovnakú výplatu, nech si druhý hráč zvolí akúkoľvek stratégiu Takýmto postupom dostaneme, že v prvej bimaticii sú stratégie **A** a **2 slabo dominantné**, **1** a **C ostro dominované** (stratégiami 2 a A), **3** a **B slabo dominované** a bimatica obsahuje **ESDS = (A,2)**. V druhej bimatici sú **B** a **2 ostro dominantné** teda tvoria **EODS = (B,2)**, **ostatné** stratégie sú **ostro dominované** dominantnými stratégiami.*

1.3 Iterovaná eliminácia dominovaných stratégií

Ekvilibrium iterovanej eliminácie ostro *(resp. slabo)* **dominovaných stratégií** *(ďaľej ako **EIEODS** a **EIESDS**)* získame postupnou elimináciou ostro (slabo) dominovaných stratégií, až kým nám neostane po jednej stratégii pre každého hráča, ktoré tvoria toto ekvilibrium. Pričom pod postupnou elimináciou rozumieme, že ďalšiu dominovanú stratégiu hľadáme v matici výplat už bez predtým nájdených dominovaných stratégií.

Hra je riešiteľná dominanciou ak existuje ekvilibrium iterovanej eliminácie ostro dominovaných stratégií.

<u>Príklad</u>

Aukcia s najvyššou cenou.

Uvažujte nasledujúci scenár zjednodušenej aukcie. Dvaja jednotlivci, Hráč 1 a Hráč 2, súťažia v aukcii o hodnotný predmet. Obaja hráči dávajú svoju ponuku v zalepenej obálke bez toho, aby poznali ponuku svojho protihráča. Ponuka musí byt násobkom 100 Sk a maximálna výška ponuky môže byt 500 Sk. Pre Hráča 1 má predmet hodnotu 400 Sk a pre Hráča 2 má hodnotu 300 Sk. Predmet získava hráč, ktorý dá vyššiu ponuku. V prípade rovnosti ponúk predmet získa Hráč 1. Víťaz platí za predmet cenu *p*, teda to čo ponúkol. Teda, ak pre hráča *i* má predmet hodnotu *x* a hráč *i* predmet vyhrá, tak jeho výplatou je *x-p*. Ak hráč *i* predmet nevyhrá, jeho výplatou je *0*. Matica výplat je nasledovná:

	0	*100*	*200*	*300*	*400*	*500*
0	400,0	0,200	0,100	0,0	0,-100	0,-200
100	300,0	300,0	0,100	0,0	0,-100	0,-200
200	200,0	200,0	200,0	0,0	0,-100	0,-200
300	100,0	100,0	100,0	100,0	0,-100	0,-200
400	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,-200
500	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0	-100,0

i) Ktoré stratégie ostanú v hre po iterovanej eliminácii ostro dominovaných stratégií? Má hra ekvilibrium iterovanej eliminácie ostro dominovaných stratégií?
ii) Ktoré stratégie ostanú v hre po iterovanej eliminácii slabo dominovaných stratégií? Má hra ekvilibrium iterovanej eliminácie slabo dominovaných stratégií?
iii) Je hra riešiteľná dominanciou?

<u>Riešenie</u>

i) *V hre môžeme eliminovať ostro dominované akcie v takomto poradí:*

Hráč 1: 500

Hráč 2: 500

Po tejto eliminácii v hre neostanú žiadne ostro dominované akcie. Teda všetky stratégie s ponukami hráčov vo výške 0, 100, 200, 300 a 400 po iterovanej eliminácii ostro dominovaných stratégií v hre ostanú a hra nemá EIEODS.

ii) *V hre môžeme eliminovať slabo dominované stratégie v poradí ako je znázornené tabuľke na druhej strane. Iterovaná eliminácia slabo dominovaných stratégií tak vedie k jedinému výstupu z hry k* ***EIESDS = (200, 200)****.*

ii) *Hra nie je riešiteľná dominanciou, pretože neexistuje EIEODS.*

<table>
<tr><td></td><td>0</td><td>100</td><td>200</td><td>300</td><td>400</td><td>500</td></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="3">Eliminácia 7</td><td colspan="2">Eliminácia 8</td><td rowspan="4">Eliminácia 5</td><td rowspan="4">Eliminácia 4</td><td rowspan="5">Eliminácia 2</td></tr>
<tr><td>100</td><td rowspan="2">Eliminácia 9</td><td>Eliminácia 10</td></tr>
<tr><td>200</td><td>EIESDS</td></tr>
<tr><td>300</td><td colspan="3">Eliminácia 6</td></tr>
<tr><td>400</td><td colspan="5">Eliminácia 3</td></tr>
<tr><td>500</td><td colspan="6">Eliminácia 1</td></tr>
</table>

1.4 Príklady

1. Uvažujte nasledujúcu hru “delenie koruny”. Medzi dvoch hráčov sa má rozdeliť jedna koruna. Hráč 1 robí ponuku (rozhoduje sa, akú časť koruny dá Hráčovi 2). Hráč 2 bez toho, aby videl ponuku Hráča 1, sa rozhoduje od akej výšky ponuku príjme alebo nie. Hráči majú k dispozícii voľbu násobkov 25 halierov, teda 0, 25, 50, 75 halierov a 1 koruna. Ak ponuka Hráča 1 je aspoň tak vysoká ako ochota Hráča 2 ponuku akceptovať, dôjde k dohode, v opačnom prípade nedôjde k dohode. Ak dôjde k dohode, Hráč 2 dostane ponúkanú časť koruny a Hráčovi 1 ostane zvyšok. Ak nedôjde k dohode, ani jeden hráč nedostane nič (obaja dostanú 0 halierov). Opíšte túto situáciu ako hru v strategickej forme a nájdite Nashove ekvilibriá.

2. Zadaná je hra daná bimaticou:

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	0,0	2.5,2.5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	0,0	0,5	4,4	0,8	0,8	0,8	0,8
3	0,0	0,5	0,8	4.5,4.5	0,9	0,9	0,9
4	0,0	0,5	0,8	0,9	4,4	0,8	0,8
5	0,0	0,5	0,8	0,9	0,8	2.5,2.5	0,5
6	0,0	0,5	0,8	0,9	0,8	0,5	0,0

i) Je v tejto hre ekvilibrium ostro dominantných stratégií?

ii) Je v tejto hre ekvilibrium slabo dominantných stratégií?

iii) Ktoré stratégie ostanú v hre po iterovanej eliminácii ostro dominovaných stratégií?

iv) Ktoré stratégie ostanú v hre po iterovanej eliminácii slabo dominovanýchstratégií?

v) Je hra riešiteľná dominanciou?

vi) Nájdite Nashove ekvilibriá.

3. Uvažujte situáciu reprezentovanú nasledujúcou bimaticou:

1\2	L	S	P
A	1,0	2,5	-2,1
B	2,1	2,1	-1,0

i) Napíšte strategickú formu tejto hry.

ii) Je v tejto hre ekvilibrium ostro dominantných stratégií?

iii) Je v tejto hre ekvilibrium slabo dominantných stratégií?

iv) Nájdite Nashove ekvilibriá.

4. Uvažujte príklad aukcie, presne „aukcie s druhou najvyššou cenou“. V tomto prípade víťaz zaplatí cenu rovnajúcu sa ponuke protihráča. Ináč je zadanie rovnaké ako v riešenom príklade.

i) Napíšte strategickú formu hry.

ii) Má hra ekvilibrium ostro dominantných stratégií?

iii) Má hra ekvilibrium slabo dominantných stratégií?

iv) Ktoré stratégie ostanú v hre po iterovanej eliminácii ostro dominovaných stratégií?

v) Ktoré stratégie ostanú v hre po iterovanej eliminácii slabo dominovaných stratégií?

vi) Je hra riešitelná dominanciou?

vii) Nájdite Nashove ekvilibriá.

5. Sú dané bimatice hier:

a)

(2, -3)	(-1, 3)
(0, 1)	(1, -2)

b)

(2, 1)	(0, 0)
(0, 0)	(1, 5)

c)

(2, -1)	(-1, 1)
(0, 2)	(1, -1)

d)

(-1, 3)	(1, 3)
(2, -1)	(0, 1)
(2, 1)	(-2, 1)

i) Určte, ktoré riadky a stĺpce zodpovedajú ostrej a slabej dominantnej (resp. dominovanej) stratégií.

ii) Nájdite Nashove ekvilibriá.

6. Sú dané bimatice hier: **a)**

(1, 1)	(0, 1)	(2, 0)
(1, 2)	(-1, -1)	(1, 1)
(2 , -1)	(1, 0)	(-1, -2)

b)

(-2, 3)	(-1, 1)	(1, -2)
(0, 1)	(-1, -2)	(1, 1)
(2, 2)	(2, -1)	(0, -3)

c)

(-3, -2)	(-1, -2)	(8, 9)
(-1, -1)	(4, 4)	(-4, -3)
(8, 9)	(-1, -2)	(-3, -3)

i) Eliminujte ostro dominované riadky a stĺpce, tak aby sa bimatice zredukovali na najmenšiu možnú veľkosť.

ii) Nájdite Nashove ekvilibriá.

7. Sú dané bimatice hier: **a)**

(3, 3)	(1, 0)
(2, 1)	(0, -1)
(1, 1)	(-2, 0)

b)

(4, 3)	(3, 4)	(1, -1)	(2, 0)
(6, 1)	(5, 2)	(2, -1)	(3, -1)
(3, 0)	(2, 2)	(0, 1)	(1, -2)

c)

(8, 4)	(7, 5)	(5, 5/2)	(1, 5)	(2, 3)
(9, -1)	(7, 4)	(5, -2)	(2, 3)	(4, 0)
(3, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(0, 4)	(-4, 2)

d)

(0, 1)	(1, 2)	(2, 3)
(-1, 3)	(3, 0)	(2, 2)
(4, 2)	(5, 1)	(4, 6)

e)

(2, 1)	(0, 0)
(0, 0)	(1, 2)

i) Majú hry ekvilibrium ostro dominantných stratégii alebo ekvilibrium slabo dominantných stratégií?

ii) Nájdite Nashove ekvilibriá.

8. V roku 1943 japonský admirál Imamura dostal rozkaz transportovať japonské oddiely cez Bismarkove more do Novej Guinei. Americký admirál Kenney dostal rozkaz napadnúť Imamurove loďstvo a zbombardovať transportujúce sa vojsko. Imamura si musí vybrať medzi „Krátkou“ dvojdňovou trasou, „Dlhou“ trojdňovou trasou alebo pošle polovicu lodí jednou a polovicu druhou „50/50“. Kenney musí rozhodnúť, či pošle všetky lietadla hľadať na „Krátku“ trasu, „Dlhú“ trasu alebo ich rozdelí na polovicu pre každú trasu „50/50“. Imamura nemôže zrušiť trasu lodí. No na druhej strane Kenneyove lietadla sa na konci dňa vrátia a další deň môžu letieť inde. Použite maticu výplat v nasledovnej tabuľke, ktorá predpokladá, že Kenney sa snaží maximalizovať počet dní bombardovania a Imamura sa snaží minimalizovať počet dní bombardovania.

Imamura

		Krátka	Dlhá	50/50
	Kráta	(2, -2)	(2, -2)	(2.5, -2.5)
Kenney	Dlhá	(1, -1)	(3, -3)	(2.5, -2.5)
	50/50	(2, -2)	(2, -2)	(2.5, -2.5)

i) Pre každého hráča určite ktoré stratégie sú ostro dominantné, ostro dominované, slabo dominantné, slabo dominované.

ii) Nájdite Nashove ekvilibriá.

9. Na Slovensku sú tri televízne stanice, ktoré sa rozhodujú, či majú hlavné večerné správy vysielať o 19.00 alebo o 19.30, voľba sa deje simultánne, pričom každá stanica sa snaží maximalizovať svoj podiel na trhu. Nasledujúce tabuľky ukazujú výsledky pre všetky možné kombinácie volieb. V každej bunke sú uvedené percentuálne podiely staníc v poradí Joj, STV, Markíza.

i)

Keď Markíza sa rozhodne vysielať hlavné správy o 19.00 hod.:

		STV	
		19.00	*19.30*
Joj	*19.00*	42,24,34	37,23,40
	19.30	34,40,26	60,22,18

Keď Markíza sa rozhodne vysielať hlavné správy o 19.30 hod.:

		STV	
		19.00	*19.30*
Joj	*19.00*	40,26,34	34,40,26
	19.30	24,16,60	42,24,34

ii)

Keď Markíza sa rozhodne vysielať hlavné správy o 19.00 hod.:

		STV	
		19.00	*19.30*
Joj	*19.00*	26,34,40	40,26,34
	19.30	16,60,24	24,34,42

Keď Markíza sa rozhodne vysielať hlavné správy o 19.30 hod.:

		STV	
		19.00	*19.30*
Joj	*19.00*	24,34,42	23,40,37
	19.30	40,26,34	18,22,60

Pokiaľ je možné, eliminujte dominované stratégie. Potom nájdite všetky Nashove equilibríá tejto hry v čistých stratégiách.

