FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2003 Jana Puškárová

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE

Katedra ekonomických a finančných modelov

DOPLNKOVÉ DÔCHODKOVÉ POISTENIE A PENZIJNÉ FONDY

Diplomová práca

Diplomant: Jana Puškárová
Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Rastislav Potocký, CSc.
Bratislava 2003

Vyhlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne pod vedením vedúceho diplomovej vpráce s využitím uvedenej literatúry.

....

Obsah

Význam použitých symbolov

$X(t)$	-	výška penzijného fondu v čase t
$c(t, X(t))$	-	príspevková miera (riadiaca stratégia)
$p(t, X(t))$	-	vektor váh (pomer prostriedkov fondu investovaných do aktív)
B	-	výška dávky (penzie)
σ_b	-	volatilita vyplácaných dávok
$R_i(t)$	-	hodnota aktíva i v čase t
S	-	kovariančná matica rizikových aktív
λ	-	vektor rizikových prémií
δ	-	vektor návratností rizikových aktív
c_m	-	maximálna prijateľná príspevková miera
x_p	-	minimálna povolená výška fondu
$L(t, c(t, x))$	-	stratová funkcia dávkovo definovaného penzijného fondu
$W(t, x)(c, p)$	-	hodnotová funkcia dávkovo definovaného penzijného fondu
$V(t, x)$	-	optimálna hodnotová funkcia dávkovo definovaného penzijného fondu
$S(t)$	-	mzda zamestnanca v čase t
π	-	konštantná miera príspevkov v príspevkovo definovanom penzijnom fonde
$Y(t)$	-	substitučný pomer (penzia ako časť konečného platu)
$a(T, r(T))$	-	penzia v čase odchodu do dôchodku
$r(t)$	-	stochastická úroková miera
ρ	-	trhová hodnota rizika
$K(Y(T), r(T))$	-	funkcia užitočnosti
$J(t, y, r)$	-	hodnotová funkcia príspevkovo definovaného penzijného fondu
$\phi(t, y, r)$	-	optimálna hodnotová funkcia príspevkovkovo definovaného penzijného fondu

Úvod

Problematika dôchodkového zabezpečenia sa dostáva do popredia záujmov v každej vyspelej krajine, a to najmä z pohľadu sociálnopolitického a ekonomického. Slovensko, podobne ako krajiny Eúropskej únie, sa musí vysporiadať s nepriaznivým demografickým vývojom štruktúry obyvateľstva.

V SR je výrazné najmä znižovanie počtu obyvateľov vnajmladších vekových kategóriách ako dôsledok znižujúcej sa pôrodnosti. Podiel obyvateľstva v predproduktívnom veku (0-14 roční) sa v roku 2001 znížil oproti roku 1999 o 0,9 percentového bodu a oproti roku 1995 až o 3,4 percentového bodu, a to na 18,9 % z celkového počtu obyvateľstva SR.

K postupným zmenám dochádza aj vo vekovej štruktúre obyvateľstva v poproduktívnom veku (60-roční a starší muži, 55-ročné a staršie ženy), kde sa zvyšuje ich podiel. V roku 2001 dosiahol výšku 18,3 % z celkového počtu obyvateľstva SR, čo je nárast oproti roku 1999 o 0,4 percentového bodu a oproti roku 1995 o 0,8 percentového bodu.

Prognózy vývoja demografickej štruktúry obyvateľstva SR predpokladajú ďalšie zvyšovanie priemerného veku obyvateľstva (napr. v roku 2010 na 38,4 roka a o ďalších 10 rokov až na 40,5 roka), ako aj pomerne výrazné znižovanie pomeru populácie v produktívnom a neproduktívnom veku. Bude sa teda neustále znižovať počet tých občanov, ktorí prispievajú do fondov zabezpečujúcich vyplácanie dôchodkov oproti množstvu príjemcov dávok z týchto fondov.

Vidieť, že Slovensko, podobne ako krajiny Európskej únie, sa bude musieť vysporiadať so starnutím svojho obyvateľstva, okrem iného aj z hľadiska zabezpečenia ústavného práva občana na primerané hmotné zabezpečenie v starobe.

Prvým krokom na riešenie tejto situácie bol zákon č. 123/1996 Z.z. o doplnkovom dôchodkovom poistení zamestnancov, ktorým sa vytvorili právne podmienky na vznik a rozvoj doplnkového dôchodkového poistenia ako nového poistného druhu v rámci životného poistenia. V súčasnosti pôsobia na Slovenku štyri doplnkové dôchodkové poisťovne, ktoré pôsobia na kapitálovo-rezervotvornom princípe.

Penzijné fondy, ktoré disponujú kapitalizovaným systémom dôchodkového zabezpečenia, získali v 90. rokoch minulého storočia významné postavenie a v USA boli štvrtým najsilnejším finančným sprostredkovateľom.

Cieľom diplomovej práce je analýza riadenia takýchto penzijných systémov z pohľadu aktuára penzijného fondu. Sústredíme sa na určenie optimálnych stratégií pri riadení fondu, a to na určenie optimálnej výšky príspevkovej miery a na optimálne investovanie prostriedkov fondu medzi obchodovateľné aktíva.

V prvej kapitole sa zameriame na základné rozdelenie systémov penzijného poistenia a ich charakteristiku. V druhej kapitole uvedieme základné matematické definície a formulácie, ktoré využívame v našej práci.

Tretia kapitola je venovaná dávkovo definovaným penzijným fondom. Zaoberáme sa tu stochastickým modelom takéhoto fondu, pričom využívame rôzne tvary stratovej funkcie fondu. Kapitola obsahuje aj numerické výsledky získaných optimálnych stratégií pri rôznych veľkostiach fondu.

Štvrtá kapitola sa zaoberá stochastickým modelom príspevkovo definovanej penzijnej schémy, pričom podobne ako v tretej kapitole, aj tu rozoberáme rôzne tvary funkcie užitočnosti. Kapitola tiež obsahuje numerické výsledky získanej optimálnej stratégie a funkcie užitočnosti.

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Rastislavovi Potockému, CSc. za odborné vedenie, cenné pripomienky a návrhy, ktoré mi poskytol pri vypracovaní diplomovej práce.

1 Dôchodkové poistenie

Na celkovom stave ekonomiky rozvinutých krajín sa vo výraznej miere podieľa aj systém dôchodkového zabezpečenia. Základným cieľom dôchodkového zabezpečenia je poskytovať dostatočný príjem ľuďom v dôchodkovom veku. Vo väčšine krajín Európskej únie je systém dôchodkového zabezpečenia zložený z dvoch vrstiev. Prvú vrstvu tvorí základný systém dôchodkového poistenia, ktorý je súčasťou sociálneho zabezpečenia. Jeho účelom je z pozície štátu garantovať určitú minimálnu úroveň dôchodkového zabezpečenia. Druhú vrstvu tvorí systém doplnkového dôchodkového poistenia, ktorý sa označuje ako dôchodkové pripoistenie. Vyspelé krajiny sa usilujú primerane kombinovať možné formy penzijných príjmov, ktoré sa často charakterizujú ako tri piliere dôchodkového zabezpečenia (tretí pilier tvorí individuálne poistenie komerčných životných poisťovní). Iba malý počet jedincov v každej krajine nemá záujem o penzijné zabezpečenie.

Z hľadiska spôsobu financovania môžeme penzijné systémy rozdeliť do dvoch kategórií:

- systém financovaný priebežne → PAY-AS-YOU-GO systém
- fondová penzijná schéma (penzijný fond)

1.1 Systém financovaný priebežne

Ak penzie zabezpečuje štát, môže vytvárať fondy štátnych penzií tak isto, ako je to v súkromnej penzijnej schéme, ale väčšinou ide o systém financovaný priebežne známy ako PAY-AS-YOU-GO systém (PAYG). Penzie sú v tomto prípade hradené z prostriedkov získaných z príspevkov aktuálnej pracovnej sily. Tento systém penzijného zabezpečenia sa vo svete bežne označuje ako nefondové penzijné schémy alebo tiež ako penzijné plány.

Medzi zdroje prostriedkov na financovanie takýchto penzijných systémov patria najmä:

- príspevky účastníkov týchto systémov, príspevky ich zamestnávateľov alebo kombinácia oboch týchto zdrojov,
- zisky pochádzajúce z investovania dočasne voľných prostriedkov.

Takéto systémy dôchodkového zabezpečenia môžu niekedy profitovať i z niektorých foriem dotácií od štátu. Tieto môžu byť priame, napríklad vo forme prídavných príspevkov, alebo nepriame prostredníctvom rozličných foriem daňových úľav.

Na strane celkových výdavkov treba spomenúť vlastné dávky vyplácané dôchodcom, ale aj administratívne a ďalšie výdavky. Rast aktív vlastnených systémom je daný rozdielom medzi príjmami a výdavkami. Aktíva sa potom investujú tak, aby prinášali dlhodobé výnosy a zabezpečovali svoj ďalší rast. V systémoch typu PAYG sú zvyčajne príjmy a výdavky v rovnováhe, takže v zásade pri týchto systémoch ani nie sú k dispozícii aktíva vhodné na dlhodobé investície.

Financovanie týmto systémom využíva princíp použitia príspevkov, ktoré platí jedna generácia (súčasní zamestnanci) na úhradu dávok inej generácie (súčasní dôchodcovia). Príspevky v danom roku pokryjú dávky vyplácané v tom istom roku. Toto podporovanie jednej generácie druhou však znamená, že príspevky sú veľmi citlivé na vývoj pomeru aktívnej a neaktívnej populácie a navyše aj na vývoj reálnych zárobkov v pomere k penzijným dávkam. V súčasnosti pomer aktívnej a neaktívnej populácie výrazne klesá. Znižuje sa počet prispievateľov do fondov oproti množstvu dôchodcov, ktorý poberajú dávky z týchto fondov a tento systém financovania sa stáva neefektívnym. Výhodou tejto metódy je, že pri zavedení penzijného poistenia tohto druhu, sa príspevky aktívnych zamestnancov môžu okamžite použiť na zaplatenie dávok dôchodcom, ktorí sú členmi takéhoto poistenia.

1.2 Fondová penzijná schéma

Postupne ako rástla štátna zadĺženosť rozvinutých krajín, začali si uvedomovať ich vlády, že veľký podiel na tomto nepriaznivom stave nesú každoročné deficity priebežného systému financovania dôchodkov. Táto skutočnosť zaťažovala ekonomiku štátov a zostrovala sociálne napätie. Preto boli krajiny nútené nielen zamyslieť sa nad príčinami a spôsobmi preklenutia dlhovej krízy, ale aj pristúpiť ku konkrétnym opatreniam smerujúcim k reforme dôchodkovej štruktúry najmä vznikom a fungovaním penzijných fondov.

Pojem penzijný fond môže mať v rôznych krajinách rozličný význam, ale zvyčajne označuje fond (akumulované finančné prostriedky) financovaný prostredníctvom osobných úspor zamestnancov a príspevkov zo strany zamestnávateľov. Znamená to teda, že sa vopred vytvára súbor aktív za účelom pokrytia budúcich výplat dávok. Fungujúci penzijný fond je určený na napĺňanie tých potrieb zamestnancov, ktoré si štátny systém sociálneho zabezpečenia nemôže dovoliť. Pretože aktíva penzijnej schémy sa držia oddelene od zamestnávateľových prostriedkov, ponúka tento systém istú ochranu.

Penzijný fond je samostatnou finančnou inštitúciou, ktorá sa svojou podstatou pohybuje na rozhraní medzi poisťovacou spoločnosťou a investičným fondom. Jeho činnosť riadi obvykle investičná spoločnosť, komerčná banka alebo poisťovňa, prípadne verejná inštitúcia. Hlavnou príčinou, prečo sa tento typ fondov vyčlenil spomedzi ostatných inštitucionálnych investorov, je daňové zvýhodnenie, ktoré poskytuje každý štát buď pri platení príspevkov, alebo pri prijímaní dávok.

V súčasnosti penzijné fondy dominujú svetovým finančným trhom. Postavenie penzijných fondov vo vyspelých krajinách sveta, ako inštitúcií na zaistenie pracujúcich v starobe a zároveň ako veľkých finančných investorov, čoraz viac nadobúda na význame. Vlády štátov v nich vidia zdroj voľných finančných prostriedkov a prispievatelia nástroj na zhodnocovanie svojich vkladov.

Tieto systémy vytvárajú fondy značných objemov. Keby došlo k predčasnému rozpusteniu takejto penzijnej schémy, nazhromaždené peňažné fondy by mali byť dostatočné na to, aby sa fond vyrovnal v plnej výške so všetkými poistenými.
Rozoznávame dva základné typy penzijných fondov:

- príspevkovo definovaná penzijná schéma
- dávkovo definovaná penzijná schéma

1.2.1 Príspevkovo definovaná penzijná schéma

V príspevkovo definovanej penzijnej schéme sa vopred určia príspevky, ktoré účastníci penzijnej schémy platia do fondu. Ich výška môže byť určená ako pevná suma alebo ako podiel z príjmu poisteného, pričom časť príspevku môže prevziať zamestnávateľ poisteného.

Dávka (penzia) nie je vopred stanovená. Jej výška závisí od celkovej sumy príspevkov zaplatených do fondu a od podielu poistenca na výnosoch hospodárenia penzijnej schémy, teda na celkovej výške naakumulovaných prostriedkov na osobnom účte poistenca. Ak sú investičné výnosy slabé, zamestnanec dostáva nižšiu penziu. Pri vysokých investičných výnosoch sa platia menšie príspevky alebo sú tzv. príspevkové prázdniny.

1.2.2 Dávkovo definovaná penzijná schéma

Pri dávkovo definovanej penzijnej schéme zamestnanci presne vedia, akú vysokú penziu budú dostávať. Teda vopred sa určia dávky, ktoré budú vyplácané v budúcnosti. Spôsob, akým sa tieto dávky určujú, môže byť rôzny a závisí od konkrétneho penzijného fondu.

Napríklad:

- určená je absolútna výška dávky v peňažnom vyjadrení, najčastejšie v závislosti od počtu odpracovaných rokov,
- výška dávky je určená v závislosti od platu zamestnanca, resp. člena penzijnej schémy, a zvyčajne závisí aj od počtu odpracovaných rokov. Dávka môže byť stanovená na základe platu bezprostredne alebo počas určitého obdobia pred odchodom do dôchodku, alebo počas celého pracovného pomeru. Tieto rozličné spôsoby sa označujú ako schémy s konečným platom a schémy s priemerným platom.

Na základe dávky sa následne určí výška príspevkov, ktorú majú zamestnanci platiť do fondu. Výpočet výšky príspevkov v takto definovanej penzijnej schéme je zložitejší ako v príspevkovo definovanej penzijnej schéme. Závisí od mnohých činiteľov (investičné výnosy, inflácia,...) a určuje ju aktuár fondu.

