Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Diplomová práca

Michal Šoška Bratislava, 2003

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika

Matematické programovanie v ekonómii

Diplomová práca

Diplomant: Michal Šoška
Vedúci dipl. práce: Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik
Bratislava, 2003

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne na základe získaných teoretických poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 4. Apríl 2003

....

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu mojej diplomovej práce p. Univ. Prof. Dipl.- Ing. Dr. Mikulášovi Luptáčikovi za poskytnuté materiály, odborné vedenie a cenné rady pri spracovaní uvedenej témy. Taktiež ďakujem svojim rodičom, ktorí mi štúdium na vysokej škole umožnili.

Obsah

1 Úvod **2**

1.1 Motivácia 2

1.2 Príklady modelov matematického programovania v ekonómii 3

1.2.1 Problém správnej výživy 3

1.2.2 Neoklasická teória domácnosti a firmy 4

1.2.3 Teória komparatívnej výhody 6

1.2.4 Model výberu portfólia 7

2 Kuhn-Tuckerove podmienky **9**

2.1 Klasická úloha na viazaný extrém 9

2.2 Kuhn-Tuckerova veta 13

2.3 Hlavné princípy Kuhn-Tuckerových podmienok 16

2.4 K-T podmienky pre všeobecnú úlohu matematického programovania . 19

2.5 K-T podmienky a konvexné programovanie 21

2.5.1 K-T veta pre úlohu konvexného programovania 21

2.5.2 Veta Slatera 22

2.5.3 Ekonomická interpretácia 23

3 K-T podmienky ako nástroj ekonomickej analýzy **25**

3.1 Oceňovanie pri špičkovom zaťažení 25

3.2 Maximalizácia tržieb pri obmedzení zisku 27

3.3 Regulácia živ. prostredia – Efekty rôznych typov noriem 29

3.3.1 Štandard 1: Obmedzenie celkových emisií firmy 30

3.3.2 Štandard 2: Emisie na jednotku výstupu 31

3.3.3 Štandard 3: Emisie na jednotku vstupu 33

4 Firma a regulačné opatrenia **35**

4.1 Averch-Johnsonov model 35

4.2 Geometrická interpretácia 39

4.3 Rozšírenia A-J modelu 40

4.3.1 Maximalizácia tržieb 41

4.3.2 Maximalizácia produkcie 41

4.3.3 Maximalizácia čistých výnosov z investícií 42

5 Záver **44**

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivácia

Myšlienka optimalizácie je bezpochyby jednou z najdôležitejších v ekonómii. Firmy maximalizujú zisk alebo predajnosť svojho produktu, prípadne minimalizujú náklady. Spotrebitelia sa snažia rozumne hospodáriť so svojim zárobkom a tiež vláda môže prispôsobovať svoju politiku tak, aby maximalizovala svoje šance na znovuzvolenie. Väčšina týchto a podobných problémov v sebe zahŕňa nejaké ohraničenia, napríklad suroviny používané firmou pri výrobe sú obmedzené atď. Úlohy na viazaný extrém (maximalizácia i minimalizácia) zohrávajú podstatnú rolu v analýze ekonomických modelov. Takáto analýza môže byť pre ekonóma užitočná nielen pri určovaní nejakého rozhodovacieho plánu (*normatívny význam*), ale aj pre pochopenie správania sa určitého ekonomického subjektu (čiže má *pozitívny význam*).

Uvažujme, že máme za úlohu minimalizovať alebo maximalizovať hodnotu funkcie n premenných $f_0(x_1, x_2, \dots x_n)$ – nazývanej **účelová funkcia** – so zreteľom na splnenie m **ohraničení**

$$f_i(x_1, x_2, \dots x_n) \leq 0, \qquad (i = \ 1, 2, \dots, m).$$

Takejto úlohe hovoríme **úloha matematického programovania**. Množina $K \equiv \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad f_i(x_1, x_2, \dots x_n) \leq 0 \quad (i = \ 1, 2, \dots, m)\}$ sa nazýva **množina prípustných riešení**. Pojem "programovanie" sa používa z toho dôvodu, že vlastne hľadáme program alebo plán (vektor $\mathbf{x}$), ako optimalizovať danú účelovú funkciu. Jeden zo základných ekonomických problémov, problém optimálneho rozdelenia vzácnych zdrojov, sa tiež dá zapísať ako úloha matematického programovania. Konkrétne rozdelenie vzácnych zdrojov je reprezentované konkrétnym výberom $\mathbf{x}$, množina prípustných riešení, ktorá odráža obmedzenie vektora $\mathbf{x}$, zodpovedá vzácnosti zdrojov a rôzne výsledky pri rôznych rozdeleniach zdrojov reprezentujú účelovú funkciu, ktorej hodnota sa mení s meniacim sa $\mathbf{x}$. Úlohou je vlastne zo všetkých prípustných vybrať také rozdelenie vzácnych zdrojov, aby sa minimalizovala alebo maximalizovala hodnota účelovej funkcie.

V tejto práci najskôr na niekoľkých praktických príkladoch ukážeme, že veľké množstvo úloh vedie práve k problematike matematického programovania. V druhej časti sformulujeme na základe Lagrangeovej teórie nutné podmienky optimality pre úlohu s ohraničeniami v tvare rovností, aby sme následne odvodili Kuhn-Tuckerove nutné podmienky optimality pre všeobecnú úlohu matematického programovania. Nezabudneme na ekonomickú interpretáciu a spomenieme tiež niektoré špeciálne typy úloh matematického programovania ako aj predpoklady, za ktorých možno K-T podmienky považovať za postačujúce. Široké praktické uplatnenie Kuhn-Tuckerových podmienok ukážeme v ďalšej časti a ilustrujeme na rôznych modeloch ekonomickej praxe. Posledná časť patrí podrobnej analýze monopolnej firmy, ktorá je konfrontovaná s regulačným opatrením zo strany vlády. Výsledky získané analýzou vychádzjúcou z Kuhn-Tuckerovej teórie interpretujeme graficky.

1.2 Príklady modelov matematického programovania v ekonómii

Veľké množstvo úloh z ekonomickej praxe bolo sformulovaných ako úloha matematického programovania. Na ilustráciu uvádzame niekoľko príkladov.

1.2.1 Problém správnej výživy

Tento probém bol jedným z prvých ekonomických problémov vyriešených pomocou aplikácie matematického programovania. V roku 1947 ho ako úlohu lineárneho programovania (všetky zúčastnené funkcie sú lineárne) vyriešili `G. B. Danzig` a `J. Laderman`.

Majme n typov potravín označených indexom $j = 1, 2, \dots n$ a m výživných látok $i = 1, 2, \dots m$. Množstvo i-tej živiny prítomné v j-tej potravine je dané (i, j)-tym prvkom matice A. Pre zdravú výživu je potrebné denne skonzumovať aspoň b_i jednotiek i-tej výživnej látky, $i = 1, 2, \dots m$. Cena j-tej potraviny c_j, $j = 1, 2, \dots n$, je daná a nezávisí od množstva, ktoré kúpime. Úlohou je určiť množstvá jednotlivých potravín, ktoré má spotrebiteľ kúpiť, aby poskytol sebe alebo svojej rodine zdravú výživu pri čo najmenších nákladoch.

Ak označíme x_j množstvo j-tej potraviny v stravovacom pláne, požiadavky na správnu výživu môžeme zapísať ako

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = 1, 2, \dots m. \tag{1.1}$$

K tejto podmienke pridávame ešte jednu, ktorá hovorí, že množstvo každej potraviny musí byť nezáporné:

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \dots n. \tag{1.2}$$

Systém nerovností (1.1) a (1.2) opisuje množinu prípustných riešení. Úlohou je minimalizovať celkové náklady na zdravú výživu, teda funkciu $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ pri ohraničeniach (1.1) a (1.2). Túto úlohu matematického programovania môžeme sformulovať v maticovom zápise:

$$\min\{z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \ \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \tag{1.3}$$

kde $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a A je matica typu $m \times n$.

Existuje niekoľko modifikácií a rozšírení tohto základného modelu. Rodinný model plánovania zdravej výživy, zahŕňajúci možné zmeny v stravovacích návykoch, v cenách potravín a v požiadavkách na zdravú výživu, predostrel `Balintfy`: Ministerstvo poľnohospodárstva v USA vyvinulo systém na presné určenie množstva jednotlivých druhov potravín (mliečne výrobky, ovocie, zelenina, mäso...), aby *"umožnili rodinám naplánovať si za svoje peniaze také zloženie potravín, ktoré bude vyhovujúce a zdravé zároveň"* (`Balintfy`, 1976). Cieľom bolo upraviť stravovací plán tak, aby sa čo najviac podobal vzoru prijatému v r.1965-66 a zároveň bol obsahom výživných látok prijateľný. Označme q_j množstvo minulej spotreby j-tej potraviny a x_j zodpovedajúce množstvo v novom stravovacom pláne. Problém bol sformulovaný ako minimalizácia vážených kvadratických odchýlok množstviev jednotlivých potravín v stravovacom pláne od ich množstiev v r.1965 s ohľadom na nové požiadavky na zdravú výživu:

$$\min_{\mathbf{x}} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} w_j (q_j - x_j)^2 | \ A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad R\mathbf{x} \geq \mathbf{d} \Big\} \qquad (1.4),$$

kde w_j sú váhy priradené odchýlkam pre jednotlivé druhy potravín, matica A určuje ceny potravín a tiež ich zloženie a matica R reprezentuje množinu horných a dolných medzí a zároveň určuje jednotlivé obmedzenia uvalené na zložky hľadaného vektora $\mathbf{x}$, aby sa zabezpečilo kladné a prijateľné množstvo každej potraviny. Podľa Balintfya stravovací plán dosiahnutý pomocou matematického programovania ušetril niektorým nemocniciam v USA od 10,15% až do 15,30% nákladov oproti bežným plánom.

1.2.2 Neoklasická teória domácnosti a firmy

Domácnosť a firma sú dva najdôležitejšie typy ekonomických agentov. Domácnosti spotrebúvajú výrobky a ponúkajú svoju pracovnú silu firmám, ktoré zasa tieto výrobky produkujú.

Domácnosti

Predpokladajme, že na trhu je dovedna n tovarov a služieb, nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)'$ je stĺpcový vektor týchto tovarov a služieb zakúpených domácnosťou. Dômácnosť môže určitý druh tovaru uprednostňovať pred inými, tieto preferencie opisuje tzv. **funkcia užitočnosti** U($\mathbf{x}$), ktorá dáva užitočnosť ako funkciu úrovne spotreby jednotlivých tovarov. Fukcia musí spĺňať obvyklé neoklasické vlastnosti:

1. $\frac{\partial U}{\partial x_j} > 0 \ \ \forall j = \ 1, 2, \ldots n \rightarrow$ hraničný úžitok z j-teho tovaru (úžitok dosiahnutý spotrebou posledného malého prírastku j-teho tovaru) musí byť kladný

2. $\frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} < 0 \quad \forall j = \ 1, 2, \dots n \rightarrow$ čím väčšie množstvo nejakého tovaru máme, tým menší úžitok plynie s jeho ďalšieho prírastku

Nech $\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2, \dots p_n)$ je riadkový vektor cien jednotlivých tovarov (ceny sú dané a kladné) a nech M je (tiež kladný) disponibilný príjem domácnosti. Predpokladá sa, že domácnosť maximalizuje svoj úžitok pri rozpočtovom obmedzení. Teda dománosť sa snaží vybrať také nezáporné množstvá jednotlivých tovarov a služieb, aby maximalizovala hodnotu svojej úžitkovej fukcie. Obmedzením je, aby celkové výdavky nepresiahli disponibilný príjem. Tu je problém domácnosti ako úloha matematického programovania:

$$\max \Big\{ U(\mathbf{x}) \ \mid \ \mathbf{pq} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq M, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Big\}. \tag{1.5}$$

Firmy

Firma ako ekonomický agent sa snaží maximalizovať svoj zisk pri technologických obmedzeniach, ktoré sú dané tzv. **produkčnou funkciou**. Predpokladajme, že firma využíva n vstupov (práca, uhlie, ...atď.) pri výrobe jediného produktu. Nech $\mathbf{x}$ je stĺpcový vektor vstupov použitých firmou,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)'$$

a nech q je úroveň produkcie

$$q = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots x_n). \tag{1.6}$$

Vzťah (1.6) je vzťahom pre produkčnú funkciu, ktorá závisí len od vstupov x_1 až x_n a okrem existencie maxima pre ľubovoľný vektor vstupov o nej nič viac nepredpokladáme. Nech $\mathbf{r}$ je vektor cien jednotlivých vstupov,

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots r_n)$$

a p jednotková cena produktu. Predpokladajme ďalej, že firma sa nachádza v konkurenčnom prostredí (ceny sú dané exogénne a neovplyvní ich ani množstvo predaného alebo kúpeného tovaru).

Firma maximalizuje svoj zisk π daný ako rozdiel medzi výnosmi pq a výdavkami, danými ako celkové výdavky na všetky vstupy: $\mathbf{rx} = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$. Problém firmy v konkurenčnom prostredí sa dá sformulovať ako nasledovná úloha matematického programovania

$$\max_{\mathbf{x}} \{ \pi(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) - \mathbf{rx} \ \mid \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} \tag{1.7}$$

Iná forma tohto problému je založená na predpoklade vopred danej úrovne výroby q^*. Firma sa usiluje minimalizovať celkové náklady M potrebné na dosiahnutie výroby na úrovni q^*:

$$\min_{\mathbf{x}} \Big\{ M(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \ \mid \ f(\mathbf{x}) = q^*, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Big\}. \tag{1.8}$$

Úzko spojená s touto úlohou je úloha maximalizovať výnosy pq (resp. produkciu q) pri dopredu stanovenej maximálnej výške výdavkov M^*

$$\max_{\mathbf{x}} \Big\{ pf(\mathbf{x}) \quad | \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \leq M^*, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Big\}. \tag{1.9}$$

Nech sa napríklad firma riadi tzv. **Cobb-Douglasovou** produkčnou funkciou, pre jednoduchosť (ale bez obmedzenia všeobecnosti) s dvoma vstupmi:

$$q = f(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \tag{1.10}$$

pričom $a > 0$, $0 < \alpha < 1$ a $0 < \beta < 1$. Problém (1.8) sa teraz dá zapísať ako

$$\min_{x_1, x_2} \{ r_1 x_1 + r_2 x_2 \ \ | \ \ a x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = q^*, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \}, \tag{1.11}$$

problém (1.9) zas nadobúda tvar

$$\min_{x_1, x_2} \{ p a x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \ \ | \ \ r_1 x_1 + r_2 x_2 \leq M^*, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \}. \tag{1.12}$$

1.2.3 Teória komparatívnej výhody

Takmer pred dvoma storočiami anglickí ekonómovia `Robert Torrens` ("An Essay on the Extrenal Corn Trade" (1815)) a `David Ricardo` ("On the Priciples of Political Econamy and Taxation" (1817)) nezávisle na sebe vyvinuli klasickú teóriu medzinárodného trhu, označovanú ako **teória komparatívnej výhody**. Ricardov numerický príklad s dvoma krajinami (1817) sa dá po malej modifikácii formulovať nasledovným spôsobom:

Portugalsko môže prerozdelením zdrojov namiesto potravín začať vyrábať šatstvo. Efektom bude, že jedna jednotka potravín sa prekonvertuje na jednu jednotku šatstva. Anglicko, naopak, by mohlo prekonvertovať jednu jednotku potravín na dve jednotky šatstva. Ak by existoval medzinárodný cenový pomer p_1/p_2 s hodnotou niekde medzi 1 a 2, pre obe krajiny by bolo výhodnejšie, keby sa špecializovali na jeden tovar; Portugalsko na potraviny a Anglicko na šatstvo. Anglicko bude exportovať šatstvo výmenou za potraviny importované z Portugalska a svetová produkcia sa zdokonalí. Tieto závery sú odvodené z teórie matematického programovania.

