

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Ekonomická a finančná matematika



DIPLOMOVÁ PRÁCA

2003

Juraj Stančík

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika



Oceňovanie bariérových opcií
na neúplnom trhu

Diplomová práca

Vypracoval: Juraj Stančík

Vedúci diplomovej práce: Dr. Aleš Černý

Bratislava, Apríl 2003

Touto cestou chcem poďakovať všetkým, ktorí mi akýmkoľvek spôsobom pomohli pri písaní tejto diplomovej práce, špeciálne môjmu školiteľovi, Dr. Alešovi Černému, za jeho odborné vedenie, cenné rady a konštruktívne pripomienky.

Prehlasujem, že na diplomovej práci som pracoval samostatne, s použitím literatúry uvedenej na zozname na konci práce.

.....

Juraj Stančík

Obsah

Úvod	4
1 Základné pojmy	5
1.1 Európska opcia	5
1.2 Americká opcia	6
1.3 Black-Scholesov vzorec	6
1.4 Samofinancovaná stratégia	8
1.5 Hedging	8
1.6 Arbitráž	9
2 Bariérová opcia	9
2.1 <i>Knock-out</i> opcia	11
2.2 <i>Knock-in</i> opcia	13
3 Binomická metóda oceňovania bariérovej opcie	15
3.1 Tvorba modelu	15
3.2 Oceňovanie európskej opcie	18
3.3 Oceňovanie americkej opcie	18
4 Oceňovanie bariérovej opcie na neúplnom trhu	19
4.1 Tvorba modelu	19
4.2 Strednohodnotový proces	22
4.3 Black-Scholesove delta a optimálna zaist'ovacia stratégia	22
4.4 Proces kvadratickej odchýlky	24
5 Experimenty	27
5.1 Európska <i>down-and-out call</i> opcia	28
5.2 Americká <i>up-and-out put</i> opcia	29
5.3 Príčiny nepresností	30
5.4 Obrázky	30
Záver	35
Literatúra	36
Príloha	37

Úvod

V priebehu posledných desaťročí a najmä koncom minulého storočia sa začali objavovať na finančných trhoch rôzne nestability. Boli dôsledkom najmä zvýšenej volatility cien akcií, menových kurzov, úrokových sadzieb, indexov, atď. Samozrejme, malo to za následok zvýšenie rizík pre všetkých účastníkov finančného trhu. Tí začali hľadať možnosti na eliminovanie týchto rizík, čoho výsledkom bol vznik finančných derivátov, ktorých hodnota závisí od príslušných aktív.

Cieľom tejto diplomovej práce je bližšie sa pozrieť na jeden druh finančného derivátu - opciu a to konkrétne bariérovú. Zaujímá nás najmä spôsob jej oceňovania na neúplnom trhu v diskretnom modeli.

Bariérové opcie patria medzi najpopulárnejšie a zároveň aj najstaršie spomedzi exotických opcií. Snyder prvý popísal bariérovú opciu ako "špeciálnu opciu s malým rizikom" v roku 1969. Merton odvodil explicitný vzorec pre výpočet jej hodnoty v roku 1973 a v roku 1991 Rubinstein a Reiner odvodili tieto vzorce pre všetkých 8 typov jedno-bariérových opcií.

V podstate existujú tri hlavné dôvody pre uprednostnenie bariérovej opcie voči obyčajnej. Za prvé, bariérová opcia dokáže lepšie vystihnúť predstavy investora o budúcom správaní sa aktíva, a teda investor nemusí platiť za tie scenáre, ktoré nepokladá za pravdepodobné. Za druhé, cena bariérovej opcie je vo všeobecnosti nižšia ako cena obyčajnej, nakoľko je k opcii pridaná ďalšia podmienka, ktorá musí byť splnená, aby mohla byť opcia uplatnená. Za tretie, bariérová opcia dokáže v určitých situáciách poskytnúť citlivejšie zaistenie, napr. keď už nie je viac potrebné aktívum zaistiť, ak presiahlo istú hodnotu.

V prvej časti práce si predstavíme niektoré základné pojmy používané v opčnej teórii. Ďalej budeme pokračovať prehľadom a charakteristikou bariérových opcií, kde si aj odvodíme explicitný vzorec na výpočet hodnoty konkrétneho typu bariérovej opcie. Tretia kapitola obsahuje algoritmus na oceňovanie bariérovej opcie v binomickom strome. V štvrtej kapitole

si popíšeme algoritmus na oceňovanie bariérovej opcie na neúplnom trhu, ukážeme si optimálnu zaist'ovaciú stratégiu a zameriame sa na očakávanú kvadratickú odchýlku, ktorá vyplýva zo zaist'ovania. V závere sú zobrazené výsledky použitia oboch algoritmov na dvoch konkrétnych bariérových opciách.

1 Základné pojmy

Táto kapitola obsahuje niektoré základné opčné pojmy, ako sú európska a americká opcia, Black-Scholesova rovnica, samofinancovaná stratégia, hedging a arbitráž.

1.1 Európska opcia

Európska call (put) opcia je kontrakt, v ktorom jedna strana získava právo kúpiť (predať) aktívum¹ v presne určenom expiračnom čase $t = T$ za vopred dohodnutú expiračnú cenu E (*strike price*). Zdôraznime, že daná strana získava právo, ale nie povinnosť kúpiť (predať) toto aktívum. Toto právo má teda samo o sebe istú hodnotu, a preto treba zaň v čase uzavretia kontraktu $t = 0$ zaplatiť istú prémie V . Pre obe strany - pre vypisovateľa ako i pre držiteľa opcie - je zaujímavé vedieť, aká je optimálna hodnota prémie tak, aby ani jedna strana nebola zvýhodnená.

Pri každom opčnom kontrakte sú dve strany. Na jednej strane je investor, ktorý si opciu kúpil - hovoríme, že je v *long* pozícii. Na druhej strane je investor, ktorý opciu predal (vypísal) - hovoríme, že je v *short* pozícii.

Dôležitou charakteristikou opcií (nielen európskych) je tzv. *payoff diagram*, ktorý popisuje výplatu investora v čase expirácie (*maturity*). Počiatočné náklady na opciu tu zahrnuté nie sú. Ak označíme koncovú cenu podkladového aktíva ako S , tak pre európsku *call* opciu je *payoff* diagram daný ako:

¹čo môže predstavovať napr. akciu, index, výmenný kurz, úrokovú mieru, atď.

- short pozícia $\min(E - S, 0)$
- long pozícia $\max(S - E, 0)$

Pre európsku put opciu je *payoff* diagram daný ako:

- short pozícia $\min(S - E, 0)$
- long pozícia $\max(E - S, 0)$

Podľa aktuálnej ziskovosti opcie delíme na

- *in-the-money* - ak je cena aktíva nad hranicou E a uplatnenie opcie by nám prinieslo zisk
- *out-of-the-money* - ak cena aktíva klesne pod hranicu E , opcia sa stáva bezcennou a jej uplatnenie nemá zmysel
- *at-the-money* - ak je cena aktíva na úrovni E

1.2 Americká opcia

Americká call (put) opcia je kontrakt, v ktorom jedna strana získava právo kúpiť (predať) aktívum v ľubovoľnom čase pred expiráciou $t \leq T$ za vopred dohodnutú expiračnú cenu E . Od európskej opcie ju odlišuje práve možnosť uplatnenia opcie aj pred jej vypršaním. Všetko ostatné, čo sme si povedali o európskej, platí aj pre americkú opciu.

1.3 Black-Scholesov vzorec

Nakoľko naším cieľom v tejto práci nie je skúmať *Black-Scholesov model*² ako taký a budeme ho iba využívať na porovnanie výsledkov, nebudeme sa teraz zaoberať jeho presným odvodením, ale iba ho naznačíme vo veľmi hrubých rysoch.³

²Black Fischer, Scholes Myron (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.

³podrobné odvodenie je napr. v [1]

Odvozenie Black-Scholesovej rovnice pozostáva z troch krokov. V prvom z nich určíme stochastickú rovnicu, podľa ktorej sa správa vývoj samotnej ceny akcie S . V druhom kroku odvodíme stochastickú rovnicu, podľa ktorej sa správa funkcia $V(S, t)$ od náhodne sa meniacej ceny akcie S . Funkciu V vo všeobecnosti hovoríme finančný derivát. V tret'om kroku zostavíme tzv. *bezrizikové portfólio* vhodnou kombináciou medzi množstvom akcií a opcií na danú akciu. Výsledkom je rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1.1)$$

kde r označuje bezrizikovú úrokovú mieru a σ označuje volatilitu ceny akcie. Táto rovnica je známa ako Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica na oceňovanie ceny derivátov akcií.