Podiel dávkovo definovaných systémov na celkovom doplnkovom poistení je v každej krajine rôzny a môže závisieť od metódy používanej na financovanie dávkového systému a aj od veľkosti penzijnej schémy. Penzijné schémy s veľkým počtom členov sú skôr dávkovo definované, zatiaľ čo malé penzijné schémy sú častejšie príspevkovo definované.

V rámci penzijného poistenia sa penzijnou schémou môžu poskytovať rôzne dávky. Typy dávok závisia od krajiny, kde penzijná schéma pôsobí, od legislatívnych podmienok a zvyklostí. Dávky môžu mať formu dôchodku i jednorazového vyrovnania. Najčastejšie dávky vyplácané vo forme dôchodku sú starobný dôchodok, invalidný dôchodok a pozostalostný dôchodok (vdovský, sirotský). Jednorazové vyrovnanie sa často používa ako dávka v prípade úmrtia alebo vrátenie príspevkov pri odchode zo schémy.

2 Matematický úvod

Pre lepšie pochopenie ďalších úvah je potrebné krátke predstavenie základných matematických pojmov.

Matematické modely môžeme vo všeobecnosti rozdeliť na:

- diskrétne - premenná vyjadrujúca čas nadobúda diskrétne hodnoty. To znamená, že uvažujeme o časových okamihoch, ako deň, mesiac, rok a podobne.
- spojité - časová premenná nadobúda ľubovoľné hodnoty z daného časového intervalu

Možeme ich modelovať deterministiky alebo stochasticky. V deterministickom prístupe sú všetky premenné dané, prípadne sa dajú vypočítať. Stochastický pohľad znamená, že aspoň jedna premenná nadobúda hodnoty, ktoré dopredu nepoznáme, sú teda náhodné.

V našej práci sa zameriame na stochastický model penzijného fondu so spojitým časom, a to aj pre dávkovo definovaný penzijný fond, aj pre príspevkovo definovaný penzijný fond.

2.1 Stochastický proces

Ako je uvedené v [4], **stochastický proces** je parametrická množina náhodných premenných $\{X_t\}_{t\in T}$ definovaná na pravdepodobnostnom priestore (Ω, S, P). T sa nazýva indexová množina, pričom zvyčajne je to polouzavretý interval $[0, \infty)$.

Špeciálnym prípadom stochastického procesu je **Brownov pohyb** $w(t)$, ktorý má nasledovné vlastnosti:

1. $w(0) = 0$
2. $w(t) \sim N(0, t)$
3. $w(t+s)) - w(t) \sim N(0, s)$

Hovoríme, že stochastický proces $\{X_t\}_{t\in T}$ je **Markovov proces** (má Markovovskú vlastnosť), ak pre $\forall t > t_1 > \ldots > t_n$ a $j, j_1, \ldots, j_n$ platí:

$$P\left(X(t) = j | X(t_1) = j_1, \ldots, X(t_n) = j_n\right) = P\left(X(t) = j | X(t_1) = j_1\right).$$

To znamená, že budúca hodnota procesu nezávisí na minulom vývoji, ale iba na súčasnosti.

2.2 Itôva lema

V našich modeloch sa zameriame najmä na Itôve procesy. **Itôv proces** je stochastický proces X_t tvaru

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dw_s(\omega),$$

kde w_t je Brownov pohyb na (Ω, S, P). Niekedy sa táto formulácia uvádza v zjednodušenom tvare:

$$dX_t = udt + vdw_t,$$

kde u sa označuje ako drift a v volatilita.

Pre Itôve procesy platí **Itôva lema**, ktorej dôkaz (aj pre n-rozmerný prípad) môžeme nájsť v [4]. Táto lema hovorí:

Nech X_t je Itôv proces v tvare $X_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dw_t$ a nech $g(t,x) \in C^2([0,\infty), R)$. Potom $Y_t = g(t, X_t)$ je tiež Itôv proces a platí:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)dt. \tag{2.1}$$

Pre dva Itôve procesy v tvare $dX_t = \sigma_t dw_t + \mu_t dt$, $dY_t = \rho_t dw_t + r_t dt$ platí **súčinové pravidlo**, podľa ktorého

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t \rho_t dt. \tag{2.2}$$

2.3 Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnica

Predpokladajme, že máme systém X_t, ktorý má tvar Itôvho procesu:

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t,$$

kde $X_t \in R^n$, $b : R \times R^n \times U \to R^n$, $\sigma : R \times R^n \times U \to R^{n\times m}$ a B_t je m-rozmerný Brownov pohyb. Nech $U \subset R^k$ je Borelovská množina, potom $u_t \in U$ je parameter, ktorým môžeme v okamihu t riadiť proces X_t.
Označme si $Y_t = (s+t, X_{s+t})$ pre $t \geq 0$. Potom dostaneme rovnicu

$$dY_t = b(Y_t, u_t)dt + \sigma(Y_t, u_t)dB_t.$$

Definujme si produkčnú funkciu ako strednú hodnotu úžitkovej funkcie $F(Y_t, u(Y_t))$ a od funkcie koncového stavu $K(Y_T)$:

$$J^u(y) = E^y\left[\int_0^T F(Y_s, u(Y_s))ds + K(Y_T)\right].$$

Našou úlohou je pre $\forall y \in G$ nájsť číslo $\phi(y)$ a riadenie $u^*(y)$ tak, aby platilo:

$$\phi(y) := \sup_{u(y)} J^u(y) = J^{u^*}(y).$$

Potom riadenie u^* nazývame optimálnym riadením a ϕ hodnotovou funkciou.

Na riešenie tohto problému môžeme použiť **Hamilton-Jacobi-Bellmanovu rovnicu** (HJB), ktorej dôkaz je uvedený v [3] a [4]:

Majme daný problém

$$\phi(y) = \sup_u (J^u(y); u = u(Y) \text{ je Markovovské riadenie}).$$

Predpokladajme, že $\phi \in C^2(G)$ je ohraničená pre všetky $y \in G$ a optimálne Markovovské riadenie u^* existuje. Potom platí:

$$\sup_{v \in U} (F^v(y) + (L^v \phi)(y)) = 0 \qquad \textit{pre} \quad \forall y \in G \tag{2.3}$$

a

$$\phi(y) = K(y) \qquad \textit{pre} \quad \forall y \in G,$$

kde

$$(L^v \phi)(y) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(y) + \sum_{i=1}^{n} b_i(y,v) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y,v) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j},$$

pričom $a_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma \sigma^T)_{ij}$.

Suprémum v (2.3) získame, ak $v = u^*(y)$, kde $u^*(y)$ je optimálne. Inými slovami:

$$F(y, u^*(y)) + (L^{u^*(y)} \phi)(y) = 0 \qquad \textit{pre} \quad \forall y \in G. \tag{2.4}$$

3 Stochastický model dávkovo definovaného penzijného fondu

V ďalšej časti budeme vychádzať zo stochastického modelu dávkovo definovaného penzijného fondu so spojitým časom, ktorý je uvedený v [1]. Vezmeme do úvahy Markovovské riadiace stratégie, ktorých budúca hodnota nezávisí na minulom vývoji, ale iba na súčasnosti.

Označme si $X(t)$ výšku penzijného fondu v čase t. Príjmy do fondu sú tvorené príspevkami zamestnancov (poistencov), výdavky fondu predstavujú vyplácanie dávok (penzií). Výšku fondu v čase t môžu ovplyvniť aj investičné výnosy, prípadne straty. Všeobecný tvar takéhoto modelu je:

$$dX(t) = X(t)d\delta_X(t, X(t)) + c(t)dt - Bdt - \sigma_b dZ_b(t), \tag{3.1}$$

kde:

$X(t)$	=	veľkosť fondu v čase t
$d\delta_X(t, X(t))$	=	návratnosť fondu v čase $(t, t + dt)$
$c(t)$	=	$c(t, X(t))$ = miera platených príspevkov
B	=	očakávaná výška vyplácaných dávok
σ_b	=	volatilita vyplácaných dávok
$Z_b(t)$	=	štandardný Brownov pohyb

Keďže uvažujeme dávkovo definovaný penzijný fond, výška dávky je presne stanovená, pričom počítame s určitou volatilitou pri ich vyplácaní.

Prvým spôsobom, ako môžeme ovplyvniť zmenu výšky fondu, je cez mieru výšky príspevkov platených do fondu $c(t, X(t))$. Základný princíp na určenie tejto príspevkovej miery berie do úvahy výšku prebytku alebo straty penzijného fondu (rozdiel medzi príjmami a záväzkami). Príspevková miera sa môže znížiť v období, keď fond vykazuje prebytok, a v období straty sa môže zvýšiť. Úlohou aktuára (správcu) fondu je určiť optimálnu príspevkovú mieru pri rôznych veľkostiach fondu.

Príspevková miera je až na určité obmedzenia veľmi flexibilná. Tieto obmedzenia sa dotýkajú priamo príspevkovej miery, alebo ohraničujú veľkosť fondu, čím sa nepriamo mení aj výška príspevkovej miery. Takýmito ohraničeniami môžu byť napr.:

- Požiadavka na udržiavanie veľkosti fondu nad určitou minimálnou hranicou. Ak fond klesne pod túto hranicu, považuje sa to ako strata.

- Požiadavka na maximálnu veľkosť fondu. Po prekročení tejto hodnoty sa musia prostriedky vrátiť prispievateľom, prípadne sa zvýšia vyplácané dávky.
- Prispievatelia môžu požadovať, aby príspevková miera nepresiahla určitú maximálnu hodnotu.

Ďalší spôsob riadenia fondu je cez rozdelenie prostriedkov fondu medzi aktíva, ktoré sa vyskytujú na trhu. Vezmeme do úvahy výskyt jedného bezrizikového aktíva (alebo hotovosť) a n rizikových aktív, ktoré majú návratnosť δ_i.
Bezrizikové aktívum R_0 má v čase t hodnotu

$$R_0(t) = R_0(0)e^{\delta_0 t}.$$

Rizikové aktívum R_i sa riadi geometrickým Brownovým pohybom:

$$\frac{dR_i(t)}{R_i} = d\delta_i(t) = \delta_i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dZ_j(t) \quad \text{pre} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

Tento vzťah môžeme napísať vo vektorovom tvare pre n rizikových aktív:

$$d\delta(t) = \delta dt + SdZ \tag{3.3}$$

kde:

$$\begin{aligned}
d\delta(t) &= (d\delta_1(t), \ldots, d\delta_n(t))^T \\
\delta &= (\delta_1, \ldots, \delta_n)^T \\
S &= (\sigma ij)_{i,j=1}^{n} \quad \text{je kovariančná matica} \\
dZ &= (dZ_1, \ldots, dZ_n)^T \\
Z(t) &= \text{n-rozmerný Brownov pohyb.}
\end{aligned}$$

Definujme si vektor $\lambda = (\lambda_i, \ldots, \lambda_n)^T$, kde $\lambda_i = \delta_i - \delta_0$ je riziková prémia prislúchajúca aktívu i. Predpokladajme, že $\delta_i > \delta_0 \quad \forall i \geq 1$, teda, že investori sú odmeňovaní vyššou návratnosťou za prebratie určitého rizika.

Výška prostriedkov fondu, ktoré sú investované do aktív, je pre aktívum i určená váhou $p_i(t, X(t))$. Pre jednotlivé váhy platí nasledovná rovnosť $\sum_{i=0}^{n} p_i(t, X(t)) = 1$. Váhy rizikových aktív budeme označovať vektorom p :

$$p = p(t, X(t)) = (p_1(t, X(t)), \ldots, p_n(t, X(t)))^T.$$

Výšku prostriedkov investovanú do bezrizikového aktíva môžeme napísať vzťahom $p_0(t, X(t)) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i(t, X(t))$. Návratnosť fondu z celkových investícií má na základe týchto úvah tvar:

$$d\delta_X = (1 - \sum_{i=1}^{n} p_i)\delta_0 dt + \sum_{i=1}^{n} p_i d\delta_i(t) = \delta_0 dt + p^T \lambda dt + p^T S dZ.$$

Rovnicu základného modelu (3.1) môžeme potom prepísať do tvaru:

$$dX(t) = X(t)(\delta_0 + p^T \lambda)dt + (c(t) - B)dt + X(t)p^T S dZ - \sigma_b dZ_b(t).$$

3.1 Hodnotová funkcia a optimálne riadiace stratégie

Podľa princípu ekvivalencie, ktorý je jedným zo základných princípov využívaných v poisťovníctve, sa celková hodnota očakávaných príjmov poisťovne musí rovnať celkovej hodnote očakávaných výdavkov, ak príjmy a výdavky diskontujeme k rovnakej časovej základni. V priebehu poistenia však táto rovnosť neplatí. Preto poisťovňa musí vytvárať rezervy, z ktorých čerpá v prípade vysokých výdavkov. Poistná rezerva je teda suma, ktorú musí poisťovňa nahromadiť z prebytkov a úrokov v prvých rokoch poistenia tak, aby mohla plniť svoje záväzky aj v budúcnosti.

Hodnotu penzijného fondu na základe týchto úvah môžeme chápať ako prospektívnu rezervu, ktorá sa určí ako stredná hodnota straty fondu (rozdiel súčasnej hodnoty budúcich výdavkov a súčasnej hodnoty budúcich príjmov fondu).

Definujme si hodnotovú funkciu $W(t,x)(c,p)$ pre všeobecné riadenie penzijného fondu v tvare:

$$W(t,x)(c,p) = E\left[\int_t^{\infty} e^{-\beta s} L(s, c(s, X(s)), X(s)) ds \mid X(t) = x\right] \tag{3.4}$$

kde $e^{-\beta s}$je diskontná funkcia a $L(s,c,x)$ je stratová funkcia poisťovne daná v čase s. Pre poisťovňu je výhodnejšie mať poistnú rezervu čo najmenšiu. Vtedy očakáva dostatočné príjmy, aby mohla pokryť svoje výdavky. Z tohto dôvodu chceme hodnotovú funkciu $W(t,x)(c,p)$ minimalizovať a to vzhľadom na riadiace stratégie $c(t, X(t))$ a $p(t, X(t))$, teda vzhľadom na príspevkovú mieru a na spôsob investícií prostriedkov fondu do jednotlivých aktív. Tým získame optimálne hodnoty týchto stratégií. Označme si

$$V(t,x) = inf_{(c,p)} W(t,x)(c,p) = W(t,x)(c^*, p^*)$$

za predpokladu, že optimálne riadiace stratégie c^* a p^* existujú. Na riešenie tohto problému môžeme použiť Hamilton-Jacobi-Bellmanovu rovnicu (2.3), na základe ktorej dostaneme nasledovnú rovnosť:

$$0 = \inf_{(c,p)} \left(e^{-\beta t} L(t,c,x) + V_t + [(\delta_0 + p^T \lambda)x + c - B]V_x + \frac{1}{2} V_{xx}(x^2 p^T D p + \sigma_b^2) \right), \tag{3.5}$$

kde $D = SS^T$.