Pozrime sa najprv na Anglicko: Označme x_1 objem (v jednotkách) vyprodukovaných potravín a x_2 objem výroby šatstva. Hodnota národnej produkcie Anglicka (udaná v jednotkách šatstva) je daná vzťahom

$$Z = \frac{p_1}{p_2} x_1 + x_2, \qquad \text{napr., povedzme} \qquad Z = 1.5 x_1 + x_2.$$

Úlohou je samozrejme túto produkciu maximalizovať, pričom obmedzením je

$$2x_1 + x_2 \leq C$$

V tejto nerovnosti C vyjadruje maximálnu produkciu šatstva, keď sa žiadne potraviny neprodukujú. Podľa nerovnosti, výroba šatstva musí byť znížená o dve jednotky na každú vyrobenú jednotku potravín, teda ak sa vyrába x_1 jednotiek potravín, maximálne množstvo šatstva je $x_2 = C - 2x_1$, čo vedie k našej nerovnosti.

Podobným spôsobom aj Portugalsko maximalizuje svoj národný produkt:

$$max\{Z' = 1.5x'_1 + x'_2 \quad | \quad x'_1 + x'_2 \leq C'\},$$

kde x'_1 označuje produkciu potravín a x'_2 produkciu šatstva v Portugalsku. C' je maximálna produkcia jedného tovaru, ak druhý sa vôbec nevyrába.

Pre obe krajiny sme problém sformulovali ako úlohu matematického programovania. Tento príklad sa dá ľahko zovšeobecniť na n krajín a n tovarov. Pomocou riešenia úloh matematického programovania dospejeme k výsledku, že pre každú krajinu existuje tovar na ktorý sa oplatí špecializovať. Poznamenávame, že môže nastať aj prípad, keď jeden tovar je najvýhodnejší súčasne pre viac krajín.

1.2.4 Model výberu portfólia

Predpokladajme, že určité množstvo peňažných prostriedkov má byť investované do n rôznych cenných papierov. Nech x_j reprezentuje podiel j-teho cenného papiera na celkovom portfóliu a nech z_j je zisk (na konci uvažovaného obdobia) z jedného dolára investovaného do j-teho cenného papiera. Hodnoty z_j budú zrejme náhodné premenné so známou strednou hodnotou.

$$E(z_j) = \mu_j, \qquad j = 1, 2, \ldots n \tag{1.15}$$

Obvykle cenné papiere s vysokou očakávanou (strednou) hodnotou nesú zároveň vysoký stupeň rizika. V záujme zníženia rizika burzoví makléri často odporúčajú svojim klientom rozdeliť finančné prostriedky do viacerých cenných papierov, je to však principiálne v rozpore s maximalizáciou zisku. Ako mieru rizika možno vziať kovariančnú maticu $V = \{\sigma_{jk}\}, \quad \sigma_{jk} = E\big[(z_j - \mu_j)(z_k - \mu_k)\big]; \quad i, j = 1, 2, \ldots n$ (`Markowitz`, 1952). Očakávaný zisk z vybraného portfólia môžeme vyjadriť

$$E(P) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \tag{1.16}$$

a možnú odchýlku od zisku

$$V(P) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} x_j x_k. \tag{1.17}$$

Úlohou je zvoliť podiely x_j jednotlivých cenných papierov na portfóliu tak, aby sme minimalizovali rozptyl očakávaného zisku a zároveň tento zisk maximalizovali. Máme teda optimalizačný problém s dvoma účelovými funkciami, ktoré sú navyše vo vzájomnom rozpore. Cestou ku kompromisu môže byť minimalizácia rozptylu očakávaného zisku pre najnižší prijateľný zisk, alebo maximalizácia výnosu za podmienky, že rozptyl nepresiahne stanovenú hranicu. Optimum zjavne závisí od averzie investora k riziku. Ak mieru averzie k riziku označíme ρ (dané exogénne), tak problém výberu portfólia môžeme sformulovat' nasledovne:

$$\max \Big\{ Q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j - \rho \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} x_j x_k \Big| \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ (k = 1, 2, \ldots n) \Big\} \tag{1.18}$$

S ohl'adom na svoju averziu k riziku, investor môže nájst' kompromis medzi maximalizáciou výnosu a minimalizáciou rozptylu celkového výnosu. Rozšírenia a modifikácie tohto základného modelu sú často využívané v ekonomickej analýze a finančnom managemente.

Kapitola 2

Kuhn-Tuckerove podmienky

Už v 50-tych rokoch minulého storočia `Harold W. Kuhn` a `Albert William Tucker` rozšírili teóriu `Josepha L. Lagrangea`, ktorý sa zaoberal úlohou matematického programovania s ohraničeniami v tvare rovností. Odvodili nutné podmienky optimality pri ohraničeniach v tvare nerovností (tzv. **Kuhn-Tuckerove podmienky**) a položili tak základy modernej optimalizácie. Teória Kuhna a Tuckera sa hojne využíva pri hľadaní optimálneho využitia nedostatkových zdrojov, ropnými rafinériami a v mnohých iných oblastiach. V tejto kapitole sa pozrieme na Kuhn-Tuckerove podmienky pre rôzne typy úloh matematického programovania a ich úlohu v ekonómii. Spomenieme aj predpoklady, za ktorých možno tieto podmienky považovať za postačujúce.

2.1 Klasická úloha na viazaný extrém

Dve premenné, jedno ohraničenie

Optimalizačná úloha, v ktorej vystupujú ohraničenia v tvare rovností, sa nazýva **klasická úloha na viazaný extrém**. Uvažujme nasledovnú úlohu s dvomi premennými:

$$\min_{x,y}\{f(x,y) \ \mid g(x,y)=c\}. \tag{2.1}$$

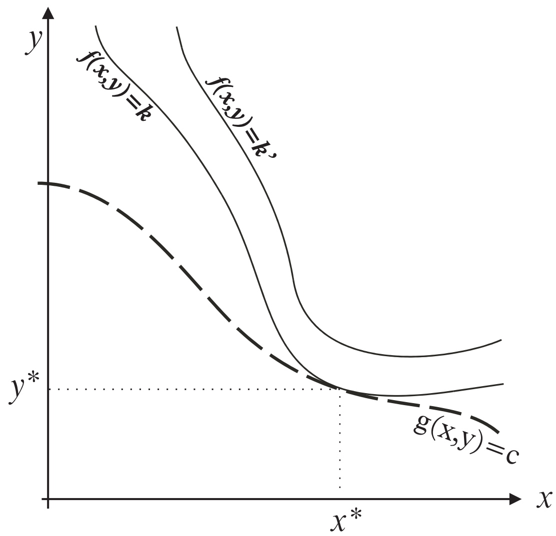
Predpkladajme, že množina všetkých dvojíc (x,y), pre ktoré $g(x,y)=c$, je diferencovateľná krivka v priestore (x,y), a tiež funkcia $f(x,y)$ je diferencovateľná. Potom v optimálnom riešení (x^*,y^*) sa krivka g dotýka krivky f (obr. 2.1). Skúsme teda vyjadriť dotyčnice oboch kriviek:

Derivovaním $g(x,y)=c$ dostávame

$$g'_x(x,y)+g'_y(x,y)\frac{dx}{dy}=0,$$

resp., ak $g'_y(x,y)\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{g'_x(x,y)}{g'_y(x,y)},$$



Obrázok 2.1: *Tzv. úrovňové krivky funkcie f (ak je f rastúca, platí $k < k'$)*

teda sklon krivky g v každom bode (x_0, y_0) roviny (x, y) je

$$-\frac{g'_x(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}.$$

Podobne, ak $f'_y(x^*, y^*) \neq 0$ sklon krivky f možno vyjadriť v bode (x_0, y_0):

$$\frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Rovnosť dotyčníc v bode optima (x^*, y^*) môžeme za predpokladu $g'_x(x^*, y^*) \neq 0$ po úprave zapísať v tvare

$$\frac{f'_x(x^*, y^*)}{g'_x(x^*, y^*)} = \frac{f'_y(x^*, y^*)}{g'_y(x^*, y^*)}. \tag{2.2}$$

Zaveďme teraz novú premennú λ a položme ju rovnú spoločnej hodnote oboch zlomkov. Podmienka pre minimum (2.2) sa dá zapísať ako dve rovnice

$$\begin{aligned} f'_x(x^*, y^*) - \lambda g'_x(x^*, y^*) &= 0 \\ f'_y(x^*, y^*) - \lambda g'_y(x^*, y^*) &= 0. \end{aligned}$$

Uvedomme si, že na splnenie týchto dvoch rovností stačí, aby jeden z výrazov $g'_x(x^*, y^*)$ alebo $g'_y(x^*, y^*)$ bol nenulový. Optimálne riešenie úlohy (2.1) musí takisto spĺňať $g(x^*, y^*) = c$, takže nasledujúce podmienky musia byť splnené v optimálnom riešení (x^*, y^*):

$$\begin{aligned} f'_x(x^*, y^*) - \lambda g'_x(x^*, y^*) &= 0 \\ f'_y(x^*, y^*) - \lambda g'_y(x^*, y^*) &= 0 \\ g(x^*, y^*) &= c. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na tieto podmienky sa dá pozrieť ako na podmienky prvého rádu pre stacionárny bod tzv. **Lagrangeovej funkcie**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c). \tag{2.4}$$

Výsledky môžeme zhrnúť do nasledovnej vety:

Veta 2.1. *Nech $f(x, y)$ a $g(x, y)$ sú spojito diferencovateľné funkcie na oblasti A a nech bod (x^*, y^*) spĺňa:*

1. *(x^*, y^*) je vnútorným bodom oblasti A*
2. *(x^*, y^*) je bodom optima (globálneho alebo lokálneho) funkcie $f(x, y)$ pri splnenej podmienke $g(x, y) = c$*
3. *$g'_x(x^*, y^*) \neq 0$ alebo $g'_y(x^*, y^*) \neq 0$.*

Potom existuje jediné číslo λ (tzv. **Lagrangeov multiplikátor***) také, že Lagrangeova funkcia (2.4) má v (x^*, y^*) stacionárny bod, teda spĺňa podmienky* (2.3)*.*

Poznamenávame, že podmienky (2.3) môžeme zapísať vtvare

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

n premenných, m ohraničení

Predchádzajúce výsledky môžeme ľahko zovšeobecniť na úlohu typu

$$\min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}) \mid g_j(\mathbf{x}) = c_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, m)\}, \tag{2.5}$$

kde $\mathbf{x}$ je n-rozmerný vektor so zložkami $(x_1, x_2, ... x_n)$. Lagrangeova funkcia má tvar

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - c_j), \tag{2.6}$$

čiže pre každé z m ohraničení máme jeden Lagrangeov multiplikátor. Ako v prípade dvoch premenných a jedného ohraničenia, tak aj v tomto viacrozmernom prípade je nutnou podmienkou optimality bodu $\mathbf{x}^*$, aby bol stacionárnym bodom Lagrangeovej funkcie. Podmienku z prípadu dvoch premenných, aby aspoň jeden z výrazov $g'_x(x^*, y^*)$ alebo $g'_y(x^*, y^*)$ bol nenulový, je ťažšie zovšeobecniť. Viacrozmernou analógiou tejto podmienky je, aby hodnosť matice typu $n \times m$, v ktorej (i, j)-tym prvkom je parciálna derivácia funkcie g_j podľa premennej x_i v bode $\mathbf{x}^*$, bola m. Takto definovanú maticu nazývame **Jacobiho matica** funkcie $\mathbf{g}(\mathbf{x})=(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), ...g_m(\mathbf{x}))$ a uvedená podmienka sa niekedy nazýva **Rg1-regularitou** bodu $\mathbf{x}^*$. Zovšeobecnenie môžeme zapísať nasledovne:

Veta 2.2 (Lagrange). *Nech $f(\mathbf{x})$ a $g_1(\mathbf{x})$, $g_2(\mathbf{x})$, ... až $g_m(\mathbf{x})$ sú spojito diferencovateľné funkcie na oblasti A a nech bod $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ... x_n^*)$ spĺňa:*

1. $\mathbf{x}^*$ *je vnútorným bodom oblasti* A

2. $\mathbf{x}^*$ *je bodom optima (globálneho alebo lokálneho) funkcie* $f(\mathbf{x})$ *pri splnenej podmienke* $g_j(\mathbf{x}) = c_j$ *pre* $j = 1, 2, ...\ m$

3. $\mathbf{x}^*$ *je Rg1-regulárnym bodom zobrazenia* $\mathbf{g}(\mathbf{x})$:$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \big(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), ...g_m(\mathbf{x})\big)$

Potom existuje jediný vektor λ=($\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m$) *(tzv.* **vektor Lagrangeovych multiplikátorov***) taký, že Lagrangeova funkcia (2.6) má v* $\mathbf{x}^*$ *stacionárny bod, čiže platí:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i = \ 1, 2, \ldots, n$$
$$g_j(\boldsymbol{x}) = c_j, \quad \forall j = \ 1, 2, \ldots, m$$

tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0, \qquad \forall i = \ 1, 2, \ldots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= 0, \qquad \forall j = \ 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Poznamenávame, že podmienka Rg-regularity je pomerne "silnou" podmienkou a ak netrváme na jednoznačnosti Lagrangeovych multiplikátorov, dá sa oslabiť.

Lagrangeova funkcia i multiplikátor sú pomenované podľa zakladateľa tejto teórie `Josepha-Louisa Lagrangea` (1736-1813).