Z nej sa dá odvodiť explicitný vzorec pre oceňovanie opcie. Pre názornosť si naznačíme odvozenie pre európsky *call*. Okrajové podmienky v tomto prípade sú

$$V(0, t) = 0, \quad V(S, t) \sim S \quad \text{pre } S \longrightarrow \infty$$

a koncová podmienka je

$$V(S, T) = \max(S - E, 0).$$

Po sérii transformácií a aplikovaní Greenovej formule dostaneme

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (1.2)$$

kde

$$d_1 = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \ln \frac{S}{E}}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

a

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi$$

je kumulatívna distribučná funkcia normálneho rozdelenia. Formula (1.2) sa nazýva *Black-Scholesov vzorec* pre oceňovanie európskej call opcie. Všetky konštanty a parametre vystupujúce vo vzorci by mali byť vopred známe.

1.4 Samofinancovaná stratégia

Predpokladajme, že investor vlastní portfólio obsahujúce cenné papiere, ako akcie, dlhopisy a opcie. Vzhľadom na to, že hodnota jednotlivých cenných papierov sa s časom mení, mení sa aj hodnota portfólia. Obchodná stratégia investora tiež ovplyvňuje hodnotu portfólia, napr. zmenou podielu cenných papierov v portfóliu, resp. dodatočnými vkladmi alebo výbermi prostriedkov z portfólia.

Hovoríme, že stratégia správy portfólia je *samofinancovaná*, ak okrem počiatkovej investície žiadne prostriedky nie sú vkladané a ani vyberané z portfólia. To znamená, že náklady spojené s nákupom jedného cenného papiera v portfóliu sú kompletne financované predajom nejakého iného v rámci toho istého portfólia.

1.5 Hedging

Finančné inštitúcie, ktoré predávajú opcie svojim klientom, čelia problému zabezpečenia sa voči riziku. Keby predávali opcie, ktoré by boli totožné s tými, čo sa predávajú na burze, mohli by svoje riziko neutralizovať kúpou rovnakej opcie na burze. Ak sa však opcia prispôsobí potrebám klienta a ďalej už nezodpovedá žiadnej štandardne predávanej opcii na burze, zaistenie voči riziku sa stáva oveľa obtiažnejšie. Jeden z dôvodov je, že citlivosť ceny opcie na zmenu ceny akcie sa časom a podmienkami trhu mení a tým pádom sa mení aj vhodná pozícia pre zaistenie. Ďalším dôvodom je, že cena opcie je tiež citlivá aj na zmenu volatility a v tomto prípade sa už na zaistenie podkladové aktívum použiť nedá.

Hedging (zaistenie) je vlastne stratégia, v ktorej sa tvorca portfólia snaží eliminovať riziko tým, že uzavrie opačné príkazy na dvojicu aktív, ktorých korelácia je negatívna. Medzi najjednoduchšie takéto stratégie patria napr. *holá (naked) pozícia*, *krytá (covered) pozícia* alebo *stratégia zastaň-strata (stop-loss)*. Väčšina obchodníkov uprednostňuje sofistikovanejšie zaist'ovacie schémy. Ich prvotným cieľom je znížiť citlivosť portfólia na malé zmeny

v cene podkladového aktíva za krátky časový úsek. Táto stratégia je známa ako *delta hedging*.

1.6 Arbitráž

Jedným zo základným pojmov v teórii oceňovania finančných derivátov a ich zaistenia je *arbitráž*. Inými slovami, nikdy nemôže existovať príležitosť na okamžitý bezrizikový zisk. Toto si však žiada mierne upresnenie - takáto príležitosť môže existovať, ale iba určitú dobu, kým sa prirodzeným procesom (pohyby cien) neeliminuje.

Najväčší bezrizikový výnos z portfólia je rovný výnosu, ktorý by sme získali po vložení zodpovedajúcej hotovosti do banky. Samozrejme, investovaním napr. do cenných papierov sa dá dosiahnuť vyšší výnos, ale ten nie je zaručený. Keby existovala takáto príležitosť a mali by sme pri nej istý zisk, tak by nebol dôvod vkladat' peniaze do banky a bolo by výhodnejšie si požiť z banky čo najväčšie množstvo peňazí (za nižší úrok ako je náš možný výnos) a to ďalej investovať do spomínaných cenných papierov. Banka by na tento zvýšený dopyt po peniazoch odpovedala, podľa očakávania, zvýšením úrokových sadzieb, čo by následne znížilo náš možný výnos z investovania. Tu však treba podotknúť, že sme nezohľadnili transakčné náklady, rozdielne úrokové sadzby pre pôžičky a vklady, dane, atď., ale ako názorný príklad to bolo postačujúce.

2 Bariérová opcia

Bariérová opcia je kontrakt, ktorý buď vznikne (*knock-in*) alebo zanikne (*knock-out*), keď cena podkladového aktíva prekročí istú hranicu (zvanú *bariéra*) v (S, t) priestore, ktorá je nad (*up*) alebo pod (*down*) cenou aktíva v čase, kedy bola opcia vypísaná.

- **”up-and-in”**: opcia je bezcenná, pokiaľ bariéra $S = X$ nie je dosiahnutá zdola ešte pred expiráciou;

- **”down-and-in”**: opcia je bezcenná, pokiaľ bariéra $S = X$ nie je dosiahnutá zhora ešte pred expiráciou;
- **”up-and-out”**: opcia je bezcenná, ak bariéra $S = X$ je dosiahnutá zdola ešte pred expiráciou;
- **”down-and-out”**: opcia je bezcenná, ak bariéra $S = X$ je dosiahnutá zhora ešte pred expiráciou.

Komplikovanejšie bariérové opcie môžu mať dve bariéry (*dvojitá bariérová opcia*) alebo koncovú *payoff* funkciu určenú jedným aktívom a hladinu bariéry druhým (*dvojrozmerná bariérová opcia*). Bariérové opcie môžu byť aj súčasťou komplikovanejších kontraktov a spomedzi *path-dependant opcií*⁴ obchodovaných na svetových burzách patria medzi najobľúbenejšie, možno aj preto, lebo bývajú lacnejšie ako obyčajné opcie. Pri niektorých bariérových opciách môže byť vyplatený rabat - pre *out* opciu, ak je bariéra prekročená, v prípade *in* opcie, ak sa bariéra nikdy nedosiahne. Tento rabat vlastne slúži ako kompenzácia pre držiteľa opcie za jej stratu a robí opciu ešte atraktívnejšou pre potenciálnych kupcov.

Veľmi dôležitá pri oceňovaní bariérových opcií je otázka sledovania dosiahnutia bariéry z pohľadu času. Väčšina modelov predpokladá spojité monitorovanie bariéry; inými slovami, bariéra môže byť prekročená v ľubovoľnom čase pred expiráciou. Je to predovšetkým z dôvodu, že tento predpoklad vedie k analytickým riešeniam. V praxi je však väčšina (ak nie všetky) bariérových opcií monitorovaná v diskretnom čase. Okrem praktického hľadiska sú na to právne aj finančné dôvody, nakoľko v niektorých prípadoch pri spojitom sledovaní bariéry sa môže vyskytnúť príležitosť na arbitráž⁵.

V nasledujúcej časti si odvodíme explicitný vzorec pre európsku bariérovú *call* opciu, pre *put* opciu je odvodenie obdobné. Zložitejšie je to však

⁴ich výplata v čase expirácie je závislá, nejakým netriviálnym spôsobom, na vývoji ceny podkladového aktíva

⁵vid' Kou S.G. [6] str.2

v prípade americkej bariérovej opcie, pre ktorú neexistuje všeobecný explicitný vzorec a na jej oceňovanie budeme využívať iba diskretný model (n-árny strom), ktorý si predstavíme neskôr.

2.1 *Knock-out* opcia

- down-and-out
- up-and-out

Zoberme si prípad európskej *down-and-out call* opcie s výplatom v čase expirácie $\max(S - E, 0)$ za predpokladu, že počas celej doby trvania opcie S nikdy neklesne pod hranicu X . Ak S predsa len klesne pod X , opcia sa stane bezcennou. Hodnotu takejto opcie vieme explicitne vyjadriť pomocou vzorca - podrobne sa budeme zaoberať iba prípadom, keď $E > X$.