Zderivovaním výrazu v zátvorkách podľa stratégií c a p dostaneme rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial c}(.) = e^{-\beta t} L_c + V_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(.) = \lambda x V_x + D p x^2 V_{xx} = 0,$$

z ktorých môžeme určiť hodnoty optimálnych stratégií c^* a p^*.

$$c^*(t,x) = L_c^{-1}(-e^{\beta t} V_x) \tag{3.6}$$

$$p^*(t,x) = -\left(\frac{V_x}{x V_{xx}} \right) D^{-1} \lambda. \tag{3.7}$$

Z tvaru stratégie p^* vidíme, že výška prostriedkov investovaná do rizikových aktív zostáva v rovnakom pomere. Môžeme si definovať špeciálne portfólio zložené z n rizikových aktív v pomere $D^{-1}\lambda$. Pre ľubovoľnú hodnotu fondu x budeme $\tilde{p}(x) = e^T p^*(x)$ (kde $e^T = (1, \dots, 1)$ je jednotkový vektor) držať v tomto portfóliu a $(1 - \tilde{p}(x))$ investujeme do bezrizikového aktíva.

Presný tvar funkcie $V(t,x)$ nepoznáme, vyjadrili sme iba tvar stratégií c^* a p^* pomocou danej funkcie. Tiež je nevyhnutné, aby stratová funkcia $L(t,c,x)$ bola striktne konvexná podľa premennej c, čo zaručí, že existuje inverzná funkcia L_c^{-1}.

V každom penzijnom fonde nadobúda strata rôznu formu, preto sa v ďalšej časti zameriame na špeciálne tvary stratovej funkcie $L(t,c,x)$, a to v tvare kvadratickej, mocninovej a exponenciálnej funkcie.

3.2 Kvadratický tvar stratovej funkcie

V tejto časti budeme uvažovať kvadratický tvar stratovej funkcie. Tento tvar stratovej funkcie je uvedený v [1]:

$$L(t,c,x) = (c - c_m)^2 + 2\rho(c - c_m)(x - x_p) + (k + \rho^2)(x - x_p)^2, \tag{3.8}$$

kde $k \geq 0$. Hodnota konštanty c_m vyjadruje maximálnu prijateľnú alebo optimálnu príspevkovú mieru, ktorú sú prispievatelia ochotní platiť. Konštanta x_p vyjadruje dolnú hranicu veľkosti fondu. Ak fond klesne pod túto hranicu, považuje sa to ako deficit. Hodnota $(x - x_p)$ je prebytok fondu vzhľadom k tomuto ohraničeniu. Prvá derivácia funkcie straty má tvar $L_c = 2(c - c_m) + 2\rho(x - x_p)$. Vyjadrením inverznej funkcie k prvej derivácii v bode $-e^{-\beta t}V_x$ dostaneme optimálnu hodnotu riadiacej stratégie c^*. Teda platí:

$$c^* = L_c^{-1}(-e^{\beta t}V_x) = c_m - \rho(x - x_p) - \frac{1}{2}e^{\beta t}V_x.$$

Na základe tvaru optimálnych stratégií c^* a p^* a ich vlastností (Markovovskosť a homogénnosť v čase), môžeme funkciu $V(t,x)$ hľadať v tvare $V(t,x) = e^{-\beta t}F(x)$. Po dosadení tohto tvaru funkcie $V(t,x)$ a tiež optimálnych stratégií c^* a p^* do Hamilton-Jacobi-Bellmanovej rovnice (3.5) dostaneme nasledovnú rovnosť:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{4}F_x^2 + k(x - x_p)^2 - \beta F + (\delta_0 x - B)F_x - \lambda^T D^{-1}\lambda\frac{F_x^2}{F_{xx}} + \\ +(c_m - \rho(x - x_p) - \frac{1}{2}F_x)F_x + \frac{1}{2}F_{xx}\left[\frac{F_x^2}{F_{xx}^2}\lambda^T D^{-1}\lambda + \sigma_b^2\right]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Keďže uvažujeme prípad kvadratickej funkcie straty, aj funkciu $F(x)$ budeme hľadať v kvadratickom tvare $F(x) = Px^2 + Qx + R$. Po dosadení tohto tvaru funkcie $F(x)$ do rovnice (3.9) dostaneme rovnicu:

$$\begin{aligned} 0 = {} & x^2[-P^2 + k - \beta P + 2P\delta_0 - P\varepsilon - 2\rho P] + \\ & +x[-PQ - 2kx_p - \beta Q - 2PB + Q\delta_0 - Q\varepsilon - \rho Q + 2P(c_m + \rho x_p)] + \\ & + \left[-\frac{1}{4}Q^2 + kx_p^2 - \beta R - BQ - \frac{Q^2\varepsilon}{4P} + (c_m + \rho x_p)Q + P\sigma_b^2\right], \end{aligned} \tag{3.10}$$

kde $\varepsilon = \lambda^T D^{-1}\lambda$.

Porovnaním koeficientov pri kvadratickom, lineárnom a absolútnom člene rovnice (3.10) dostaneme optimálne hodnoty pre koeficienty funkcie $F(x)$, ktoré sú závislé od veľkosti konštanty k.

Keď položíme koeficienty pri kvadratickom člene rovnice (3.10) rovné nule, dostaneme kvadratickú rovnicu pre P. Obmedzíme sa na kladný koreň tejto rovnice, čo nám zabezpečí, že funkcia $F(x)$ bude konvexná:

$$P(k) = \frac{\hat{P} + \sqrt{\hat{P}^2 + 4k}}{2}, \tag{3.11}$$

kde $\hat{P} = 2\delta_0 - \beta - \varepsilon - 2\rho$.

Hodnoty parametrov Q a R majú nasledovný tvar:

$$Q(k) = \frac{2[P(k)(B - c_m - \rho x_p) + kx_p]}{-P(k) + \delta_0 - \beta - \varepsilon - \rho} \tag{3.12}$$

$$R(k) = \frac{1}{\beta}\left[-\frac{1}{4}Q(k)^2 + kx_p^2 - BQ(k) - \frac{Q(k)^2\varepsilon}{4P(k)} + (c_m + \rho x_p)Q(k) + P(k)\sigma_b^2\right]. \tag{3.13}$$

Funkciu $F(x)$ s koeficientami vyjadrenými v rovniciach (3.11), (3.12) a (3.13) dosadíme do rovníc (3.6) a (3.7) a dostaneme optimálne hodnoty stratégií c^* a p^* pri kvadratickom tvare stratovej funkcie $L(t, c, x)$ a funkcie $F(x)$:

$$c^* = c_m - \rho(x - x_p) - \frac{1}{2}(2P(k)x + Q(k)) \tag{3.14}$$

$$p^* = -\frac{(2P(k)x + Q(k))}{2P(k)x}D^{-1}\lambda. \tag{3.15}$$

Poznamenajme, že pri veľkosti fondu $x = -Q(k)/2P(k)$ dostaneme $p^*(x) = 0$. To znamená, že budeme investovať len do bezrizikového aktíva. Všimnime si tiež, že funkcia $F(x)$ nadobúda minimum v rovnakom bode $x = -Q(k)/2P(k)$, ktorý môžeme označiť ako x_{min}. Tento bod sa uvádza ako určitá miera, hranica, ktorú fond nemôže prekročiť. V tomto bode začína hodnotová funkcia rásť, teda pri ďalšom zvyšovaní veľkosti fondu, by sa zväčšovala aj hodnota funkcie $F(x)$. Koeficienty $P(k)$ a $Q(k)$ nezávisia na hodnote volatility σ_b, teda ani optimálne riadiace stratégie c^* a p^* nezávisia na tejto hodnote.

Optimálna stratégia c^*, ako vidíme z rovnice (3.14), je klesajúcou funkciou premennej x. Ak fond vzrastie, optimálna výška príspevkov platených do tohto fondu klesne. Teda pri veľkých fondoch máme dostatok prostriedkov na vyplatenie dávok a nemusíme požadovať vysoké príspevky od prispievateľov.

Podobne je to aj pri optimálnej stratégii p^*, ktorá je tiež klesajúcou funkciou veľkosti fondu x. Pri väčších fondoch nemusíme investovať do rizikových aktív, ktoré prinášajú vyšší výnos. Aby sme dosiahli požadovanú hodnotu fondu, ktorá je schopná zabezpečiť vyplatenie dávok, postačí nám aj výnos z bezrizikového aktíva.

Konkrétne hodnoty optimálnych stratégií c^*, p^* a funkcie $F(x)$ sme hľadali pre nasledovné hodnoty parametrov. Rozdelili sme ich na fixné parametre a riadiace parametre. V rámci riadiacich parametrov sme uvažovali jednotkový dôchodok s nulovou volatilitou.

Fixné parametre:

$$\delta_0 = 0.03, \quad \delta = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.06 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad B = 1, \quad \sigma_b = 0 \tag{3.16}$$

Riadiace parametre:

$$c_m = 0.6, \quad k = 0.001, \quad \beta = 0.03, \quad \rho = 0 \tag{3.17}$$

V nasledovných tabuľkách sú pre rozličné hodnoty riadiacich parametrov uvedené hodnoty parametrov funkcie $F(x)$, výška fondu, pri ktorej funkcia $F(x)$ nadobúda minimum a tiež hodnoty optimálnych stratégií c^* a $\tilde{p} = e^T p^*$ (e=(1,...,1) je jednotkový vektor) pri konkrétnej veľkosti fondu. Tieto hodnoty sme získali pomocou programu, ktorý sme programovali v softvére Mathematica. Program je uvedený v prílohe (Program 1).

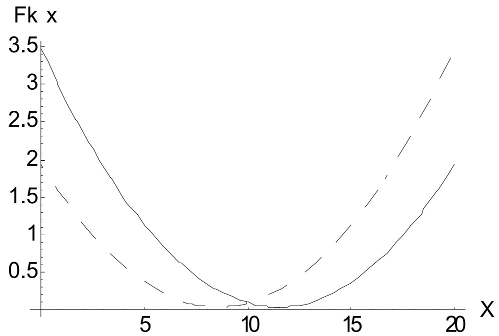
Tabuľka 1. Hodnoty parametrov a minimálnej hodnoty pre funkciu F(x) v kvadratickom tvare

c_m	k	x_p	β	$P(k)$	$Q(k)$	$R(k)$	x_{min}
0,6	0,001	10	0,03	0,0357	-0,8383	5,0139	11,725
0,8	0,001	10	0,03	0,0357	-0,5917	2,5472	8,275
0,6	0,002	10	0,03	0,0488	-1,113	6,4809	11,4084
0,8	0,002	10	0,03	0,0488	-0,8382	3,7329	8,5916
0,6	0,001	15	0,03	0,0357	-1,0108	7,1701	14,1375
0,6	0,001	10	0,05	0,0261	-0,5983	3,4724	11,4637

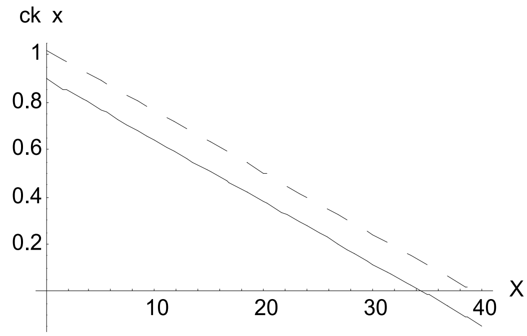
Tabuľka 2. Hodnoty optimálnych stratégií pre kvadratický tvar stratovej funkcie

c_m	k	x_p	β	$F(x_{min})$	$c^*(4)$	$\tilde{p}(4)$
0,6	0,001	10	0,03	0,0992	0,8762	2,575
0,8	0,001	10	0,03	0,0992	0,9528	1,425
0,6	0,002	10	0,03	0,1322	0,9614	2,4695
0,8	0,002	10	0,03	0,1322	1,024	1,5305
0,6	0,001	15	0,03	0,0248	0,9624	3,3792
0,6	0,001	10	0,05	0,0428	0,7948	2,488

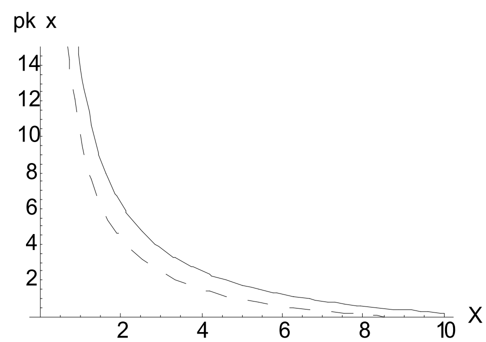
Ak zmeníme hodnotu parametra c_m z 0,6 na 0,8, funkcia $F(x)$ sa posunie smerom doľava a hodnota x_{min} sa zníži z 11,725 na 8,725 (obr. 1). Teda fond udržiava svoju výšku pod touto hranicou. Hodnota optimálnych príspevkov platených do fondu $c^*(t)$ pri tejto zmene maximálnej príspevkovej miery vzrastie (obr. 2). Optimálna stratégia $\tilde{p}$ v tomto prípade poklesne (obr. 3). Ak sa zvýši maximálna prijateľná príspevková miera, výška prostriedkov investovaných do rizikových aktív sa zníži. Keďže získame vyššie príjmy z príspevkov poistencov, nemusíme investovať do rizikových aktív, ktoré prinášajú vyššie výnosy. Postačia nám výnosy z bezrizikového aktíva.



Obr. 1: Funkcia $F(x)$ pri zmene parametra c_m (plná $c_m = 0,6$, prerušovane $c_m = 0,8$)



Obr. 2: Optimálna príspevková miera $c^*(x)$ (plná $c_m = 0,6$, prerušovane $c_m = 0,8$)



Obr. 3: Optimálna stratégia $\tilde{p}(x)$ (plná $c_m = 0,6$, prerušovane $c_m = 0,8$)

Ak zvýšime dolnú hranicu veľkosti fondu x_p z 10 na 15, zníži sa aj hodnota funkcie $F(x_{min})$ z 0,0992 na 0,0248. Pri udržiavaní veľkosti fondu nad čo najvyššou hranicou, predpokladáme, že máme dostatok prostriedkov na budúce výdavky a budeme potrebovať nižšiu rezervu. Na druhej strane sa zvýši optimálna príspevková miera a tiež výška prostriedkov investovaných do rizikových aktív. Ak udržiavame veľkosť fondu nad vyššou hranicou, je potrebné, aby sme si zabezpečili aj vyššie príjmy.