Ekonomická interpretácia Lagrangeovych multiplikátorov

Predpokladajmme, že riešime úlohu (2.1) pre rôzne hodnoty parametrov c a riešenie je $\big(x^*(c), y^*(c)\big)$ s príslušným Lagrangeovym multiplikátorom $\lambda^*(c)$. Nech x^*, y^*, λ^* ako funkcie c sú diferencovateľné a nech aspoň jeden z výrazov $g'_x\big(x^*(c), y^*(c)\big)$ a $g'_y\big(x^*(c), y^*(c)\big)$ je nenulový. Položme $f^*(c) = f\big(x^*(c), y^*(c)\big)$ a derivujme podľa c:

$$\begin{aligned} f_c^{*'}(c) &= f_x^{*'}(c)\frac{\partial x^*}{\partial c}(c) + f_y^{*'}(c)\frac{\partial y^*}{\partial c}(c) \\ &= \lambda^*(c)\left[\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}\big(x^*(c), y^*(c)\big)\cdot\frac{\partial x^*}{\partial c}(c) + \frac{\partial g}{\partial y}\big(x^*(c), y^*(c)\big)\cdot\frac{\partial y^*}{\partial c}(c)}_{g'_c}\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Vidíme, že výraz v hranatej zátvorke vyjadruje deriváciu funkcie g podľa c v bode $(x^*(c), y^*(c))$. Lenže g pre $\forall$ c spĺňa $g(x^*, y^*) = c$, takže táto derivácia je konštantne rovná jednej. Rovnica (2.8) sa upraví na

$$f^{*'}(c) = \lambda^*(c).$$

Odtiaľ je zrejmá ekonomická interpretácia Lagrangeovho multiplikátora: Jeho hodnota v riešení úlohy je mierou zmeny v optimálnej hodnote účelovej funkcie pri malej zmene ohraničena. Napríklad pri maximalizácii úžitku z príjmu optimálna hodnota parametra λ meria hraničný úžitok z príjmu (je mierou rastu úžitku pri rastúcom príjme).

Podobným prístupe k úlohe (2.5) dostávame

$$f_i^{*'}(\mathbf{c}) = \lambda_i^*(\mathbf{c}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.9}$$

kde $f^*(\mathbf{c}) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{c}))$ a $\mathbf{c}$ je vektor so zložkami c_1 až c_m. Optimálna hodnota Lagrangeovho multiplikátora pre j-te ohraničenie g_j je mierou zmeny optimálnej hodnoty účelovej funkcie pri malej zmene tohto ohraničenia. Ak napríklad j-te ohraničenie je ohraničením množstva nejakého zdroja, tak o λ_j hovoríme ako o "**tieňovej cene**" tohto zdroja.

2.2 Kuhn-Tuckerova veta

Základná úloha matematického programovania má tvar:

$$\min_{\mathbf{x}}\{f_0(\mathbf{x}) \ \mid f_i(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \ \ i = 1, 2, \ldots, m\}, \tag{2.10}$$

Tento problém je zovšeobecnením klasického optimalizačného problému, ktorý používa ohraničenia v tvare rovností. Zavedením m doplnkových premenných y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) sa úloha (2.10) dá prepísať ako úloha typu (2.5):

$$\min_{\mathbf{x}}\{f_0(\mathbf{x}) \ \mid f_i\mathbf{x}) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m\}, \tag{2.11}$$

Skôr, ako rozšírime Lagrangeovu teóriu na úlohu typu (2.10), musíme poznať ďalší druh regularity.

Definícia 2.1. *Prípustné riešenie* $\mathbf{x}^\circ$ *úlohy (2.10) nazveme* **Rg-5 regulárnym**, *ak pre všetky nenulové riešenia* $\mathbf{y}$ *sústavy nerovností*

$$\nabla f_i(\mathbf{x}^\circ)^\top \mathbf{y} \leq 0, \ \ i \in I_\circ = \{i | f_i(x^\circ) = 0\} \tag{2.12}$$

existuje diferencovateľná krivka $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *definovaná pre* $0 \leq t \leq 1$, *pre ktorú platí:*

1. $f_i\big(h(t)\big) \leq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$
2. $h(0) = \mathbf{x}^\circ$
3. $\frac{dh(0)}{dt} = \lambda \mathbf{y}, \quad (\lambda > 0)$,

inými slovami, krivka $h(t)$ *leží celá v množine prípustných riešení, vychádza z bodu* $\mathbf{x}^\circ$ *a má v ňom dotyčnicu rovnobežnú s vektorom* $\mathbf{y}$.

Lagrangeova teória sa dá rozšíriť nasledovným spôsobom:

Veta 2.3 (Kuhn-Tuckerova). *Nech funkcie* $f_k(\mathbf{x}), (k = 0, 1, \ldots, m)$ *sú všetky diferencovateľné. Ak funkcia* $f_0(\mathbf{x})$ *dosahuje v* **Rg-5 regulárnom** *bode* $\mathbf{x}^\circ$ *lokálne minimum pri ohraničeniach* $f_i(\mathbf{x}) \leq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$*, tak existuje vektor Lagrangeových multiplikátorov* $\mathbf{u}^\circ$*, ktorý spĺňa:*

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(\mathbf{x}^\circ) + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{u}_i^\circ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^\circ) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.13 \cdot \mathrm{I})$$

$$f_i(\mathbf{x}^\circ) \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.13 \cdot \mathrm{II})$$

$$u_i^\circ f_i(\mathbf{x}^\circ) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.13 \cdot \mathrm{III})$$

$$u_i^\circ \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.13 \cdot \mathrm{IV})$$

Podmienky $(2.13 \cdot \mathrm{I})$ *až* (IV) *sa nazývajú* **Kuhn-Tuckerove podmienky** *a sú to vlastne* ***nutné*** *podmienky pre lokálne minimum úlohy* (2.10)*. Pri analogickej maximalizačnej úlohe sa podmienka nezápornosti* $(2.13 \cdot \mathrm{IV})$ *zmení na podmienku* $\mathbf{u}^\circ \leq \mathbf{0}$*.*

Dôkaz. Najprv zadefinujeme Lagrangeovu funkciu pre úlohu (2.11), podobne ako v prípade klasickej úlohy – ako funkciu pôvodných premenných (v našom prípade $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$) a Lagrangeovych multiplikátorov $\mathbf{u}$:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_i \big(f_i(\mathbf{x}) + y_i^2\big).$$

Nutné podmienky pre jej lokálne minimum sú:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \frac{\partial\big(f_i(\mathbf{x}^\circ) + (y_i^\circ)^2\big)}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.14 \cdot \mathrm{I})$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = 2u_i^\circ y_i^\circ = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.14 \cdot \mathrm{II})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = f_i(\mathbf{x}^\circ) + (y_i^\circ)^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.14 \cdot \mathrm{III})$$

Teraz ukážeme, že podmienky v sústave (2.14·III) zodpovedajú Kuhn-Tuckerovym podmienkam v $(2.13 \cdot \mathrm{III})$.

Nech najskôr $u_i^\circ = 0$. Potom $L(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{u}^\circ) = f_0(\mathbf{x}^\circ)$, čiže $\frac{\partial L}{\partial u_i}(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{u}^\circ) = 0$, čím je splnené $(2.14 \cdot \mathrm{III})$. Platnosť $(2.13 \cdot \mathrm{III})$ je jasná.

Ak $u_i^\circ \neq 0$, podľa $(2.14 \cdot \mathrm{II})$ sa musí rovnať nule y_i° a teda $(y_i^\circ)^2 = -f_i(\mathbf{x}^\circ) = 0$, podmienka $(2.13 \cdot \mathrm{III})$ je splnená. Na druhej strane z $(2.13 \cdot \mathrm{III})$ máme $f_i(\mathbf{x}^\circ) = 0$ a pre $y_i^\circ = 0$ je podmienka $(2.14 \cdot \mathrm{III})$ splnená. Podmienky $(2.14 \cdot \mathrm{I})$ a $(2.14 \cdot \mathrm{II})$ obsahujú spolu $m + n$ rovníc, premenných je dokopy $2m + n$. Doplnkové premenné (je ich m) sa dajú eliminovať, pričom dostaneme podmienky $(2.13 \cdot \mathrm{I})$ a $(2.13 \cdot \mathrm{II})$.

Ostáva ukázať, že Lagrangeove multiplikátory musia byť nezáporné. Z tohto dôvodu si predstavme, že minimalizujeme funkciu $f_0(\mathbf{x})$ pri ohraničeniach $f_i(\mathbf{x}) \leq$

$b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$. Pre Lagrangeove multiplikátory $u_i^\circ \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ sa dá odvodiť vzťah (`Luenberger`, 1973)

$$\frac{\partial f_0\big(\mathbf{x}^\circ(\mathbf{b})\big)}{\partial b_i} = -u_i^\circ \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.15}$$

Tento vzťah je vlastne analógiou vzťahu (2.9), pričom záporné znamienko pri u_i° vyplýva z trochu inej definície Lagrangeovej funkcie oproti (2.6). Lagrangeove multiplikátory nám teda udávajú zmenu hodnoty účelovej funkcie pri malej zmene ohraničenia b_i. Treba si však uvedomiť, že zvačšením b_i zväčšíme množinu prípustných riešení – a preto nová optimálna hodnota účelovej funkcie nemôže byť "horšia". Teda platí

$$\frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial b_i} \leq 0 \qquad \text{pre minimalizačnú úlohu,} \tag{2.16}$$

a

$$\frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial b_i} \geq 0 \qquad \text{pre maximalizačnú úlohu.} \tag{2.17}$$

Podmienka $(2.13 \cdot \mathrm{IV})$ teraz vyplýva z (2.15) a (2.16), podobne z (2.15) a (2.17) je vidieť, že Lagrangeove multiplikátory pre maximalizačnú úlohu nesmú byť kladné.
$\square$

Vzťah (2.15) naznačuje ekonomickú interpretáciu vektora Lagrangeových multiplikátorov – jeho i-ta zložka udáva zmenu účelovej funkcie pri minimálnom uvoľnení i-teho ohraničenia. Čím je i-ta zložka Lagr. multiplikátora v absolútnej hodnote menšia, tým menšiu dôležitosť môžme i-temu ohraničeniu pripisovať. Ak $u_i^\circ = 0$, i-te ohraničenie je dokonca neaktívne.

Za účelom geometrickej interpretácie Kuhn-Tuckerovych podmienok $(2.13 \cdot \mathrm{I})$ až $(2.13 \cdot \mathrm{IV})$ prepíšeme podmienky $(2.13 \cdot \mathrm{I})$ do tvaru

$$\nabla f_0(\mathbf{x}^\circ) = -\sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \nabla f_i(\mathbf{x}^\circ).$$

Čiže v optimálnom riešení musí byť gradient účelovej funkcie nekladnou váženou kombináciou gradientov aktívnych ohraničení (takých v ktorých nastáva pre $\mathbf{x}^\circ$ rovnosť), inými slovami gradient účelovej funkcie musí ležať vo vnutri kužeľa, vytvoreného normálami smerujúcimi dovnútra množiny prípustných riešení v bode $\mathbf{x}^\circ$.

Ak vytvoríme Lagrangeovu funkciu pre úlohu (2.10),

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}), \tag{2.18}$$

potom Kuhn-Tuckerove podmienky môžeme pomocou nej vyjadriť vyjadriť v nasledovnom tvare:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.13 $\cdot$ I$'$}$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)}{\partial u_j} \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.13 $\cdot$ II$'$}$$

$$u_i^\circ \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)}{\partial x_j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.13 $\cdot$ III$'$}$$

$$u_i^\circ \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.13 $\cdot$ IV$'$}$$

Vidíme, že n podmienok ($2.13 \cdot \mathrm{I}'$) je rovnakých ako v prípade klasickej úlohy na viazaný extrém (2.7).

m podmienok ($2.13 \cdot \mathrm{II}'$) vyjadruje ohraničenia úlohy matematického programovania; tie dovoľujú, aby otimálne riešenie patrilo hranici množiny prípustných riešení alebo bolo jej vnútorným bodom.

Ktorá z týchto dvoch situácii nastáva, o tom hovoria podmienky ($2.13 \cdot \mathrm{III}'$). Ak je i-te ohraničenie aktívne, tak zodpovedajúci Lagrangeov multiplikátor bude nulový. Naopak, ak $u_i^\circ \neq 0$, potom $\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)}{\partial u_j} = f_i(\mathbf{x}^\circ) = 0$.

Podmienky ($2.13 \cdot \mathrm{IV}'$), ktoré požadujú nezápornosť Lagr. multiplikátorov, vyplývajú zo skutočnosti, že ohraničenia majú tvar nerovností – ak ohraničením je rovnosť, tak príslušný Lagrangeov multiplikátor nie je ohraničený.

2.3 Hlavné princípy Kuhn-Tuckerových podmienok

V mnohých ekonomických modeloch formulovaných pomocou matematického programovania vystupujú podmienky nezápornosti premenných (viď kap. I). Tieto podmienky by sa ľahko dali zahrnúť do množiny ohraničení $f_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$, ale, ako hneď ukážeme, je praktickejšie uvažovať podmienky nezápornosti oddelene.

Uvažujme nasledovnú úlohu matematického programovania:

$$\min_{\mathbf{x}} \{ f_0(\mathbf{x}) \;\mid f_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i = \; 1, 2, \ldots, m), \quad -x_j \leq 0 \quad (j = \; 1, 2, \ldots, m) \}. \tag{2.19}$$

Najprv napíšme Lagrangeovu funkciu pre úlohu (2.19):

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} w_j(-x_j) \tag{2.20}$$

Označme $\Psi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ, \mathbf{w}^\circ) = \Psi^\circ$. Kuhn-Tuckerove podmienky majú tvar:

$$\frac{\partial \Psi^\circ}{\partial x_j} = \frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} - w_j^\circ = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

alebo ekvivalentne $$\frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} = w_j^\circ \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.21)$$

Ďalej $$\frac{\partial \Psi^\circ}{\partial u_j} = f_i(\mathbf{x}^\circ) \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.22)$$

$$u_i^\circ \frac{\partial \Psi^\circ}{\partial u_j} = u_i^\circ f_i(\mathbf{x}^\circ) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.23)$$

$$\frac{\partial \Psi^\circ}{\partial w_j} = -x_j^\circ \leq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.24)$$

$$w_j^\circ \frac{\partial \Psi^\circ}{\partial w_j} = w_j^\circ(-x_j^\circ) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.25)$$

$$u_i^\circ \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2.26)$$

$$w_j^\circ \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.27)$$

Spojením (2.21) a (2.25) dostávame

$$x_j^\circ \left(\frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} \right) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.28)$$

Podmienky (2.21) až (2.27) sa dajú zapísať pomocou Lagrangeovej funkcie (2.18) pre úlohu (2.10) a zhrnúť symetricky vzhľadom na $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$:

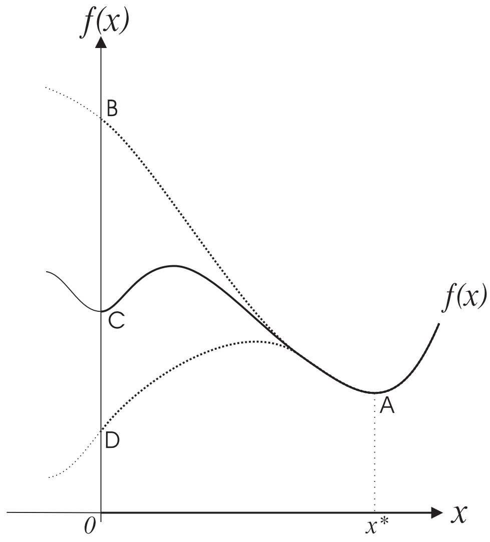
$$\frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \quad (2.29) \qquad\qquad \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{u}} \leq \mathbf{0} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{x}^\circ \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (2.30) \qquad\qquad \mathbf{u}^\circ \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (2.33)$$

$$\mathbf{x}^\circ \geq \mathbf{0} \quad (2.31) \qquad\qquad \mathbf{u}^\circ \geq \mathbf{0} \quad (2.34)$$

Porovnaním Kuhn-Tuckerových podmienok $(2.13 \cdot \mathrm{I})$ až $(2.13 \cdot \mathrm{IV})$ s podmienkami (2.29) až (2.34) zistíme, že zavedenie podmienky nezápornosti premenných x_i spôsobilo, že podmienka $(2.13 \cdot \mathrm{I})$ je nahradená dvojicou podmienok (2.29) a (2.30). V nasledujúcej časti sa zamyslíme, prečo je to tak. Uvažujme pre jednoduchosť, ale bez straty všeobecnosti úlohu minimalizovať funkciu jednej premennej $f(x)$, pričom jediným ohraničením je $x \geq 0$. Na obrázku (2.2) je situácia znázornená graficky.