Pokiaľ je S väčšie ako X , hodnota opcie $V_{out}(S, t)$ splňa Black-Scholesovu rovnicu. Koncová podmienka pre túto rovnicu je

$$V_{out}(S, T) = \max(S - E, 0).$$

Ako sa S zväčšuje, pravdepodobnosť, že sa dosiahne bariéra, sa stáva zanedbateľnou a ak predpokladáme, že sa nevyplácajú dividendy,

$$V_{out}(S, t) \sim S \quad \text{pre } S \rightarrow \infty.$$

Zatiaľ je táto situácia totožná s obvyčajnou opciou, avšak problém oceňovania sa zmení v druhej okrajovej podmienke, kde namiesto $S = 0$ sa aplikuje $S = X$. V momente, keď S dosiahne X , opcia sa stáva bezcennou, teda na úrovni $S = X$ je hodnota opcie nulová:

$$V_{out}(X, t) = 0.$$

Týmto sme ukončili formuláciu problému a môžeme prejsť k hľadaniu explicitného riešenia.

Použijeme substitúcie ako pri odvodení (1.2). Teda

$$S = Ee^x, \quad t = T - \tau/\frac{1}{2}\sigma^2, \quad V_{out} = Ee^{\alpha x + \beta\tau}u(x, \tau),$$

kde $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$, $\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$ a $k = r/\frac{1}{2}\sigma^2$. S týmito novými premennými sa bariéra transformuje na

$$x_0 = \ln(X/E),$$

a celý problém s bariérovou opciou sa mení na

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

kde

$$u(x, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) = u_0(x), \quad x \geq x_0, \quad (2.2)$$

$$u(x, t) \sim e^{(1-\alpha)x - \beta\tau} \quad \text{pre } x \longrightarrow \infty, \quad (2.3)$$

a

$$u(x_0, t) = 0. \quad (2.4)$$

Posledná okrajová podmienka je tu nová a vysporiadame sa s ňou pomocou *princípu zrkadlenia*. Premietneme počiatočné dáta okolo bodu $x_0 = \ln(X/E)$ a v tom istom čase zmeníme ich znamienka, čím bude automaticky splnená podmienka (2.4). Čiže namiesto riešenia (2.1)-(2.4) na intervale $x_0 < x < \infty$, riešime (2.1) pre všetky x , kde však platí

$$u(x, 0) = u_0(x) - u_0(2x_0 - x),$$

čo sa dá prepísať na

$$u(x, 0) = \begin{cases} \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) & \text{pre } x > x_0 \\ -\max\left(e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}x)} - e^{(k-1)(x_0 - \frac{1}{2}x)}, 0\right) & \text{pre } x < x_0. \end{cases}$$

Týmto spôsobom je zaručené, že $u(x_0, 0) = 0$.

Predpokladajme, že

$$C(S, t) = Ee^{\alpha x + \beta\tau} u_1(x, \tau)$$

je cena obyčajnej opcie s rovnakou expiračnou cenou a dátumom vypršania, ale bez bariéry. Samozrejme, táto hodnota je daná Black-Scholesovou rovnicou a vieme, že $u_1(x, \tau)$ je riešenie rovnice vedenia tepla. Teda máme

$$u_1(x, \tau) = e^{-\alpha x - \beta\tau} C(S, t)/E.$$

Riešenie pre bariérovú opciu môžeme zapísať ako

$$V_{out}(S, t) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} (u_1(x, \tau) + u_2(x, \tau)),$$

kde $u_2(x, \tau)$ je riešenie problému s antisymetrickými počiatočnými dátami. Toto riešenie môžeme vyjadriť pomocou u_1 využitím invariantnosti rovnice (2.1) vzhľadom na otočenie a zmenu znamienka. Dostávame

$$\begin{aligned} u_2(x, \tau) &= -u_1(2x_0 - x, \tau) \\ &= -e^{-\alpha(2 \log(X/E) - \log(S/E)) - \beta \tau} C(X^2/S, t)/E, \end{aligned}$$

nakolko nahradenie x za $2x_0 - x$ je ekvivalentné s nahradením S za X^2/S . Nakoniec dostávame riešenie vyjadrené čisto pomocou S a t

$$V_{out}(S, t) = C(S, t) - \left(\frac{S}{X}\right)^{-(k-1)} C(X^2/S, t), \quad k = 2r/\sigma^2. \quad (2.5)$$

Je zrejmé, že $V_{out}(X, t) = 0$; samozrejme, koncová podmienka je splnená iba pre $S > X$, lebo pre $S < X$ je hodnota opcie nulová.

2.2 Knock-in opcia

- down-and-in
- up-and-in

Uvažujme teraz prípad európskej *down-and-in call* opcie. Hodnota opcie $V_{in}(S, t)$ stále splňa základnú Black-Scholesovu rovnicu a našou úlohou zostáva iba určiť správnu koncovú a správne okrajové podmienky. Výrazom $C(S, t)$ označíme európsku *call* opciu s rovnakým časom expirácie a rovnakou expiračnou cenou ako bariérová opcia.

V momente, keď je prvýkrát dosiahnutá bariéra, bariérová opcia sa stáva obyčajnou, ktorej hodnota je daná pomocou Black-Scholesovho vzorca. Pre nás je však zaujímavý prípad, keď ešte bariéra dosiahnutá nie je.

Pre $S \rightarrow \infty$ je hodnota opcie nulová, nakolko čím je S väčšie, tým je menšia pravdepodobnosť, že klesne pod bariéru a aktivuje opciu. Z toho

dostávame prvú okrajovú podmienku

$$V_{in}(S, t) \longrightarrow 0 \quad \text{pre} \quad S \longrightarrow \infty.$$

Ak je v čase expirácie $S > X$, tak hodnota opcie je nulová. Koncová podmienka pre $S > X$ je teda⁶

$$V_{in}(S, T) = 0.$$

Nakoniec, ak cena aktíva dosiahne v nejakom čase pred expiráciou hodnotu $S = X$, opcia sa okamžite zmení na obyčajnú, a teda bude mať aj takú istú hodnotu. Druhá okrajová podmienka je teda

$$V_{in}(X, t) = C(X, t).$$

Ak $S < X$, bariéra bola prekročená a opcia je aktivovaná. Ostáva nám teda riešiť problém iba pre $S > X$. Týmto sme ukončili formuláciu problému.

Pre explicitné riešenie *down-and-in* opcie si najprv napíšeme

$$V_{in}(S, t) = C(S, t) - V_{out}(S, t).$$

Keďže Black-Scholesova rovnica a hraničné podmienky sú lineárne, V_{out} musí spĺňať koncovú podmienku

$$V_{out}(S, T) = C(S, T) - V_{in}(S, T) = C(S, T) = \max(S - E, 0);$$

a okrajové podmienky

$$V_{out}(S, t) = C(S, t) - V_{in}(S, t) \sim S - 0 = S, \quad \text{pre} \quad S \longrightarrow \infty$$

$$V_{out}(X, t) = C(X, t) - V_{in}(X, t) = C(X, t) - C(X, t) = 0.$$

Dopracovali sme sa k poznatku, že európsky *in* plus európsky *out* sa rovná obyčajnej opcii. Toto je zrejmé aj z finančného pohľadu, nakoľko hodnota portfólia pozostávajúceho z jednej *in* opcie a jednej *out* opcie (s rovnakou

⁶Ak sa jedná o opčný kontrakt s rabatom Z , ak sa nedosiahne bariéra, tak táto podmienka bude $V_{in}(S, T) = Z$.

bariérou, expiračnou cenou a aj dobou) sa musí rovnať hodnote obvyčajnej opcie (s rovnakou expiračnou cenou a dobou). Je to v dôsledku toho, že iba jedna z tých dvoch bariérových opcií môže byť aktívna v čase expirácie a nech je to ktorákoľvek, jej hodnota je hodnotou obvyčajnej opcie.

3 Binomická metóda oceňovania bariérovej opcie

Binomické metódy na oceňovanie opcií sú odvodené z modelov diskrétneho náhodného pohybu. S Black-Scholesovou analýzou súvisia iba nepriamo a to predpokladom rizikovej neutrálnosti.

Celý proces spočíva v tom, že poznáme cenu aktíva teraz (v čase 0) a pomocou binomického stromu nasimulujeme jej možné hodnoty v budúcnosti až do času T . V koncových bodoch stromu si už potom podľa *payoff diagramu* vieme vyrátať hodnoty opcie pre jednotlivé koncové ceny aktíva. Následným spätným pohybom v strome sa dostaneme opäť do času 0 a získame aj súčasnú hodnotu opcie.