10. Ukážte taký príklad, že hra, ktorá má ekvilibrium slabo dominantných stratégií, môže mať aj iné Nashove ekvilibrium. Napíšte jej maticu výplat.

11. Ukážte takú hru (maticu výplat 3x3), ktorá má jediné Nashove ekvilibrium v čistých stratégiach, ktoré nie je ekvilibrium iterovanej eliminácie slabo dominovaných stratégií ani ekvilibrium iterovanej eliminácie ostro dominovaných stratégií.

12. Rado a Janko hrajú hru, ktorej výplatná matica je v nasledujúcej tabuľke. Nájdite slabo aj ostro dominované stratégie oboch hráčov. Ukážte na tomto príklade, že poradie v akom sú vymazávané slabo dominované stratégie vedie k inému výsledku.

		JANKO	
		Vľavo	Vpravo
RADO	Hore	(3, 2)	(2, 2)
	Stred	(1, 1)	(0, 0)
	Dole	(0, 0)	(1, 1)

13. Nájdite Nashove ekvilibriá **a)**

4,3	2,7	0,4
5,5	5,-1	-4,-2

b)

1,2	2,1	1,0
0,5	1,2	7,4
-1,1	3,0	5,2

c)

0,1	9,0	2,3
5,9	7,3	1,7
7,5	10,10	3,5

d)

3,1	2,3	10,2
4,5	3,0	6?4
2,2	5,4	12,3
5,6	4,5	9,3

14. Uvažujte hru, v ktorej má výhra hodnotu 30 dolárov. Zúčasťňujú sa jej traja hráči, A, B a C. Každý z nich si môže kúpiť lístok v hodnote 15 alebo 30 dolárov alebo si lístok vôbec nekúpiť. Všetci hráči sa rozhodujú simultánne a nezávisle. Potom, poznajúc rozhodnutia o kúpe lístkov, organizátor hry vyhlási výsledky. Ak žiadny z hráčov si nekúpil lístok, výhra nie je udelená. Inak výhru obdrží hráč, ktorý si zakúpil lístok v najvyššej hodnote, ak je len jeden takýto hráč, alebo sa výhra rovnomerne rozdelí medzi dvoch či troch hráčov, ktorí súčasne zakúpili lístky v najvyššej hodnote. Vyjadrite hru ako maticu výplat (budú 3). Nájdite všetky Nashove ekvilibriá.

15. Nájdite ekvilibrium iterovanej eliminácie slabo (resp. ostro) dominovaných stratégií. **a)**

	C1	C2	C3
R1	2,12	1,10	1,12
R2	0,12	0,10	0,11
R3	0,12	0,10	0,13

b)

	X	Y	Z
A	4,3	2,7	0,4
B	5,5	5,-1	-4,-2

c)

	H	D
A	2,2	2,2
B	3,1	0,0
C	0,0	1,3

16. Uvedte príklad hry 2x2 s nasledujúcimi vlastnosťami:

i) Nemá žiadne Nashove ekvilibrium.

ii) Má presne dve Nashove ekvilibriá.

iii) Má presne tri Nashove ekvilibriá.

iv) Má presne štyri Nashove ekvilibriá.

17. Zadanie je podobné ako v 9. príklade, no obidvaja admiráli majú len 2 možnosti. Tabuľka popisujúca výplaty vyzerá nasledovne. Nájdite ekvilibrium iterovanej eliminácie slabo (resp. ostro) dominovaných stratégií.

		Imamura	
		Krátka	Dlhá
Kenney	Krátka	2,-2	2,-2
	Dlhá	1,-1	3,-3

1.5 Kombinované stratégie

Kombinovaná stratégia je rozdelenie pravdepodobnosti nad množinou čistých stratégií.

(S_i - množina čistých strategií i-teho hráča, jej veľkosť $|S_i| = m$)

(Kompletne kombinovaná stratégia obsahuje všetky čisté stratégie hráča)

$\sum_i$ množina všetkých kombinovaných stratégií

$$\textstyle\sum_i = \{\sum_{j=1}^{m} \beta(s_j)s_j \mid \text{všetky } \beta(s_j) \geq 0,\ s_j \in S_i, \sum_{j=1}^{m} \beta(s_j) = 1\},\ \sigma_i \in \sum_i$$

Veta: Každá konečná hra má Nashove ekvilibrium.

Veta: Kombinovaný strategický profil σ_i tvorí NE <=>

1.) $u_i(s_{i,}\sigma_{-i}) = u_i(s``_{i,}\sigma_{-i})$ pre všetky $s``_i, s_i \in S^*_i$

2.) $u_i(s_{i,}\sigma_{-i}) \geq u_i(s``_{i,}\sigma_{-i})$ pre všetky $s_i \in S^*_i$ , $s``_i \notin S^*_i$

(S^*_i množina čistých stratégií s nenulovou pavdepodobnosťou v σ_i)

Očakávaná výplata i-teho hráča sa vypočíta nasledovne:

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) = \sum_{si \in Si} \beta(s_i) u_i(s_i, s_{-i})$$

V prípade, že všetci hráči používajú kombinovanú strategiu potom:

$$u_i(\sigma_{i,}\sigma_{-i}) = \sum_{s1 \in S1} \dots \sum_{sn \in Sn} \beta(s_1) \dots \beta(s_n) u_i(s)$$

Príklad

V nasledujúcich bimaticiach nájdite Nashove ekvilibriá medzi kombinovanými aj čistými stratégiami. Aké budú očakávané výplaty hráčov pri jednotlivých kombináciach stratégií, ak by len Hráč1 použil kombinovanú stratégiu, vypočítanú pri hľadaní Nashovho ekvilibriá, ale aj výplaty hráčov pri použití obidvoch kombinovaných stratégií?

a)

		Hráč 2	
		L	P
Hráč 1	H	3,2	-1,3
	D	-1,1	0,0

b)

		EVA	
		W	Z
ADAM	A	4,1	2,3
	B	1,5	4,2

Riešenie

a) *Hra **nemá Nashove ekvilibrium** v čistých stratégiach, ešte ho budeme hľadať v kombinovaných stratégiach.*

			Hráč 2	
			y	**1-y**
			L	*P*
Hráč 1	**x**	*H*	**3,**2	-1,**3**
	1-x	*D*	-1,**1**	**0**,0

Ide nám o maximalizáciu výplat obidvoch hráčov, ktoré majú tvar:

$$\pi_1 = x(3y+(-1)(1-y))+(1-x)((-1)y+0(1-y))$$
$$\pi_2 = y(2x+1(1-x))+(1-y)(3x+0(1-x))$$

Ich maximá nájdeme deriváciou: $0=\dfrac{d\pi_1}{dx}=5y-1 \qquad 0=\dfrac{d\pi_2}{dy}=1-2x$

Z ktorých dostaneme x = 1/2 , y = 1/5 a teda kombinované stratégia majú tvar 1/2 H+ 1/2 D a 1/5 L+4/5 P a vytvárajú Nashove ekvilibrium. ***NE = (1/2 H + 1/2 D , 1/5 L + 4/5 P)***

Očakávané výplaty hráčov pri jednotlivých kombináciach stratégií*, ak Hráč 2 použije kombinovanú stratégiu 1/5 L + 4/5 P vypočítame nasledovne:*

π_1(H, 1/5 L+ 4/5 P) = 1/5 π_1(H,L) + 4/5 π_1(H,P) = (1/5)3 + 4/5(-1) = -1/5
π_1(D, 1/5 L+ 4/5 P) = 1/5 π_1(D,L) + 4/5 π_1(D,P) = 1/5(-1) + (4/5)0 = -1/5

π_2(H, 1/5 L+ 4/5 P) = (1/5)2 + (4/5)3 = 14/5
π_2(D, 1/5 L+ 4/5 P) = (1/5)1 + (4/5)0 = 1/5

Očakávané výplaty hráčov, ak obidvaja hráči použijú kombinované stratégie 1/2 H + + 1/2 D a 1/5 L+4/5 P vypočítame nasledovne:

p_1 = xπ_1 (H, 1/5 L+ 4/5 P) + (1-x)π_1(D, 1/5 L+ 4/5 P) = 1/2(-1/5) + 1/2(-1/5) = **-1/5**

Podobne postupujeme aj pri výpočte p_2, ktorý nás privedie k výsledku ***p_2 = 3/2***

b) *Druhá hra tiež* ***nemá Nashove ekvilibrium*** *v čistých stratégiach****,*** *preto ho budeme hľadať v kombinovaných stratégiach podľa poslednej vety.*

			EVA	
		σ_2	**y**	**1-y**
	σ_1		W	Z
ADAM	**x**	A	**4**,1	2,**3**
	1-x	B	1,**5**	**4**,2

$\pi_{ADAM}(A, \sigma_2) = \pi_{ADAM}(B, \sigma_2)$
$4y + 2(1-y) = 1y + 4(1-y)$
$y = 2/5$

$\pi_{EVA}(W, \sigma_1) = \pi_{EVA}(Z, \sigma_1)$
$1x + 5(1-x) = 3x + 2(1-x)$
$x = 3/5$

Teda ***NE = (3/5A + 2/5B , 2/5W + 3/5Z)***

Očakávané výplaty jednotlivých hráčov môžme vypočítať aj cez „pravdepodobnostné okienko“.

	2/5W	3/5Z
3/5A	3/5 x 2/5 = **6/25**	**9/25**
2/5B	**4/25**	**6/25**

Očakávanú výplatu Adama pri použití daných kombinovaných stratégií vypočítame tak, že sčítame súčiny jeho výplat s prislušnými pravdepodobnosťami. Pri Eve postupujeme podobne.

$$p_{\mathbf{ADAM}} = 6/25x4 + 9/25x2 + 4/25x1 + 6/25x4 = \mathbf{14/5}$$
$$p_{\mathbf{EVA}} = 6/25x1 + 9/25x3 + 4/25x5 + 6/25x2 = \mathbf{13/5}$$

1.6 Príklady

1. Pre aké α a β má nasledujúca hra Nashove ekvilibrium v kombinovaných stratégiach?

a,w	**b,x**	β
c,y	**d,z**	$1-\beta$
α	$1-\alpha$	

2. Pre aké x a y má nasledujúca hra Nashove ekvilibrium v kombinovaných stratégiach a aké sú očakávané výplaty?

4-C,-F	**4-C,-1**	x
0,0	**4,-1**	1-x
y	1-y	

3. Ukážte, že nasledujúca matica výplat dáva rovnaké očakávané výplaty pri použití dvojíc kombinovaných stratégií x = (1/3,2/3), y = (2/3,1/3) a x‘ = (2/3,1/3), y‘ = (1/3,2/3). Hráčovi 1 priradíme x a Hráčovi 2 priradíme y.

2,1	0,0
0,0	1,2

4. Daná je nasledujúca bimatica:

0,1	1,2	2,3
-1,3	3,0	2,2
4,2	5,1	0,3

i) Vypočítajte hodnotu očakávaných výplat hráčov pri použití nasledovnych kombinovaných stratégiach: (1/5,2/5,2/5) pre prvého hráča a (1/3,1/3,1/3) pre druhého hráča. Ďaľej pri dvojiciach (2/5,1/3,4/15), (1/2,1/3,1/6) a (1/2,1/4,1/4), (1/3,16,1/2).

ii) Ak Hráč 2 použije kombinovanú stratégiu (1/6,1/3,1/2) aké budú očakávané výplaty hráčov pri jednotlivých kombináciach stratégií?

iii) Ak Hráč 1 použije kombinovanú stratégiu (3/8,1/4,3/8) aké budú očakávané výplaty hráčov pri jednotlivých kombináciach stratégií?

iv) Aké budú očakávané výplaty hráčov pri použití kombinovaných stratégií z ii) a iii)?

v) Overte, či dvojica kombinovaných stratégií (1/2,0,1/2), (1/3,2/3,0) dá takéto očakávané výplaty $\pi_1 = 3/8$, $\pi_2 = 2/3$?

5. Hra je zadaná nasledujúcou tabuľkou.

1\2	a	b
A	1,16	4,6
B	2,20	3,40

Nájdite Nashove ekvilibrium tejto hry medzi kombinovanými stratégiami a prislušné očakávané výplaty.

6. V nasledujúcich príkladoch nájdite Nashove ekvilibriá v čistých aj kombinovaných stratégiach a pri kombinovaných stratégiach vypočítajte aj očakávané výplaty hráčov.

a)

	A	B
A	1,-1	-1,1
B	-1,1	1,-1

b)

	a	b
A	0,0	6,1
B	1,6	3,3

c)

	L	P
H	2,3	3,4
D	4,4	0,1

7. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky Nashove ekvilibriá.

a)

	L	P
H	0,3	3,0
D	1,3	1,4

b)

	m	n
M	6,6	2,2
N	0,0	4,4

c)

	E	F
C	5,-10	-5,0
D	0,15	5,5

d)

	L	P
L	5,5	20,0
P	20,0	5,5

e)

	u	v
U	9,5	1,3
V	3,1	6,8

8. Dvaja ľudia sú schopní urobiť dielo, len ak obaja pracujú. Náklady na ich námahu sú $0 < c < 1$, a ak je dielo dokončené, výplata oboch sa rovná 1. Čiže túto hru môžeme reprezentovať pomocou bimatice v tvare:

	U	P
U	0,0	0,-c
P	-c,0	1-c,1-c

kde P predstavuje akciu pracovať a U predstavuje akciu ulievať sa. Nájdite všetky ekvilibriá tejto hry.