Predpokladajme, že sme v bode, kde hodnota x sa dá zmenšiť i zväčšiť (vnútorný bod A). Ak má takýto bod byť minimom, musí spĺňať $df/dx = 0$, pretože inak by sme buď zvýšením alebo znížením jeho hodnoty dosiahli nárast hodnoty



Obrázok 2.2: *Niekoľko možností pre priebeh funkcie $f(x)$*

účelovej funkcie. Na druhej strane skúmajme, aké sú možnosti, aby minimum ležalo na hranici množiny prípustných hodnôt (čiže $x = 0$). Na obrázku sú znázornené tri možnosti. Bod B minimom byť nemôže, pretože zvýšenim hodnoty x dosiahneme zníženie hodnoty účelovej funkcie; v bode C je derivácia nulová takže nutnú podmienku spĺňa, a konečne bod D je tiež vhodným kandidátom na optimum (hoci derivácia v ňom je nenulová), pretože zvýšením jeho hodnoty zvýšime tiež hodnotu f a znížiť hodnotu x viac nemožno.

Priamym zovšeobecnením na funkcie n premenných dostávame: Nech je daná diferencovateľná funkcia $f(x_1, x_2, \dots x_n)$. Potom

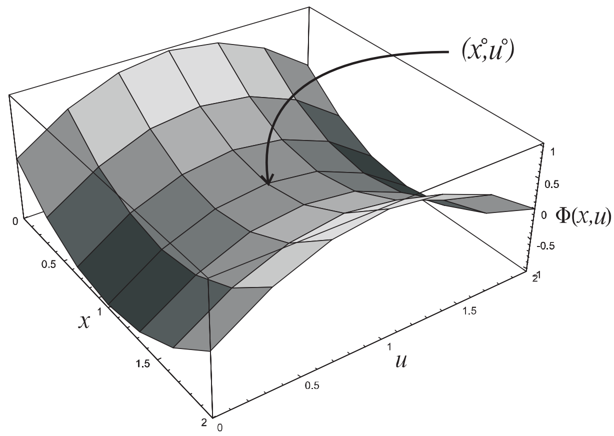
- pre vnútorné optimum je nutné, aby platilo $\partial f/\partial x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$
- pre minimum na hranici musí platiť $\partial f/\partial x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$, pre maximum $\partial f/\partial x_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$.

Kuhn-Tuckerove podmienky a sedlový bod Lagrangeovej funkcie

Uvažujme o Lagrangeovej funkcii pre úlohu (2.10):

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}).$$

Ak túto funkciu berieme ako závislú iba od $\mathbf{x}$ a minimalizujeme ju vzhľadom na podmienku $x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$, tak nutnými podmienkami minima sú presne Kuhn-Tuckerove podmienky (2.29) až (2.31) pre úlohu (2.10). Podobne Kuhn-Tuckerove podmienky (2.32) až (2.34) poskytujú nutné podmienky pre lokálne maximum Lagrangeovej funkcie (2.18), ako funkcie argumentu $(\mathbf{u})$, a to za jedinej podmienky $u_j \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$. Grafické znázornenie tejto vlastnosti bodu $(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$ je na obr.(2.3)



Obrázok 2.3: *Sedlový bod Lagrangeovej funkcie*

Definícia 2.2. *Bod* $(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$*,* $\mathbf{x}^\circ \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{u}^\circ \geq \mathbf{0}$ *sa nazýva* **sedlový bod** *Lagrangeovej funkcie* $\Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$ *ak*

$$\Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}) \leq \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ) \leq \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^\circ)$$

pre všetky $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$*.*

Inými slovami, pre pevne dané $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ$ Lagrangeova funkcia má minimum v $\mathbf{x}^\circ$ a pre pevne dané $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ$ má maximum v $\mathbf{u}^\circ$. Teraz môžeme vysloviť vetu o vzťahu sedlového bodu a optimálneho riešenia úlohy (2.10)

Veta 2.4. *Ak existuje sedlový bod* $(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$ *Lagrangeovej funkcie* $\Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$*, potom* $\mathbf{x}^\circ$ *je optimálne riešenie úlohy* (2.10)*.*

Ak by sme chceli implikáciu obrátiť, potrebujeme, aby všetky zúčastnené funkcie boli konvexné. K tejto problematike sa vrátime v sekcii **2.5**.

2.4 K-T podmienky pre všeobecnú úlohu matematického programovania

Praktické aplikácie matematického programovania v ekonómii často obsahujú oba skúmané typy ohraničení: rovnosti aj nerovnosti. Preto definujeme **všeobecnú úlohu matematického programovania**:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \{ f_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \mid \ & f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0 \quad (i = \ 1, 2, \ldots, m) \\ & g_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (h = \ m+1, \ldots, r) \\ & \mathbf{x} \geq 0 \\ & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^l \}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Je vidieť, že úlohy (2.10) a (2.19) sú špeciálnym prípadom tejto úlohy. Kuhn-Tuckerove podmienky sa dajú zapísať v nasledovnom symetrickom tvare:

$$\frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{u}} \leq \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^\circ \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{x}} = 0, \qquad \mathbf{u}^\circ \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

$$\mathbf{x}^\circ \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}^\circ \geq \mathbf{0}$$

kde $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{h=m+1}^{r} v_h g_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a označili sme $\Phi^\circ = \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}^\circ, \mathbf{u}^\circ, \mathbf{v}^\circ)$. Vektor $(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}^\circ)$ označuje lokálne minimum funkcie $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ za podmienok z úlohy (2.35) a $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sú zodpovedajúce vektory Lagrangeovych multiplikátorov.

Teraz sformulujeme niekoľko pravidiel, pomocou ktorých možno sformulovať Kuhn-tuckerove podmienky pre všeobecnú úlohu matematického programovania:

1. Pre minimalizačnú (resp. maximalizačnú) úlohu zapíšeme všetky ohraničenia v tvare nerovností ako

$$f_i(x) \leq 0 \qquad (\text{resp. } f_i(x) \geq 0).$$

2. Napíšeme Lagrangeovu funkciu ako súčet účelovej funkcie a vážených ohraničení.

3. Nakoniec napíšeme parciálne derivácie Largrangeovej funkcie. Tie musia spĺňať:

   - Pri minimalizácii (maximalizácii) derivácie podľa nezápornej premennej sú nezáporné (nekladné) a zároveň platí

$$\mathbf{x} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = 0,$$

   - derivácie podľa voľných premenných sú nulové,
   - pri minimalizácii (maximalizácii) derivácie podľa Lagrangeovych multiplikátorov zodpovedajúcich podmienkam v tvare nerovností sú nekladné (nezáporné) a platí

$$\mathbf{u} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} = 0,$$

   - derivácie podľa Lagrangeovych multiplikátorov prislúchajúcich podmienkam v tvare rovností sú nulové.

Kuhn-Tuckerove podmienky sa nazývajú podmienkami prvého rádu, sú teda, ako sme už spomenuli, len **nutnými** podmienkami optimality. Na ilustráciu tejto skutočnosti uvádzame jednoduchý príklad s jednou premennou:

$$\max\{f(x) = (x-1)^3 \quad | \quad x \geq 2, \quad x \leq 0\}$$

Lagrangeova funkcia má tvar $\Phi(x,u) = (x-1)^3 + u(2-x)$ a Kuhn-Tuckerove podmienky dávajú:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 3(x-1)^2 - u \leq 0, \\
x\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= x\left[3(x-1)^2 - u\right] = 0, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial u} &= 2 - x \geq 0, \\
u\frac{\partial \Phi}{\partial u} &= 0, \\
u &\geq 0 \qquad \text{(pravidlo 1).}
\end{aligned}$$

Hoci platí, že $x^\circ = 1$ a $u^\circ = 1$ vyhovujú K-T podmienkam (všetky sú nulové), z priebehu funkcie $f(x)$ je zrejmé, že hľadané maximum nie je v bode $x = 1$ ale $x = 2$.

V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať otázkou, kedy sú nutné podmienky sú zároveň postačujúcimi.

2.5 K-T podmienky a konvexné programovanie

Vlastnosť konvexnosti je v ekonómii veľmi dôležitá. Úlohy, v ktorých vystupujú konvexné funkcie, sa nazývajú úlohami konvexného programovania. Keďže táto práca má ambíciu skôr ekonomicky interpretovať ako definovať a dokazovať, nebudeme sa pojmom konvexnej množiny resp. funkcie podrobne zaoberať. Základná definícia konvexnej množiny hovorí, že s každými dvoma bodmi A, B z tejto množiny jej patrí tiež úsečka $\overline{AB}$. V ekonómii má táto vlastnosť peknú interpretáciu: Ak množina prípustných riešení je kovexná, potom s každými dvoma prípustnými riešeniami je prípustná aj ľubovoľná konvexná kombinácia týchto riešení. Geometrická interpretácia konvexnej funkcie je, že množina bodov ležiacich nad grafom musí byť konvexná. Inými slovami, ak spojíme dva body grafu konvexnej funkcie, graf leží pod vytvorenou úsečkou. Známou vlastnosťou konvexnej funkcie jednej premennej je, že ak má na nejakej oblasti D spojitú deriváciu, táto je neklesajúca. Uvedená vlastnosť sa dá zapísať nasledovne:

$$\forall x, y \in D \quad x < y: \qquad f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y). \tag{2.36}$$

Táto vlastnosť sa dá upraviť a zovšeobecniť na funkciu vektorového argumentu

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\intercal \nabla f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \leq (\mathbf{y} - \mathbf{x})^\intercal \nabla f(\mathbf{y}). \tag{2.37}$$

2.5.1 K-T veta pre úlohu konvexného programovania

Veta 2.5. *Nech všetky zúčastnené funkcie v* (2.10) *sú konvexné. Ak existujú Lagrangeove multiplikátory* $u_i^\circ \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ *splňajúce* (2.13·I) *až* (2.13·IV)*, potom* x° *je optimálnym riešením úlohy* (2.10).

Dôkaz. Vďaka konvexnosti funkcií $f_k(\mathbf{x}) \quad (k = 0, 1, \ldots, m)$ a vzťahu (2.37) máme:

$$f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}^\circ) \geq (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)^\intercal \nabla f_k(\mathbf{x}^\circ) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{2.38}$$

Pomocou (2.38), (2.13·I) a následne (2.38) a (2.13·II až IV) dostávame

$$f_0(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x}^\circ) \geq (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)^\intercal \nabla f_0(\mathbf{x}^\circ) = (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^\intercal \left(- \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \nabla f_i(\mathbf{x}^\circ) \right) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \nabla f_i(\mathbf{x}^\circ)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ) \geq$$

$$\geq - \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ (f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}^\circ)) = - \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ f_i(\mathbf{x}^\circ) \geq 0,$$

a teda $f_0(\mathbf{x}) \geq f_0(\mathbf{x}^\circ)$. □

Pre úlohu konvexného programovania, v ktorej sú splnené určité podmienky regularity, sú Kuhn-Tuckerove podmienky zároveň nutnými i postačujúcimi podmienkami optimality.

2.5.2 Veta Slatera

Už sme spomenuli, že sedlový bod Lagrangeovej funkcie implikuje optimálne riešenie príslušnej úlohy na viazaný extrém. V prípade úlohy konvexného programovania môžeme túto implikáciu obrátiť.

Definícia 2.3 (S-Regularita). *Množinu prípustných riešení úlohy konvexného programovania* (2.10) *nazveme* **S-regulárnou**, *ak* $\exists \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n; f_i(\mathbf{x}^*) < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$*, čiže ak existuje bod, v ktorom sú všetky ohraničenia splnené ako ostré nerovnosti.*

Veta 2.6 (Slaterova). *Nech S-regularita je splnená v úlohe konvexného programovnaia* (2.10)*. Ak* $\mathbf{x}^\circ$ *je riešením konvexnej úlohy* (2.10)*, tak existuje nezáporný vektor Lagr. multiplikátorov* $\mathbf{u}^\circ$ *taký, že* $(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$ *je sedlovým bodom Lagrangeovej funkcie*

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}).$$

Slaterova veta je všeobecnejšia ako Kuhn-Tuckerova veta, pretože nepožaduje diferencovateľnosť zúčastnených funkcií. Jej nevýhodou je, S-regularita sa vzťahuje na ohraničenia v tvare nerovností. Dá sa ukázať (`Arrow-Huzwicz-Uzawa`,1958), že Slaterova veta pre úlohu konvexného programovania zostáva v platnosti aj v prípade že niektoré ohraničenia sú v tvare rovností (musia však byť lineárne).

Poznamenávame, že analogicky sa dajú sformulovať obe vety (2.5) i (2.6) pre maximalizačnú úlohu na viazaný extrém – nahradením konvexnosti účelovej funkcie konkávnosťou.