3.1 Tvorba modelu

Časový úsek T rozdelíme na M periód s rovnakou veľkosťou δt . Na simulovanie použijeme *diskrétny náhodný pohyb*, a teda ceny aktíva sa budú meniť iba v diskrétnych časoch, ktoré sú násobky δt . Ak je cena aktíva S^m v čase $m\delta t$, tak v čase $(m + 1)\delta t$ môže nadobúdať iba dve hodnoty, $uS > S$ a $dS < S$. Hodnoty d a u sa počas simulácie nemenia. Pravdepodobnosť zvýšenia ceny aktíva je daná hodnotou p , pravdepodobnosť zníženia naopak $(1 - p)$.

Ďalším dôležitým predpokladom je riziková neutrálnosť - sklony investorov k riziku sú v procese oceňovania opcie nepodstatné. Tento predpoklad môžeme zaviesť vtedy, ak je možné dokonale zaistiť portfólio a tým ho spraviť bezrizikovým. Predpokladáme, že investori sú rizikovo neutrálni (aj keď

väčšina z nich taká nie je) a že výnos z aktíva je rovný bezrizikovej úrokovej miere. Na základe tohto predpokladu zist'ujeme, že hodnota V^m derivátu v časovom kroku $m\delta t$ je *očakávanou hodnotou* derivátu v časovom kroku $(m+1)\delta t$ znížená bezrizikovou úrokovou mierou r :

$$V^m = E[e^{-r\delta t}V^{m+1}].$$

Hodnoty p , d a u sú určené tak, aby diskretný náhodný pohyb mal rovnakú strednú hodnotu a varianciu ako spojitý náhodný pohyb. Teda, očakávané stredné hodnoty a variancie ceny aktíva S^{m+1} budeme rátať podľa spojitého rizikovo-neutrálneho náhodného pohybu a diskretného binomického modelu.

Pre strednú hodnotu dostávame

$$E_c[S^{m+1}|S^m] = e^{r\delta t}S^m,$$

kde r je bezriziková úroková miera. Z diskretného binomického náhodného pohybu dostávame

$$E_b[S^{m+1}|S^m] = (pu + (1-p)d)S^m.$$

Keď dáme tieto dve očakávané hodnoty do rovnosti, dostaneme

$$(pu + (1-p)d)S^m = e^{r\delta t}S^m. \quad (3.1)$$

Pre varianciu platia nasledovné vzťahy

$$\begin{aligned} var_c[S^{m+1}|S^m] &= e^{2r\delta t}(e^{\sigma^2\delta t} - 1)(S^m)^2 \\ var_b[S^{m+1}|S^m] &= (pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2r\delta t})(S^m)^2, \end{aligned}$$

z čoho obdobným spôsobom ako pri stredných hodnotách dostávame

$$pu^2 + (1-p)d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\delta t}, \quad (3.2)$$

kde σ označuje volatilitu.

Rovnice (3.1) a (3.2) sú iba dve, ale my máme tri premenné u, d a p . Aby sme všetky tri mohli jednoznačne určiť, potrebujeme získať ešte jednu rovnicu. Jej určenie je v podstate na nás, zaužívané sú tieto dve možnosti:

$$u = \frac{1}{d} \quad (3.3)$$

$$p = \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

Prípad $u = \frac{1}{d}$

Z rovníc (3.1), (3.2) a (3.3) dostávame sústavu troch rovníc, ktoré určia nami hľadané premenné u, d a p :

$$d = A - \sqrt{A^2 - 1}, \quad u = A + \sqrt{A^2 - 1}, \quad p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}, \quad (3.5)$$

kde

$$A = \frac{1}{2} \left(e^{-r\delta t} + e^{(r+\sigma^2)\delta t} \right).$$

Prípad $p = \frac{1}{2}$

Z rovníc (3.1), (3.2) a (3.4) dostávame inú sústavu troch rovníc, ktoré tiež určia nami hľadané premenné u, d a p :

$$\begin{aligned} d &= e^{r\delta t} \left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\delta t} - 1} \right), \\ u &= e^{r\delta t} \left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\delta t} - 1} \right), \\ p &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Teraz pristúpime k samotnej tvorbe binomického stromu možných cien aktíva, pri jeho tvorbe použijeme jednu zo sústav (3.5) alebo (3.6). Začíname v čase $t = 0$ a predpokladáme cenu aktíva S_0^0 . V nasledujúcom čase δt sú dve

možné ceny aktíva, $S_1^1 = uS_0^0$ a $S_1^d = dS_0^0$. Takýmto spôsobom postupujeme ďalej, až do času $M\delta t$. Tu treba poznamenať, že strom je poprepájaný, takže do jeho jednotlivých uzlov sa dá dostať viacerými spôsobmi. V m -tom časovom úseku je $m + 1$ možných cien aktíva,

$$S_n^m = d^{m-n}u^n S_0^0, \quad n = 0, 1, \dots, m.$$

3.2 Oceňovanie európskej opcie

Keď už máme strom hotový a poznáme všetky možné hodnoty S^M , môžeme na základe *payoff* funkcie pre našu opciu určiť jej možné hodnoty V_n^M v čase T . Pre prípad *call* opcie to bude

$$V_n^M = \max(S_n^M - E, 0), \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (3.7)$$

a pre *put*

$$V_n^M = \max(E - S_n^M, 0), \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (3.8)$$

Musíme tu zohľadniť fakt, že hodnota opcie pod bariérou je nulová (v prípade "*down-and-out*" opcie). Pri spätnom pohybe tiež kontrolujeme, či pre aktuálnu hodnotu opcie je cena aktíva pod hodnotou bariéry, kedy je jej hodnota opäť nulová. V opačnom prípade použijeme vzorec

$$V_n^m = e^{-r\delta t} \left(pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1} \right), \quad n = 0, 1, \dots, m \quad (3.9)$$

a týmto spôsobom sa dostaneme aj k nami hľadanej hodnote V_0^0 .

3.3 Oceňovanie americkej opcie

Jediný rozdiel oproti európskej opcii je v tomto prípade možnosť skoršieho uplatnenia opcie. Túto podmienku však vieme bez problémov zakomponovať do nášho binomického modelu. Celý proces tvorby stromu prebehne rovnako ako v prípade európskej opcie a po získaní všetkých hodnôt S^M , použijeme na získanie hodnôt V_n^M buď vzorec (3.7) alebo (3.8), podľa toho, či rátame *call* alebo *put* opciu. Zmena však nastane pri spätnom pohybe v strome.

Nakoľko opcia môže byť uplatnená v ľubovoľnom čase, musíme v každom bode pri určovaní hodnoty V_n^m rozhodnúť, či je výhodnejšie opciu ponechať a jej hodnotu v danom bode dostaneme podľa (3.9) alebo opciu uplatniť a jej hodnotu dostaneme podľa upravenej verzie *payoff* funkcie. Matematicky to môžeme pre *call* opciu vyjadriť ako

$$V_n^m = \max \left(\max(S_n^m - E, 0), e^{-r\delta t} (pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1}) \right). \quad (3.10)$$

Pre *put* opciu je to obdobné

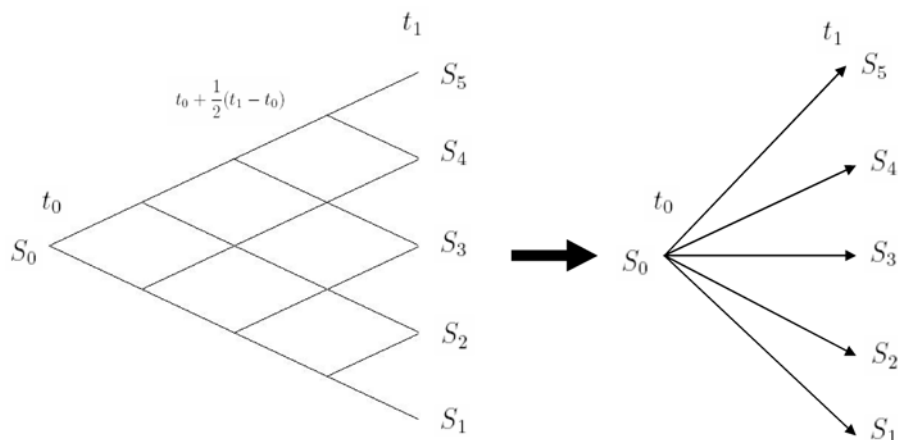
$$V_n^m = \max \left(\max(E - S_n^m, 0), e^{-r\delta t} (pV_{n+1}^{m+1} + (1-p)V_n^{m+1}) \right). \quad (3.11)$$

4 Oceňovanie bariérovej opcie na neúplnom trhu

Podmienka, že cena akcie sa môže meniť iba dvomi spôsobmi znie možno nereálne, a preto sa skúsme pozrieť na reálnejšiu situáciu. Predstavme si, že chceme zaistiť finančný derivát s výplatou (*payoff* funkciou) H_T skonštruovaním samofinancovaného portfólia s hodnotou V_t , $t = 0, \dots, T$. Ukáže sa, že hľadané riešenie je proces H_t , čo je vlastne diskrétna analógia Black-Scholesovej hodnoty.