9. Nájdite Nashove ekvilibrium v kombinovaných stratégiach.

a)

	a	b	c
A	3,7	4,6	2,2
B	2,8	5,9	1,1
C	1,2	3,4	0,0

b)

	e	f	m
H	1,0	0,-1	5,9
S	2,1	0,0	3,0
D	3,7	2,3	4,0

10. Iterovanou elimináciou ostro domonovaných strtégií nájdite Nashove ekvilibrium. Na elimináciu treba použiť kombinovanú stratégiu.

	T1	T2	T3
S1	1,0	6,4	0,9
S2	2,1	0,2	3,0
S3	3,7	2,3	4,0

2
Rozvinutá forma hry

Rozvinutá forma hry popisuje rozhodovaciu situáciu vo forme grafu. Rozhodovanie hráčov prebieha postupne v jednotlivých rozhodovacích bodoch vo forme akcií. Až keď hra skončí, môžeme povdať, že hráč použil stratégiu, ktorá je zložená z postupností použitých akcií. Používa sa na zápis a riešenie dynamickej hry. Graf takejto hry sa nazýva strom hry.

2.1 Strom hry

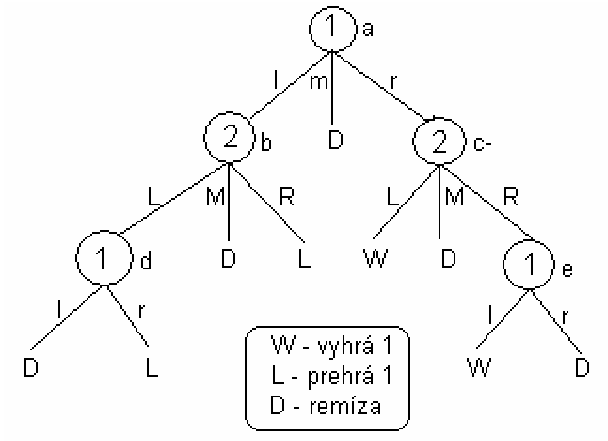
Strom hry je graf, ktorý musí mať jediný začiatok, neobsahovať cykly a každému uzlu musí priamo predchádzať len jeden uzol. Pozostáva z vetiev a uzlov. O každom uzle musí byť známe, ktorému hráčovi a do ktorej informačnej množiny patrí. Uzly rozdelujeme na rozhodovacie, koncové, predchodcov, nasledovníkov a jeden začiatočný. Každý **rozhodovací uzol** predstavuje rozhodovacií bod jedneho z hráčov. Každý **koncový uzol** obsahuje výplaty hráčov. **Predchodca uzla X** je uzol, ktorý dosiahneme v strome pred tým ako dosiahneme X. **Nasledovník uzla Y** je uzol, ktorý môžme dosiahnúť po tom ako sme dosiahli Y. Každá **vetva** predstavuje jednu akciu z hráčovej množiny akcií v danom uzle. **Cestou z uzla S do C** označujeme postupnosť uzlov a vetiev od S do C. *(Teda kto bol na rade a ako sa rozhodol. Pod pojmom „cesta“ sa myslí cesta od začiatočného uzla po koncový.)*

Informačná množina je množina uzlov v strome, tieto uzly musia patriť len jednému hráčovi a množina akcií v daných uzloch musí byť rovnaká. Ak za jedným uzlom nasleduje druhý tak tieto uzly nemôžu patriť do rovnakej informačnej množiny. *(Ak obsahuje viac uzlov, hráč vie, že sa v nej nachádza, no nevie v ktorom uzle.)*

Hra má **dokonalú infomáciu**, ak každá informačná množina obsahuje jediný uzol, ináč má nedokonalú informáciu. *(Pri takejto hre každý hráč vie, v ktorom uzle sa na strome nachádza, keď je na ťahu.)*

Príklad

Máte hru v rozvinutej forme, reprezentovanú nasledovným stromom hry:



i) Koľko informačných množín majú hráči? Koľko akcií a uzlov obsahujú?

ii) Koľko čistých stratégií majú hráči?

iii) Je to hra s dokonalou informáciou?

iv) Prepíšte strom do maticovej formy.

v) Aká cesta vznikne použitím čistej strategickej dvojice (rll,,LM) a aký dá výsledok?

vi) Nájdite všetky čisté stratégické páry, ktoré vedú k ceste {rRl}.

Riešenie

i) *Hráč 1 má* ***3 informačné množiny****, obsahujúce po jednom uzle. Informačná množina s uzlom* a *obsahuje 3 akcie, zvyšné obsahujú po 2 akcie každá. Hráč 2 má* ***2 informačné množiny****, obsahujúce po 1 uzle a 3 akciách.*

ii) *Hráč 1 má 3x2x2 =* ***12 čistých stratégií*** *a Hráč 2 má 3x3 =* ***9 čistých stratégií****.*

iii) *Táto hra je* ***hra s dokonalou informáciou****, lebo každá informačná množina obsahuje 1 uzol.*

iv) *Maticová verzia hry je na ďalšej strane.*

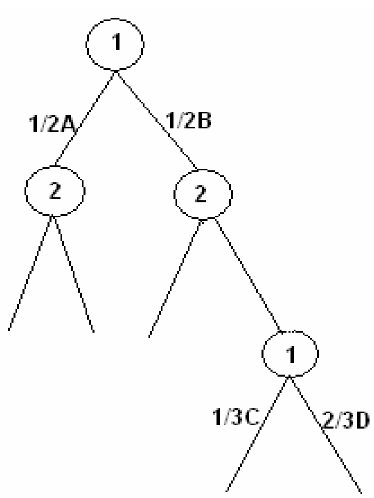
	LL	LM	LR	ML	MM	MR	RL	RM	RR
l l l	D	D	D	D	D	D	L	L	L
l l r	D	D	D	D	D	D	L	L	L
l r l	L	L	L	D	D	D	L	L	L
l r r	L	L	L	D	D	D	L	L	L
m l l	D	D	D	D	D	D	D	D	D
m l r	D	D	D	D	D	D	D	D	D
m r l	D	D	D	D	D	D	D	D	D
m r r	D	D	D	D	D	D	D	D	D
r l l	W	D	W	W	D	W	W	D	W
r l r	W	D	D	W	D	D	W	D	D
r r l	W	D	W	W	D	W	W	D	W
r r r	W	D	D	W	D	D	W	D	D

Jednotlivé bunky v matici napĺňame tak, že sa postupne pohybujeme po strome a pamätáme si, aké akcie sme si vybrali v jednotlivých uzloch, až kým nedôjdeme do niektorého z koncových uzlov. Potom výplatu, ktorá mu prislúcha vpíšeme do tabuľky všade tam, kde čisté stratégie obsahujú použité akcie.

v) *Použitím čistej strategickej dvojice (rll,,LM) vznikne cesta {***rM***}. A to tak, že v uzle* a *sme si zvolili akciu* r *teda sme sa dostali do uzla* c *v ktorom sme si zvolili* M *a tym pre nás hra skončila v koncovom uzle s* ***remízou****. (Do zvyšných uzlov, kde by sme použili u Hráča 1 v uzle* d *akciu* l,*v uzle* e *akciu* l *a u Hráča 2 v uzle* b *akciu* L*, sme nedošli)*

vi) *V ceste {rRl} akcia r patrí uzlu a, akcia R uzlu c a akcia l uzlu e. Teda kombinácie čistých stratégií Hráča 1, obsahujúce na prvom mieste akciu r a na tretiom akciu l, a čistých stratégií Hráča 2, obsahujúcich na druhom mieste akciu R, sú tie, ktoré hľadáme. Konkrétne sú to* ***(rll,MR)****,* ***(rll,LR)****,* ***(rll,RR)****,* ***(rrl,MR)****,* ***(rrl,LR)****,* ***(rrl,RR)****.*

2.2 Kombinovaná a pochodová stratégia



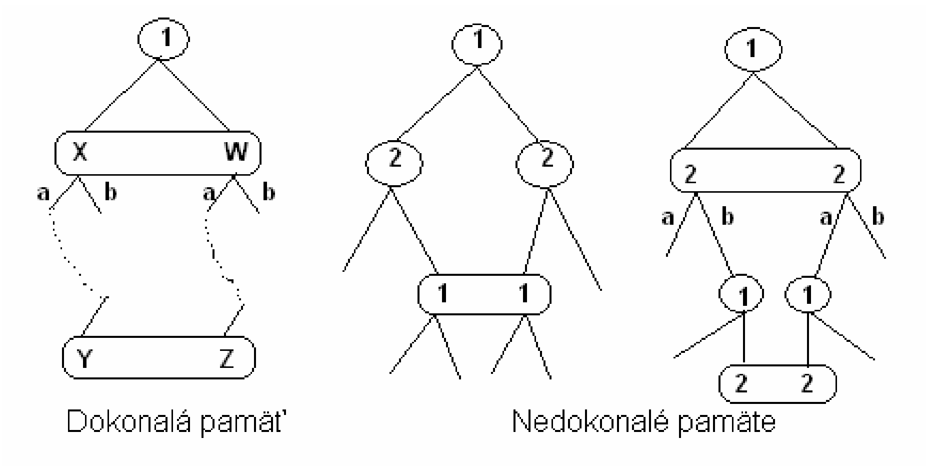
1. **Kombinovaná stratégia (mixed strategy) -** vopred (ex-ante) sa priradí pravdepodobnosť použitia čistým stratégiam

   1/2AC+1/2BC

2. **Pochodová stratégia (behaviour strategy) -** „za pochodu“ (ad hoc) sa priradí pravdepodobnosť použitia akciám v jednotlivých uzloch

   1/2A+1/2B, 1/3C+2/3D

Hra v rozvinutej forme má **dokonalú pamäť** ak platí: ak je uzol jeY nasledovník uzla X, typu Y = $(X,a,a_1,...,a_k)$ a uzol Z, ktorý je v rovnakej informačnej množine ako Y, tak Z je nasledovníkom uzla W, typu Z= $(W,a,á_1,...,á_n)$, tak W je v rovnakej informačnej množine ako X.



<u>Poznámka 1</u>: V hrách s dokonalou pamäťou má každá kombinovaná stratégia svoju zodpovedajúcu pochodovú stratégiu a naopak. (zodpovedajúca = priradí rovnakú pravdepodobnosť koncovým uzlom)

<u>Prevodové vzťahy</u>

m(s_i) pravdepodobnosť stratégie s_i v kombinovanej stratégií

b(a,X) pravdepodobnosť akcie *a* v uzle *X* v pochodovej stratégií

$$m(s_i) = \prod_{(a.X)} b(a,X)\ ,\ \ s_i(X) = a$$

$$b(a,X) = \sum_{\substack{s_i(X) = a \\ s_i \text{ dosiahne } X}} m(s_i) \Big/ \sum_{s_i \text{ dosiahne } X} m(s_i)$$

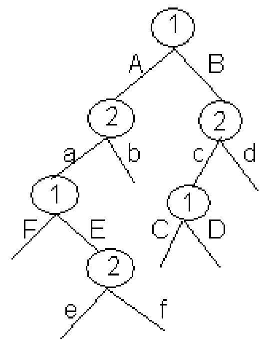
kde $s_i(X) = a$ znamená, že stratégia s_i vo vrchole X použije akciu a

<u>Príklad</u>

K daným kombinovaným stratégiam nájdite ekvivalentné pochodové stratégie a k nim potom nové ekvivalentné kombinované stratégie. Ukážte, že pochodové stratégie, ktoré sme získali sú zodpovedajúce s pôvodnými aj vami vypočítanými.

m_1 = 1/12 ACF + 1/12 ADF + 1/12 ADE + 1/6 BCE + 1/12 BDE + 1/2 BDF

m_2 = 1/5 ace + 1/5 acf +1/5 ade + 1/5 bce + 1/5 bdf



Riešenie

K kombinovanej stratégii prvého hráča m_1 nájdeme pochodovú tak, že vypočítame pochodové pravdepodobnosti k jednotlivým akciám podľa prevodových vzťahov. Pre konkretnú akciu postupujeme nasledovne. Sčítame všetky pravdepodobnosti pri čistých stratégiach v kombonovanej stratégii, v ktorých sa nachádza daná akcia. Musíme si dať pozor na to, aby sa tieto čisté stratégie dostali až k danej stratégii. Tak napríklad čistá stratégia ACF nás neprivedie k akcii C, no privedie nás tam BCE, teda do súčtu by išla len BCE. (Treba sa pozerať na strom a hňeď je to jasné.) Vypočítaný súčet pravdepodobností delíme pravdepodobnosťou cesty, že sa k danej akcii dostaneme. Ak sa hráč rozhoduje prvý krát tak je to jednotka, ináč je to súčet pravdepodobnosti pri čistých stratégiach, ktoré nás privedú k danej akcii, no nemusia ju použiť. Už pri spomínanej akcii C sú to pravdepodobnosti pri BCE, BDE, BDF ale nie ACF. Ak postupujeme pri výpočte postupne od začiatku stromu ku koncovým uzlom, pravdepodobnosť cesty k danej akcii je vlastne súčin pochodových pravdepodobností akcií, ktoré nás k nej privedú. Pre zjednodušenie budeme používať označenie b(akcia) namiesto b(akcia,uzol), keďže v každom uzle prvého či druhého hráča sú akcie označené rôzne. Na urýchlenie a zjednodušenie výpočtu, ak má hráč v danom uzle 2 akcie, na výpočet pochodevej pravdepodobnosti druhej akcie nám stačí odčítať od jednotky pochodovú pravdepodobnoť prvej akcie, keďže ich súčet sa musí rovnať jednej.