2.5.3 Ekonomická interpretácia

Uvažujme úlohu matematického programovania nájsť taký pomer vyrobených produktov x_1 až x_n, ktorý by maximalizoval zisk firmy

$$\pi(\mathbf{x}) = f_0(x_1, x_2 \ldots, x_n) \qquad (2.39).$$

Okrem prirodzeného predpokladu, zabezpečujúceho nezápornosť produkcie

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.40)$$

musí firma zohľadniť ešte jeden: Na výrobu každého druhu produktu je potrebné určité množstvo vstupu i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, celkové použitie zdroja i je teda funkciou úrovne výroby, pričom zdroje sú obmedzené:

$$f_i(x_1, x_2 \ldots, x_n) \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2.41)$$

Preedpokladajme, že $f_0(\mathbf{x})$ je konkávna a $f_i(\mathbf{x})$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sú konvexné funkcie. Úloha (2.39-41) je úlohou konvexného programovania. Z konvexnosti ohraničení vyplýva konvexnosť množiny prípustných riešení. Konkávnosť ziskovej funkcie znamená, že hraničný zisk je nerastúci. Napíšme teraz Lagrangeovu funkciu:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i(b_i - f_i(\mathbf{x}).$$

Nutné a postačujúce podmienky, aby bod $(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)$ bol riešením (2.39-41) sú

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} \leq 0$$

alebo $$\frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} \leq \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (2.42)$$

$$x_j^\circ \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)}{\partial x_j} = x_j^\circ \left[\frac{\partial f_0(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i^\circ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^\circ)}{\partial x_j} \right] = 0 \qquad (2.43)$$

$$x_j^\circ \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)}{\partial u_j} = b_i - f_i(\mathbf{x}^\circ) \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (2.45)$$

$$u_i^\circ \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{u}^\circ)}{\partial u_j} = u_i^\circ \left[b_i - f_i(\mathbf{x}^\circ) \right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (2.46)$$

$$u_j^\circ \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (2.47)$$

Lagrangeove multiplikátory môžeme pokusne považovať za jednotkové obstarávacie náklady m vzácnych zdrojov.

Kuhn-Tuckerove podmienky (2.42) majú jasnú ekonomickú interpretáciu: Ľavá strana reprezentuje hraničný výnos j-teho produktu a $\partial f_i(\mathbf{x}^\circ)/\partial x_j$ udáva množstvo i-teho vstupu potrebné na výrobu jednej jednotky produktu j. Súčin $u_i^\circ \partial f_i(\mathbf{x}^\circ)/\partial x_j$

potom udáva hodnotu vstupu i potrebného na výrobu produktu j. Teda pravá strana v (2.42) je súhrnná hodnota všetkých vstupov potrebných na produkciu jednej jednotky výstupu j. Vzťah (2.42) hovorí, že hraničný zisk z ľubovoľného produktu nesmie byť väčší ako hraničné náklady na jeho výrobu.

Podmienky (2.43) hovoria, že ak hraničný zisk z nejakého produktu je nižší ako hraničné náklady na jeho výrobu, optimálne je tento profukt vôbec nevyrábať a použiť zdroje efektívnejšie. Ak sa j-ty produkt vyrába, $x_j > 0$, tak hraničný zisk je rovný hraničným nákladom za vstupy použité pri jeho výrobe.

Ekonomická interpretácia podmienok (2.45) je jasná: Celkové množstvo i-teho vstupu použité pri výrobnom procese nesmie prekročiť dostupné alebo použiteľné množstvo.

Z pohľadu ekonóma sú zaujímavé aj podmienky (2.46). Hovoria, že ak v optimálnom riešení je nejaké množstvo nevyužitého zdroja i $\quad (f_i(\mathbf{x}^\circ) < b_i)$, tak musí ísť o zdroj, ktorý nie je vzácny a na trhu je ho dostatok, teda jeho hodnota je pre firmu nulová. Pridanie malého množstva tohto zdroja nezmení optimálnu hodnotu účelovej funkcie. Ak hodnota vstupu i je kladná, využije sa pri výrobe všetko jeho dostupné množstvo $(f_i(\mathbf{x}^\circ) = b_i)$.

Kapitola 3

K-T podmienky ako nástroj ekonomickej analýzy

Kuhn-Tuckerove podmienky sú užitočné pri riešení špecifických numerických problémov a mnoho algoritmov na výpočet optima je založených práve na týchto podmienkach. Ekonómom však môžu ešte významnejšie pomôcť pri odvodzovaní kvalitatívnych výsledkov bez potreby presne numericky špecifikovať parametre daného optimalizačného problému. Cieľom môže byť napríklad **charakterizovať** optimálne (v určitom zmysle) správanie ekonomického agenta. *"Kuhn-Tuckerove podmienky môžu predstavovať najsilnejší samostatný nástroj, aký môže matematické programovanie ekonomickej teórii ponúknuť."* (`Baumol`,1972) V tejto kapitole uvedieme niekoľko príkladov na ilustráciu, ako môžu práve Kuhn-Tuckerove podmienky pomôcť pri kvalitatívnej analýze ekonomických modelov.

3.1 Oceňovanie pri špičkovom zaťažení

Firmy častokrát stoja pred problémom, že dopyt po ich tovaroch či službách sa mení v priebehu dňa, takže niekedy je ich kapacita plne využitá (obdobie špičky alebo "peak periods"), zatiaľčo inokedy je dopyt nízky a kapacita firmy nie je plne využitá (tzv. "off-peak periods"). Viacerí ekonómovia ukázali, že optimálne – v zmysle maximalizácie zisku – je rozdielne oceňovanie produktu počas dňa. Vychádzajúc napr. z práce Baumola (1972) môžeme sformulovať nasledujúce tvrdenie:

Veta 3.1. *Profit maximalizujúci výstup firmy je taký, že ceny v "off-peak periods" akurát pokryjú hraničné prevádzkové náklady a v obdobiach plnej využitosti kapacity ich prekročia, pričom suma týchto prekročení sa priráta k hraničným investičným nákladom tak, že sa práve rovnajú hraničným nákladom na rastúcu kapacitu.*

Tento výsledok poskytuje základné pravidlá pri určovaní denných a nočných sadzieb za elektrinu, telefón atď. Dôkaz je založený na Kuhn-Tuckerovej teórii:

Dôkaz. Označme $x_1, x_2, \ldots, x_{24}$ množstvá požadované počas každej z 24 hodín dňa a $p_1, p_2, \ldots, p_{24}$ zodpovedajúce ceny (fixné, dané exogénne). Predpokladáme $x_i > 0$, tj. v každej hodine sa prejaví aspoň nejaký dopyt. Hodinovú kapacitu firmy označíme

y. funkcia $C(x_1, x_2, \ldots, x_{24})$ opisuje denné celkové prevádzkové náklady a $g(y)$ denné fixné náklady na kapacitu y. Predpokladajme ďalej, že hraničné prevádzkové náklady $\frac{\partial C}{\partial x_i}$ ako aj hraničné kapacitné náklady $\frac{\partial g}{\partial y}$ sú kladné. Firma maximalizuje celkový denný zisk pri kapacitnom obmedzení:

$$\max \left\{ \Pi = \sum_{i=1}^{24} p_i x_i - C(x_1, x_2, \ldots, x_{24}) - g(y) \quad \middle| \quad \begin{array}{ll} x_i \le y & (i = \ 1, 2, \ldots 24) \\ x_i \ge 0 & (i = \ 1, 2, \ldots 24) \\ y \ge 0 \end{array} \right\}.$$

Máme úlohu matematického programovania a pre ňu Lagrangeovu funkciu a Kuhn-Tuckerove podmienky

$$\Phi(\mathbf{x}, y, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{24} p_i x_i - C(x_1, x_2, \ldots, x_{24}) - g(y) + \sum_{i=1}^{24} u_i (y - x_i);$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = p_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} - u_i \le 0 \qquad (i = \ 1, 2, \ldots 24) \tag{3.1}$$

$$x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = x_i \left(p_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} - u_i \right) = 0 \qquad (i = \ 1, 2, \ldots 24) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{dg}{dy} + \sum_{i=1}^{24} u_i \le 0 \tag{3.3}$$

$$y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = y \left(-\frac{dg}{dy} + \sum_{i=1}^{24} u_i \right) = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{u_i} = y - x_i \ge 0 \qquad (i = \ 1, 2, \ldots 24) \tag{3.5}$$

$$u_i \frac{\partial \Phi}{u_i} = u_i (y - x_i) \ge 0 \qquad (i = \ 1, 2, \ldots 24) \tag{3.6}$$

$$u_i \ge 0 \qquad (i = \ 1, 2, \ldots 24). \tag{3.7}$$

Keďže sme predpokladali $x_i > 0$, $(i = \ 1, 2, \ldots 24)$, z (3.5) vyplýva $y > 0$ (je to logické: pri nulovej kapacite sa nedá vyrábať). Vzťahy (3.1) a (3.3) sa stávajú rovnosťami

$$p_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} - u_i = 0 \qquad (i = \ 1, 2, \ldots 24) \tag{3.1$'$}$$

$$-\frac{dg}{dy} + \sum_{i=1}^{24} u_i = 0 \tag{3.3$'$}$$

V každom období t "off-peak", je podľa definície nejaká časť kapacity firmy nevyužitá ($y > x_t$), teda, podľa (3.6) musí pre tieto obdobia platiť $u_t = 0$. Prvá časť vety vyplýva teraz priamo z (3.1'):

$$p_t = \frac{\partial C}{\partial x_t},$$

takže pre všetky obdobia mimo špičky je optimálne stanoviť cenu rovnú hraničným prevádzkovým nákladom $\frac{\partial C}{\partial x_t}$; keďže kapacita firmy je nevyužitá, dopyt by mal byť povzbudený stanovením ceny čo najnižšie, avšak bez privodenia straty z predaja.

V každom období špičky s ("peak period") je kapacita firmy plne využitá ($x_s = y$). Predpokladali sme $\frac{dg}{dy} > 0$(rastúca kapacita výroby vyžaduje dodatočný kapitál), z (3.3') dostávame

$$\frac{dg}{dy} = \sum_s u_s > 0,$$

čiže aspoň v niektorých obdobiach špičky musia byť Lagrangeove multiplikátory kladné. Z (3.1') dostávame

$$p_s = \frac{\partial C}{\partial x_s} + u_s \qquad \text{pre ľubovoľné obdobie špičky } s.$$

Cena prekročí hraničné prevádzkové náklady o dodatočné množstvo rovné hodnote Lagrangeovho multiplikátora u_s. Navyše, súčet týchto prekročení počas dňa sa rovná hraničným nákladom na kapacitu, $\frac{dg}{dy}$. Keďže v období špičky dopyt vyvýja tlak na kapacitu firmy, nárast dopytu vyžaduje dodatočný kapitál, ktorý musí pokryť hraničné náklady .

Tým sme dokázali aj druhú časť tvrdenia . □

3.2 Maximalizácia tržieb pri obmedzení zisku

Uvažujme firmu vyrábajúcu jeden tovar v množstve q a predaj je ovplyvnený výdavkami na reklamu, a. Firma maximalizuje svoju tržbu $R(q, a)$ pri obmedzní zisku (zo strany štátu)

$$\Pi = R(q, a) - C(q) - a \geq m,$$

kde $C(q)$ sú náklady na produkciu a predpokladom je, že hraničný výnos z reklamy i hraničné náklady na výrobu sú kladné $\left(\frac{\partial R}{\partial a} > 0, \frac{dC}{dq} > 0\right)$.

Veta 3.2. *Tržbu maximalizujúca výroba bude taká, že zisk sa bude rovnať predpísanej úrovni m, pričom hraničný výnos $\frac{\partial R}{\partial q}$ je kladný a hraničný zisk $\frac{\partial \Pi}{\partial q}$ záporný.*

Dôkaz. Cieľom firmy je

$$\max\{R(q, a) \quad | \quad R(q, a) - C(q) - a \geq m, \quad q \geq 0, \quad a \geq 0\}.$$

Lagrangeova funkcia má tvar

$$\Phi(q, a, u) = R(q, a) + u\big(R(q, a) - C(q) - a - m\big)$$

a Kuhn-Tuckerove podmienky pre optimum sú:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial q} + u\left(\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{dC}{dq}\right) \leq 0$$

$$\text{resp.} \qquad (1+u)\frac{\partial R}{\partial q} - u\frac{\partial C}{\partial q} \leq 0 \tag{3.8}$$

$$q\frac{\partial \Phi}{\partial q} = q\left[(1+u)\frac{\partial R}{\partial q} - u\frac{\partial C}{\partial q}\right] = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} + u\frac{\partial R}{\partial a} - u \leq 0$$

$$\text{resp.} \qquad \frac{\partial R}{\partial a} \leq \frac{u}{1+u} \tag{3.10}$$

$$a\frac{\partial \Phi}{\partial a} = a\left[(1+u)\frac{\partial R}{\partial a} - u\right] = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = R(q,a) - C(q) - a - m \geq 0 \tag{3.12}$$

$$u\frac{\partial \Phi}{\partial u} = u\left[R(q,a) - C(q) - a - m\right] = 0 \tag{3.13}$$

$$u \geq 0 \tag{3.14}$$

Za predpokladu $q > 0$ sa podmienka (3.8) stáva rovnosťou

$$\frac{\partial R/\partial q}{\partial C/dq} = \frac{u}{1+u}. \tag{3.8$'$}$$

Keďže $\frac{\partial R}{\partial a} > 0$, z (3.10) a (3.14) máme $u > 0$. Podmienka (3.13) potom implikuje $\Pi = m$. Ak vezmeme do úvahy predpoklad $\frac{\partial C}{\partial q} > 0$, z (3.8') vychádza, že hraničný výnos $\frac{\partial R}{\partial q}$ je kladný, ale menší ako hraničné náklady $\frac{dC}{dq}$. Preto hraničný zisk z výroby, $\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{dC}{dq}$ musí byť záporný. □

Z ekonomického hľadiska je zaujímavé porovnať tento výsledok s prípadom, keď firma maximalizuje zisk Π. Vtedy je totiž optimálna výroba taká, že hraničný výnos sa rovná hraničným nákladom. V našom modeli to neplatí, čiže aj objem výroby je rôzny, ako si ukážeme na príklade lineárnej funkcie tržieb a kvadratickej nákladovej funkcie:

$$\text{Nech} \qquad R(q,a) = \alpha_1 q + \alpha_2 a, \qquad \alpha_1 > 0, \qquad \alpha_2 > 0$$

a

$$C(q) = cq^2, \qquad c > 0.$$

Optimálna produkcia q_Π pre profit-maximalizujúcu firmu vychádza priamo z podmienky $\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$: $q_\Pi = \frac{\alpha_1}{2c}$. Pre firmu maximalizujúcu tržbu je nutnou podmienkou optimálnej výroby

$$\alpha_1 = \frac{\partial R}{\partial q} = \frac{u}{1+u} \cdot \frac{dC}{dq} = \frac{u}{1+u} 2cq,$$

a teda môžeme uzavriet'

$$q_R = \frac{\alpha_1}{2c}\left(\frac{1+u}{u}\right) > \frac{\alpha_1}{2c} = q_\Pi.$$