4.1 Tvorba modelu

V Cox, Ross a Rubinsteinovom modeli sú povolené iba dve možné hodnoty výnosu aktíva v ľubovoľnej jednej perióde, aby bola zachovaná úplnosť modelu. My však teraz budeme pracovať s modelmi, ktoré môžu mať väčší počet možných výnosov v jednej perióde. Pri ich tvorbe budeme vychádzať z rovnakých základov, ako sme si ukázali pri tvorbe binomického stromu (kapitola 3.1). Využijeme pri tom fakt, že binomický strom po n deleniach obsahuje $n + 1$ koncových bodov. Ak sa však budeme tváriť, že delenia nevidíme a vidíme iba počiatočný a koncový stav, ich pospájaním dostaneme elegantné riešenie pre $(n + 1)$ -árny strom (obrázok 1).



Obr. 1: Obrázok vľavo predstavuje binomický strom, pomocou ktorého sa dopravujeme k hodnotám $S_0 \dots S_5$. Na obrázku vpravo už vidno výsledný strom s piatimi možnými výnosmi v jednej perióde.

K získaniu výnosov na jednotlivých vetvách, spolu s pravdepodobnosťami ich nastatia, môžeme použiť jednu zo sústav rovníc (3.5) alebo (3.6), ktorú si upravíme pre n -árny strom. Pre výnos a rizikovo neutrálnu pravdepodobnosť na vetve i teda platia vzťahy

$$\text{výnos}_i = d^{n-i} u^{i-1} \quad q_i = \binom{n-1}{i-1} (1-p)^{n-i} p^{i-1}, \quad (4.1)$$

kde u, d a p dostaneme z rovníc (3.5) alebo

$$\text{výnos}_i = d^{n-i} u^{i-1} \quad q_i = \binom{n-1}{i-1} p^{n-1}, \quad (4.2)$$

kde u, d a p dostaneme z rovníc (3.6).

Proces tvorby stromu si ukážeme aj na konkrétnom príklade (strom s 5 vetvami). Majme európsku *down-and-out call* opciu s parametrami

$$S = 4000, \quad E = 4250, \quad X = 3600, \quad r = 0.04, \quad T = 0.5, \quad \sigma = 0.2.$$

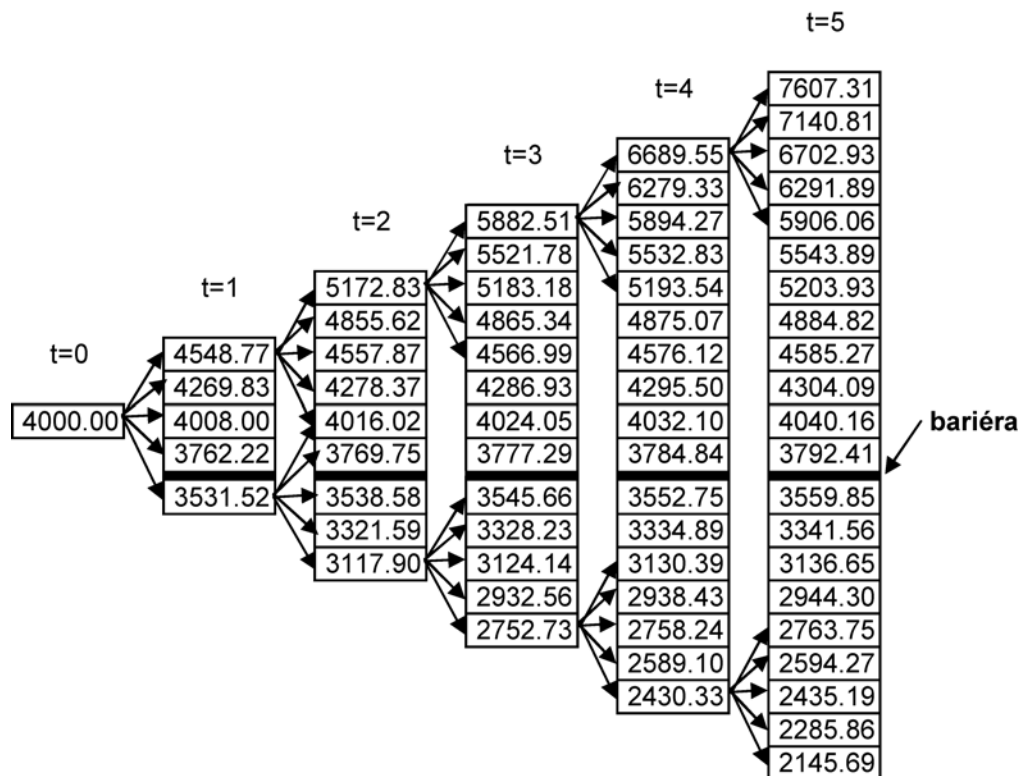
Naším cieľom je oceniť túto opciu pri rebalansovaní portfólia 5-krát za daný časový úsek. Bezriziková ročná úrokovú mieru 4% sme upravili pre jeden časový úsek ($dt = 0.1$ roka) na hodnotu $1.04^{1/10} - 1 = 0.39\%$. Použitím

0.0625	1.1372
0.2500	1.0675
0.3750	1.0020
0.2500	0.9406
0.0625	0.8829

Obr. 2: V prvom stĺpci sú uvedené pravdepodobnosti pre jednotlivé vetvy, v druhom sú príslušné výnosy.

napr. sústavy (4.2) dostávame nami hľadané pravdepodobnosti a výnosy (obrázok 2).

Na základe získaných výnosov už vieme poskladať kompletný strom (obrázok 3).



Obr. 3: Strom budúcich možných cien akcie S_t .

4.2 Strednohodnotový proces

Rizikovo neutrálne pravdepodobnosti q a výplata opcie H_T definujú strednohodnotový proces $\{H_t\}_{t=0,1,\dots,T}$ ako

$$H_t = E_t \left[\frac{H_T}{(1+r)^{T-t}} \right].$$

V našom prípade sa podmienené pravdepodobnosti q zhodujú s rizikovo neutrálnymi pravdepodobnosťami z jednokrokového Markowitzovho CAPM modelu. Teda H_{T-1} je CAPM cena opcie v čase $T-1$, H_{T-2} je CAPM cena H_{T-1} v čase $T-2$, atď.

Hodnoty H_t vypočítame rekurzívne pomocou rizikovo neutrálnych pravdepodobností začínajúc od poslednej periódy, podobne ako v prípade úplného trhu,

$$\begin{aligned} H_t &= E_t \left[\frac{H_{t+1}}{1+r} \right], \\ t &= T-1, \dots, 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Avšak tento vzťah sa odlišuje od svojej úplnotrhovej verzie v tom, že kým v prípade úplného trhu existuje samofinancované portfólio s hodnotou H_t , ktoré perfektne replikuje H_{t+1} , v prípade neúplného trhu takéto portfólio vo všeobecnosti neexistuje. Výsledok je znázornený na obrázku 4.