3.3 Mocninový tvar stratovej funkcie

V tejto časti budeme uvažovať stratovú funkciu $L(t, c, s)$ v tvare mocninovej funkcie s dvoma parametrami c_m a γ:

$$L(t, c, x) = \begin{cases} -\frac{1}{\gamma}(c_m - c)^\gamma & \text{pre} \quad c \leq c_m \\ +\infty & \text{pre} \quad c > c_m \end{cases}$$

$$\textit{pre} \quad 0 < \gamma < 1. \tag{3.18}$$

Tak isto ako pri kvadratickom tvare stratovej funkcie, aj v tomto prípade parameter c_m označuje maximálnu prijateľnú príspevkovú mieru, ktorú sú prispievatelia do fondov ochotní platiť.

Opäť budeme uvažovať hodnotovú funkciu v tvare $V(t, x) = e^{-\beta t}F(x)$. Vyjadrením druhej derivácie stratovej funkcie overíme jej konvexnosť a teda aj existenciu inverznej funkcie k prvej derivácii stratovej funkcie. Hodnota optimálnej stratégie c^* z rovnice (3.6) bude mať pre mocninový tvar stratovej funkcie tvar:

$$c^* = c_m - (-F_x)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Tento tvar optimálnej stratégie c^*, optimálnu stratégiu p^* z rovnice (3.7) a funkciu $V(t, x)$ dosadíme do do Hamilton-Jacobi-Bellmanovej rovnice (3.5). Dostaneme nasledovnú rovnicu:

$$-\frac{1}{\gamma}(-F_x)^{\gamma/(\gamma-1)} - \beta F + (\delta_0 x + c_m - B)F_x - \frac{1}{2}\frac{F_x^2}{F_{xx}}\lambda^T D^{-1}\lambda = 0. \tag{3.19}$$

Túto rovnicu budeme riešiť pre mocninový tvar funkcie $F(x) = -k(x - x_m)^\alpha$, ktorá má tri parametre. Tento tvar funkcie $F(x)$ dosadíme do predchádzajúcej rovnice (3.19), čím vznikne rovnosť:

$$(k\alpha)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(x - x_m)^{\frac{(\alpha-1)\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) + \beta k(x - x_m)^\alpha -$$

$$-\delta_0\left(x - \frac{B - c_m}{\delta_0}\right)k\alpha(x - x_m)^{\alpha-1} + \frac{1}{2}\frac{k\alpha}{\alpha - 1}(x - x_m)^\alpha\lambda^T D^{-1}\lambda = 0$$

Ak chceme porovnať koeficienty rovnice pri výrazoch obsahujúcich premennú x, zvolíme si nasledovné hodnoty parametrov x_m a α:

$$x_m = \frac{B - c_m}{\delta_0} \tag{3.20}$$

$$\alpha = \gamma. \tag{3.21}$$

Týmto obmedzením dostaneme v celej rovnici rovnaký výraz obsahujúci neznámu x a to $(x-x_m)^\alpha$. Porovnaním koeficientov pri tomto výraze dostaneme hodnotu tretieho parametra v tvare:

$$k = \frac{1}{\gamma} c_1^{\gamma-1}, \tag{3.22}$$

kde

$$c_1 = \left(\frac{\beta - \delta_0\gamma + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\lambda^T D^{-1}\lambda}{1-\gamma} \right).$$

Tieto hodnoty parametrov platia pre špeciálnu hodnotu volatility vyplácaných dávok $\sigma_b = 0$.

Spätným dosadením týchto parametrov funkcie $F(x)$ do rovníc pre optimálne riadiace stratégie c^* a p^* dostaneme hodnotu týchto stratégií pre mocninový tvar stratovej funkcie $L(t,c,x)$ a funkcie $F(x)$:

$$c^*(x) = c_m - \left(\frac{\beta - \delta_0\gamma + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\lambda^T D^{-1}\lambda}{1-\gamma} \right)(x - x_m) \tag{3.23}$$

$$p^*(x) = D^{-1}\lambda \frac{(x-x_m)}{(1-\gamma)x}. \tag{3.24}$$

Optimálna stratégia c^* je aj v tomto prípade, podobne ako pri kvadratickom tvare, klesajúcou funkciou premenej x. S narastajúcim fondom teda požadujeme nižšiu príspevkovú mieru.

Na rozdiel od kvadratickej funkcie, v tomto prípade je optimálna stratégia rozdelenia prostriedkov medzi aktíva p^* rastúcou funkciou veľkosti fondu x. Keď vlastníme viac prostriedkov, môžeme si dovoliť viac riskovať. Prípadná strata je pre nás v porovnaní s veľkosťou fondu pomerne malá. Na menší fond má strata výraznejší vplyv a preto radšej investujeme do bezpečnejšieho bezrizikového aktíva.

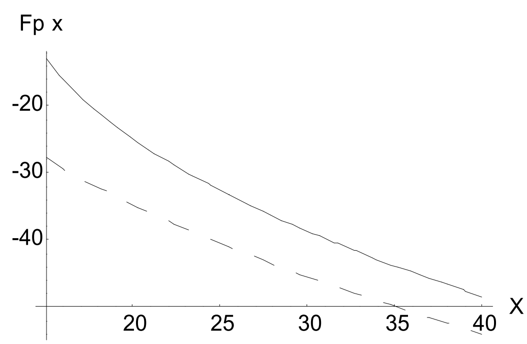
V nasledovnej tabuľke sú uvedené hodnoty parametrov funkcie $F(x)$ a hodnoty optimálnych stratégií c^* a p^* pre konkrétnu veľkosť fondu.

Tabuľka 3. Hodnoty parametrov funkcie F(x) a optimálnych stratégií pre mocninový tvar stratovej funkcie

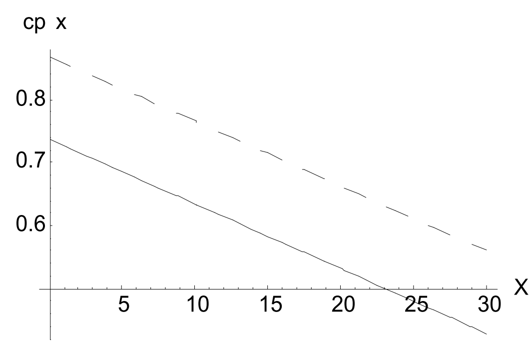
c_m	γ	β	x_m	α	c_1	k	$F(20)$	$c^*(20)$	$\tilde{p}(20)$
0,6	0,48	0,03	13,333	0,48	0,01028	22,522	-55,9865	0,5315	0,8547
0,8	0,48	0,03	6,6667	0,48	0,01028	22,522	-78,0868	0,663	1,7094
0,6	0,2	0,03	13,3333	0,2	0,02653	91,203	-133,288	0,4231	0,5556
0,8	0,2	0,03	6,6667	0,2	0,02653	91,203	-153,108	0,4463	1,1111
0,6	0,48	0,05	13,333	0,48	0,04874	10,0246	-24,92	0,2751	0,8547

Tieto hodnoty sme vyjadrili pre rovnaké hodnoty fixných parametrov, ako boli uvedené pri kvadratickej stratovej funkcii v rovnici (3.16). Hodnoty riadiacich parametrov sme menili tak, ako je to uvedené v tabuľke.

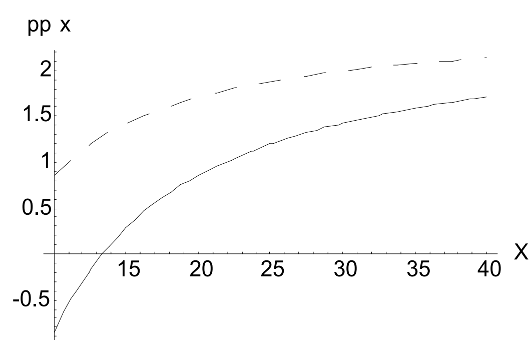
Zvýšením hodnoty maximálnej príspevkov miery c_m z hodnoty 0,6 na 0,8, hodnota funkcie $F(x)$ (obr. 4) klesne, ale hodnota optimálnej stratégie $c^*(x)$ sa zvýši (obr. 5). Teda ak sú prispievatelia do fondu ochotní platiť vyššiu sumu, zvýši sa aj optimálna príspevková miera. Nárastom príspevkov do fondu klesne požadovaná rezerva, ktorú fond potrebuje na vyplácanie budúcich výdavkov. Pri tejto zmene maximálnej príspevkovej miery vzrastie aj veľkosť prostriedkov investovaných do rizikových aktív (obr. 6).



Obr. 4: Funkcia $F(x)$ pri zmene parametra c_m (plná $c_m = 0,6$, prerušovane $c_m = 0,8$)



Obr. 5: Optimálna príspevková miera $c^*(x)$ (plná $c_m = 0,6$, prerušovane $c_m = 0,8$)



Obr. 6: Optimálna stratégia $\tilde{p}(x)$ (plná $c_m = 0,6$, prerušovane $c_m = 0,8$)

Pri poklese parametra γ z hodnoty 0.48 na 0.2 viditeľne poklesne aj hodnota funkcie $F(x)$. Funkcia optimálnej stratégie $c^*(x)$ zmení svoj sklon a bude vzhľadom k premennej x klesať rýchlejšie. Pri vyšších hodnotách fondu, budú prispievatelia platiť nižšie príspevky a naopak, pri nižších hodnotách fondu, budú tieto optimálne príspevky vyššie. Optimálne rozdelenie prostriedkov medzi rizikové aktíva $\tilde{p}(x)$ v tomto prípade klesne.

3.4 Exponenciálny tvar stratovej funkcie

V tejto podkapitole sa sústredíme na exponenciálny tvar stratovej funkcie s dvoma parametrami γ a θ. Parameter γ určuje, ako ovplyvňujú príspevky stratu fondu a parameter θ definuje určitú mieru výdavkov fondu. Stratová funkcia má potom nasledovný tvar:

$$L(t,c,x) = e^{\gamma c - \theta x}, \tag{3.25}$$

kde $\gamma > 0$ a $\theta > 0$.

Rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch aj pri exponenciálnom tvare stratovej funkcie budeme uvažovať funkciu $V(t,x)$ v tvare $V(t,x) = e^{-\beta t} F(x)$. Krátkym overením druhej derivácie stratovej funkcie $L(t,c,x)$ podľa premennej c zistíme, že funkcia je konvexná, teda spĺňa našu požiadavku a môžeme bez problémov vyjadriť optimálnu stratégiu c^* z (3.6) rovnicou:

$$c^* = \frac{1}{\gamma}\left(\theta x + \ln\left(-\frac{F_x}{\gamma}\right)\right).$$

Stratégiu p^* z rovnice (3.7) môžeme pomocou funkcie $F(x)$ vyjadriť v nasledovnom tvare:

$$p^* = -\left(-\frac{F_x}{xF_{xx}}\right) D^{-1}\lambda.$$

Funkciu $F(x)$ budeme v tomto prípade hľadať v tvare exponenciály, podobne ako je to pri stratovej funkcii:

$$F(x) = e^{(a-bx)}. \tag{3.26}$$

Po dosadení tohto tvaru funkcie $F(x)$ a tiež optimálnych hodnôt c^* a p^* z predchádzajúcich rovníc do Hamilton-Jacobi-Bellmanovej rovnice (3.5) dostaneme rovnicu:

$$0 = -x\left(\frac{b(\theta+\gamma\delta_0)}{\gamma} - \frac{b^2}{\gamma}\right) + b\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\beta}{b} + B - \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{b}{\gamma}\right) - \frac{a}{\gamma}\right) - \frac{1}{2}\lambda^T D^{-1}\lambda + \frac{b^2}{2}\sigma_b^2.$$

Keď položíme koeficienty lineárneho člena tejto rovnice rovné 0, dostaneme rovnicu, z ktorej vyjadríme hodnotu parametra b v tvare:

$$b = \gamma\delta_0 + \theta. \tag{3.27}$$

Porovnaním koeficientov absolútneho člena HJB rovnice dostaneme hodnotu parametra a:

$$a = \ln\frac{\gamma}{b} + \frac{-\beta + bB + \frac{b}{\gamma} - \frac{1}{2}\lambda^T D^{-1}\lambda + \frac{b^2}{2}\sigma_b^2}{\frac{b}{\gamma}}. \tag{3.28}$$

Dosadením týchto parametrov do rovníc pre optimálne riadiace stratégie a tiež využitím exponenciálneho tvaru funkcie $F(x)$ dostaneme hodnoty optimálnych stratégií pre stratovú funkciu $L(t, c, x)$ v exponenciálnom tvare:

$$p^*(x) = \frac{1}{xb}D^{-1}\lambda \tag{3.29}$$

$$c^*(x) = \frac{-\beta + bB + \frac{b}{\gamma} - \frac{1}{2}\lambda^T D^{-1}\lambda + \frac{b^2}{2}\sigma_b^2}{b} - \delta_0 x. \tag{3.30}$$

Všimnime si, že aj v tomto prípade je optimálna príspevková miera c^* klesajúcou funkciou veľkosti fondu x. Teda pri vyšších fondoch potrebujeme nižšiu mieru príspevkov, aby sme zabezpečili požadovanú veľkosť fondu a schopnosť vyplácať vopred určené dávky.

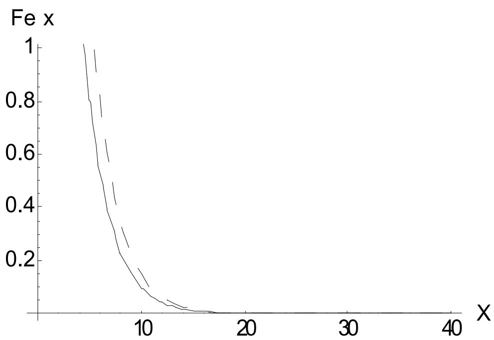
Optimálne rozdelenie prostriedkov fondu medzi aktíva p^* s narastajúcou výškou fondu klesá, podobne ako pri kvadratickom tvare stratovej funkcie. Pri vyšších fondoch neriskujeme a neinvestujeme vysoké sumy do rizikových aktív, ale postačí nám výnos z bezrikového aktíva.