3.3 Regulácia živ. prostredia – Efekty rôznych typov noriem

Existuje veľmi veľa druhov noriem, ktoré nútia firmy dbať na ochranu životného prostredia. V tejto časti si predstavíme tri najviac používané v praxi, ale aj najviac diskutované. Vychádzame z práce `Helfanda`, 1991, ktorý uvažuje firmu, ktorá vyrába jediný produkt v množstve q podľa produkčnej funkcie $f(x_1, x_2)$ spĺňajúcej obvyklé vlastnosti, že hraničný zisk z oboch faktorov je kladný, ale klesajúci. Firma tiež spôsobuje znečistenie životného prostredia v objeme závislom od úrovne produkcie i technológie. V záujme zníženia tohto znečistenia firma môže vyvinúť určitú aktivitu na jeho odstránenie alebo investovať do nových technológií. Výsledná úroveň znečistenia potom bude

$$P = G\left(f(x_1, x_2)\right) - Ab(x_3),$$

kde $Ab(x_3)$ označuje aktivitu proti znečisteniu ako funkciu vynaložených prostriedkov na vývoj alebo do nových technológií. Predpokladáme, že čím viac prostriedkov vynaložíme na odstránenie znečistenia, tým nižšia bude jeho úroveň. celkovo môžme úroveň znečistenia opísať nasledovne:

$$P = P(x_1, x_2, x_3)$$

kde $P_1 = \frac{\partial P}{\partial x_1} > 0$, $P_2 = \frac{\partial P}{\partial x_2} > 0$, $P_3 = \frac{\partial P}{\partial x_3} < 0$. Predpokladá sa, že firma maximalizuje zisk, pričom cena produktu (p) je daná, rovnako ako ceny vstupných faktorov c_1, c_2 a takisto cena aktivít proti znečisteniu c_3. Funkcia zisku je

$$\Pi = pq - c_1 x_1 - c_2 x_2 - c_3 x_3$$

Nutné podmienky maximálneho zisku, pokiaľ firma nie je ničím obmedzovaná, sú

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \frac{\partial pq}{\partial x_1} - c_1 = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = \frac{\partial pq}{\partial x_2} - c_2 = 0$$

Alebo slovami ekonóma, hraničný zisk z faktora i, $\quad (i = 1, 2)$ sa musí rovnať jeho cene. Aktivity proti znečisteniu len zvyšujú náklady, optimálne je $x_3 = 0$. Pre optimálnu výrobu platí:

$$f'_{x_1} = \frac{c_1}{p} \qquad \text{a} \qquad f'_{x_2} = \frac{c_2}{p}.$$

Aké učinky bude mať na firmu zavedenie štátnych noriem ohľadom znečistenia?

3.3.1 Štandard 1: Obmedzenie celkových emisií firmy

Označme Z_p množstvo celkového znečistenia, ktoré je akceptovateľné v nejakom časovom období. Dá sa reprezentovať ohraničením $P(\mathbf{x}) \leq Z_p$. Cieľom firmy je maximalizovať zisk:

$$\max_{x_1,x_2,x_3} \Pi\{pf(x_1,x_2) - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 \quad | \quad P(x_1,x_2,x_3) \leq Z_p$$
$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0\}.$$

Napíšeme Lagrangeovu funkciu

$$\Phi(\mathbf{x}, u) = pf(x_1,x_2) - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 + u(Z_p - P(x_1,x_2,x_3))$$

a výsledné Kuhn-Tuckerove podmienky (s označením $f'_{x_i} = f_i$)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = pf_1 - c_1 - uP_1 \leq 0 \tag{3.15}$$
$$\text{alebo} \qquad pf_1 \leq c_1 + uP_1,$$
$$x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = x_1(pf_1 - c_1 - uP_1) = 0. \tag{3.16}$$
$$\text{Za predpokladu} \quad x_1 > 0 \quad \text{platí} \quad pf_1 = c_1 + uP_1, \tag{3.17}$$

Podobne pre vstup x_2:
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = pf_2 - c_2 - uP_2 \leq 0 \tag{3.18}$$
$$\text{alebo} \qquad pf_2 \leq c_2 + uP_2,$$
$$x_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = x_2(pf_2 - c_2 - uP_2) = 0. \tag{3.19}$$
$$\text{Za predpokladu} \quad x_2 > 0 \quad : \qquad pf_2 = c_2 + uP_2. \tag{3.20}$$

Prichádzame k záveru, že hodnota hraničného zisku z faktora $x_i \quad (i = 1,2)$ je rovná hraničným nákladom na tento vstup (čiže cene za pridanú jednotku), plus výdavky za znečistenie uP_i, kde $u = u^\circ = \frac{\partial\Pi(\mathbf{x}^\circ(Z_p))}{\partial Z_p}$ a $P_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}$. Lagrangeov multiplikátor udáva, aký vplyv má malá zmena v štandarde Z_p na zisk firmy a P_i vyjadruje rast znečistenia pri náraste vstupu x_i. Pokračujme v K-T podmienkach:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = -c_3 - uP_3 \leq 0$$
$$x_3\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = x_3(-c_3 - uP_3) \leq 0.$$

$x_3 > 0$ implikuje $c_3 = -uP_3$, kde $P_3 < 0$. Teda, hodnota zníženia znečistenia spôsobeného zvýšením aktivít o jednotku sa rovná nákladom na toto znečistenie.

Nakoniec dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= Z_p - P(x_1, x_2, x_3) \geq 0 \\ u\frac{\partial \Phi}{\partial u} &= u(Z_p - P(x_1, x_2, x_3)) = 0 \\ u &\geq 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že ak $P(x_1, x_2, x_3) < Z_p$, tak $u = 0$. V tomto prípade sa podmienky (3.17) a (3.20) zmenia na $pf_1 = c_1$ a $pf_2 = c_2$, navyše $c_3 > 0$ implikuje $x_3 = 0$. Tu je ekonomická interpretácia výsledkov:

Ak je znečistenie firmy **pod** povolenou hranicou, žiadne aktivity nie sú potrebné a máme vlastne prípad neregulovanej firmy. V opačnom prípade je optimálne $P(x_1, x_2, x_3) = Z_p$ a v prípade prítomnosti oboch výrobných faktorov dostávame (3.17) a (3.20). Keďže $u > 0$, $P_i > 0$, hodnota hraničného zisku i-teho faktora $(i = 1, 2)$ bude vyššia ako v prípade bez regulácie. Vzhľadom na vlastnosť produkčnej funkcie, že hraničné zisky oboch faktorov s ich množstvom klesajú, je to možné len vtedy, ak platí:

$$x_i^I < x_i^0 \qquad (i = 1, 2),$$

kde index I označuje model s reguláciou a 0 model bez regulácie. Efekt tohto typu regulácie je celkom logický: Ak chce firma dodržať predpísanú úroveň znečistenia životného prostredia, musí znížiť oba vstupy a tým pádom aj produkciu.

3.3.2 Štandard 2: Emisie na jednotku výstupu

Označme Z_{PF} maximálne množstvo množstvo znečistenia, ktoré je akceptovateľné na jednotku vyrobeného produktu. Dá sa reprezentovať ohraničením

$$\frac{P(x_1, x_2, x_3)}{f(x_1, x_2)} \leq Z_{PF}.$$

Cieľom firmy je maximalizovať zisk ako v predchádzajúcom modeli. Lagrangeova funkcia má tvar

$$\Phi(\mathbf{x}, u) = pf(x_1, x_2) - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 + u(Z_{PF}f(x_1, x_2) - P(x_1, x_2, x_3))$$

A Kuhn-Tuckerove podmienky

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = pf_1 - c_1 + u(Z_{PF}f_1 - P_1) \leq 0 \tag{3.21}$$

$$x_1\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = x_1\left[pf_1 - c_1 + u(Z_{PF}f_1 - P_1)\right] = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = pf_2 - c_2 + u(Z_{PF}f_2 - P_2) \leq 0 \tag{3.23}$$

$$x_2\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = x_2\left[pf_2 - c_2 + u(Z_{PF}f_2 - P_2)\right] = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = -c_3 - uP_3 \leq 0. \tag{3.25}$$

$$x_3\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = x_3(c_3 + uP_3) = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = Z_{PF}f(x_1, x_2) - P(x_1, x_2, x_3) \geq 0 \tag{3.27}$$

$$u\frac{\partial \Phi}{\partial u} = u\left[Z_{PF}f(x_1, x_2) - P(x_1, x_2, x_3)\right] \geq 0 \tag{3.28}$$

$$u \geq 0 \tag{3.29}$$

Ak firma príliš neznečist'uje prostredie, čiže platí $Z_{PF}f(x_1, x_2) > P(x_1, x_2, x_3)$, tak z (3.27) máme $u = 0$ a ak cena aktivít proti znečisteniu c_3 je nenulová, tak z (3.25) vychádza $x_3 = 0$.

Ak sa na výrobe podieľajú oba faktory, Kuhn-Tuckerove podmienky (3.21) a (3.23) sa stávajú rovnost'ami:

$$pf_1 - c_1 + u(Z_{PF}f_1 - P_1) = 0$$
$$pf_2 - c_2 + u(Z_{PF}f_2 - P_2) = 0,$$

resp.

$$f_1 = \frac{c_1 + uP_1}{p + uZ_{PF}} \tag{3.30}$$

$$f_2 = \frac{c_2 + uP_2}{p + uZ_{PF}}. \tag{3.31}$$

Z týchto rovníc vyplýva vzt'ah

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{c_1 + uP_1}{c_2 + uP_2} \tag{3.32}$$

Aby sme ukázali efekt tohto typu regulácie znečistenia na správanie sa firmy, porovnáme rovnice (3.30) a (3.31) s podmienkami optimality pre základný model (prípad bez regulácie),

$$f_1 = \frac{c_1}{p} \qquad \text{a} \qquad f_2 = \frac{c_2}{p}. \tag{3.33}$$

Vidíme, že ak $u > 0$ (obmedzenie znečistenia je aktívne), tak pomer hraničných ziskov z faktorov x_1 a x_2 (3.32), často označovaný ako hraničná miera substitúcie medzi faktormi, sa na rozdiel od prípadu neregulovanej firmy nerovná pomeru cien týchto faktorov. Efekt obmedzenia je v tomto prípade nejednoznačný – závisí od vzt'ahu pravých strán v (3.30 - 3.31) a (3.33). Označme indexom II riešenie modelu, kde ohraničením je maximálne množstvo emisií na jednotku vyrobeného produktu. Ak $P_i^{II} < \frac{c_i}{p} Z_{PF}$, tak $\frac{c_i + uP_i^{II}}{p + uZ_{PF}} < \frac{c_i}{p}$, a teda $f_i^{II} < f_i^0$. Z vlastností produkčnej funkcie f vyplýva $x_i^{II} > x_i^0 \quad (i = 1, 2)$.

Ak hraničné znečistenie spôsobené faktorom i je menšie ako exogénne daný výraz $k_i = \frac{c_i}{p} Z_{PF}$, potom v porovnaní so základným modelom sa na výrobu použije väčšie množstvo tohto faktora. Naopak, ak toto hraničné znečistenie je väčšie, firma, aby splnila regulačné opetrenie, musí na výrobu použit' menšie množstvo i-teho faktora.

Na záver zhrnutie: Efekt regulácie definovanej ako maximálna úroveň emisií na jednotku výstupu je nejednoznačný. Znečistenie pri regulácii rastie, ale ak produkcia rastie ešte rýchlejšie, dá sa udržat' predpísaný štandard.

3.3.3 Štandard 3: Emisie na jednotku vstupu

Ďalším spôsobom ako sa dá prispiet' k čistému životnému prostrediu, je zhora ohraničit' úroveň znečistenia plynúceho z jednotky určitého vstupu, ako napríklad obmedzit' množstvo oxidu siričitého emitovaného z jednej tony použitého uhlia. Tento typ regulácie sa podl'a `Dudenhoffera`, 1984 nazýva **regulácia intenzity** a dá sa sformulovat' ako

$$\frac{P(x_1, x_2, x_3)}{x_i} \leq Z_{P_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že je regulovaná intenzita druhého produkčného faktora. Firma čelí nasledovnému optimalizačnému problému:

$$\begin{aligned} \max\{\Pi = pf(x_1, x_2) - c_1 x_1 - c_2 x_2 - c_3 x_3 \quad | \quad & P(x_1, x_2, x_3) \leq Z_{P_2} x_2, \\ & x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0\}. \end{aligned}$$

Použijúc Lagrangeovu funkciu

$$\Phi(\mathbf{x}, u) = pf(x_1, x_2) - c_1 x_1 - c_2 x_2 - c_3 x_3 + u(Z_{P_2} x_2 - P(x_1, x_2, x_3))$$

dostávame Kuhn-Tuckerove podmienky:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = pf_1 - c_1 - uP_1 \leq 0$$

$$x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = x_1(pf_1 - c_1 - uP_1) = 0 \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = pf_2 - c_2 + u(Z_{P_2} - P_2) \leq 0$$

$$x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = x_2 \left[pf_2 - c_2 + u(Z_{P_2} - P_2)\right] = 0 \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = -c_3 - uP_3 \leq 0$$

$$x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = x_3(-c_3 - uP_3) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = Z_{P_2}x_2 - P(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

$$u \frac{\partial \Phi}{\partial u} = u \left[Z_{P_2}x_2 - P(x_1, x_2, x_3)\right] = 0$$

$$u \geq 0$$

Označme indexom III riešenie modelu s reguláciou intenzity. Ak opäť predpokladáme prítomnosť oboch faktorov ($x_1 > 0, \quad x_2 > 0$), a navyše regulácia je aktívna ($u > 0$), podmienka (3.34) dáva:

$$f_1^{III} = \frac{c_1}{p} + \frac{u}{p}P_1 > \frac{c_1}{p} = f_1^0.$$

Opäť, z vlastností produkčnej funkcie vyplýva $x_1^{III} < x_1^0$, čiže firma znižuje množstvo prvého vstupu. Aký je vzťah medzi množstvom regulovaného vstupu a analogickým množstvom v základnom modeli? Pozrime sa na podmienku (3.35):

$$f_2^{III} = \frac{c_2}{p} + \frac{u}{p}(P_2 - Z_{P_2}).$$

Vidíme, že ak hraničné znečistenie regulovaného faktora je vyššie ako akceptovateľné množstvo na jednotku tohoto faktora, potom hraničná produktivita f_2^{III} je vyššia ako v základnom modeli (f_2^0), a teda množstvo faktora použité pri výrobe je menšie ako by bolo bez obmedzenia. Ak hraničné znečistenie P_2 je nižšie, dostávame opačný výsledok.