4.3 Black-Scholesove delta a optimálna zaist'ovacia stratégia

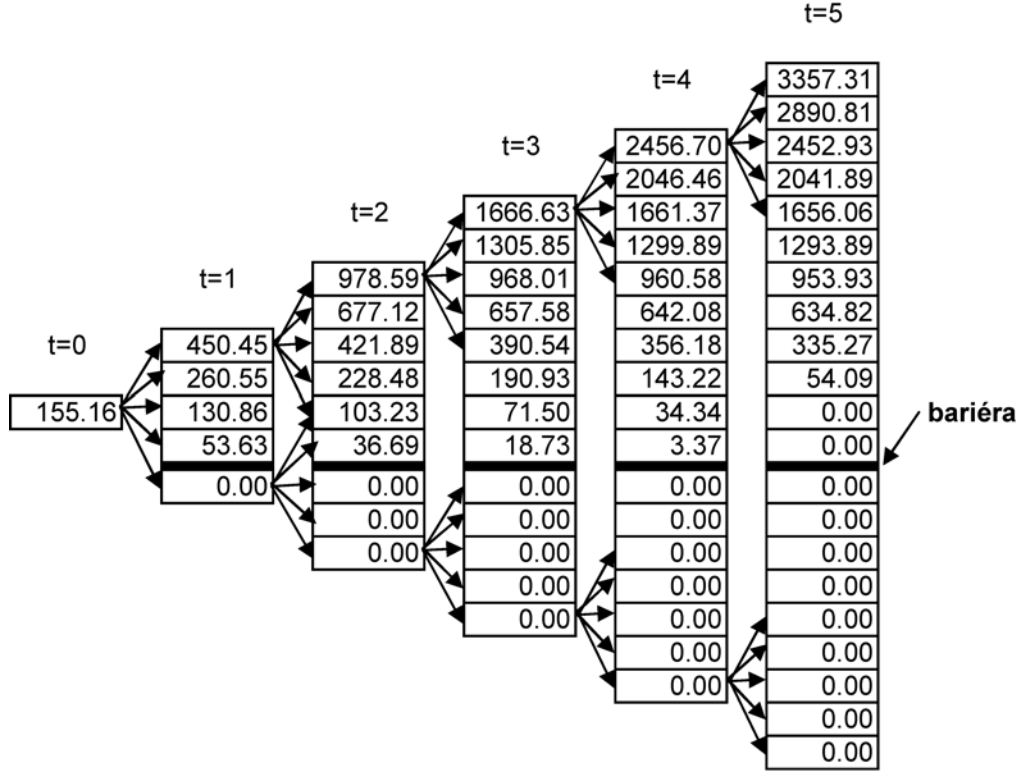
Optimálnu zaist'ovaciu stratégiu θ_t získame z minimalizácie zaist'ovacej odchýlky $E_t[(V_{t+1} - H_{t+1})^2]$. Použitím podmienky samofinancovania

$$V_{t+1} = (1+r)V_t + \theta_t S_t (\hat{R}_{t+1} - (1+r))$$

môžeme spomínanú odchýlku prepísať na

$$E_t \left[\left((1+r)V_t + \theta_t S_t (\hat{R}_{t+1} - (1+r)) - H_{t+1} \right)^2 \right] \tag{4.4}$$

a je jasné, že optimálna hodnota θ_t závisí nielen na H_{t+1} , ale aj na V_t .



Obr. 4: Strednohodnotový proces H_t .

Zo samofinancovania portfólia vyplýva, že v čase t si už nemôžeme sami zvoliť hodnotu V_t , ale táto hodnota je daná našou predošlou obchodovacou stratégiou a cenami aktív. Avšak je zmysluplné uvedomiť si, akú hodnotu V_t by sme si zvolili, keby sme tú možnosť mali. Ukazuje sa, že optimálna dvojica minimalizujúca (4.4) je $V_t = H_t$, $\theta_t = \theta_t^{BS}$

$$\theta_t^{BS} = \frac{E_t \left[\left(H_{t+1} - (1+r)H_t \right) \left(\hat{R}_{t+1} - (1+r) \right) \right]}{S_t E_t \left[\left(\hat{R}_{t+1} - (1+r) \right)^2 \right]}, \quad (4.5)$$

kde θ_t^{BS} je diskretná analógia spojitého Black-Scholesovho delta a $\{\hat{R}_t\}_{t=1, \dots, T}$ predstavuje rovnako rozdelené nezávislé výnosy akcie s pravdepodobnosťami danými na obrázku 2. Inými slovami, H_{t-1} získame ako priesečník H_t a nadbytočného akciového výnosu z metódy najmenších štvorcov a Black-Scholesove delta je koeficient sklonu v tejto regresii.

4.4 Proces kvadratickej odchýlky

Strednohodnotový proces H_t reprezentuje hodnotu, ktorú sa portfólio V_t snaží dosiahnuť. Dá sa ukázať, že $V_t = H_t$ minimalizuje očakávanú kvadratickú replikačnú odchýlku z pohľadu v čase t , $E_t[(V_T - H_T)^2]$. Veľkosť tejto odchýlky v ideálnom prípade $V_t = H_t$ je meraná procesom kvadratickej odchýlky ε_t^2 a je počítaná rekurzívne podľa

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^2 &= E_t[\varepsilon_{t+1}^2] + k_{t+1}ESRE_t(H_{t+1}) \\ \varepsilon_T &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

Výraz $ESRE_t(H_{t+1})$ je jednokroková očakávaná kvadratická replikačná chyba zo zaist'ovania výplaty H_{t+1} a k_{t+1} označuje podiel jednokrokovej odchýlky, ktorá sa prenáša z predchádzajúceho kroku.

$$k_t = (1 + r)^{2(T-t)}$$

Spôsob, akým sa počíta spomínaná jednokroková očakávaná kvadratická replikačná chyba si ukážeme na konkrétnom príklade. Využijeme pri tom nami už predtým nagenerovaný strom možných cien akcie s hodnotami S_t a k nim strom s príslušnými hodnotami H_t . Zoberme si stredný uzol v predposlednej perióde stromu s hodnotou $S_4 = 4032.10$. Položka, ktorú musíme v tomto prípade zaistiť je

$$b = \begin{bmatrix} 335.27 \\ 54.09 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix},$$

čo je výplata opcie podmienená cenou akcie v čase $t = 4$ rovnej 4032.10.

Payoff akcie použitej pri zaistení je

$$A = \begin{bmatrix} 1.0039 & 4585.27 \\ 1.0039 & 4304.09 \\ 1.0039 & 4040.16 \\ 1.0039 & 3792.41 \\ 1.0039 & 3559.85 \end{bmatrix}.$$

Nakoľko sa nachádzame už za očakávanou kvadratickou odchýlkou, musíme každý riadok matice A a b upraviť odmocninou pravdepodobnosti pre príslušnú vetvu. Tieto rizikovo neutrálne pravdepodobnosti sú

$$q = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.2500 \\ 0.3750 \\ 0.2500 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$$

a upravené *payoff* matice sú

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.0625} \times 1.0039 & \sqrt{0.0625} \times 4585.27 \\ \sqrt{0.2500} \times 1.0039 & \sqrt{0.2500} \times 4304.09 \\ \sqrt{0.3750} \times 1.0039 & \sqrt{0.3750} \times 4040.16 \\ \sqrt{0.2500} \times 1.0039 & \sqrt{0.2500} \times 3792.41 \\ \sqrt{0.0625} \times 1.0039 & \sqrt{0.0625} \times 3559.85 \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{0.0625} \times 335.27 \\ \sqrt{0.2500} \times 54.09 \\ \sqrt{0.3750} \times 0.00 \\ \sqrt{0.2500} \times 0.00 \\ \sqrt{0.0625} \times 0.00 \end{bmatrix}.$$

Vieme, že optimálne zaistenie je

$$x = \left(\tilde{A}^\top \tilde{A} \right)^{-1} \tilde{A}^\top \tilde{b}$$

$$x = \begin{bmatrix} -868.876 \\ 0.224 \end{bmatrix}$$

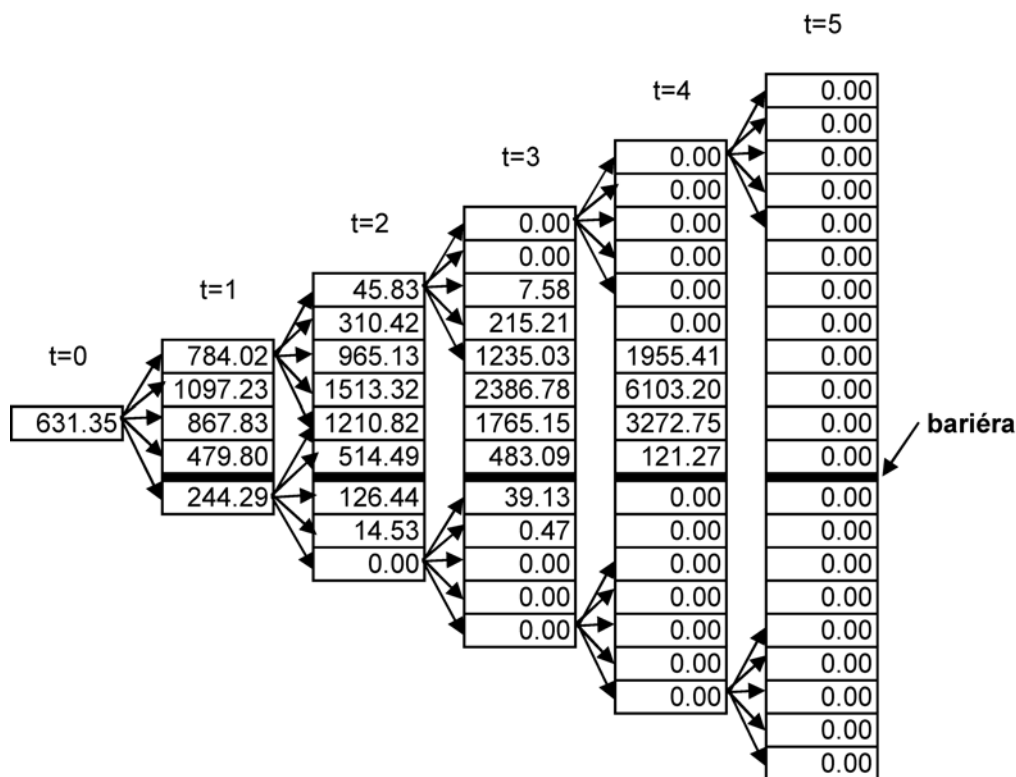
a očakávaná kvadratická odchýlka je $\tilde{\varepsilon}^\top \tilde{\varepsilon}$, kde $\tilde{\varepsilon} = \tilde{A}x - \tilde{b}$. V našom prípade