b(A) = (m(ACF)+m(ADF)+m(ADE)) / 1 =1/4

b(A) = (1/12 + 1/12 + 1/12) / 1 = 1/4 *b(a) = 3/5*

b(B) = 1 – 1/4 = (1/6 + 1/12 + 1/2) / 1 = 3/4 *b(b) = 2/5* b(C) = (1/6) / (1/6 + 1/12 + 1/2) = (1/6) / (3/4) = 2/9 b(c) = 3/5

b(D) = (1/12 + 1/12) / 3/4 = 1- 2/9 = 7/9 b(d) = 2/5

b(E) = (1/12 + 1/12) / (1/4) = 2/3 b(e) = 2/3

b(F) = (1/12) / (1/4) = 1- 2/3 = 1/3 b(f) = 1/3

Teda pochodové stratégie pre prvého hráča sú nasledovné (1/4 A+3/4 B, 2/9 C+7/9D, 2/3 E+1/3 F) a druhého hráča (3/5 a+2/5 b, 3/5 c+2/5 d, 2/3 e+1/3 f). K nim nájdeme ekvivalentné nové kombinované stratégie. Výpočet pravdepodobnosti pre jednotlivé čisté stratégie je súčin pravdepodobnosti akcií obsiahnutých v danej čistej stratégii.

m'(ACF) = b(A)b(C)b(F) = (1/4)(2/9)(2/3) = 1/27 m'(ace) = 6/25

m'(ACE) = (1/4)(2/9)(1/3) = 1/54 m'(acf) = 3/25

m'(ADF) = (1/4)(7/9)(2/3) = 7/54 m'(ade) = 4/25

m'(ADE) = (1/4)(7/9)(1/3) = 7/108 m'(adf) = 2/25

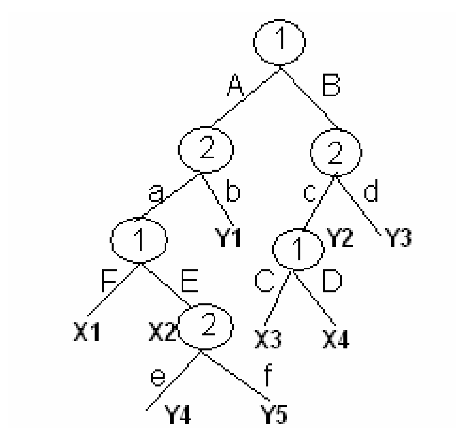
m'(BCF) = (3/4)(2/9)(2/3) = 1/9 m'(bce) = 4/25

m'(BCE) = (3/4)(2/9)(1/3) = 1/18 m'(bcf) = 2/25

m'(BDF) = (3/4)(7/9)(2/3) = 7/18 m'(bde) = 8/75

m'(BDE) = (3/4)(7/9)(1/3) = 7/36 m'(bce) = 4/75

Nová kombinovaná stratégia pre prvého hráča je m'_1 *= 1/27 ACF + 1/54 ACE + +7/54 ADF + 7/108 ADE + 1/9 BCF + 1/18 BCE + 7/18 BDF + 7/3 BDE, pre druhého* m'_2 *= 6/25 ace + 3/25 acf + 4/25 ade + 2/25 adf + 4/25 bce + 2/25 bcf + 8/75 bde+ +4/75 bdf. Ešte nám ostáva overiť, či sú dané stratégie zodpovedajúce. Uzly, v ktorých skončil prvý (resp. druhý) hráč označíme X (resp. Y).*



Pravdepodobnosť uzla X1 vypočítana s pôvodnej kombinovanej stratégie sa počíta nasledovne: P(X1) = m(ACF) + m(ADF) = 1/12 + 1/12 = 1/6, lebo do vrchola X1 sa dostaneme použitím čistých stratégií ACF a ADF. Výpočet z pochodovej stratégii je nasledovný: P(X1) = b(A)b(F) = (1/4)(2/3) = 1/6, lebo do X1 sa dostaneme použitím akcií A a F. Z novej kombinovanej stratégie podobne ako z pôvodnej. P(X1) = =m'(ACF) + m'(ADF) = 1/54 + 7/54 = 1/6. Pravdepodobnosti ostatných uzlov sú P(X2)= 1/12, P(X3) = 1/6, P(X4) = 7/12, P(Y1) = 2/5, P(Y2) = 3/5, P(Y3) = 2/5, P(Y4)= 2/5 a P(Y5) = 1/5 pri všetkých stratégiach, teda stratégie sú zodpovedajúce.

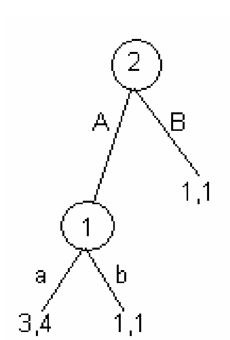
2.3 Príklady

1. Zadaná je hra, ktorá hovorí o tom ako 3 (1, 2, 3) členovia klubu volia nového člena zo zoznamu 4 kandidátov (A,B,C,D). Každý člen klubu má právo veta na jedného kandidáta. Toto právo sa uplatňuje postupne, začína člen 1 a končí člen 3. Nakreslite strom hry. Označte uzly číslami členov, v ktorých sa rozhodujú. Označte vetvy písmenami kandidátov, ktorí dostali veto. Koncové body označte písmenom kandidáta, ktorý bol zvolený za nového člena.

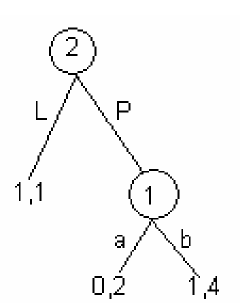
2. Hra 2 hráčov, kde prvý má 2 čisté stratégie s_1, s_2 a druhý 3 čisté stratégie t_1, t_2, t_3, je daná nasledovými výplatnými funkciami $\pi_1(s_i,t_j) = ij$, $\pi_2(s_i,t_j) = (i-2)(j-2)$. Napíšte hru v maticovej forme a aj v stromovej s nedokonalou informáciou.

3. K daným stromom spravte maticové formy hier.

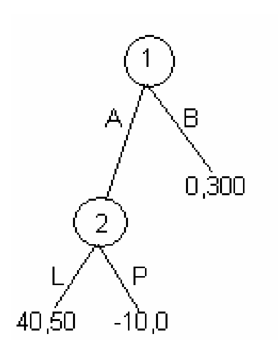
a)



b)



c)



4. K daným kombinovaným stratégiam nájdite ekvivalentné pochodové stratégie a k nim potom nové ekvivalentné kombinované stratégie. Ukážte, že pochodové stratégie, ktoré sme získali sú zodpovedajúce s pôvodnými aj vami vypočítanými (Vypočítajte pravdepodobnosť v koncových bodoch pri všetkych troch stratégiach.). Stratégie sa vzťahujú k stromu z riešeného príkladu.

i) 1/6 ACF + 1/6 ADE + 1/6 BCE + 1/12 + BDE + 5/6BDF

ii) 1/7 ACE + 2/7 ACF + 3/7 BDE + 1/7 BCF

iii) 1/9 ACF + 2/9 ACE + 1/3 ADF + 1/9 BDE + 2/9 BDF

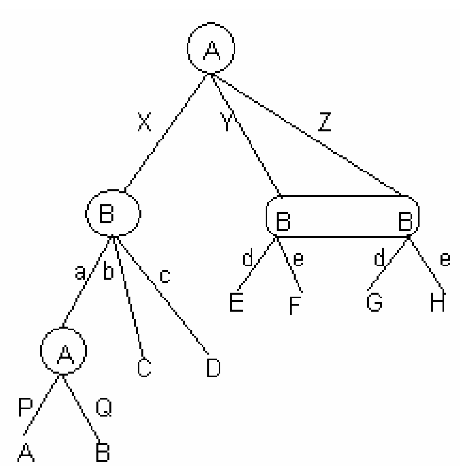
iv) 1/6 ace + 1/6 acf + 1/6 adf + 1/6 ade + 1/6 bde +1/6 bdf

v) 1/7 ace + 1/7 ade + 1/7 acf + 1/7 bce + 1/7 bde + 1/7 bcf + 1/7 bdf

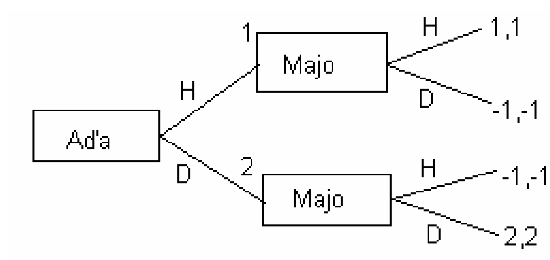
vi) 1/11 ade + 3/11 adf + 5/11 bce + 1/11 bde + 1/11 bdf

5. Z nasledujúcich stromov spravte maticové verzie.

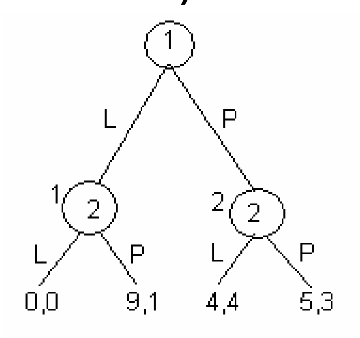
a)



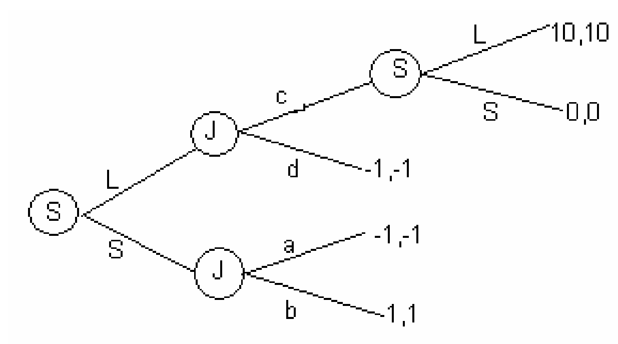
b)



c)



d)



6. Pre dane maticové hry nakreslite stromy hier.

a)

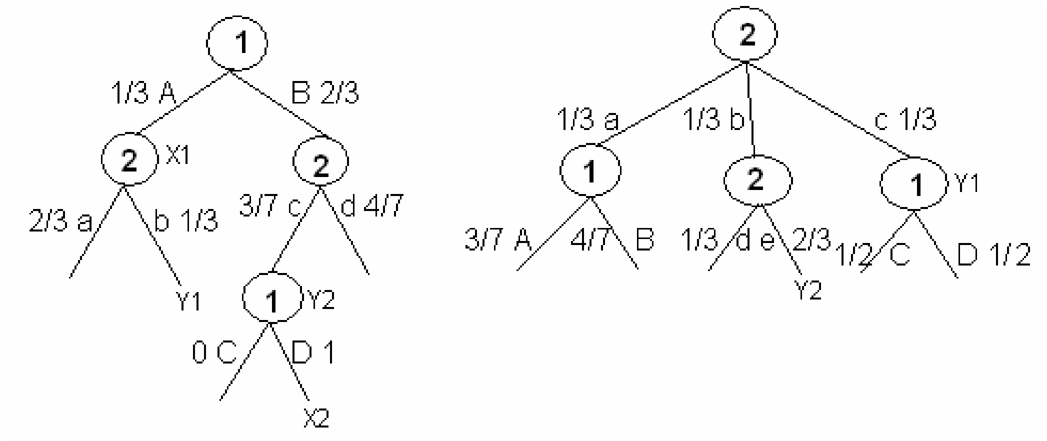
	L	P
A	3,4	1,2
B	2,3	2,3

b)

	L	P
a	2,0	3,4
b	2,0	1,2

7. K daným pochodovým stratégiam v stromoch nájdite zodpovedajúce kombinované stratégie. V označených uzloch X a Y vypočítajte pravdepodobnosti koncových uzlov.