Kapitola 4

Firma a regulačné opatrenia

Predstavme si firmu pôsobiacu v monopolnom prostredí, ktorá vyrába jediný tovar v množstve q využívajúc pri tom vstupy kapitál a prácu v množstvách K a L. predpokladajme, že firma môže tieto vstupy použiť v ľubovoľnom množstve pri konštatntých cenách c_1 resp. c_2. Jednotková cena výstupu je p. Profitová alebo zisková funkcia je, podobne ako v predošlých modeloch

$$\Pi = pq - c_K K - c_L L \tag{4.1}$$

Za predpokladu (celkom rozumného), že oba vstupy sa podieľajú na výrobe, maximalizácia zisku vyžaduje

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{\partial pq}{\partial K} - c_K = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial pq}{\partial L} - c_L = 0 \tag{4.3}$$

A teda

$$\frac{\frac{\partial pq}{\partial K}}{\frac{\partial pq}{\partial L}} = \frac{c_K}{c_L}, \tag{4.4}$$

čiže hraničná miera substitúcie medzi kapitálom a prácou sa rovná pomeru ich cien. Tento výsledok poznáme z predchádzajúcej kapitoly a samozrejme platí pre firmu, ktorá nemusí čeliť žiadnym reguláciam zo strany štátu.

4.1 Averch-Johnsonov model

Predpokladajme, že vláda uvalí na firmu obmedzenie v podobe tzv. "férovej miery výnosnosti". Ak miera výnosnosti je posúdená ako príliš vysoká, firma musí znížiť ceny. S touto myšlienkou prišli v r. 1962 `Harvey Averch` a `Leland L. Johnson`: "*V posudzovaní úrovne cien účtovaných firmami za ponúkané tovary alebo služby, vládne regulačné orgány často pristupujú ku kritériu "férovej miery výnosnosti" (fair rate of return): Po tom, ako firmy odčítajú prevádzkové náklady od hrubých výnosov, zostávajúce čisté výnosy by mali presne kompenzovať náklady firmy na investície (do budov, zariadenia, prístrojov atď.). Ak miera výnosnosti, vypočítaná ako pomer* *čistých výnosov k hodnote kapitálu, je posúdená ako príliš vysoká, firma musí znížiť ceny. Ak je táto miera posúdená ako dostatočne nízka, firma môže zvýšiť ceny.*"

Profit-maximalizujúce správanie firmy pri takomto regulačnom opatrení sa dá opísať nasledovne:

Veta 4.1. *Hraničná miera substitúcie medzi jednotlivými vstupmi sa viac nerovná pomeru ich cien - Firma má tendenciu zvyšovať investície: Množstvo kapitálu použitého pri regulačnom opartení nie je menšie ako v prípade bez obmedzení.*

Dôkaz. Definujme produkčnú funkciu firmy ako $q = f(K, L)$,ktorá nech spĺňa obvyklé vlastnosti produkčných funkcií:

$$f_K = \frac{\partial f}{\partial K} > 0, \qquad f_L = \frac{\partial f}{\partial L} > 0$$
$$f(0, L) = f(K, 0) = 0,$$

tj. hraničné produktivity sú kladné a kladná produkcia vyžaduje oba vstupy. Môžeme napísať aj funkciu dopytu, reprezentujúcu cenu výstupu, ako funkciu negatívne závislú na úrovni produkcie q:

$$p = p(q), \qquad \text{pričom} \qquad p'(q) = \frac{dp}{dq} < 0$$

Averch a Johnson sa rozhodli neuvažovať náklady na nadobudnutie kapitálu (takže hodnota kapitálu sa rovná jeho množstvu) ani amortizáciu budov a zariadenia počas uvažovaného časového obdobia. Zarobené peniaze určené na kapitál sú hrubé výnosy mínus výdavky na pracovnú silu: $pq - c_L L$. Tieto po vydelení hodnotou kapitálu dávajú mieru výnosnosti kapitálu. Regulácia požaduje, aby táto miera nebola vyššia ako stanovená "férová miera výnosnosti", označená s. Averch-Johnsonovo regulačné opatrenie sa dá zapísať symbolicky ako

$$\frac{pq - c_L L}{K} \leq s \qquad \text{alebo} \qquad pq - sK - c_L L \leq 0. \tag{4.5}$$

Keby $s < c_K$, čiže keby akceptovateľá návratnosť kapitálu bola nižšia ako jeho cena, firma by bola nútená odstúpiť z trhu. Preto predpokladáme $s \geq c_K$; miera návratnosti musí aspoň pokryť náklady. Úlohou firmy je maximalizovať zisk (4.1) pri obmedzení (4.5) a tiež $K \geq 0$, $L \geq 0$. Lagrangeova funkcia má tvar

$$\Phi(K, L, u) = p(q)q - c_K K - c_L L - u\left(p(q)q - sK - c_L L\right)$$

kde $q = f(K, L)$.

Kuhn-Tuckerove nutné podmienky pre maximum v K°, L°, u° sú

$$\frac{\partial \Phi}{\partial K} = (1-u)[p+p'q]f_K - c_K + us \leq 0 \tag{a}$$

$$K\frac{\partial \Phi}{\partial K} = K\big\{(1-u)[p+p'q]f_K - c_K + us\big\} = 0 \tag{b}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial L} = (1-u)[p+p'q]f_L - (1-u)c_L \leq 0 \tag{c}$$

$$L\frac{\partial \Phi}{\partial L} = L\big\{(1-u)[p+p'q]f_L - (1-u)c_L\big\} = 0 \tag{d}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -(p(q)q - sK - c_L L) \geq 0 \tag{e}$$

$$u\frac{\partial \Phi}{\partial u} = u\big(p(q)q - sK - c_L L\big) = 0 \tag{f}$$

$$u \geq 0. \tag{g}$$

Za predpokladu $K^\circ > 0$, $L^\circ > 0$, $u^\circ > 0$, teda že A-J ohraničenie je aktívne v bode (K°, L°), podmienky (a), (c) a (e) sa stávajú rovnosťami:

$$(1-u)[p+p'q]f_K + us = c_K \tag{4.6}$$

$$[p+p'q]f_L = c_K \tag{4.7}$$

$$pq - sK - c_L L = 0. \tag{4.8}$$

Tieto tri rovnosti vlastne určia tri neznáme K°, L° a u°.

V prípade, že žiadna regulácia nie je v platnosti ($u = 0$), rovnice (4.6) a (4.7) sa redukujú na rovnice (4.2) a (4.3) – dostávame známe pravidlo, že hraničný výnos každého faktora sa rovná jeho cene. Z (4.6) vyplýva, že ak je ohraničenie aktívne, táto rovnosť je narušená. Následkom toho, firma je nútená vo výrobe uplatniť iný pomer kapitál–práca. Hraničná miera substitúcie medzi faktormi sa viac nerovná pomeru ich cien. Prvá časť vety je týmto dokázaná.

Za predpokladu, že $u > 0$, z $u = 1$ podľa (4.6) vyplýva $c_K = s$. Opačne, ak $c_K = s$, vzťah (4.6) sa redukuje na vzťah (4.2) zodpovedajúci správaniu sa firmy v neregulovanom prostredí. Preto zosilníme náš predpoklad $s \geq c_K$ na $s > c_K$ a zabezpečíme tým $u^\circ \neq 1$.

Označme indexom '$^\circ$' riešenie optimalizačnej úlohy pre regulovanú firmu a indexom '*' situáciu bez regulácie. Vzťah pre hraničnú produktivitu kapitálu $\frac{\partial p(q)q}{\partial K} = [p+p'q]f_K$ označme MR_K a pre hraničnú produktivitu práce $[p+p'q]f_L$ zasa MR_L. Vzťah (4.6) sa teraz dá prepísať v tvare

$$MR_K^\circ = c_K - \frac{(s-c_K)}{1-u^\circ}u^\circ. \tag{4.9}$$

Pri platnosti $s > c_K$ a $u^\circ < 1$ vychádza $MR_K^\circ < c_K$.

Ak funkcia výnosov $G \equiv pf(K, L)$ je konkávna, tak hraničná produktivita kapitálu MR_K je nerastúcou funkciou kapitálu a tým pádom množstvo kapitálu použitého pri regulačnom opatrení (K°) je menšie alebo rovné ako v prípade bez regulácie (K^*). Hoci predpoklad konkávnosti funkcie G je kľúčový, v pôvodej formulácii Avercha-Johnsona nebol spomínaný a priniesol ho až Takayama (1969). Keby G bola rýdzo konkávna, tak platí $\frac{\partial^2 pq}{\partial K^2} = \frac{MR_K}{\partial K} < 0 \Rightarrow K^\circ > K^*$.

Ďalej, z (4.6) a (4.7):

$$\frac{MR_K}{MR_L} = \frac{c_K}{c_L} - \frac{(s - c_K)}{c_L} \frac{u^\circ}{(1 - u^\circ)} < \frac{c_K}{c_L}.$$

Hraničná miera substitúcie medzi jednotlivými vstupmi je nižšia ako pomer vstupných cien. Tá istá úroveň produkcie teraz vyžaduje viac kapitálu a menej práce v porovnaní s prípadom bez regulácie. Z čoho pramení táto neefektívna alokácia zdrojov? Spojením (4.1) a (4.5) dostaneme

$$\Pi^\circ \leq (s - c_K)K^\circ \tag{4.10}$$

Čistý výnos firmy na jednotku použitého kapitálu je najviac $(s - c_K)$ a práve to vytvára podnet nahrádzať prácu kapitálom. Týmto sme dokázali aj druhú časť vety, tzv. **Averch-Johnsonov efekt**. □

Dôležitou otázkou v analýze A-J modelu je, či hodnota Lagrangeovho multiplikátora u° je vôbec menšia ako 1. Averch-Johnson argumentujú zhruba nasledovne: Keďže $s > c_K$, u° nebude rovné jednej z dôvodov už spomínaných. Pre neregulovanú mieru výnosu platí $u^\circ = 0$. Vďaka spojitosti u° vzhľadom na s by malo u zostať menšie ako 1.

Lenže spojitosť u nie je intuitívne jasná, ako si všimol Takayama (1969): "*Hodnota Lagrangeovho multiplikátora môže skočiť z nulovej na nenulovú hodnotu v bode, kde sa ohraničenie stáva aktívnym.*" Z (4.6) sa dá explicitne vyjadriť vzťah pre u°:

$$u^\circ = \frac{c_K - MR_K}{s - MR_K}, \tag{4.11}$$

samozrejme, ak menovateľ je nenulový. V tom prípade však zo (4.6) vyplýva $s = c_K$ čo je spor s predpokladom $s > c_K$. Teda rovnica (4.11) zostáva v platnosti pre všetky prípady brané teraz do úvahy. Ak predpokladáme, že MR_K je spojitou funkciou K° a L° a navyše K° a L° sú spojité funkcie s, tak pravá strana (4.11) je spojitá vzhľadom na s a teda aj u° je spojitá funkcia s. Inými slovami, spojitosť u° vzhľadom na s závisí od spojitosti K° a L° vzhľadom na s.

Iný spôsob ako dokázať že $u^\circ < 1$, vychádza tiež z rovnice (4.11): Dodatočným predpokladom je tentokrát $s - MR_K > 0$; vtedy, keďže predpokladáme $s > c_K$, je menovateľ väčší ako čitateľ a platí $u^\circ < 1$.

Podobnú podmienku zvolili El-Hodiri a Takayama (1973), korí tvrdia, že za predpokladu konkávnosti funkcie G, A-J efekt ($K^\circ \geq K^*$) nastáva vtedy a len vtedy, ak $MR_K \leq c_K$. Taktiež tvrdia, že $u^\circ < 1$ práve vtedy, keď $MR_K \leq c_K$ tj. práve vtedy keď $K^\circ \geq K^*$. Dokázali A-J efekt bez akýchkoľvek predpokladov o u°, ale z požiadavkou $MR_K \leq c_K$.

V nasledujúcej časti predstavíme A-J model z geometrického hľadiska.

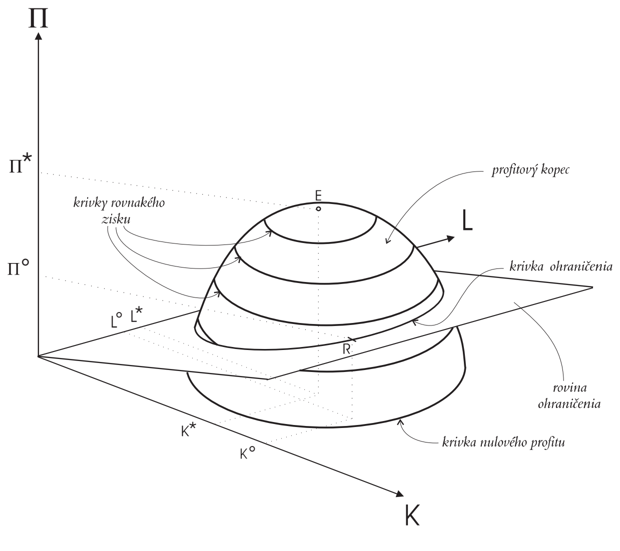
4.2 Geometrická interpretácia

S geometrickou intrpretáciou A-J modelu prišiel v r. 1970 `E. E. Zajac`, ktorý vyhlásil, že striktne matematické metódy Avercha a Johnsona môžu pôsobiť trochu "cudzo" na tých ktorí sa reguláciou zaoberajú. V mnohých diskusiách o A-J modeli je to práve Zajacovo geometrické spracovanie, ktoré je prezentované.

Základom geometrického modelu je profitový kopec, znázornený v základnej forme na obr.(4.1) Jeho tvar je dôsledkom predpokladu, že pri danej produkcii je zisk funkciou použitej práce a kapitálu. Krivka nulového profitu reprezentuje všetky dvojice práca-kapitál, ktoré rezultujú do nulového zisku. Ak firma použije pri výrobe lepšiu kombináciu vstupov, pohne sa k vyšším ziskovým krivkám. Predpokladá sa, že profitový kopec má jediný vrchol (maximálny zisk neregulovanej firmy, bod E, s optimálnou kombináciou K^* a L^*) a klesajúci povrch pri pohybe ľubovoľným smerom od tohto vrchola. Nechajme teraz vládu uvaliť na firmu obmedzenie. Toto sa dá zapísať (vzťah 4.10) ako

$$\Pi^\circ \leq (s - c_K)K^\circ$$

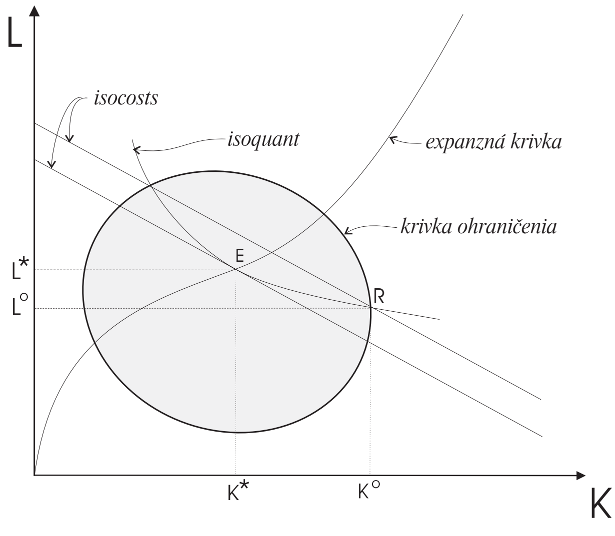
Firma musí operovať na, alebo pod rovinou $\Pi = (s - c_K)K$ v súradnicovom systéme K, L, Π. Geometricky, Averch-Johnsonovo regulačné opatrenie sa dá predstaviť ako dvere zavesené na osi L, pohybujúce sa smerom od osi K v závislosti od rastúcej férovej miery výnosnosti s. Bod najvyššieho zisku je jasne viditeľný: Keďže rovina ohraničenia sa otáča okolo osi L, maximálny zisk zodpovedá maximálnemu K pozdĺž prieniku roviny ohraničenia a profitového kopca (bod R na obr. 4.1).