Tabuľka 4. Hodnoty parametrov pre funkciu F(x) a optimálne hodnoty riadiacich stratégií pre exponenciálny tvar stratovej funkcie

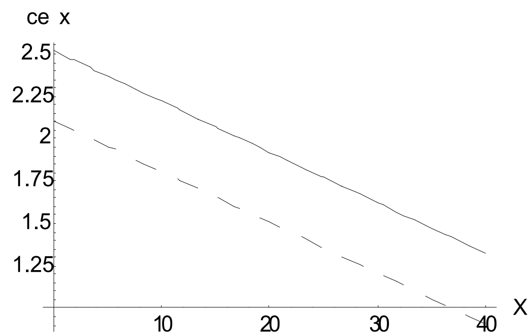
γ	θ	β	a	b	$F(20)$	$c^*(4)$	$\tilde{p}(4)$
0,6	0,4	0.03	1,9024	0,418	0,1025	2,4483	0,7974
0,8	0,4	0.03	2,3573	0,424	0,1522	2,033	0,7862
0,6	0,8	0.03	1,1479	0,918	0,000325	2,5019	0,3631
0,8	0,8	0.03	1,6203	0,924	0,000491	2,0855	0,3608
0,6	0,4	0,05	1,8737	0,418	0,0996	2,4005	0,7974

Konkrétne hodnoty parametrov a a b a funkcie $F(x)$ sme hľadali rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch pre fixné parametre uvedené v (3.16). Parametre γ a θ nadobúdajú rozličné hodnoty, ako vidíme v tabuľke, čím sme zisťovali vplyv týchto parametrov na funkciu $F(x)$ a na optimálne riadiace stratégie c^* a p^*. Funkcie $F(x)$, $c^*(x)$ a $\tilde{p}(x)$ sme na porovnanie vyčíslili pre konkrétnu hodnotu fondu.

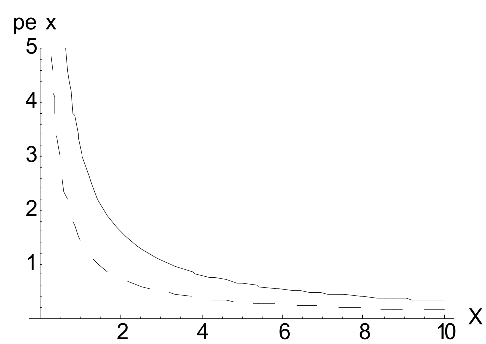
Zvýšením hodnoty parametra γ z hodnoty 0,6 na 0,8 vzrastie aj hodnota funkcie $F(x)$ (obr. 7). Hodnota optimálnej príspevkovej miery klesne. Teda, ak príspevková miera prispieva vo vyššej miere na potrebnú rezervu fondu, budeme sa snažiť túto príspevkovú mieru znížiť. Hodnota optimálnej stratégie $p^*(x)$ v tomto prípade tiež poklesne.



Obr. 7: Funkcia $F(x)$ pri zmene parametra γ (plná $\gamma = 0,6$, prerušovaná $\gamma = 0,8$)



Obr. 8: Optimálna príspevková miera $c^*(x)$ (plná $\gamma = 0,6$, prerušovaná $\gamma = 0,8$)



Obr. 9: Optimálna stratégia $\tilde{p}(x)$ (plná $\gamma = 0,6$, prerušovaná $\gamma = 0,8$)

Zmenou parametra θ z hodnoty 0,4 na hodnotu 0,8 funkcia $F(x)$ viditeľne poklesne. Príspevková miera v tomto prípade vzrastie. Aj podiel prostriedkov fondu investovaných do rizikových aktív sa zníži a viac investícií bude smerovať do bezpečnejšieho bezrizikového aktíva.

Keď vzrastie úroková miera β z hodnoty 0,03 na 0,05, hodnota funkcie $F(x)$ poklesne. Počítame s nižšou potrebnou rezervou, za predpokladu, že získame viac finančných prostriedkov z úrokov. Mierne poklesne aj príspevková miera. Stratégia investícií prostriedkov p^* nezávisí na tejto hodnote, teda uvedená zmena ju neovplyvní.

4 Stochastický model príspevkovo definovaného penzijného fondu

Pri analýze riadenia príspevkovo definovaného penzijného fondu budeme vychádzať zo stochastického modelu, ktorý je uvedený v [2]. Hlavný rozdiel oproti dávkovo definovanému penzijnému fondu je v tom, že sa nesústredíme na minimalizáciu stratovej funkcie fondu, ale na maximalizáciu úžitkovej funkcie substitučného pomeru, ktorý je definovaný ako pomer penzie a konečného platu zamestnanca v čase odchodu do dôchodku. Budeme uvažovať konštantnú príspevkovú mieru π a funkciu užitočnosti budeme maximalizovať cez riadiacu stratégiu p, ktorá predstavuje spôsob investovania prostriedkov fondu medzi aktíva.

Podobne ako pri stochastickom modeli dávkovo definovaného penzijného fondu, aj v tomto prípade uvažujeme výskyt n rizikových aktív a jedného bezrizikového aktíva. Tiež uvažujeme náhodný rast miezd a jednofaktorový model úrokovej miery.

4.1 Predpoklady modelu

4.1.1 Úroková miera

Uvažujeme jednoduchý model úrokovej miery $r(t)$, ktorá závisí od jedného náhodného faktora - jednofaktorový model úrokovej miery. Stochastická diferenciálna rovnica pre $r(t)$ má tvar:

$$dr(t) = \mu_r(r(t))dt + \sigma_r(r(t))dZ_1(t) \tag{4.1}$$

pre vhodné funkcie driftu $\mu_r(r)$ a volatility $\sigma_r(r)$. $Z_1(t)$ označuje štandardný 1-rozmerný Brownov pohyb.

V našom modeli sa obmedzíme na Vašíčkov model úrokovej miery, v ktorom majú drift a volatilita špeciálny tvar.
Drift úrokovej miery spĺňa v tomto modeli nasledovnú rovnicu:

$$\mu_r(r) = \alpha_r(\mu_r - r).$$

Volatilita úrokovej miery je konštantná:

$$\sigma_r(r)^2 = \sigma_r^2.$$

4.1.2 Výnosy z aktív

Predpokladáme, že na trhu sa vyskytuje $n+1$ aktív, do ktorých budeme investovať naakumulované prostriedky fondu. Označme si $R_i(t)$ hodnotu aktíva i v čase t.

V tomto portfóliu sa vyskytuje jedno bezrizikové aktívum R_0, ktoré spĺňa rovnicu:

$$dR_0(t) = r(t)R_0(t)dt$$

Rizikové aktíva sa riadia stochastickou diferenciálnou rovnicou, ktorá má pre aktívum i nasledovný tvar:

$$dR_i(t) = R_i(t)\left((r(t)+\lambda_i)dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}dZ_j(t)\right) \quad \text{pre} \quad i = 1,\ldots,n, \tag{4.2}$$

kde:

$$\begin{aligned} Z(t) &= (Z_1(t),\ldots,Z_n(t))^T \text{ je } n \text{ - rozmerný Brownov pohyb} \\ \lambda_i &= \text{je riziková prémia prislúchajúca k aktívu } i \\ \sigma_{ij} &= \text{volatilita aktíva } i \text{ s ohľadom na zmeny v } Z_j(t). \end{aligned}$$

Označme si $S = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{n}$ kovariančnú maticu rizikových aktív a $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^T$ vektor rizikových prémií. Potom $\rho = S^{-1}\lambda$ označuje trhovú hodnotu rizika.

4.1.3 Mzdy

Predpokladajme, že mzda poistenca, $S(t)$, spĺňa model:

$$dS(t) = S(t)[(r(t)+\mu_s(t))dt + \nu_s dZ_s(t) + \sigma_s^T dZ(t)] \tag{4.3}$$

Pomocou deterministickej funkcie $\mu_s(t)$, závislej od času t, predpokladáme, že mzda poistenca je závislá od jeho veku. Z praxe je známe, že mzda rastie rýchlejšie v mladšom veku poistenca, kým v staršom veku sa tento rast spomaľuje, prípadne sa až zastaví. Toto nám určuje, že funkcia $\mu_s(t)$ môže byť klesajúcou funkciou, prípadne môže nadobúdať aj záporné hodnoty.

Premenná σ_s nám umožňuje začleniť určitú možnú závislosť medzi mzdou a výnosom z aktív. Na druhej strane nám výraz $\nu_s dZ_s(t)$ dovoľuje uvažovať nehedžovateľné mzdové riziko ($Z_s(t)$ je jednorozmerný Brownov pohyb nezávislý od $Z(t)$).

4.1.4 Penzijný fond

Označme si $X(t)$ veľkosť penzijného fondu v čase t. Príjmy tohto fondu sú tvorené príspevkami zamestnancov, ktoré sú určené ako pevné percento zo mzdy. Výdavky fondu sa vyskytnú až v čase odchodu zamestnanca do dôchodku. Výšku fondu môžeme ovplyvniť aj tým, ako rozdelíme prostriedky fondu medzi jednotlivé aktíva, a aké výnosy následne dosiahneme. Penzijný fond potom spĺňa nasledovnú rovnicu:

$$dX(t) = X(t)[(r(t) + p(t)^T\lambda)dt + p(t)^T SdZ(t)] + \pi S(t)dt. \tag{4.4}$$

kde $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))^T$ je vektor váh prostriedkov fondu, ktoré sú investované do rizikových aktív, a π je príspevková miera určená ako pevné percento zo mzdy.

Vyjadrime si funkciu $Y(t)$ ako pomer veľkosti fondu a mzdy $Y(t) = X(t)/S(t)$. Pomocou Itôvej lemy (2.1) a súčinového pravidla z (2.2) vyjadríme stochastickú rovnicu pre $Y(t)$:

$$\begin{aligned} dY(t) = {} & [\pi + (p^T S(\rho - \sigma_s) - \mu_s(t) + \nu_s^2 + \sigma_s^T\sigma_s)Y(t)]dt + \\ & +(p^T S_1 - \sigma_{s1})^2 Y(t)^2 d\tilde{Z}^{(r)}(t) + \\ & +(\nu_s^2 + (S_2^T\rho - \sigma_{s2})^T(S_2^T\rho - \sigma_{s2}))Y(t)^2 d\tilde{Z}^y(t). \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde:

$$\begin{aligned} S_1 &= Se_1 \\ e_1 &= (1, 0, \dots, 0)^T \\ S_2 &= \begin{pmatrix} \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \\ \sigma_{s1} &= \sigma_s^T e_1 = (\sigma_s)_1 \\ \sigma_{s2} &= ((\sigma_s)_2, \dots, (\sigma_s)_n)^T \\ \tilde{Z}^{(r)}(t) &= Z_1(t) \end{aligned}$$

$\tilde{Z}^{(y)}(t)$ - jednorozmerný Brownov pohyb závislý od $Z_2(t), \dots, Z_n(t)$ a $Z_s(t)$.

4.1.5 Dôchodok

Predpokladajme, že v čase odchodu do dôchodku T, bude naakumulovaný fond použitý na "nákup" dôchodku v hodnote $a(T, r(T))$ na jednotku penzie. Ak odchod do dôchodku je vo veku x rokov, potom primeraná hodnota $a(T, r(T))$ bude:

$$a(T, r(T)) = \int_0^\infty P(T, T+s)_s p_x ds,$$

kde ${}_s p_x$ predstavuje funkciu prežitia (pravdepodobnosť, že x - ročná osoba sa dožije veku $x + s$ rokov) a $P(t, u)$ je hodnota bezkupónového dlhopisu v čase t, ktorý má splatnosť v čase u.

4.2 Funkcia užitočnosti a optimálna stratégia

Predpokladajme, že v čase odchodu do dôchodku bude mať fond úžitok vyjadrený pomocou nasledovnej funkcie užitočnosti (koncová užitočnosť) $K(Y(T), r(T))$. Vyjadrime si hodnotovú funkciu ako strednú hodnotu koncovej užitočnosti:

$$J(t, y, r)(p) = E[K(Y(T), r(T))|Y(t) = y, r(t) = r, p(s, y(s), r(s))]$$

Túto funkciu chceme maximalizovať vzhľadom na spôsob investícií prostriedkov fondu p. Označme si túto optimálnu hodnotu funkciou:

$$\phi(t, y, r) = \sup_p J(t, y, r)(p).$$

Dostali sme podobný optimalizačný problém ako v prípade dávkovo definovaného penzijného fondu. Aj v tomto prípade môžeme použiť Hamilton-Jacobi-Bellmanovu rovnicu (2.4), pomocou ktorej dostaneme nasledovnú rovnicu:

$$\begin{aligned}\sup_p \Big\{\phi_t + \Big(\pi + \Big[p^T S(\rho - \sigma_s) - \mu_s(t) + \nu_s^2 + \sigma_s^T \sigma_s\Big]\, y\Big)\, \phi_y + \mu_r(r)\phi_r \\ + \frac{1}{2}\Big(\nu_s^2 + (S^T p - \sigma_s)^T (S^T p - \sigma_s)\Big)\, y^2 \phi_{yy} \\ + (S^T p - \sigma_s)^T e_1 \sigma_r(r) y \phi_{yr} + \frac{1}{2}\sigma_r(r)^2 \phi_{yy}\Big\} = 0. \qquad (4.6)\end{aligned}$$

Zderivujeme výraz v (4.6) podľa premennej p a položíme ho rovný nule. Touto úpravou dostaneme lineárnu rovnicu pre optimálnu hodnotu premennej p.

$$yS(\rho - \sigma_s)\phi_y + S(S^T p - \sigma_s)y^2\phi_{yy} + Se_1\sigma_r(r)y\phi_{yr} = 0.$$

Riešením tejto rovnice pre neznámu p, dostaneme optimálnu hodnotu riadiacej stratégie p^*:

$$p^*(t, y, r) = (S^T)^{-1}\left(\sigma_s - (\rho - \sigma_s)\frac{\phi_y}{y\phi_{yy}} - e_1\sigma_r(r)\frac{\phi_{yr}}{y\phi_{yy}}\right). \qquad (4.7)$$

Dostali sme riešenie, ako optimálne investovať prostriedky fondu, ktoré závisí od funkcie užitočnosti $\phi(t, y, r)$. Nepoznáme jej presný tvar. Vyjadrili sme iba optimálnu stratégiu v závislosti od tejto funkcie. Optimálnu stratégiu pre rôzne tvary funkcie užitočnosti budeme zisťovať v ďalšej časti. Pozrime sa teraz bližšie na rovnicu (4.7) a pokúsme sa zistiť, z akých aktív pozostáva táto optimálna investícia prostriedkov fondu.