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -45.13 \\ 18.84 \\ 20.00 \\ -11.41 \\ -18.73 \end{bmatrix},$$

a teda

$$\tilde{\varepsilon}^T \tilde{\varepsilon} = 3272.75.$$

Obrázok 5 znázorňuje jednokrokovú očakávanú kvadratickú replikačnú chybu vypočítanú pre celý strom. Aj intuitívne nám je jasné, že opcie, ktoré sú už ďaleko *in-the-money* alebo ďaleko *out-of-the-money*, sa dajú replikovať bezchybne. Toto nám potvrdzuje aj spomínaný obrázok, na ktorom je vidno, že chyba je najväčšia na hranici *at-the-money* a znižuje sa až k nule, pre veľmi veľké alebo veľmi malé ceny akcie.



Obr. 5: Jednokroková očakávaná kvadratická replikačná chyba.

Keď dopočítame jednokrokové chyby, zostáva nám ich ešte všetky skombinovať, aby sme mohli vypočítať celkovú očakávanú kvadratickú chybu (lebo práve tá nás zaujíma). Rekurzívnym použitím vzorca (4.6) a vyňatím k ,

t		0	1	2	3	4
k_{t+1}		1.0319	1.0238	1.0158	1.0079	1.0000
E_0	$ESRE_t[H_{t+1}]$	631.35	783.97	904.39	1118.80	1968.19

Tab. 1: Čiastkové očakávané kvadratické chyby.

nakoľko proces k je deterministický, dostávame

$$\varepsilon_0^2 = \sum_{t=0}^{T-1} k_{t+1} E_0 \left[ESRE_t(H_{t+1}) \right],$$

čo je vlastne už nami hľadaný vzťah na výpočet celkovej očakávanej kvadratickej chyby.

Tabuľka 1 zobrazuje numerické hodnoty $E_0 \left[ESRE_t(H_{t+1}) \right]$ pre jednotlivé periódy t , spolu s váhami k .

Celková očakávaná kvadratická chyba v našom prípade je

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= 1.0319 \times 631.35 + 1.0238 \times 783.97 + 1.0158 \times 904.39 + \\ &+ 1.0079 \times 1118.80 + 1.0000 \times 1968.19 = 5468.59. \end{aligned}$$

5 Experimenty

V tejto časti uvedieme praktické výsledky popísaných algoritmov. Sú napísané v jazyku C++ a výsledky sú znázornené pomocou programu Microsoft Excel. Cieľom numerických výpočtov je získanie relatívne presných hodnôt opcií, v závislosti od veľkosti časového kroku a overenie ich konvergenencie k presným hodnotám. Tiež nás zaujíma aj veľkosť očakávanej kvadratickej odchýlky ceny replikačného portfólia od výplaty bariérovej opcie v čase expirácie.

5.1 Európska *down-and-out call* opcia

Parametre pre opciu sme si zvolili rovnako, ako v príklade, ktorý sme používali v teoretickej časti.

$$S = 4000, \quad E = 4250, \quad X = 3600, \quad r = 0.04, \quad T = 0.5, \quad \sigma = 0.2$$

Presná hodnota tejto opcie použitím vzorca (2.5) je 149.60.

Nakoľko v teoretickej časti sme si ukázali dva spôsoby na výpočet jednotlivých výnosov a príslušných pravdepodobností (sústavy rovníc (4.1) a (4.2)), je dobré si spomínané spôsoby aj overiť na konkrétnej úlohe. V oboch prípadoch sme použili stromy s 3 až 7 výnosmi v jednej perióde (samozrejme, nie naraz, ale postupne). Nie je problém mať aj viac výnosov, ale tým narastá výpočtová náročnosť a pre naše potreby je uvedený rozsah postačujúci. Časový úsek - 6 mesiacov - sme si delili na rôzny počet delení. Začali sme s piatimi deleniami, pričom frekvenciu *hedgovania* sme zvyšovali iba o malé hodnoty a až neskôr sme rozdiely vo frekvencii postupne zvyšovali a končili sme číslami 1750 a 2000. Ku koncu boli hustejšie merania zbytočné, nakoľko, uvidíme to aj z nasledujúcich grafov, namerané hodnoty boli už ustálené a menili sa len pozvoľna.

V grafe na obrázku 6 sú znázornené hodnoty opcie v závislosti od frekvencie delenia, pričom všetkých 5 meraní (3-7 možných výnosov) je zobrazených naraz. Na výpočet sme použili sústavu rovníc (4.1). Na porovnanie je dobré vidieť hneď aj výsledky použitím druhého spôsobu a to sústavy rovníc (4.2) (obrázok 7).

Z grafov je vidno, že pri použití oboch spôsobov dostávame približne rovnaké výsledky. Rozdiel je v tom, že hodnoty opcie pri použití prvého spôsobu sú menej stabilné⁷ a na spoľahlivé riešenie treba väčšiu frekvenciu delenia. Rovnakú vlastnosť pozorujeme aj v rámci použitia jedného spôsobu, keď pri párnom počte výnosov sú riešenia stabilnejšie ako pri nepárnom počte.

⁷v tomto prípade pod pojmom *stabilný* rozumieme to, že zmena hodnoty opcie pri malej zmene frekvencie delenia je malá

Jedným z hlavných cieľov bolo aj skúmanie správania sa očakávanej kvadratickej odchýlky v závislosti od frekvencie delenia. Práve toto znázorňuje obrázok 8. Rozdiely v odchýlkach pri použití prvého spôsobu oproti druhému sú len minimálne a je zbytočné uvádzať oba grafy, lebo na pohľad sa ničím nelíšia.⁸

Zaujímavejší je však pohľad iba na časť spomínaného grafu, kde sú znázornené hodnoty pre frekvencie delenia v rozsahu 100-500 (obrázok 9). Pri zvyšujúcom sa počte výnosov v jednej perióde sa znižujú rozdiely v očakávaných kvadratických odchýlkach, aj keď samozrejme tieto odchýlky rastú.

V grafe na obrázku 10 sú uvedené ešte výsledky pri použití binomického stromu. Graf je spoločný pre oba spôsoby a vidíme na ňom rovnakú vlastnosť ako na predchádzajúcich dvoch grafoch pre hodnotu opcie - druhý spôsob dáva stabilnejšie výsledky. Treba tu ešte podotknúť, že v prípade binomického stromu je výpočtová náročnosť menšia a frekvenciu delenia sme mohli zvyšovať až po hodnotu 5000.

5.2 Americká *up-and-out put* opcia

V prípade americkej opcie sme si zvolili nasledovné parametre

$$S = 4000, \quad E = 3750, \quad X = 4400, \quad r = 0.04, \quad T = 0.5, \quad \sigma = 0.2.$$

Nakoľko explicitný vzorec pre výpočet hodnoty americkej bariérovej opcie nepoznáme, nemáme teda ani porovnanie pre naše pozorovania.

V prípade americkej opcie sme postupovali rovnako ako pri európskej, a je preto zbytočné postup znova popisovať a prejdeme rovno k výsledkom. V grafoch na obrázkoch 12 a 13 sú znázornené hodnoty opcie v závislosti od frekvencie delenia, najprv použitím sústavy rovníc (4.1) a potom sústavy (4.2).

Pri očakávanej kvadratickej odchýlke sme dostali čo do charakteru rovnaké výsledky ako pri európskej opcii (obrázok 8), a preto ich tu neuvádzame.