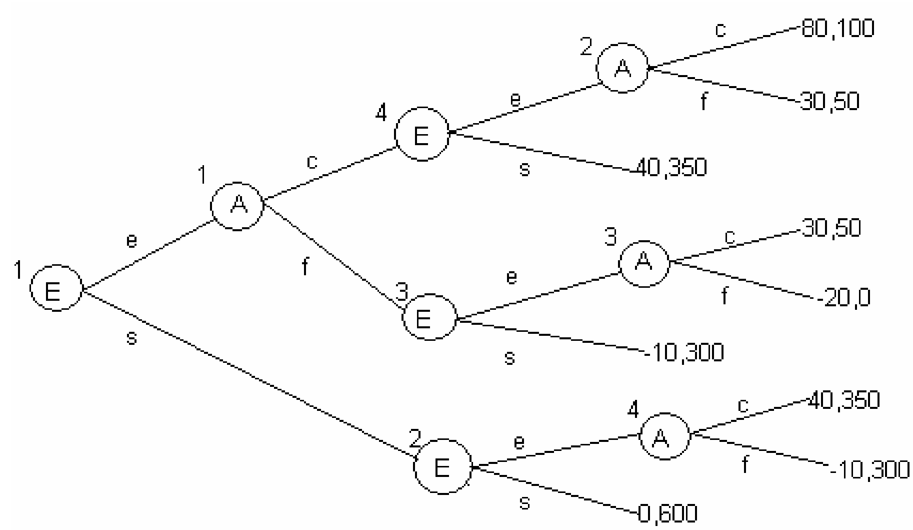
a) **b)**



8. Z nasledujúceho stromu spravte maticovú verziu.

i) Aké cesty vzniknú použitím čistých strategických dvojíc (eess,fffc), (sess,cfcf), (eeee,cccc) a akú výplatu prinesú? (Zapisované su v poradí ako je vyznačené na strome.)

ii) Nájdite všetky čisté stratégické páry, ktoré vedú k cestám {efec}, {sec}, {ecef}.



2.4 Spätná indukcia a ekvilibrium nájdené v podhrách

Spätná indukcia (ďalej ako **BI** (backward induction))

1. Začíname na najspodnejšej úrovni v koncových uzloch s výplatami.
2. Uzol vyššie nahradíme lepšou výplatou.
3. Zapamätáme si najlepšiu akciu,vyznačíme vetvu.
4. Postupujeme vyššie až do začiatku.

Veta: Každá konečná hra s dokonalou informáciou má aspoň 1 Nashove ekvilibrium v čistých stratégiach, ktoré sa dá nájsť metódou BI.

Poznámka 1: BI sa nedá použiť na hru s nedokonalou informáciou.

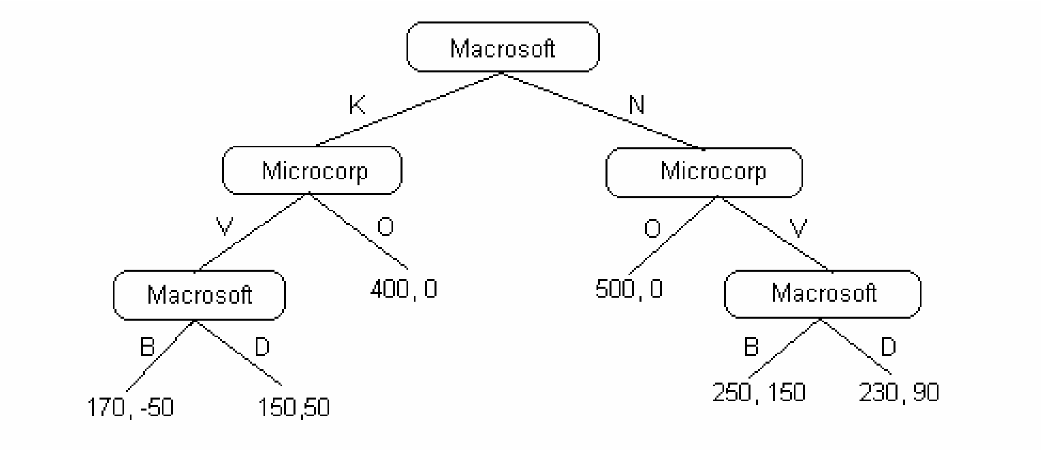
Nech G je hra v rozvinutom tvare potom **Gx** je **podhra** hry G začínajúca v uzle **X**, ak každá informačná množina je celá v Gx alebo G/Gx. *(Podhra má rovnakých hráčov ako hra, no nie všetci sa jej musia zúčastňovať. Začiatok podhry voláme v hre podkoreň.)*

Čistý strategický profil *s* tvorí **ekvilibrium najdené v podhrách** (ďalej ako **SPE** (subgame perfect equilibrium)), ak *s* indukuje NE v každej podhre.

Veta (Zermelova veta): Každá konečná hra s dokonalou informáciou má SPE, ktoré je zhodné s Nashovým ekvilibriom nájdené metódou BI.
(Keď hra nemá podhru tak SPE ≡ NE)

Príklad

Firma Macrosoft vyvinula novú počítačovú hru, ktorá bude určite veľmi populárna. Druhá firma Microcorp môže vyvinúť podobnú hru so svojími programátormi , no je pre ňu lacnejšie, ak pritiahne niektorých programátorov z Macrosoftu. Macrosoft sa môže brániť tým, že do pracovných zmlúv dá klauzulu, ktorá programátorom zabráni pracovať pre inú softvérovú firmu po určitú dobu, ako odídu z Macrosoftu. Za túto klauzulu musí Macrosoft platiť programátorom príplatky k mesačnej mzde. Teda jeho náklady stúpnu. Ak sa Microcorp rozhodne vyvinúť podobnú hru, potom má Macrosoft na výber dve možnosti. Buď začne viesť cenovú vojnu prostredníctvom reklami, alebo sa podelí o trh. Daný príklad je znázornený na nasledujúcom strome hry, kde akcia **K** je pracovná zmluva s klauzulou, **N** bez klauzuly, **V** je vývoj podobnej hry, **O** Microcorp ostane mimo trhu, **B** cenový boj a **D** delenie trhu.

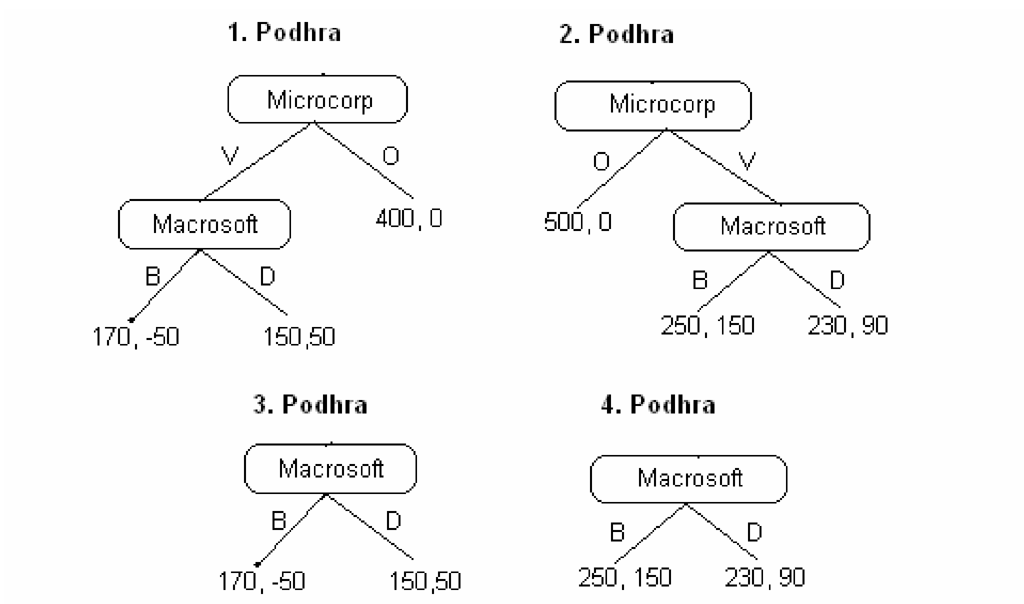


i) Nájdite všetky podhry a ich Nashove ekvilibriá.

ii) Ktoré z Nashových ekvilibrií hry je ekvilibrium nájdené v podhrách. Nájdite ho aj pomocou spätnej indukcie.

<u>Riešenie</u>

***i)** Hra má 5 podhier, vrátane celej hry.*



Prvá podhra má NE_1 = (B, O), zapísané v tvare pre pôvodnú hru (- B -,O -).

Druhá podhra má NE_2 = (B, V), teda (- - B, - V).

	V	O
B	**170**, -50	**400**, **0**
D	150, **50**	**400**, 0

	V	O
B	**250**, **150**	**500**, 0
D	230, **90**	**500**, 0

Tretia podhra má *NE_3* = (B), teda (- B -, - -).

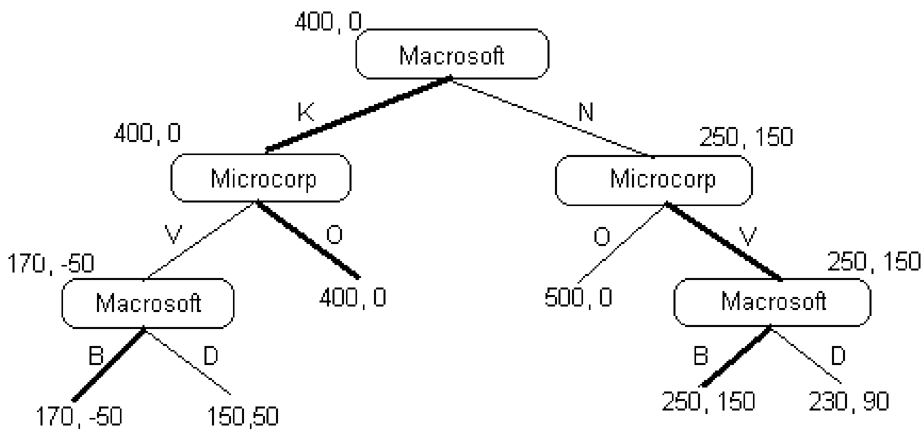
Štvrtá podhra má *NE_4* = (B), teda (- - B, - -).

Vlastná hra má štyri Nashove ekvilibriá. NE = {(NBB, VV), (NDB, VV), (KBB, OV), (KBD, 0)}

Microcorp

Macrosoft		*VV*	*VO*	*OV*	*OO*
	KBB	170, -50	170, -50	**400**, **0**	400, 0
	KDB	150, 50	150, 50	400, 0	400, 0
	NBB	**250**, **150**	500, 0	250, 150	500, 0
	NBD	230, 90	500, 0	230, 90	500, 0
	KBD	170, -50	170, -50	**400**, **0**	400, 0
	KDD	150, 50	150, 50	400, 0	400, 0
	NDB	**250**, **150**	500, 0	250, 150	500, 0
	NDD	230, 90	500, 0	230, 90	500, 0

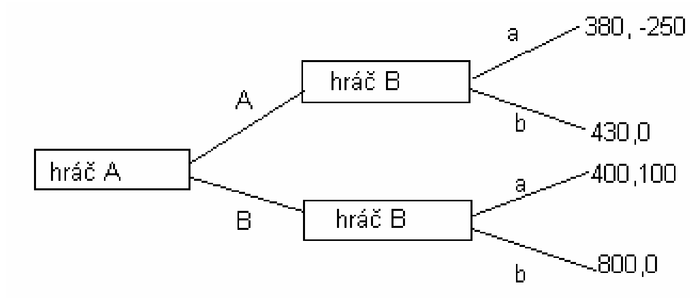
***ii)** Ekvilibrium nájdené v podhrách je (KBB, OV)**,** lebo tento strategický profil indukuje Nashov ekvilibrium v každej podhre. Zapisujeme **SPE = (KBB, OV)**. Nájdenie SPE pomocou spätnej indukcie je znázornené na nasledujúcom strome.*



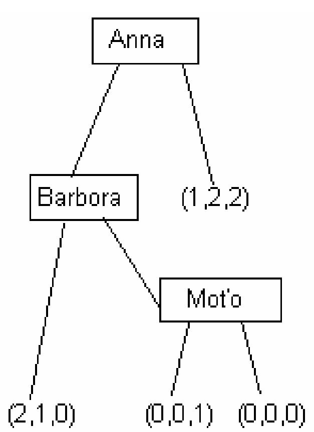
2.5 Príklady

1. Štandartná ultimátna hra je hraná nasledovne: Máme 2 hráčov, ktorý sú si navzájom cudzinci a nekomunikujú navzájom. Začína hráč A, ktorý navrhne delenie \$1 medzi seba a súpera. Hráč B buď s tým súhlasí alebo nie. Ak súhlasí, tak je \$1 delení medzi ních tak ako to A navrhol. Ak nesúhlasí s návrhom potom nedostane ani jeden nič. A ponúka 0, 0.25, 0.5, 1. Nakresli strom hry a nájdi ekvilibrium nájdené v podhrách bez aj s použitím spätnej indukcie.

2. Pomocou spätnej indukcie nájdi ekvilibrium nájdené v podhrách v hre, ktorá má nasledujúci strom.



3. Anna, Barbora a Moťo hrajú hru, ktorá ma strom.



i) Nájdi všetky podhry.

ii) Nájdi Nashove ekvilibrium každej podhry, vrátane celej hry.

iii) Pomocou spätnej indukcie nájdite ekvilibrium najdené v podhrách.