Budeme dočasne predpokladať, že výška príspevkov do fondu je nulová, $\pi = 0$. Vezmime do úvahy výraz $dY(t)/Y(t)$, ktorý má nasledovné parametre.
Variancia výrazu má nasledovný tvar:

$$v(p) = \nu_s^2 + \sigma_s^T \sigma_s + p^T D p - 2p^T S \sigma_s,$$

kde $D = S^T S$. Očakávaná miera rastu je:

$$m(p) = p^T S(\rho - \sigma_s) - \tilde{\mu}_s(t),$$

kde $\tilde{\mu}_s(t) = \mu_s(t) - \nu_s^2 - \sigma_s^T \sigma_s$.
Najprv sa pokúsime minimalizovať varianciu $v(p)$ cez stratégiu p. Zderivujeme rovnicu variancie podľa premennej p a položíme ju rovnú nule. Z tejto rovnice dostaneme portfólio minimalizujúce varianciu výrazu $dY(t)/Y(t)$:

$$p^*(0) = D^{-1} S \sigma_s = (S^T)^{-1} \sigma_s = p_A. \tag{4.8}$$

Hodnota miery rastu pre dané portfólio p_A má tvar:

$$m(p_A) = m_A = \sigma_s^T (\rho - \sigma_s) - \tilde{\mu}_s(t).$$

Teraz budeme opäť minimalizovať varianciu $v(p)$ cez premennú p, ale vezmeme do úvahy obmedzenie na mieru rastu $m(p) = m$. Dostaneme Lagrangeovu funkciu s premennou ψ:

$$L(p, \psi) = v(p) + 2\psi(m(p) - m).$$

Deriváciami tejto funkcie dostaneme nasledovné hodnoty pre p a ψ:

$$p^*(m - m_A) = (S^T)^{-1}[\sigma_s - \psi(\rho - \sigma_s)]$$

$$\psi = \psi(m) = \frac{m_A - m}{(\rho - \sigma_s)^T (\rho - \sigma_s)}.$$

Poznamenajme, že toto optimálne portfólio $p^*(m - m_A)$, ktoré minimalizuje varianciu výrazu $dY(t)/Y(t)$ za podmienky $m(p) = m$, je zložené z dvoch portfólií. Prvým je už spomínané portfólium minimalizujúce varianciu $p_A = (S^T)^{-1}\sigma_s$ (s váhami $(1 + \psi)$). Druhým je optimálne portfólium $p_C = (S^T)^{-1}\rho$, ktorého váhy sú $(-\psi)$.

Našli sme dve portfólia, ktoré sa vyskytujú v našej optimálnej stratégiiu p^*. Avšak stratégia p^* ešte nie je úplná. Preto sa pokúsime nájsť aj ďalšie portfóliá, ktoré tvoria optimálnu stratégiu.

Uvažujme teraz pomer $U(t) = Y(t)/a(t, r(t))$, kde $a(t, r(t))$ je hodnota jednotkového dôchodku v čase t. Keďže $a(t, r(t))$ je funkciou úrokovej miery, $r(t)$, pomocou Itôvej lemy (2.1) dostaneme rovnicu pre $da(t, r(t))$:

$$da(t, r(t)) = a(t, r(t)) \left[-d_a(r)dr(t) + \frac{1}{2} c_a(r)dt \right],$$

kde:

$$d_a(r) = -\frac{1}{a(t,r)} \frac{\partial a(t,r)}{\partial r}$$

$$c_a(r) = \frac{1}{a(t,r)} \frac{\partial^2 a(t,r)}{\partial r^2}.$$

Pomocou Itôvej lemy (2.1) a súčinového pravidla (2.2) dostaneme stochastickú rovnicu pre funkciu $U(t)$:

$$\begin{aligned} dU(t) = U(t) \Big\{ & (p^T S(\rho - \sigma_s) - \tilde{\mu}_s(t))dt - \nu_s dZ_s(t) + (p^T S - \sigma_s^T)dZ(t) \\ & + d_a(r)(\mu_r(r)dt + \sigma_r(r)dZ_1(t)) \\ & + \left(d_a(r)^2 - \frac{1}{2} c_a(r) \right) \sigma_r(r^2 dt + d_a(r)\sigma_r(r)(p^T Se_1 - \sigma_{s1})dt \Big\} \\ = U(t) & \left(m(p,r)dt + \sqrt{v(p,r)} d\tilde{Z} \right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

kde $\tilde{Z}(t)$ je Brownov pohyb. Drift a variancia premennej $U(t)$ majú nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} m(p,r) = & \, p^T S(\rho - \sigma_s) - \tilde{\mu}_s(t) + d_a(r)\mu_r(r) + d_a(r)(p^T Se_1 - \sigma_{s1})\sigma_r(r) \\ & + \left(d_a(r)^2 - \frac{1}{2} c_a(r) \right) \sigma_r(r)^2 \\ v(p,r) = & \, \nu_s^2 + \sigma_s^T \sigma_s + p^T Sp - 2p^T S\sigma_s + 2d_a(r)p^T Se_1 \sigma_r(r) \\ & -2d_a(r)\sigma_{s1}\sigma_r(r) + d_a(r)^2 \sigma_r(r)^2. \end{aligned}$$

Opäť budeme minimalizovať varianciu $v(p, r)$ cez stratégiu p:

$$2Dp - 2S\sigma_s + 2d_a(r)\sigma_r(r)Se_1 = 0.$$

Z tejto rovnice dostaneme optimálne portfólio minimalizujúce varianciu $v(p, r)$:

$$p^* = \left(S^T \right)^{-1} (\sigma_s - d_a(r)\sigma_r(r)e_1) = p_B. \tag{4.10}$$

Všimnime si, že $p_A = p_B$, ak $d_a(r) = 0$, teda ak investujeme prostriedky fondu iba do bezrizikového aktíva (hotovosť).

Vráťme sa teraz k rovnici (4.7) pre optimálnu riadiacu stratégiu $p^*(t,y,r)$, ktorú môžeme napísať pomocou jednotlivých portfólií p_A, p_B, p_C v nasledovnom tvare:

$$p^*(t,y,r) = \theta_A p_A + \theta_B p_B + \theta_C p_C,$$

kde:

$$\begin{aligned}
\theta_A(t,y,r) &= 1 - \frac{\phi_{yr} - d_a(r)\phi_y}{d_a(r)y\phi_{yy}} \\
\theta_B(t,y,r) &= \frac{\phi_{yr}}{d_a(r)y\phi_{yy}} \\
\theta_C(t,y,r) &= -\frac{\phi_y}{y\phi_{yy}} \\
p_A &= \left(S^T\right)^{-1}\sigma_s \\
p_B &= \left(S^T\right)^{-1}(\sigma_s - d_a(r)\sigma_r(r)e_1) \\
p_C &= \left(S^T\right)^{-1}\rho.
\end{aligned}$$

Dosaďme optimálnu riadiacu stratégiu p^* z pôvodnej rovnice (4.7) do Hamilton-Jacobi-Bellmanovej rovnice (4.6). Dostaneme nasledovnú diferenciálnu rovnicu pre funkciu $\phi(t,y,r)$:

$$\begin{aligned}
\phi_t + (\pi - \tilde{\mu}_s(t)y)\phi_y + (\rho - \sigma_s)^T wy\phi_y + \mu_r(r)\phi_r + \frac{1}{2}(\nu_s^2 + \sigma_s^T\sigma_s)y^2\phi_{yy} \\
+\frac{1}{2}w^T wy^2\phi_{yy} - \sigma_s^T wy^2\phi_{yy} + w^T e_1\sigma_r(r)y\phi_{yr} + \frac{1}{2}\sigma_r(r)^2\phi_{rr} = 0, \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

kde $w = \left(\sigma_s - (\rho - \sigma_s)\frac{\phi_y}{y\phi_{yy}} - e_1\sigma_r(r)\frac{\phi_{yr}}{y\phi_{yy}}\right)$.

Aby sme dostali presné vyjadrenie optimálnej stratégie p^*, potrebujeme poznať presný tvar funkcie $\phi(t,y,r)$. Každý fond a každý poistenec dosahuje inú užitočnosť zo získaných naakumulovaných prostriedkov. Preto sa v ďalšej časti, podobne ako u dávkovo definovanom penzijnom fonde, budeme zaoberať rôznymi tvarmi tejto funkcie. Zameriame sa hlavne na mocninový a exponenciálny tvar funkcie užitočnosti.

4.3 Mocninový tvar funkcie užitočnosti

Predpokladajme, že funkcia užitočnosti má tvar mocninovej funkcie:

$$\phi(T,y,r) = \frac{1}{\beta}y^\beta e^{\gamma r}$$

s parametrami $\gamma < 0$ a $\beta < 1$, $\beta \neq 0$.

Možné riešenie pre ľubovoľný čas t budeme hľadať v tvare:

$$\phi(t, y, r) = \delta(t)(y + \varepsilon(t))^{\beta(t)} e^{\gamma(t) r}$$

pre určité deterministické funkcie $\delta(t)$, $\varepsilon(t)$, $\beta(t)$ a $\gamma(t)$.
Zderivujme funkciu $\phi(t, y, r)$ podľa premenných y, r a t:

$$\begin{aligned}
\phi_y &= \delta\beta(y+\varepsilon)^{\beta-1} e^{\gamma} r \\
\phi_{yy} &= \delta\beta(\beta-1)(y+\varepsilon)^{\beta-2} e^{\gamma r} \\
\phi_r &= \delta\gamma(y+\varepsilon)^{\beta} e^{\gamma r} \\
\phi_{yr} &= \delta\beta\gamma(y+\varepsilon)^{\beta-1} e^{\gamma r} \\
\phi_{rr} &= \delta\gamma^2(y+\varepsilon)^{\beta} e^{\gamma r} \\
\phi_t &= \delta'(y+\varepsilon)^{\beta} e^{\gamma r} + \delta\gamma' r(y+\varepsilon)^{\beta} e^{\gamma r} + \delta\beta\varepsilon'(y+\varepsilon)^{\beta-1} e^{\gamma r} \\
&\quad +\beta' \log(y+\varepsilon)\delta(y+\varepsilon)^{\beta} e^{\gamma r}.
\end{aligned}$$

Vráťme sa opäť k rovnici (4.11) a vydeľme ju výrazom $(y + \varepsilon)^2\phi_{yy}$. Do získanej rovnice dosadíme vyjadrené parciálne derivácie funkcie $\phi(t, y, r)$ a koeficienty pri jednotlivých výrazoch závislých od hodnoty y položíme rovné nule.
Porovnaním koeficientov pri výraze $\ln(y+\varepsilon)$ dostaneme jednoduchú diferenciálnu rovnicu pre funkciu $\beta(t)$:

$$\beta'(t) = 0.$$

Z tejto rovnice je zrejmé, že táto funkcia bude konštantá v každom bode t. Predpokladáme, že funkcia spĺňa koncovú podmienku v tvare $\beta(T) = \beta$, na základe ktorej platí:

$$\beta(t) \equiv \beta \qquad \text{pre } \ \forall\, t.$$

Keď položíme rovné nule koeficienty pri výraze $1/(y + \varepsilon)^2$ dostaneme, že musí platiť jedna z rovníc:

$$\frac{1}{2}\nu_s^2 = 0 \tag{4.12}$$

$$\varepsilon(t) = 0 \qquad \text{pre } \ \forall\, t. \tag{4.13}$$

Porovnaním koeficientov pri výraze $1/(y + \varepsilon)$ však dostaneme diferenciálnu rovnicu pre $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon'(t) + \pi + \tilde{\mu}_s(t)\varepsilon(t) - \sigma_s^T(\rho - \sigma_s)\varepsilon(t) = 0. \tag{4.14}$$

Z tvaru rovnice (4.14) vidíme, že rovnica (4.13) by bola splnená len v prípade, ak $\pi = 0$. Mi však predpokladáme, že výška príspevkov platených do fondu π je kladná. Musí teda platiť rovnica (4.12), čo znamená, že budeme uvažovať perfektne hedžovateľné mzdové riziko.

Riešením rovnice (4.14) pomocou formuly variácie konštánt s koncovou podmienkou $\varepsilon(T) = 0$ dostaneme funkciu $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \pi e^{M_s(t)-(T-t)\sigma_s^T(\rho-\sigma_s)} \int_t^T e^{-M_s(t)+(T-\tau)\sigma_s^T(\rho-\sigma_s)} d\tau,$$

kde

$$M_s(t) = \int_t^T \tilde{\mu}_s(u) du.$$

Táto funkcia je klesajúcou funkciou času, pričom nadobúda iba kladné hodnoty. Grafické znázornenie pre rôzne hodnoty času t je uvedené v prílohe (Obr. 20).

Keď položíme rovné nule koeficienty pri výraze, ktorý nezávisí od premennej y, dostaneme rovnicu:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta'(t)}{\delta(t)} + \gamma'(t)r - \beta\tilde{\mu}_s(t) - \frac{1}{2}(\rho-\sigma_s)^T(\rho-\sigma_s)\frac{\beta}{\beta-1} + \frac{1}{2}\nu_s^2 + \mu_r(r)\gamma(t) \\ &+\beta\sigma_s^T(\rho-\sigma_s) - (\rho-\sigma_s)^T e_1 \sigma_r(r)\gamma(t)\frac{\beta}{\beta-1} - \frac{1}{2}\sigma_r(r)^2\gamma(t)^2\frac{1}{\beta-1} = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Všimnime si, že v tejto rovnici sa vyskytuje derivácia funkcie $\delta(t)$ aj funkcie $\gamma(t)$. V úvode tejto kapitoly sme predpokladali, že budeme uvažovať Vašíčkov model pre funkcie driftu a volatility úrokovej miery. Dosaďme tieto výrazy do rovnice (4.15) a porovnajme koeficienty pri úrokovej miere r. Touto úpravou dostaneme diferenciálnu rovnicu pre funkciu $\gamma(t)$ v tvare:

$$\gamma'(t) - \alpha_r\gamma(t) = 0.$$

Riešením tejto rovnice, za predpokladu splnenia koncovej podmienky v tvare $\gamma(T) = \gamma$, dostaneme nasledovný tvar funkcie $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = \gamma e^{-\alpha_r(T-t)}.$$

Predpokladali sme, že $\gamma < 0$. Potom aj funkcia $\gamma(t)$ nadobúda záporné hodnoty. Táto funkcia klesá v závislosti od času.