Obrázok 4.1: *Profitový kopec a rovina ohraničenia*

Pokúsme sa premietnuť celú situáciu do roviny (K, L). Krivka "isoquant" pre určitú fixovanú úroveň produkcie reprezentuje také kombinácie práca-kapitál, ktoré vedú práve k tejto produkcii. Na každej z týchto kriviek (pre rôzne úrovne spotreby) existuje bod s najnižšími nákladmi (tzv. efektívný bod) a ten je pre firmu najvýhodnejší, lebo v ňom sa maximalizuje zisk. Množina efektívnych bodov pre všetky úrovne produkcie vytvára tzv. expanznú krivku. Za normálnych okolností, teda v prípade že na firmu nie je vyvýjaný tlak regulácie, vyrába pri takej alokácii zdrojov, ktorá zodpovedá bodu na expanznej krivke (bod E).

Uvalením regulačného opatrenia sa oblast' možných kombinácii práca-kapitál zužuje: Firma nesmie vyrábat' v oblasti obklopenej krivkou ohraničenia (sivá oblast' na obr 4.2). Pripomíname, že krivka ohraničenia je prienikom roviny ohraničenia s profitovým kopcom, nie krivkou rovnakého zisku.



Obrázok 4.2: *Efekt regulácie*

Z obrázka (4.2) je tiež vidiet', že pri regulácii, ak si chce firma udržat' danú úroveň produkcie (teda ak chce pomer práca-kapitál udržat' na znázornenj krivke isocost), musí sa "pohnút'" zo sivej oblasti na jej hranicu do bodu R, ktorý však leží na "drahšej" krivke isocost. Ked'že firma nevyužíva najlacnejší pomer vsupov, hovoríme o neefektívnej alokácii zdrojov. Opät' sa ukázal Averch-Johnsonov efekt.

4.3 Rozšírenia A-J modelu

Kl'účovým predpokladom v Averch-Johnsonovom modeli je, že firma maximalizuje zisk. To nemusí byt' vždy pravda. V tejto časti budeme skúmat', aké účinky má zavedenie regulačného opatrenia na firmu ktorej prvoradým ciel'om nie je maximalizácia zisku. Touto otázkou sa zaoberali hlavne `Elizabeth Bailey` a `John Malone` (1970) a tiež `Zajac` (1970). Predpoklady z Averch-Johnsonovho modelu sú rovnaké: firma sa regulácii prispôsobí okamžite, amortizácia je nulová a na kladnú produkciu sú potrebné oba vstupy.

4.3.1 Maximalizácia tržieb

Firma nemaximalizuje zisk, teda príjmy mínus výdaje, ale len samotné príjmy alebo tržbu. Tržba je funkciou množstva vyrobeného produktu, Lagrangeovu funkciu možno zapísat' v tvare

$$\Phi(K, L, u) = R(q(K, L)) - u\left[R(q(K, L)) - sK - c_L L\right]$$

Regulačné obmedzenie ostáva rovnaké, v Lagrangeovej funkcii sa akurát odzrkadlila skutočnost', že firma maximalizuje jednoducho tržby, R. Nutné podmienky maxima sú (opät' predpokladáme prítomnost' oboch faktorov a aktívnost' ohraničenia):

$$(1-u)\frac{dR}{dq}\frac{\partial q}{\partial K} + us = 0,$$
$$(1-u)\frac{dR}{dq}\frac{\partial q}{\partial L} + uc_L = 0,$$

a

$$R(q(K, L)) - sK - c_L L.$$

Úpravou dostávame

$$dK = \frac{(1-u)\frac{dR}{dq} \cdot \partial q}{-us} \qquad \text{a} \qquad dL = \frac{(1-u)\frac{dR}{dq} \cdot \partial q}{-uc_L},$$

čiže

$$\frac{dL}{dK} = \frac{s}{c_L}.$$

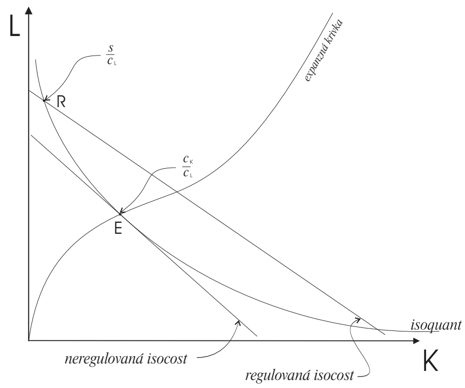
Firma je nútená pri výrobe použit' taký pomer vstupov, ktorý neminimalizuje náklady. Minimálne náklady sa dosiahnu len vtedy, ak hraničná miera substitúcie práce za kapitál je rovná pomeru ich cien. To je možné len ak $c_K = s$. Ked'že sa predpokladá $s > c_K$, tak $\frac{dL}{dK} \geq \frac{c_K}{c_L}$. Inými slovami, firma pri výrobe využije menej kapitálu a viac práce. (`Bailey` & `Malone`,1970)

Situácia je znázornená na obr (4.3). V bode E firma pre danú úroveň produkcie minimalizuje náklady – sklon izokvanty sa rovná pomeru cien vstupných faktorov. Firma je však reguláciou nútená vyrábat' v bode R, ktorý neminimalizuje náklady, pretože sklon izokvanty je väčší ako pomer vstupných cien.

4.3.2 Maximalizácia produkcie

K podobným výsledkom dospejeme, ak predpokladáme, že firma namiesto tržieb maximalizuje úroveň svojej produkcie. Lagrangeova finkcia sa dá napísat' ako

$$\Phi(K, L, u) = q(K, L) - u\left[q(K, L) - \frac{sK + c_L L}{p(q)}\right]$$



Obrázok 4.3: *Maximalizácia tržby*

Kuhn-Tuckerove podmienky optimality sa dajú za obvyklých predpokladov napísať v tvare

$$(1-u)\frac{dq}{dK} + u\frac{s}{p(q)} = 0,$$
$$(1-u)\frac{dq}{dL} + u\frac{c_L}{p(q)} = 0$$

a

$$q(K,L) - \frac{sK + c_L L}{p(q)} = 0.$$

Úpravou dostávame rovnaký výsledok ako v predchádzajúcom prípade:

$$\underbrace{dK = \frac{(1-u)p \cdot \partial q}{-us}, \quad dL = \frac{(1-u)p \cdot \partial q}{-uc_L}}$$

$$\frac{dL}{dK} = \frac{s}{c_L}.$$

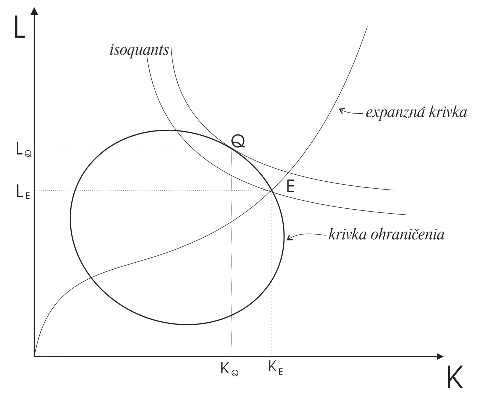
Hraničná miera substitúcie medzi faktormi prácou a kapitálom sa nerovná pomeru ich cien, firma je opäť nútená vyrábať pri neefektívnej alokácii zdrojov, konkrétne, ako v predchádzjúcom prípade, s väčším množstvom práce na úkor kapitálu.(opäť `Bailey` & `Malone`,1970)

4.3.3 Maximalizácia čistých výnosov z investícií

`Zajac` (1970) uvažuje prípad, keď firma maxmalizuje čistý výnos z investovaného dolára. Návratnosť investícií, ktorú firma maximalizuje je definovaná takto:

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{p(q(K,L))q(K,L) - c_L L - i_d f_d K}{f_e K} \\ &= \frac{1}{f_e}\left[\frac{p(q(K,L))q(K,L) - c_L L}{K}\right] - \frac{i_d f_d K}{f_e} \end{aligned}$$

kde celkový kapitál K je rozdelený na pomernú časť f_d, ktorú firma dlhuje pri úroku i_d, a časť, kapitálu vlastneného firmou, f_e. Platí $f_e + f_d = 1$, $f_e = const.$, $f_d = const$. Fyzické množstvo pohľadávok je potom $f_d K$ a výška vlastného kapitálu $f_e K$. Všimnime sa, že výraz v hranatých zátvorkách vyjadruje vlastne ľavú stranu Averch-Johnsonovho regulačného opatrenia (4.5). Dôsledkom toho, výraz r_e, dosahuje svoje maximum pre maximálnu akceptovateľnú mieru výnonosti s. Firma teda hľladá takú kombináciu práca-kapitál, ktorá by maximalizovala mieru výnosnosti. Pozrime sa na obr (č.4.4)



Obrázok 4.4: *Maximalizácia čistých výnosov*

Všetky body na krivke ohraničenia reprezentujú maximálnu možnú mieru výnosnosti. Firma nie je nútená k výrobe pri konkrétnom pomere vsupov, je indiferentná vzhľadom na všetky body krivky ohraničenia a rozhodne sa na základe iných kritérií. Ak si, napríklad praje minimalizovať náklady, výsledným bodom bude bod E, ktorý leží na expanznej krivke a zodpovedá efektívnej alokácii vstupných zdrojov. Ak si firma želá maximalizovať úroveň výroby, vyberie si bod Q, ktorým prechádza krivka isoquant zodpovedajúca najvyššej úrovni produkcie. Efekt regulácie miery výnosnosti je v tomto prípade opačný ako v prípade A-J efektu.

Záverom krátke zhrnutie: V prácach, ktoré nasledovali po publikácii Averch-Johnsonovho modelu v r.1962, sa autori väčšinou snažili o určité rozšírenie. Zistilo sa že v predpoklady, ktoré Averch a Johnson zaviedli, síce vedú "prekapitalizácii", čiže firma pri výrobe využíva viac kapitálu ako je pre ňu ideálne, ale tieto predpoklady v reálnom svete nemusia, a často ani nie sú splnené.

Kapitola 5

Záver

Táto práca mala ambíciu nahliadnuť na problematiku optimalizácie očami ekonóma. Ukázalo sa, že významnú úlohu v ekonomickej interpretácii matematických optimalizačných modelov hrajú Kuhn-Tuckerove podmienky. Úvodná kapitola má motivačný charakter: Ukázať že v ekonomickej praxi je veľmi veľa problémov, ktoré sa dajú sformulovať ako úloha matematického programovania.

V druhej kapitole sme ako nadstavbu Lagrangeovej tórie odvodili Kuhn-Tuckerove nutné podmienky optimality pre rôzne typy úloh matematického programovania. Skúmali sme tiež vzťah medzi sedlovým bodom Lagrangeovej funkcie a Kuhn-Tuckerovými podmienkami. Geometrickú a ekonomickú interpretáciu sme doplnili o problematiku konvexného programovania, v ktorom možno K-T podmienky považovať postačujúce podmienky optimality.

Široké praktické uplatnenie Kuhn-Tuckerových podmienok na rôznych modeloch z ekonomickej praxe sme chceli ukázať v tretej kapitole. Kľúčovou je časť o regulácii úrovne životného prostredia, kde sme ukázali vplyvy rôznych typov environmentálnych štandardov na produkciu firmy.

Posledná kapitola patrí podrobnej analýze monopolnej firmy, ktorá je konfrontovaná s regulačným opatrením zo strany štátu. Výsledky získané analýzou vychádzjúcou z Kuhn-Tuckerovej teórie sme interpretovali graficky.

Veľmi pekne ekonomicky interpretovateľná je teória duality, ktorou sme sa v tejto práci nezaoberali. V tom vidíme možný smer pri hľadaní ďalších ekonomických interpretácii matematických postupov. Z praktického hľadiska by bolo zaujímavé venovať sa ešte podrobnejšie Averch-Johnsonovmu modelu skúmanému vo štvrtej kapitole. Niektoré Averch-Johnsonove predpoklady sú totiž z praktického hľadiska ťažko dosiahnuteľné. Našu analýzu sme rozšírili o model firmy, ktorá nemaximalizuje svoj zisk (ako predpokladali Averch a Johnson), ale obrat, úroveň výroby či čistý výnos investícií. Zaujímavé by bolo skúmať prípad, keď vláda neobmedzí mieru výnosnosti firmy (A-J model), ale napríklad cenu vyrábaného produktu (tzv price cap regulácia).

Veríme že táto práca splnila svoj účel a poukázala na niektoré zaujímavé ekonomické implikácie matematických modelov.

Literatúra

[1] H. W. Kuhn & A. W. Tucker - "*Nonlinear programming*", in J. Neymann, Ed., Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles 1951

[2] William J. Baumol & Alvin K. Klevorick - "*Input Choices and Rate-of-Return Regulation: An Overview of the Discussion.*", *Bell Journal of Economics and Management science (1)*: 162-90, 1970

[3] Harvey Averch & Leland L. Johnson - "*Behavior of the Firm Under Regulatory Constraint.*" American Economic Review 52: 1052-69,1962

[4] Akira Takayama - "*Behavior of the Firm Under Regulatory Constraint.*" American Economic Review 59: 255-260,1969

[5] M. El-Hodiri & A. Takayama - "*Behavior of the Firm Under Regulatory Constraint: Clarifications.*" American Economic Review 63: 235-37,1973

[6] E. E. Zajac - "*A Geometric Treatment of Averch-Johnson's Behavior of the Firm Model,*" American Economic Review 60: 117-25,1970

[7] Elizabeth E. Bailey & John C. Malone - "*Resource Allocation and tha Regulated Firm,*" Bell Journal of Economics and Management science (1): 129-42, 1970