4. Profesor Rafko oznámil v triede, že budú mať aukciu o obálku obsahujúcu \$1.25. Pričom pravidlá aukcie sú nasledovné:

1. Dražitelia sa striedajú. Najnižšia akceptovateľná ponuka je 50 centov.
2. Prihadzuje sa práve po 50 centov.
3. Dražitelia nemôžu ísť dva krát za sebou, majú na výber, buď ponúkanú cenu

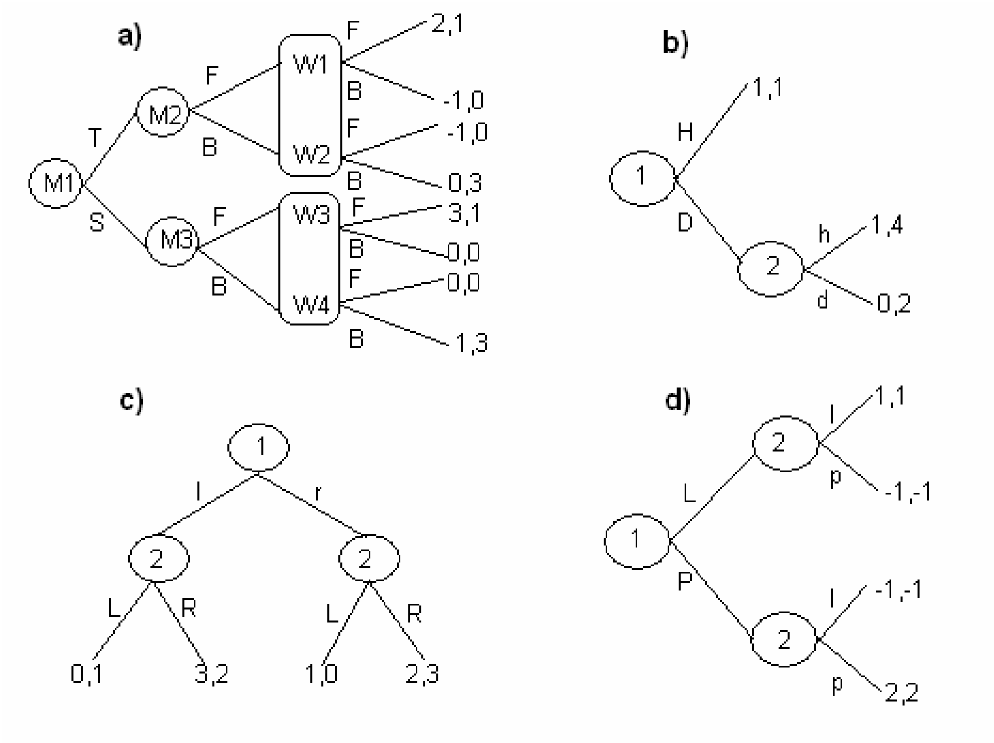
príjmu alebo nepríjmu.

4. Hra končí, keď nepríjmu ponúkanú cenu, okrem neprijatia hneď na začiatku, potom sa rozhoduje druhý hráč.
5. Najvyššia ponuka získa obálku.
6. Všetci dražitelia musia zaplatiť profesorovi Rafkovi posledne ponukanú sumu.

i) Nakresli strom hry, ak máme 2 dražiteľov Ivanu a Ondra, ktorý majú v peňaženke každý $1.5. Začína Ivana. Nájdi ekvilibrium najdené v podhrách. Ako skončí aukcia?

ii) Pravidlo 2 sa zmení: Prihadzuje sa 50 centov alebo $1. Nakresli strom hry a najdi ekvilibrium najdené v podhrách. Kto dostane obálku a za koľko?

5. V nasledujúcich stomoch nájdi ekvilibrium nájdené v podhrách, ak sa dá, použi spätnú indukciu.



6. Je daný kotol peňazí. Na začiatku je v ňom 1SK. Prvý hráč môže hru stopnúť, vtedy dostane všetky peniaze (len 1SK) v kotli alebo nechať hru ísť ďalej. V druhom kole pribudne do kotla 1SK a ide druhý hráč. Ten môže spraviť to isté, čo prvý hráč. A tak ide hra ďalej. Prvý hráč ide v nepárnych kolách a druhý hráč v párnych. V každom kole pribudne do kotla 1SK, čiže v N-tom kole bude v kotli N SK. Hra končí, keď ju hráč stopne, alebo keď sa dosiahne sté kolo. V 100. kole druhý hráč dostane všetky peniaze z kotla a hra končí. Nakresli strom hry (stačí prvé a posledné 2 rozhodovacie uzly) a nájdi SPE.

7. Nájdite Nashove ekvilibriá vštkých podhier v strome z kapitoly 2.1 a tiež SPE.

3
Riešenia príkladov

3.1 Riešenia príkladov z 1.4

1.

Strategická forma hry:

Množina hráčov: N = {1, 2}

Množiny akcií: $A_1 = A_2 = \{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1\}$

Funkcie výplat: $u_1(a_{1,}\ a_2) = 1 - a_1$ ak $a_1 \geq a_2$ ináč 0, $u_2(a_{1,}\ a_2) = a_1$ ak $a_1 \geq a_2$ ináč 0

Funkcie výplat zapísaná v tvare bimatice :

	0	*0.25*	*0.50*	*0.75*	*1*
0	**1**,**0**	0,**0**	0,**0**	0,**0**	**0**,**0**
0.25	0.75,**0.25**	**0.75**,**0.25**	0,0	0,0	**0**,0
0.50	0.50,**0.50**	0.50,**0.50**	**0.50**,**0.50**	0,0	**0**,0
0.75	0.25,**0.75**	0.25,**0.75**	0.25,**0.75**	**0.25**,**0.75**	**0**,0
1	0,**1**	0,**1**	0,**1**	0,**1**	**0**,**1**

2.

i) a **ii)**

V hre nie je EODS ani ESDS, lebo hráči nemajú ostro ani slabo dominantné stratégie.

iii)

V hre nemôžeme použiť iterovanú elimináciu ostro dominovaných stratégií, pretože žiadny z hráčov nemá ostro dominovanú stratégiu.

iv)

Iterovaná eliminácia slabo dominovaných stratégií vedie k jedinému výstupu (1,1), čiže hra má EIESDS = (1,1). Možný postup eliminácie Hráč1:0,6,5,4, Hráč2:0,3,4,5,6, Hráč1:3,2, Hráč2:2

v)

Hra nie je riešiteľná dominanciou, pretože iterovaná eliminácia ostro dominovaných stratégií nevedie k jedinému výstupu z hry.

vi)

NE = (0,0) a (1,1)

3.

i)

Strategická forma hry:

Množina hráčov: N = {1, 2}

Množiny akcií: A_1 = {A, B} A_2 = {L,S,P}

Funkcie výplat: u_1(A,L)=1, u_1(A,S)=2, u_1(A,P)=-2, u_1(B,L)=2, u_1(B,S)=2, u_1(B,P)=-1
u_2(A,L)=0, u_2(A,S)=5, u_2(A,P)=-1, u_2(B,L)=1, u_2(B,S)=1,u_2(B,P)=0

ii)

V hre nie je ekvilibrium ostro dominantných stratégií, lebo ani jeden hráč nemá ostro dominantnú stratégiu.

iii)

U hráča 1 stratégia B slabo dominuje nad stratégiou A a u hráča 2 stratégia S slabo dominuje nad L aj nad P. Teda, strategický profil (B,S) je ESDS.

iv)

NE = { (A,S), (B,L), (B,S) }

4.

i)

Strategická forma hry:

Množina hráčov: N = {1, 2}

Množiny akcií: A_1 = A_2 = {0, 100, 200, 300, 400, 500}

Funkcie výplat je definovaná nasledujúcou bimaticou:

	0	*100*	*200*	*300*	*400*	*500*
0	400,0	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
100	400,0	300,0	0,200	0,200	0,200	0,200
200	400,0	300,0	200,0	0,100	0,100	0,100
300	400,0	300,0	200,0	100,0	0,0	0,0
400	400,0	300,0	200,0	100,0	0,0	0,-100
500	400,0	300,0	200,0	100,0	0,0	-100,0

ii)

V tejto hre nie je EODS, pretože žiadny z hráčov nemá ostro dominantnú stratégiu.

iii)

V tejto hre nie je ESDS, pretože žiadny z hráčov nemá slabo dominantnú stratégiu. Uvedomte si, že hoci u oboch hráčov akcie 300 a 400 slabo dominujú nad každou inou stratégiou, nedominujú jedna nad druhou – teda nie je jediná stratégia s požadovanou vlastnosťou.

iv)

Pretože v tejto hre nie je ostro dominovaná stratégia, iterovanú elimináciu ostro dominovaných stratégií nemôžeme použiť, v hre teda ostávajú všetky stratégie.

v)

V hre môžeme eliminovať slabo dominované stratégié napríklad v takomto poradí: Hráč1:0,500,100,200,Hráč2:0,100,200,500. IESD stratégií tak vedie k množine výstupov z hry (300, 400),(300, 400).

vi)

Hra nie je riešiteľná dominanciou, pretože iterovaná eliminácia ostro dominovaných stratégií nevedie k jedinému výstupu z hry.

vii)

NE = {(0,400), (0,500), (100,400), (100,500), (200,400), (200,500), (300,0), (300,100), (300,200), (300,300), (300,400), (300,500), (400,0), (400,100), (400,200), (400,300), (400,400), (500,0), (500,100), (500,200), (500,300), (500,400)}

5.

i)

Len v **d)** je prvý stĺpec slabo dominovaný , teda druhý stĺpec je slabo dominantný. Ináč povedané druhý stĺpec dominuje prvému.

ii)

V **a)** a **c)** Nashove ekvilibrium nie je. V **b)** sú 2 Nashove ekvilibriá **(1,1)** (s výplatou (2,1)) a **(2,2**) (s výplatou (1,5)). V **d)** sú 2 NE a to **(1,2)**, **(3,1)**.

6.

i)

V **a)** eliminujeme postupne 3. stĺpec, 1. a 2. riadok a nakoniec 1. stĺpec. Ostane nám EIEODS = (3,2). V **b)** odstránime prostredný stĺpec, **c)** ostane pôvodná.

ii)

Nashove ekvilibriá v jednotlivých maticiach sú **a)** (3,2), **b)** (2,3), (3,1) a **c)** (1,3), (2,2), (3,1).

7.

i)

a) Má EODS v (1,1), teda stratégia 1 Hráča 1 je ostro dominantná a tak isto stratégia 1 Hráča 2 je Ostro dominantná. **b)** Má EODS v (2,2). **c)** Má ESDS v (2,2), teda stratégie 2 pre oboch hráčov sú slabo dominantné. **d)** aj **e)** Nemá EODS ani ESDS.

ii)

a) NE = (1,1) **b)** NE = (2,2) **c)** NE = { (1,2), (2,2) } **d)** NE = (3,3) **e)** NE ={(1,1), (2,2)}

8.

i)

Kenney nemá žiadnu z hľadaných stratégií. Pre Imamuru Krátka je slabo dominantná stratégia (Krátka ostro dominuje 50/50 a slabo dominuje Dlhej.). 50/50 je ostro dominovaná, Dlhá je slabo dominovaná a nemá ostro dominantnú stratégiu.

ii)

NE = { (Krátka,Krátka), (50/50,Krátka) }

9.

i)

Ani jeden z hráčov nemá dominantné stratégie. Hra má dve Nashove ekvilibriá.

NE = { (19:00, 19:00, 19:00), (19:30, 19:30, 19:30) }, (JOJ, STV, MARKÍZA)

ii)

Len Markíza má dominantnú stratégiu: 19:00

Po jej eliminácií dostaneme hru s maticou 2x2, ktorá ma 2 NE v čistých stratégiach.

NE = { (19:00,19:30,19:30), (19:30,19:00,19:30) }

10.

Hra, ktorá má takúto maticu výplat, má len jedno ESDS = (a, A), ale dva Nashove ekvilibriá. NE = { (a, A), (b, B) }

	A	B
a	**(1, 1)**	(**0**, 0)
b	(0, **0**)	**(0, 0)**

11.

Nashove ekvilibrium je (1, A)

	A	B	C
1	**(1, 1)**	(0, 0)	(0, 0)
2	(0, 0)	(0, **1**)	(**1**, 0)
3	(0, 0)	(**2**, 0)	(0, **2**)

12.

Pre Rado sú Stred a Dole ostro dominované stratégie. Janko nemá žiadnú ostro alebo slabo dominovanú stratégiu.

(1) Ak je Stred eliminovaná ako prvá, potom sa Vľavo stane slabo dominovaná stratégia pre Janka a EIESDS je (Hore,Vpravo).

(2) Ak je Dole je eliminovaná ako prvá, potom sa Vpravo stane slabo dominantná stratégia pre Janka a EIESDS je (Hore,Vľavo).

13.

a) NE = (2,1) **b)** NE =(1,1) **c)** NE =(3,2) **d)** NE = { (3,2), (4,1) }

14.