Keď položíme ostatné členy rovnice (4.15) rovné nule, dostaneme diferenciálnu rovnicu pre funkciu $\delta(t)$:

$$\delta'(t) = \delta(t)\left(\beta\mu_s(t) - \xi_0 - \xi_1 e^{-\alpha_r(T-t)} - \xi_2 e^{-2\alpha_r(T-t)}\right),$$

kde:

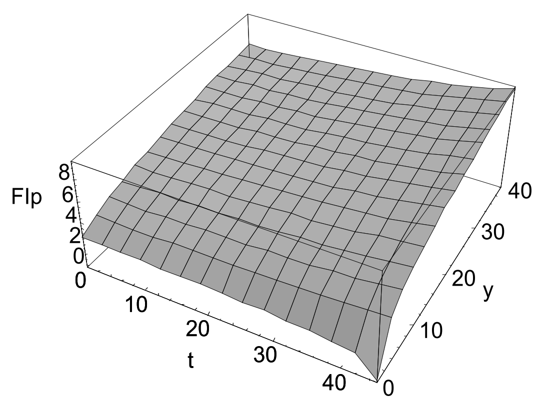
$$\begin{aligned} \xi_0 &= -\tfrac{1}{2}(\rho-\sigma_s)^T(\rho-\sigma_s)\tfrac{\beta}{\beta-1} + \beta\sigma_s^T\rho \\ \xi_1 &= \alpha_r\mu_r\gamma - (\rho-\sigma_s)^T e_1\sigma_r\gamma\tfrac{\beta}{\beta-1} \\ \xi_2 &= -\tfrac{1}{2}\tfrac{\sigma_r^2\gamma^2}{(\beta-1)}. \end{aligned}$$

Táto rovnica má za predpokladu splnenia koncovej podmienky $\delta(T) = 1/\beta$ riešenie:

$$\delta(t) = \frac{1}{\beta} e^{K_s(t)},$$

kde $K_s(t) = \int_t^T \left(-\beta\mu_s(u) + \xi_0 + \xi_1 e^{-\alpha_r(T-u)} + \xi_2 e^{-2\alpha_r(T-u)}\right) du$. Ak predpokladáme, že β je kladné, potom aj funkcia $\delta(t)$ bude nadobúdať kladné hodnoty. V závislosti od času je funkcia $\delta(t)$ rastúcou funkciou.

Vyjadrili sme koeficienty funkcie $\phi(t, y, r)$ a poznáme už jej presný tvar. Môžeme vidieť, že funkcia užitočnosti je rastúcou funkciou podľa obidvoch premenných y a t (obr. 10). Naša užitočnosť rastie spolu s rastúcim fondom, čo je celkom prirodzené a čo sa predpokladá pre každú funkciu užitočnosti. Avšak funkcia $\phi(t, y, r)$ je rastúca aj v závislosti od času. Túto vlastnosť môžeme vysvetliť tak, že s postupom času sa znižujú naše nároky a požiadavky. Ak sme sa v mladšom veku postarali o naše základné živobytie, neskôr nepotrebujeme toľko finančných prostriedkov a aj "menej sa nám zdá viac".

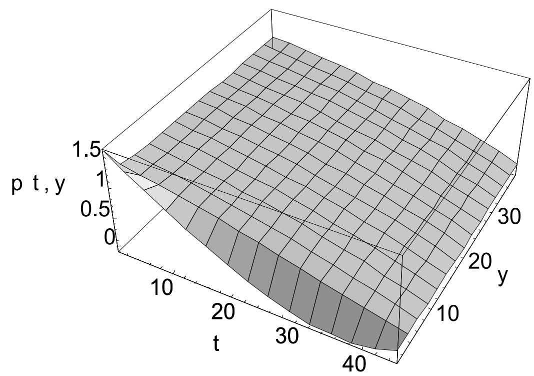


Obr. 10: Funkcia užitočnosti $\phi(t, y, r)$

Vráťme sa teraz späť k rovnici (4.7) pre optimálne riadenie p^* a dosaďme do nej funkciu užitočnosti v mocninovom tvare. Pre tento tvar funkcie užitočnosti bude mať optimálna stratégia nasledovný tvar:

$$p^*(t, y, r) = (S^T)^{-1} \left(\sigma_s - (\rho - \sigma_s)\frac{y + \varepsilon(t)}{y(\beta - 1)} - e_1\sigma_r \frac{\gamma(t)(y + \varepsilon(t))}{y(\beta - 1)}\right). \qquad (4.16)$$

Pri lepšom pohľade na optimálnu stratégiu, zistíme, že klesá s rastúcim časom aj s rastúcim substitučným pomerom $Y(t)$ (obr. 11). V závislosti od času, je funkcia p^* konkávna, pričom pri nižších hodnotách času klesá pomalšie. Významnejší pokles je zaznamenaný pri vyšších hodnotách. S približujúcim sa dátumom odchodu do dôchodku investujeme teda menej prostriedkov do rizikových aktív. Túto vlastnosť môžeme odôvodniť tým, že prípadné straty, spôsobené investovaním veľkej časti prostriedkov do rizikových aktív, by sa v stanovenom čase nevrátili. Preto sa viac obmedzujeme na isté bezrizikové aktívum. Závislosť optimálnej stratégie od hodnoty $Y(t)$ je vyjadrená konvexnou funkciou. Pri nízkych hodnotách substitučného pomeru má relatívne vysoké hodnoty. Chceme dosiahnuť vysokú návratnosť, aby sme zabezpečili určitú výšku dôchodku poistenca.



Obr. 11: Optimálna stratégia $\tilde{p}(t, y, r)$

Ďalej sme sa zaoberali konkrétnymi hodnotami optimálnej stratégie, funkcie užitočnosti a jej deterministických funkcií. Zisťovali sme ich závislosť na parametroch, ktoré vstupovali ako koncové podmienky týchto deterministických funkcií. Získavali sme ich pomocou programu v softvére Mathematica, ktorý je uvedený v prílohe (Program 2). Tieto hodnoty sme získavali pre nasledovné vstupné parametre:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.03 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad T = 45, \quad \pi = 0.05. \tag{4.17}$$

Ako sme už spomínali, budeme uvažovať Vašíčkov model úrokovej miery s nasledovnými parametrami:

$$\sigma_r = 0.03, \quad \alpha_r = 0.03, \quad \mu_r = 0.5. \tag{4.18}$$

Predpokladali sme, že rast miezd $\mu_s(t)$ je klesajúcou funkciou času, preto sme si zvolili nasledovný tvar tejto funkcie s uvedenými parametrami:

$$\mu_s(t) = \alpha_m(\mu_s - 0.02t)$$

$$\alpha_m = 0.005, \quad \mu_s = 1, \quad \sigma_s = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.025 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Uvažovali sme nasledovné hodnoty koncových podmienok,

$$\gamma = -1.6, \quad \beta = 0.3, \quad \varepsilon(T) = 0,$$

ktoré sme menili tak, ako je to uvedené v nasledovnej tabuľke.

Tabuľka 5. Hodnoty optimálnej stratégie a funkcie užitočnosti v tvare mocninovej funkcie

γ	β	δ	$\gamma(40)$	$\varepsilon(40)$	$\delta(40)$	$p(40,10)$	$\phi(40,10,0,04)$
-1,6	0,3	3,333333	-1,37713	0,246287	3,06425	0,278447	5,8287
-0,6	0,3	3,333333	-0,51643	0,246287	3,26851	1,03437	6,435
-1,6	0,6	1,666667	-1,37713	0,246287	1,5985	-0,262717	6,1112

Na porovnanie sme vyjadrili konkrétne funkcie v jednom bode pre čas $t = 40$ a substitučný pomer $y = 10$. Pri zmene hodnoty parametra γ z -1,6 na -0,6 vzrastie aj hodnota funkcie $\gamma(t)$ v danom bode. Táto zmena ovplyvní aj hodnotu optimálnej stratégie p^*, ktorá viditeľne vzrastie. Budeme teda viac investovať do rizikových aktív. Zvýši sa aj hodnota funkcie užitočnosti a to z hodnoty 5,8287 na hodnotu 6,435.

Zmenou hodnoty parametra β z 0,3 na 0,6, klesne hodnota funkcie $\delta(t)$. Hodnota optimálnej stratégie p^* nám v tomto prípade tiež klesne, a to až na zápornú hodnotu. Budeme sa teda snažiť predať rizikové aktíva a investovať viac do bezrizikového. Funkcia užitočnosti tiež vzrastie, ale nie až v takom rozsahu ako to bolo v predchádzajúcom prípade.

4.4 Exponenciálny tvar funkcie užitočnosti

V tejto časti sa sústredíme na exponenciálny tvar funkcie užitočnosti. Budeme predpokladať, že úžitková funkcia má v čase odchodu do dôchodku T tvar:

$$\phi(T, y, r) = -e^{\gamma r - \beta y}$$

kde $\gamma < 0$ a $\beta > 0$.
Riešenie pre ľubovoľný čas t budeme hľadať v tvare:

$$\phi(t, y, r) = \delta(t) e^{\gamma(t) r + \beta(t) y}$$

pre určité deterministické funkcie $\delta(t)$, $\gamma(t)$ a $\beta(t)$, pre ktoré predpokladáme, že v čase T majú hodnoty $\delta(T) = -1$, $\gamma(T) = \gamma$ a $\beta(T) = -\beta$.

Vyjadríme si parciálne derivácie funkcie užitočnosti podľa jednotlivých premenných:

$$\begin{aligned}
\phi_y &= \delta(t)\beta(t)e^{(\gamma(t)r+\beta(t)y)} \\
\phi_{yy} &= \delta(t)\beta^2(t)e^{(\gamma(t)r+\beta(t)y)} \\
\phi_{yr} &= \delta(t)\beta(t)\gamma(t)e^{(\gamma(t)r+\beta(t)y)} \\
\phi_r &= \delta(t)\gamma(t)e^{(\gamma(t)r+\beta(t)y)} \\
\phi_{rr} &= \delta(t)\gamma^2(t)e^{(\gamma(t)r+\beta(t)y)} \\
\phi_t &= \delta'(t)e^{(\gamma(t)r+\beta(t)y)} + \delta(t)(\gamma'(t)r+\beta'(t)y)e^{(\gamma(t)r+\beta(t)y)}
\end{aligned}$$

Tieto derivácie dosadíme do funkcie (4.11) a dostaneme kvadratickú rovnicu pre y. Keď položíme rovné nule koeficienty pri kvadratickom, lineárnom a absolútnom člene tejto rovnice, dostaneme rovnice, na základe ktorých môžeme vyjadriť deterministické funkcie $\delta(t)$, $\gamma(t)$ a $\beta(t)$.

Porovnaním koeficientov pri kvadratickom člene dostaneme rovnicu:

$$\nu_s^2\delta(t)\beta^2(t) = 0$$

Keďže predpokladáme, že $\gamma(t) < 0$ a $\beta(t) > 0$, musí platiť, že $\nu_s = 0$. Teda rovnako ako v predchádzajúcom prípade pri mocninovom tvare funkcie užitočnosti, aj tu budeme uvažovať hedžovateľné mzdové riziko.

Porovnaním koeficientov lineárneho člena dostaneme diferenciálnu rovnicu pre funkciu $\beta(t)$ v nasledovnom tvare:

$$\beta'(t) = \beta(t)\left(\tilde{\mu}_s + \sigma_s^T(\rho-\sigma_s) + \sigma_s^T e_1\sigma_r(r)\gamma(t)\right).$$

Riešením tejto rovnice za predpokladu splnenia koncovej podmienky $\beta(T) = -\beta$, dostaneme nasledovný tvar tejto deterministickej funkcie:

$$\beta(t) = -\beta\, e^{-a(t)},$$

kde $\quad a(t) = \int_t^T \left(\tilde{\mu}_s(u) + \sigma_s^T(\rho-\sigma_s) + \sigma_s^T e_1\sigma_r\gamma(u)\right) du.$

Toto riešenie je vyjadrené pomocou zatiaľ neznámej funkcie $\gamma(t)$. Túto funkciu môžeme získať rovnakým spôsob ako pri mocninovom tvare funkcie užitočnosti. Keď položíme koeficienty absolútneho člena už spomínanej rovnice rovné nule, dostaneme nasledovnú rovnicu:

$$\begin{aligned}
\delta'(t) + \delta(t)\gamma'(t)r + c\delta(t)\beta(t) - \frac{1}{2}(\rho-\sigma_s)^T(\rho-\sigma_s)\delta(t) - \\
-(\rho-\sigma_s)^T e_1\sigma_r(r)\gamma(t)\delta(t) + \mu_r(r)\gamma(t)\delta(t) = 0. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Keďže uvažujeme Vašíčkov model úrokovej miery, teda $\mu_r(r) = \alpha_r(\mu_r - r)$ a $\sigma_r(r) = \sigma_r$, dosadíme tieto tvary driftu a volatility do predchádzajúcej rovnice a porovnáme koeficienty pri úrokovej miere r. Týmto krokom dostaneme rovnakú diferenciálnu rovnicu pre $\gamma(t)$, ako pri mocninovom tvare funkcie užitočnosti. Jej vyriešením pomocou formule variácie konštánt dostaneme tvar pre deterministickú funkciu $\gamma(t)$ so splnením koncovej podmienky $\gamma(T) = \gamma$ v tvare:

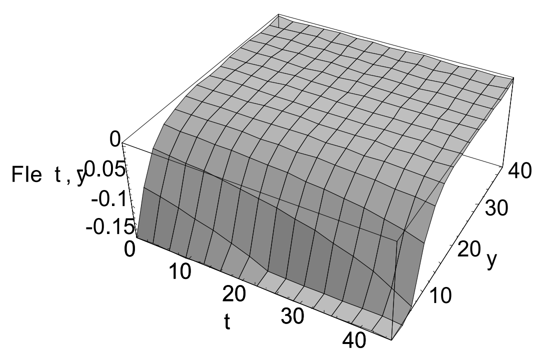
$$\gamma(t) = \gamma e^{-\alpha_r(T-t)}.$$

Keď položíme ostatné koeficienty rovnice (4.20) rovné nule, dostaneme diferenciálnu rovnicu pre funkciu $\delta(t)$. Budeme ju riešiť formulou variácie konštánt za predpokladu, že spĺňa koncovú podmienku $\delta(T) = -1$. Toto riešenie má tvar:

$$\delta(t) = -e^{-b(t)},$$

kde $b(t) = \frac{1}{2}(\rho - \sigma_s)^T(\rho - \sigma_s) + (\rho - \sigma_s)^T e_1 \sigma_r \gamma(t) - \alpha_r \mu_r \gamma(t) - \pi\beta(t)$.

Zistili sme koeficienty funkcie užitočnosti $\phi(t, y, r)$, ktorú sme hľadali v exponenciálnom tvare (obr. 12). V závislosti od substitučného pomeru je táto funkcia rastúca, podľa predpokladu o funkcii užitočnosti. Vzhľadom na čas t je na rozdiel od mocninového tvaru funkcie užitočnosti klesajúcou funkciou.

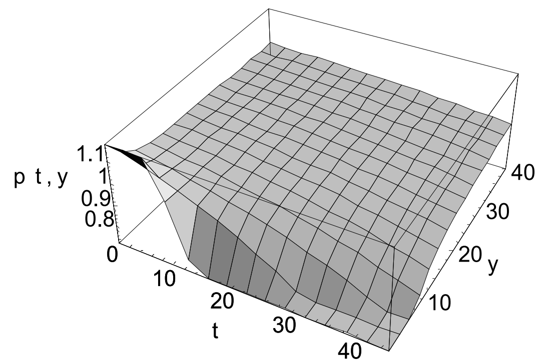


Obr. 12: Funkcia užitočnosti $\phi(t, y, r)$

Vráťme sa opäť k rovnici pre optimálnu riadiacu stratégiu (4.7) a dosaďme do nej funkciu užitočnosti so získanými parametrami. Dostaneme tak tvar optimálnej stratégie pre exponenciálny tvar tejto funkcie:

$$p^*(t, y, r) = (S^T)^{-1}\left(\sigma_s - \frac{(\rho - \sigma_s)}{y\beta(t)} - e_1\sigma_r \frac{\gamma(t)}{y\beta(t)}\right).$$

Rovnako ako pri mocninovom tvare funkcie užitočnosti, aj v tomto prípade je optimálna stratégia klesajúcou funkciou času aj substitučného pomeru (obr. 13).



Obr. 13: Optimálna stratégia $\tilde{p}(t, y, r)$

V tejto časti sme sa pokúsili nájsť aj konkrétne hodnoty optimálnej stratégie a funkcie užitočnosti. Tieto hodnoty sme hľadali s využitím programu v softvére Mathematica uvedeného v prílohe (Program 2). Použili sme rovnaké vstupné hodnoty ako pri mocninovom tvare funkcie užitočnosti, ktoré sú uvedené vo vzťahu (4.17). Tiež sme predpokladali rovnaký tvar úrokovej miery a mzdového rastu, ktoré sú vyjadrené vzťahmi (4.18) a (4.19).

Uvažovali sme nasledovné hodnoty pre koncové podmienky:

$$\gamma = -1.6, \quad \beta = 0.3, \quad \delta(T) = \delta = -1,$$

ktoré sme menili, ako je to uvedené v nasledovnej tabuľke a tak zisťovali ich vplyv na optimálnu stratégiu a funkciu užitočnosti.

Tabuľka 6. Hodnoty optimálnej stratégie a funkcie užitočnosti v tvare exponenciálnej funkcie

γ	β	δ	$\gamma(40)$	$\beta(40)$	$\delta(40)$	$p(40,10)$	$\phi(40,10,0,04)$
-1,6	0,3	-1	-1,37713	-0,301597	-0,808173	0,836555	-0,0374766
-0,6	0,3	-1	-0,516425	-0,299504	-0,864688	1,00784	-0,0423798
-1,6	0,6	-1	-1,37713	-0,603194	-0,749608	0,918277	-0,00170322
-1,6	0,3	-0,5	-1,37713	-0,301597	-0,404086	0,836555	-0,0187383

Pri zmene parametra γ z hodnoty -1,6 na -0,6 sa zvýši hodnota optimálnej stratégie p^* rovnako ako pri mocninovej funkcii. Budeme teda investovať vyššiu sumu do rizikových aktív. V tomto prípade však hodnota funkcie užitočnosti klesá.

Zmenou parametra β poklesne hodnota optimálnej stratégie, ale v porovnaní s mocninovou funkciou užitočnosti to nie je v takej vysokej miere. Hodnota funkcie užitočnosti v tomto prípade mierne vzrastie.

Keďža optimálna stratégia p^* nezávisí na funkcii $\delta(t)$, pokles parametra δ ju neovplyvní. Hodnota funkcie užitočnosti poklesne, a to na polovičnú hodnotu.

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo analyzovať penzijné fondy, ich riadenie a určiť optimálne hodnoty riadiacich stratégií. Podrobnú analýzu sme popísali osobitne pre dávkovo definovaný penzijný fond a osobitne pre príspevkovo definovaný penzijný fond.

Pri dávkovo definovanom penzijnom fonde sme sa zamerali na minimalizáciu stratovej funkcie v tvare kvadratickej, mocninovej a exponenciálnej funkcie vzhľadom na dve riadiace stratégie. Prvou bola príspevková miera. Zistili sme, že miera príspevkov platených do fondu lineárne klesá s výškou fondu. Teda pri vyššom fonde na zabezpečenie budúcich výdavkov postačí nižšia miera príspevkov. Druhou riadiacou stratégiou bol spôsob investícií prostriedkov fondu do rizikových aktív vyskytujúcich sa na trhu. Pri kvadratickom a exponenciálnom tvare stratovej funkcie je táto stratégia klesajúcou funkciou výšky fondu. Väčšiu časť prostriedkov fondu investujeme do rizikových aktív iba pri nízkych hodnotách fondu. Pri mocninovom tvare stratovej funkcie je táto optimálna stratégia rastúca. S pribúdajúcou výškou fondu budeme viac investovať do rizikových aktív.

V príspevkovo definovanom fonde sme uvažovali funkciu užitočnosti substitučného pomeru, ktorý bol definovaný ako podiel výšky fondu a konečného platu zamestnanca v čase odchodu do dôchodku. Túto funkciu užitočnosti sme hľadali v mocninovom a exponenciálnom tvare a následne sme sa ju snažili maximalizovať vzhľadom na spôsob investícií prostriedkov fondu. Zistili sme, že táto stratégia je v obidvoch prípadoch klesajúcou funkciou v závislosti od času a od veľkosti substitučného pomeru. Teda ak má poistenec zaručenú dostatočnú výšku dôchodku, nemusíme riskovať a investovať do rizikových aktív, ktoré prinášajú vyššiu návratnosť. Pri postupnom približovaní sa k dátumu, keď poistenec odchádza do dôchodku, investujeme do rizikových aktív menšiu sumu. Obávame sa prípadnej straty, ktorú by sme už nestihli získať späť.

Literatúra

[1] Cairns, A.: Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time. ASTIN Bulletin No. 30. 2000.

[2] Cairns, A., Blake, D., Dowd, K.: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pensionplans. To appear in Proceedings of the 10th AFIR International Colloquium. 2000.

[3] Merton, R.C.: Continuous-Time Finance. Blackwell, Cambridge, Mass. 1990.

[4] Øksendal, B.: Stochastic Differential Equations, 5th Edition. Springer-Verlag, Berlin. 1998.

[5] Škovránková, L., Bilíková, M.: Európske penzijné fondy v súčasnosti. In: Ekonomické rozhľady, č. 2, Bratislava. 1997.

[6] Škovránková, L., Bilíková, M.: Penzijné a nemocenské poistenie. Vydavateľstvo EKONÓM. Bratislava. 2002.

[7] Škovránková, L., Sakálová, K.: Penzijné fondy v krajinách Európskej únie. In: Poistné rozhľady, č. 1, Bratislava. 1997.

Príloha

Program 1

Program zo softvéru Mathematica na numerický výpočet optimálnych stratégií a hodnotovej funkcie v dávkovo definovanom penzijnom fonde.

```
S={{0.05,0.05},{0.05,0.2}};
delta0=0.03;B=1;sigmab=0;Bbeta=0.05;ro=0;delta={0.04,0.06};e={1,1};
```

```
                    KVADRATICKA FUNKCIA
cm=0.6;k=0.001; xp=10;ro=0;
lambda=-delta0+delta
eps=lambda.DDI.lambda
Ppom=2*delta0-Bbeta-2*p.lambda-2*ro+p.DD.p
Pk=(Ppom+Sqrt[Ppom^2+4*k])/2
Qk=2*(k*xp+Pk*(B-cm1-ro*xp))/(-Pk-Bbeta+delta0-ro-eps)
Rk=(-Qk^2/4+k*xp^2-B*Qk-Qk^2*eps/(4*Pk)+(cm1+ro*xp)*Qk
       +Pk*sigmab^2)/Bbeta
Fk[x_]:=Pk*x^2+Qk*x+Rk
Plot[Fk[x],{x,0,20},AxesLabel -> {"x","Fk[x]"}]
xmin=-Qk/(2*Pk)
Fk[xmin]
ck[x_]:=cm1-ro*(x-xp)-(2*Pk*x+Qk)/2
Plot[ck[x],{x,0,40},AxesLabel -> {"x","ck[x]"}]
p=DDI.lambda;
pk[x_]:=-(2*Pk*x+Qk)/(2*Pk*x)*p
Plot[e.pk[x],{x,0,8},AxesLabel -> {"x","pk[x]"}]
ck[4]
e.pk[4]
```

```
                    MOCNINOVA FUNKCIA
cm=0.6;gama=0.48;
xm=(B-cm)/delta0
alfa=gama
c1=(Bbeta-delta0*gama+gama/(gama-1)*eps/2)/(1-gama)
```

```
kp=(c^(gama-1))/gama
Fp[x_]:=(-k)*((x-xm)^alfa)
Plot[Fp[x],{x,14,40},AxesLabel -> {"x","Fp[x]"}]
cp[x_]:=cm1-((Bbeta-delta0*gama+gama*eps/(2*gama-2))/(1-gama))*(x-xm)
Plot[cp[x],{x,0,40},AxesLabel -> {"x","cp[x]"}]
pp[x_]:=(DDI.lambda)*(x-xm)/((1-gama)*x)
Plot[e.pp[x],{x,0,10},AxesLabel -> {"x","pp[x]"}]
Fp[20]
cp[20]
e.pp[20]
```

EXPONENCIALNA FUNKCIA

```
gama=0.8;teta=0.4;
b=gama*delta0+teta
a =Log[gama/b]+(-Bbeta+b*B+b/gama-eps/2+b^2*sigmab^2/2)/(b/gama)
Fe[x_]:=Exp[a-b*x]
Plot[Fe11[x],{x,0,40},AxesLabel -> {"x","Fe[x]"}]
ce[x_]:=(-Bbeta+b*B+b/gama-eps/2)/(b)-delta0*x
Plot[ce[x],{x,0,40},AxesLabel -> {"x","ce[x]"}]
pe[x_]:=p/(b*x)
Plot[e.pe11[x],{x,0,10},AxesLabel -> {"x","pe[x]"}]
Fe[10]
ce[4]
e.pe[4]
```

Program 2

Program zo softvéru Mathematica na numerický výpočet optimálnej stratégie a hodnotovej funkcie v príspevkovo definovanom penzijnom fonde.

```
S={{0.05,0.05},{0.05,0.2}};sigmas={0.05,0.025};lambda={0.01,0.03};
betka=0.3; e1={1,0};sigmar=0.03;alfar=0.03; mir=0.5;
gama1=-1.6;T=45;alfam=0.005; mi1=1;c=0.05;
ro=SS.lambda
gama[t_]:=gama1*Exp[-alfar*(T-t)]
Plot[gama[t], {t,0,T},AxesLabel -> {"t","gama[t]"}]
mi[t_]:=alfam*(mi1-0.02t)
Plot[mi[t], {t,0,T},AxesLabel -> {"t","mi[t]"}]
mi2[t_]:=mi[t]-sigmas.sigmas



                    MOCNINOVA FUNKCIA
a1[t_]:=sigmas.(ro-sigmas)-mi2[t]
eps[t_]:=c*Integrate[Exp[-Integrate[a1[u],{u,s,T}]],{s,t,T}]
Plot[eps[t],{t,0,T},AxesLabel -> {"t","eps[t]"}]
pp[t_,y_]:=
  Inverse[Transpose[S]].(
      sigmas-(ro-sigmas)*(y+eps[t])/(y*(betka-1))-
        e1*sigmar*gama[t]*(y+eps[t])/(y*(betka-1)))
ppp[t_,y_]:={1,1}.pp[t,y]
Plot3D[ppp[t,y],{t,0.5,T},{y,0.5,39},
        AxesLabel -> {"t","y","pp[t,y]"}]
Plot[ppp[2,y],{y,0,40},AxesLabel -> {"y","pp[2,y]"}]
Plot[ppp[t,20],{t,0,T},AxesLabel -> {"t","pp[t,20]"}]
psi0=-(ro-sigmas).(ro-sigmas)*betka/(2*(betka-1))+betka*sigmas.ro;
psi1= alfar*mir*gama1-(ro-sigmas).e1*sigmar*gama1*betka/(betka-1);
psi2=-sigmar^2*gama1^2/(2*(betka-1));
deltap[t_]:=
  Exp[Integrate[-betka*mi[u]+psi0+psi1*Exp[-alfar*(T-u)]+
          psi2*Exp[-2*alfar*(T-u)],{u,t,T}]]/betka
Plot[deltap[t],{t,0,T},AxesLabel -> {"t","deltap[t]"}]
```

```
FIp[t_,y_,r_]:=deltap[t]*(y+eps[t])^betka *Exp[gama[t]*r]
Plot[FIp[2,y,0.5],{y,0,40},AxesLabel -> {"y","FI[2,y,0.5]"}]
Plot[FIp[t,20,0.5],{t,0,T},AxesLabel -> {"t","FIe[t,20,0.5]"}]
```

EXPONENCIALNA FUNKCIA

```
Bbeta[t_]:=-betka*Exp[Integrate[-mi2[u]-sigmas.(ro-sigmas)-
    sigmas.e1*sigmar*gama[u],{u,t,T}]]
Plot[Bbeta[t],{t,0,T},AxesLabel -> {"t","Beta[t]"}]
pe[t_,y_]:=
  Inverse[Transpose[S]].(
      sigmas-(ro-sigmas)/(y*Bbeta[t])-e1*sigmar*gama[t]/(y*Bbeta[t]))
ppe[t_,y_]:={1,1}.pe[t,y]
Plot3D[ppe[t,y],{t,0,T},{y,0.5,40},AxesLabel -> {"t","y","p[t,y]"}]
Plot[ppe[5,y],{y,0,40},AxesLabel -> {"y"  , "p(t,y)" }]
Plot[ppe[t,20],{t,0,T},AxesLabel -> {"t"  , "p(t,y)" }]
deltae[t_]:= - Exp[NIntegrate[-(ro-sigmas).(ro-sigmas)/2-
          (ro-sigmas).e1*sigmar*gama[n]+
          alfar*mir*gama[n]+c*Bbeta[n],{n,t,T}]]
Plot[deltae[t],{t,0, T},AxesLabel -> {"t","deltae[t]"}]
FIe[t_,y_,r_]:=deltae[t]*Exp[y.Bbeta[t]+gama[t]*r]
Plot3D[FIe[t,y,0.04],{t,0,T},{y,0,40},
          AxesLabel -> {"t","y","FIe[t,y,0.04]"}]
Plot[FIe[t,20,0.04],{t,0,T},AxesLabel -> {"t","FIe[t,20,0.04]"}]
Plot[FIe[20,y,0.04],{y,0,40},AxesLabel -> {"y","FIe[20,y,0.04]"}]
```