Jednotlivé tabuľky zodpovedajú stratégiam Hráča C. NE = { (15,N,15), (N,15,15), (N,N,15), (15,N,N), (N,15,N), (15,N,15)}

15

B

A

	15	30	N
15	-10,-10,-10	-15,**0**,-15	**0,0,0**
30	**0**,-15,-15	-15,-15,-15	**0,0**,-15
N	**0,0,0**	**0,0**,-15	**0,0,15**

30

B

	15	30	N
15	-15,-15,**0**	-15,-15,-15	-15,**0,0**
30	-15,-15,-15	-20,-20,-20	-15,**0**,-15
N	**0**,-15,**0**,	**0**,-15,-15	**0,0**,0

N

B

	15	30	N
15	**0,0,0**	-15,**0,0**	**15,0,0**
30	**0**,-15,**0**	-15,-15,**0**	0,**0,0**
N	**0,15,0**	**0**,0,**0**	0,0,0

15.

a)

Má 2 EIESDS, ktoré získame postupnou elimináciou R3, C1, C2, R2 a C2, R2, C1, R3. EIESDS = {(R1,C1),(R1,C3)}

b)

EIESDS = (B,X) získame postupnou elimináciu Z,A,Y

c)

EIESDS = (B,H) získame postupnou elimináciu C,D,A

16.

a)

0,**-1**	**10**,-2
1,0	5,**10**

b)

5,4	0,0
0,0	**4,1**

c)

2,2	**3,2**
2,1	1,0

d)

1,1	**1,1**
1,1	**1,1**

17.

Najprv eliminujeme Dlhú pre Immamuru a potom Dlhú pre Kenneya, to čo ostane je EIESDS, teda (Krátka,Krátka).

3.2 Riešenia príkladov z 1.6

1.

Hra má Nashove ekvilibrium v kombinovaných statégiach, keď α = (d-b) / ((d-b) + +(a-c)) a β = (z-y) / ((z-y)+(w-x)).

2.

Hra má Nashove ekvilibrium v kombinovaných statégiach, keď x = 1/F a y = C/4. Očakavané výplaty sú nasledovné π_1 = x a π_2 = -1.

3.

Očakávaná výplata prvého aj druhého hráča pri obidvoch dvojiciach kombinovaných stratégií je 2/3.

4.

i)

Pri (1/5,2/5,2/5), (1/3,1/3,1/3) je π_1= 29/15 a π_2= 28/15. Pri (2/5,1/3,4/15), (1/2,1/3,1/6) je π_1= 117/90 a π_2 = 149/90. Pri (1/2,1/4,1/4), (1/3,1/6,1/2) je π_1= 17/12 a π_2= 13/6. Najlepšie je použiť „pravdepodobnostné okienko“.

ii)

Očakávané výplaty Hráča 1 sú π_1(1, (1/6,1/3,1/2))= 4/3, π_1(2, (1/6,1/3,1/2))= 11/6, π_1(3, (1/6,1/3,1/2))= 7/3 a očakávané výplaty Hráča 2 sú π_2(1, (1/6,1/3,1/2))= 7/6, π_2(2, (1/6,1/3,1/2))= 3/2, π_2(3, (1/6,1/3,1/2))= 13/16.

iii)

Očakávané výplaty Hráča 2 sú π_2((3/8,1/4,3/8), 1)= 15/8, π_2((3/8,1/4,3/8), 2)=9/8, π_2((3/8,1/4,3/8), 3)= 11/4 a očakávané výplaty Hráča 1 sú π_1((3/8,1/4,3/8), 1)= 5/4, π_1((3/8,1/4,3/8), 2)= 3, π_1((3/8,1/4,3/8), 3)= 5/4.

iv)

Očakávané výplaty hráčou sú π_1= 11/6 a π_2= 33/16.

v)

Očakávané výplaty v zadaní sú zlé, spravne sú π_1= 8/3 a π_2= 3/2.

5.

NE= (2/3A+1/3B,1/2a+1/2b) a očakávané výplaty π_1= 15/6 a π_2= 52/3

6.

a)

	A	B
A	**1**,-1	-1,**1**
B	-1,**1**	**1**,-1

b)

	a	b
A	0,0	**6**,**1**
B	**1**,**6**	3,3

c)

	L	P
H	2,3	**3**,**4**
D	**4**,**4**	0,1

a)

Nemá NE v čistých stratégiach, no v kombinovaných má a to NE=(1/2A+1/2B, 1/2A+1/2B). Očakávané výplaty sú pre oboch hráčov rovné 0.

b)

Má 2 NE v čistých stratégiach a jedno v kombinovaných. NE={(B,a), (A,b), (3/4A+1/4B,3/4a+1/4b)}. Očakávané výplaty sú pre oboch hráčov rovné 3/2.

c)

Má 2 NE v čistých stratégiach a jedno v kombinovaných. NE={(D,L), (H,P), (3/4H+1/4D,3/5L+2/5P) }. Očakávané výplaty sú π_1= 12/5 a π_2= 13/4.

7.

a)

	L	P
H	0,**3**	**3**,0
D	**1**,3	1,**4**

b)

	m	n
M	**6**,**6**	2,2
N	0,0	**4**,**4**

c)

	E	F
C	**5**,-10	-5,**0**
D	0,**15**	**5**,5

d)

	L	P
L	5,**5**	**20**,0
P	**20**,0	5,**5**

e)

	u	v
U	**9**,**5**	1,3
V	3,1	**6**,**8**

a)

Nemá NE v čistých stratégiach, no v kombinovaných má a to NE=(1/4H+3/4D, 2/3L+1/3P).

b)

Má 2 NE v čistých stratégiach a jedno v kombinovaných. NE= { (M,m), (N,n), (1/2M+1/2N, 1/4m+3/4n) }.

c)

Nemá NE v čistých stratégiach, no v kombinovaných má a to NE=(1/2C+1/2D, 2/3E+1/3F).

d)

Nemá NE v čistých stratégiach, no v kombinovaných má a to NE=(1/2L+1/2P, 1/2L+1/2D).

e) Má 2 NE v čistých stratégiach a jedno v kombinovaných. NE={(U,u), (V,v), (7/9U+2/9V, 7/9u+2/9v) }.

8.

Hra má 2 Nashove ekvilibriá v čistých stratégiach a jedno v kombinovaných stratégiach. NE = { (U,U), (P,P), ((1-c)U+cP, (1-c)U+cP) }.

9.

a)

Najprv zredukujeme maticu výplat a to tak, že môžme eliminovať ostro dominované stratégie C,c. Ostane nám matica 2x2 v ktorej hľadáme Nashove ekvilibriumv kombinovaných stratégiach, ktoré je (1/2A+1/2B,1/2a+1/2b), čiže jednotlivým statégiam sú pridelené pravdepodobnosti (1/2,1/2,0),(1/2,1/2,0).

b)

Tak isto najprv zredukujeme maticu. S a f sú dominované, teda ich eliminujeme a ostane matica 2x2. Riešením dostaneme, že Nashove ekvilibrium v kombinovaných statégiach je (7/16H+9/16D,1/3e+2/3m).

10.

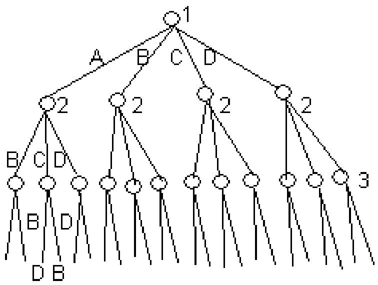
Ako prvú eliminujeme S2, potom T2, ktorá je dominovaná kombinovanou stratégiou 1/2 T1 + 1/2 T2. (1/2 x 0 + 1/2 x 9 = 9/2 > 4, 1/2 x 7 + 1/2 x 0 = 7/2 > 3).

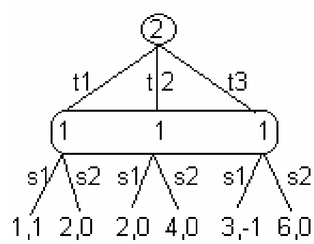
Postupujeme eliminácoiou S1 a T3. Teda EIESDS = (S3, T1).

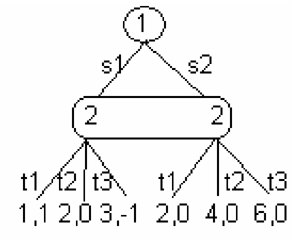
3.3 Riešenia príkladov z 2.3

1.

Náčrt stromu na nasledujúcej strane.







2.

Maticova forma nižšie, stromová forma vyšie.

	t_1	t_2	t_3
s_1	1,1	2,0	3,-1
s_2	2,0	4,0	6,0

3.

c)

	L	P
A	40,50	-10,0
B	0,300	0,300

b)

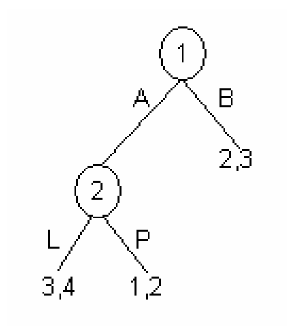
	L	P
a	1,1	0,2
b	1,1	1,4

a)

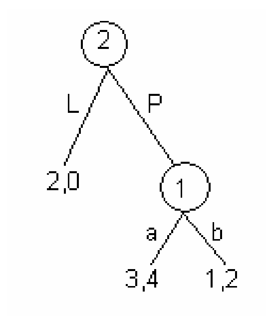
	A	B
a	3,4	1,1
b	1,1	1,1

4.

a)



b)



5.

i)

Pochodové pravdepodobnosti jednotlivých akcií sú b(A,B,C,D,E,F) = (1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/2, 1/2). Z nich vypočítaná kombinovaná stratégia je je m'_1 = 1/24 ACF+ +1/24ACE + 1/8 ADF + 1/8 ADE + 1/12 BCF + 1/12 BCE + 1/4 BDF + 1/4 BDE a pravdepodobnosť koncových bodov je P(X1,X2,X3,X4) = (1/6, 1/6, 1/6, 1/2).

ii)

Pochodové pravdepodobnosti jednotlivých akcií sú b(A,B,C,D,E,F) = (3/7, 4/7, 1/4, 3/4, 1/3, 2/3). Z nich vypočítaná kombinovaná stratégia je je m'_1 = 1/14 ACF +

+1/28ACE + 3/14 ADF + 3/28 ADE + 2/21 BCF + 1/21 BCE + 2/7 BDF + 1/7 BDE a pravdepodobnosť koncových bodov je P(X1,X2,X3,X4) = (2/7, 1/7, 1/7, 3/7).

iii)

Pochodové pravdepodobnosti jednotlivých akcií sú b(A,B,C,D,E,F) = (2/3, 1/3, 0, 1, 1/3 , 2/3). Z nich vypočítaná kombinovaná stratégia je je m'_1 = 4/9 ADF + 2/9ADE+ + 2/9 BDF + 1/9 BDE a pravdepodobnosť koncových bodov je P(X1,X2,X3,X4) = (4/9, 2/9, 0, 1/3).

iv)

Pochodové pravdepodobnosti jednotlivých akcií sú b(a,b,c,d,e,f) = (2/3, 1/3, 0, 1, 1/2, 1/2). Z nich vypočítaná kombinovaná stratégia je je m'_2 = 1/3 ade + 1/3 adf + +1/6 bde + 1/6 bdf a pravdepodobnosť koncových bodov je P(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5) = (1/3, 0, 1, 1/3, 1/3).

v)

Pochodové pravdepodobnosti jednotlivých akcií sú b(a,b,c,d,e,f) = (3/7, 4/7, 4/7, 3/7, 2/3, 1/3). Z nich vypočítaná kombinovaná stratégia je je m'_2 = 8/49 ace + +4/49acf + 6/49 ade + 3/49 adf + 32/147 bce + 16/147 bcf + 8/49 bde + 4/49 bdf a pravdepodobnosť koncových bodov je P(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5) = (4/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7).

vi)

Pochodové pravdepodobnosti jednotlivých akcií sú b(a,b,c,d,e,f) = (4/11, 7/11, 5/11, 6/11, 1/4, 3/4). Z nich vypočítaná kombinovaná stratégia je je m'_2 = 5/121ace+ +415/121 acf + 6/121 ade + 18/121 adf + 35/484 bce + 105/484 bcf + 21/242 bde + +63/242 bdf a pravdepodobnosť koncových bodov je P(Y1,Y2,Y3,Y4,Y5) = (7/11, 5/11, 6/11, 1/11, 3/11).

5.

a)

<table>
<tr><th colspan="8">B</th></tr>
<tr><td rowspan="7">A</td><td></td><td>ad</td><td>ae</td><td>bd</td><td>be</td><td>cd</td><td>ce</td></tr>
<tr><td>XP</td><td colspan="2">A</td><td colspan="2" rowspan="2">C</td><td colspan="2" rowspan="2">D</td></tr>
<tr><td>XQ</td><td colspan="2">B</td></tr>
<tr><td>YP</td><td rowspan="2">E</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">E</td><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">E</td><td rowspan="2">F</td></tr>
<tr><td>YQ</td></tr>
<tr><td>ZP</td><td rowspan="2">G</td><td rowspan="2">H</td><td rowspan="2">G</td><td rowspan="2">H</td><td rowspan="2">G</td><td rowspan="2">H</td></tr>
<tr><td>ZQ</td></tr>
</table>

b)

Majo					
Aďa		HH	HD	DH	DD
	H	1,1	1,1	-1,-1	-1,-1
	D	-1,-1	2,2	-1,-1	2,2

c)

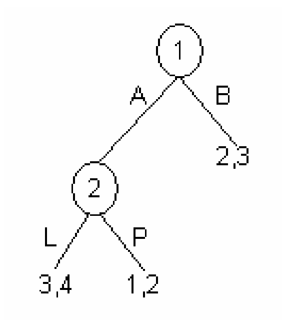
1\2	LL	LP	PL	PP
L	0,0	0,0	9,1	9,1
P	4,4	5,3	4,4	5,3

d)

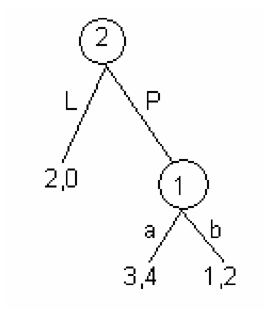
J					
S		ac	ad	bc	bd
	LL	10,10	-1,-1	10,10	-1,-1
	LS	0,0	-1,-1	0,0	-1,-1
	SL	-1,-1	-1,-1	1,1	1,1
	SS	-1,-1	-1,-1	1,1	1,1

6.

a)



b)



7.

a)

m_1 = 1/3 A + 2/3 BD, m_2 = 2/7 ac + 8/21 ad + 1/7 bc + 4/21 bd, P(X1, X2) = (1/3, 2/3), P(Y1, Y2) = (1/3, 3/7)

b)

m_1 = 3/14 AC + 3/14 AD + 2/7 BC + 2/7 BD, m_2 = 1/9 ad + 1/9 bd + 1/9 cd + 2/9 ae+ + 2/9 be + 2/9 ce, P(Y1, Y2) = (1/3, 1/4)

8.

Maticová verzia hry je na nasledujúcej strane.

i)

K čistým stratégiam (eess,fffc), (sess,cfcf) a (eeee,cccc) zodpovedajú cesty s výplatami {efs}, (-10, 300), {sef}, (-10, 300), {ecec}, (80, 100).

ii)

K cestám {efec}, {sec} a {ecef} vedú čisté stratégie (exex, fycy), (sexx, yyyc), (exxe, cfyy), kde x∈{s,e} a y∈{f,c}.

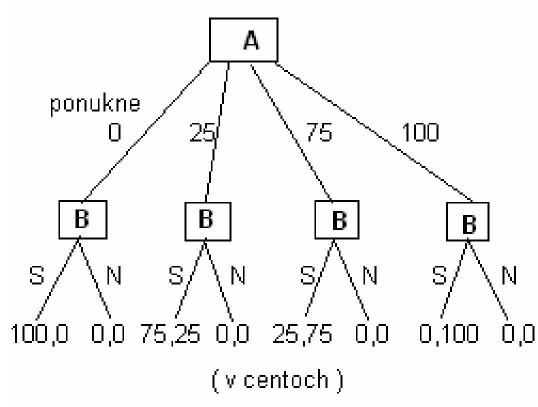
<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><th colspan="16">A</th></tr>
<tr><td>c
c
c
c</td><td>c
c
c
f</td><td>c
c
f
c</td><td>c
c
f
f</td><td>c
f
c
c</td><td>c
f
c
f</td><td>c
f
f
c</td><td>c
f
f
f</td><td>f
c
c
c</td><td>f
c
c
f</td><td>f
c
f
c</td><td>f
c
f
f</td><td>f
f
c
c</td><td>f
f
c
f</td><td>f
f
f
c</td><td>f
f
f
f</td></tr>
<tr><th rowspan="16">E</th><td>eeee</td><td colspan="4">80,100</td><td colspan="4">30,50</td><td colspan="2" rowspan="2">30,50</td><td colspan="2" rowspan="2">-20,0</td><td colspan="2" rowspan="2">30,50</td><td colspan="2" rowspan="2">-20,0</td></tr>
<tr><td>eees</td><td colspan="8">40,350</td></tr>
<tr><td>eese</td><td colspan="4">80,100</td><td colspan="4">30,50</td><td colspan="8" rowspan="2">-10,300</td></tr>
<tr><td>eess</td><td colspan="8">40,350</td></tr>
<tr><td>esee</td><td colspan="4">80,100</td><td colspan="4">30,50</td><td colspan="2" rowspan="2">30,50</td><td colspan="2" rowspan="2">-20,0</td><td colspan="2" rowspan="2">30,50</td><td colspan="2" rowspan="2">-20,0</td></tr>
<tr><td>eses</td><td colspan="8">40,350</td></tr>
<tr><td>esse</td><td colspan="4">80,100</td><td colspan="4">30,50</td><td colspan="8" rowspan="2">-10,300</td></tr>
<tr><td>esss</td><td colspan="8">40,350</td></tr>
<tr><td>seee</td><td colspan="8" rowspan="4">40,350</td><td colspan="8" rowspan="4">-10,300</td></tr>
<tr><td>sees</td></tr>
<tr><td>sese</td></tr>
<tr><td>sess</td></tr>
<tr><td>ssee</td><td colspan="16" rowspan="4">0,600</td></tr>
<tr><td>sses</td></tr>
<tr><td>ssse</td></tr>
<tr><td>ssss</td></tr>
</table>

3.4 Riešenia príkladov z 2.5

1.

Hra má nasledujúce Nashove ekvilibriá. NE = { (0, SXXX) , (0, NNNX), (0.25, NSXX), (0.75, NNSX), (1, NNNX) }, kde X∈{N,S}. Celkovo je ich 18. Okrem vlastnej hry má hra ešťe 4 podhry, ktorých sa zúčastňuje len hráč B. Ich Nashove ekvilibriá sú v poradí z ľava do prava na obrázku takéto { (S), (N) }, (S), (S), (S), zapísané vo forme celkovej hry { (-, S - - -), (-, N - - -) }, (-, - S - -), (-, - -

S -), (-,- - - S). Z čoho dostaneme SPE = { (0,SSSS), (0.25,NSSS) }. To isté nám dá aj spätná indukcia. Strom hry sa nachádza na nasledujúcej strane.



2.

SPE = (A,ba), kde b je vo vrchnom uzle hráča B.

3.

Akcie hráčov nazveme vľavo a vpravo

i)

Hra obsahuje 3 podhry, ktoré začinajú v rozhodovacích uzlov jednotlivých hráčov.

ii)

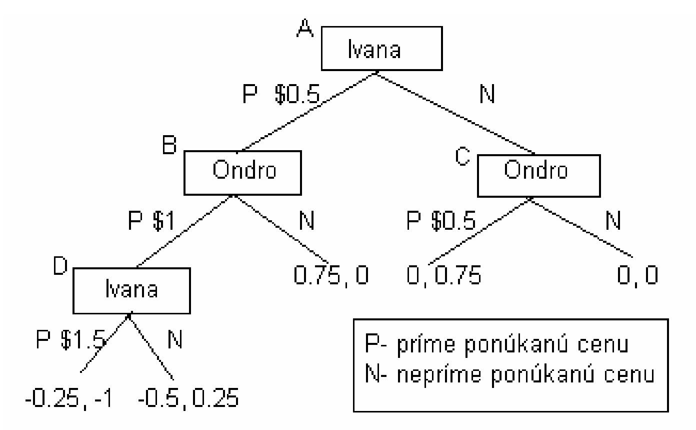
NE podhry začínajúcej v Moťovom uzle je (0,0,vľavo). NE podhry začínajúcej v Barborinom uzle je (0,vľavo,vľavo) a (0,vľavo,vpravo). NE podhry začínajúcej v Anninom uzle,teda celej hry je (vľavo,vľavo,vľavo), (vľavo,vľavo,vpravo), (vpravo,vpravo,vpravo) a (vpravo,vpravo,vľavo).

iii)

SPE je (vľavo,vľavo,vľavo).

4.

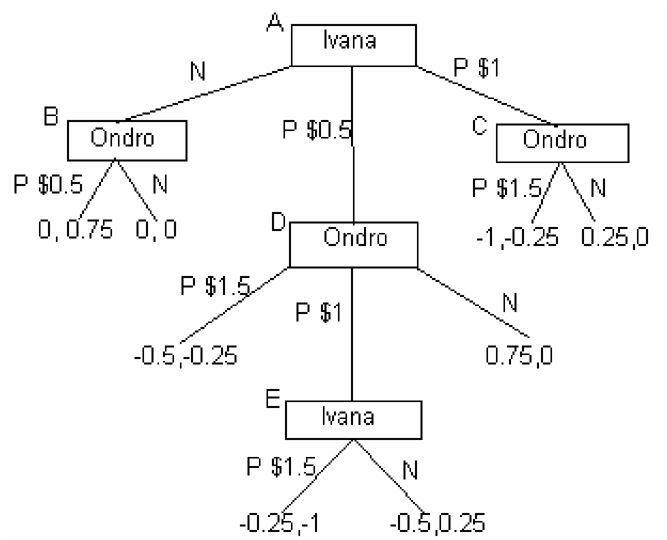
i)



Ivanina SPE stratégia je (v A P$0.5,v D P$1:5) a Ondrova SPE stratégia je (v B P$0.5,v C N). Teda SPE je ((P$0.5, P$1.5),(P$0.5,N)).Ak príjmu tieto stratégie tak Ivana príjme $0.5 a ondro nepríjme, teda Ivana získa obálku za $0.5 a jej zisk bude $0.75.

ii)

Ivanina SPE stratégia je (v A P$0.5,v E P$1:5) a Ondrova SPE stratégia je (v B P$0.5,v C N,v D N). Teda SPE je ((P$0.5, P$1.5),(P$0.5,N,N)).Ak príjmu tieto stratégie tak Ivana príjme $0.5 a ondro nepríjme, teda Ivana získa obálku za $0.5 a jej zisk bude $0.75.



5.

a)

Okrem vlastnej hry má hre ešte 2 podhry. Podhra začínajúce v M2 má NE = {(F,F), (B,B) } a v M3 má podhra NE = { (F,F), (B,B) }. Hra má 4 Nashove ekvilibriá, NE = {(SFF,FF), (SFF,BF), (SBF, FF), (SBF, BF) (SFB, BB), (SBB, BB) }, teda SPE sú (SFF,FF), (SBF,BF) a (SBB,BB).

b)

SPE = { (H,h), (D,h) }, nájdené BI

c)

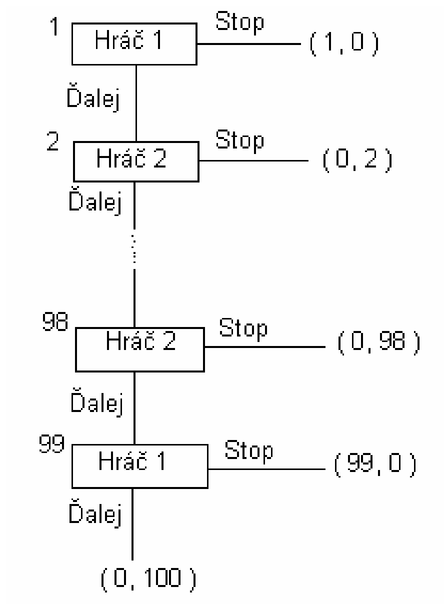
SPE = (I , RR), nájdené BI

d)

SPE = (P, Ip), nájdené BI

6.

SPE hry s kotlom peňazí je (Stop, Stop, ... , Stop).



7.

NE_b = {(- l -,R -), (- r -,,R -)}

NE_c = {(- - l,- M), (- - r,,- M)}

NE_d = (- l -,- -)

NE_e = (- - l,- -)

NE = { (mxx, YM), (rxx, YM) } kde x $\in$ { l, r } a Y$\in$ { L, M, R }.

SPE = { (mll, RM), (rll, RM) }

Záver

Touto prácou som sa pokúsil vytvoriť študijný materiál ku nekooperatívnym hrám a hľadaniu ekvilibrií v nich. Poskytol som teoretický základ, potrebný na riešenie príkladov v strategickej aj rozvinutej forme hry. K pochopeniu, čo to znamená som uviedol vzorové príklady s podrobným postupom riešenia, ako aj množstvo zadaní príkladov na precvičenie s výsledkami.

Literatúra

Bierman, Scott; Fernandez, Luis. Game Theory with Economic Applications. Addison- Wesley Publishing Company, 1998

Fernandez, Luis. Instructor's Manual to accompany Game Theory with Economic Applications. Addison- Wesley Longman, 1998

Rasmusen, Eric. Ganes and Information, an Introduction to Game Theory. Blackwell Publisher, 1994

Binmore, Ken. Fun and Games, a Text on Game Theory. D.C. Heath and Company, 1992

Fink, Evelyn C.; Gates, Scott; Humes, Brian D.. Game Theory Topics, Incomplete Information, Reapeated Games and N-Player Games. Sage Publications, 1998

Maňas, Miroslav. Teorie her a její aplikace. SNTL – Nakladatelství technické literatúry, 1991

Šikudová, Elena. Poznámky z prednášok k predmetu Teória nekooperatívnych hier, 2001

Dôležitým zdrojom k mojej diplomovej práci boli aj nasledujúce www stránky:

www.gametheory.net

www.uniba.sk/~pekar

a mnoho ďalších stránok univerzít s testami a domácimi úlohami z teórie hier.