⁸kompletné tabuľky so všetkými výsledkami sú v Prílohe

Aj pri zvyšovaní počtu možných výnosov je ich správanie totožné ako v prípade európskej opcie (obrázok 9).

V grafe na obrázku 11 sú uvedené ešte výsledky pri použití binomického stromu. Graf je spoločný pre oba spôsoby a vidíme na ňom rovnakú vlastnosť ako na predchádzajúcich grafoch pre hodnoty opcie - druhý spôsob dáva stabilnejšie výsledky.

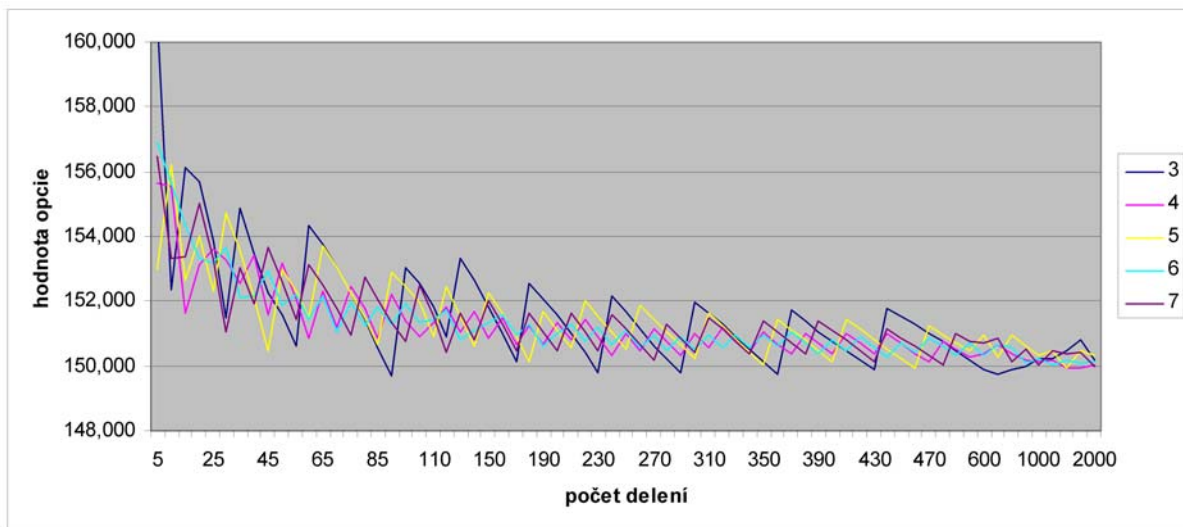
5.3 Príčiny nepresností

V prípade oboch opcií je vidno, že ani vysoká frekvencia hedgovania nám ešte nezaručila presnú hodnotu opcie. Je to spôsobené tým, že diskretný model obsahuje minimálne dva zdroje, ktoré vplývajú na spomínanú nepresnosť:

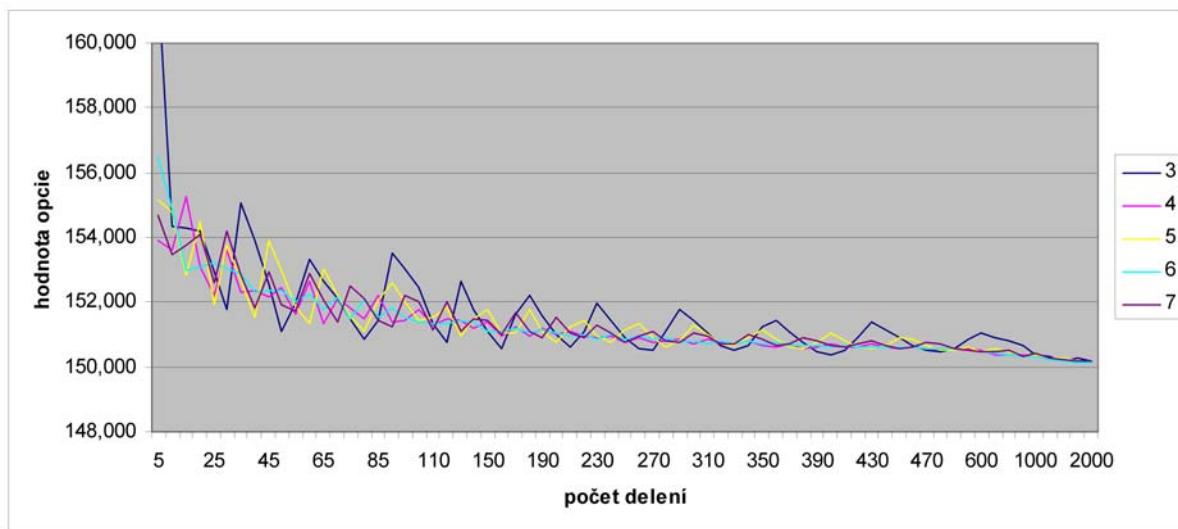
- *chyba z diskretizácie ceny akcie* - predpokladáme, že ceny akcie sa pohybujú iba po kvantách a že sa to deje v diskretnom čase. Tento spôsob však nemôže presne kopírovať reálne správanie sa akcie. Pre odstránenie chyby je nutné použiť čo najjemnejšie zmeny cien a dostatočne malý časový krok.
- *chyba pri špecifikácii opcie* - n-árny strom dokáže reprezentovať iba určité cenové hladiny, a keď sa má reálna bariéra nachádzať medzi nimi, vzniká problém, lebo v tomto strome bude bariéra prvýkrát zaregistrovaná s inou hodnotou, ako je jej reálna. V tomto prípade model nedokázal presne reprodukovať reálne podmienky a oceňuje opciu s inými vlastnosťami, čím vzniká spomínaná chyba. Aj tu treba použiť čo najmenšie časové delenie, nakoľko konvergencia k reálnej hodnote opcie je spomalená.

5.4 Obrázky

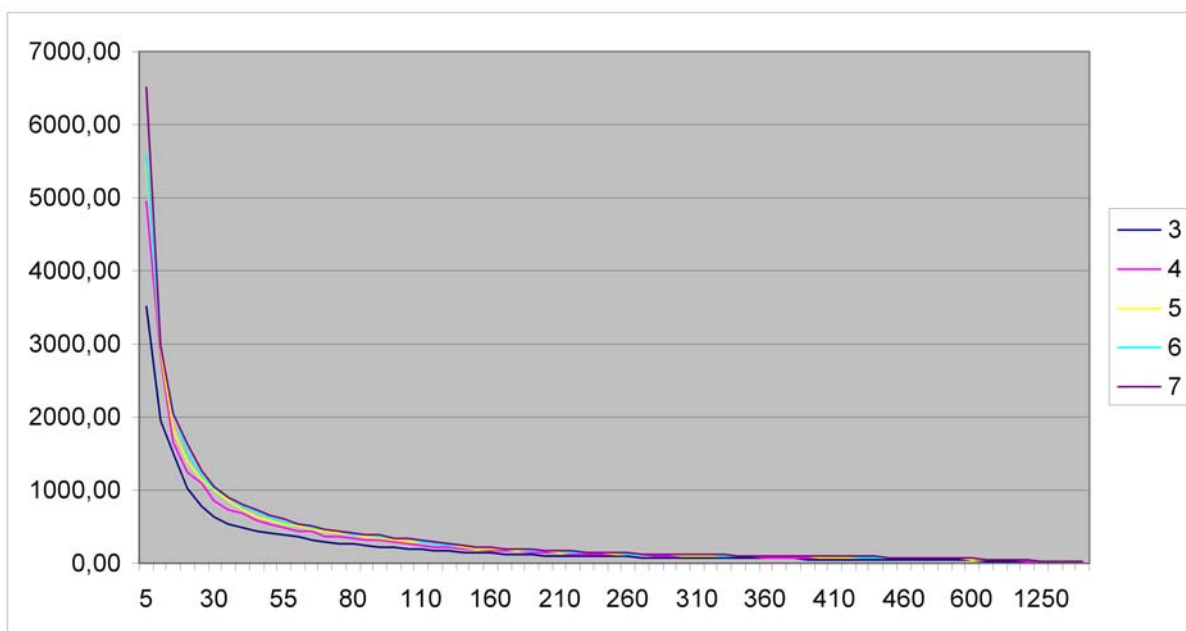
Na nasledujúcich štyroch stranách je zobrazených všetkých osem grafov, na ktoré sme sa odkazovali v tejto kapitole.



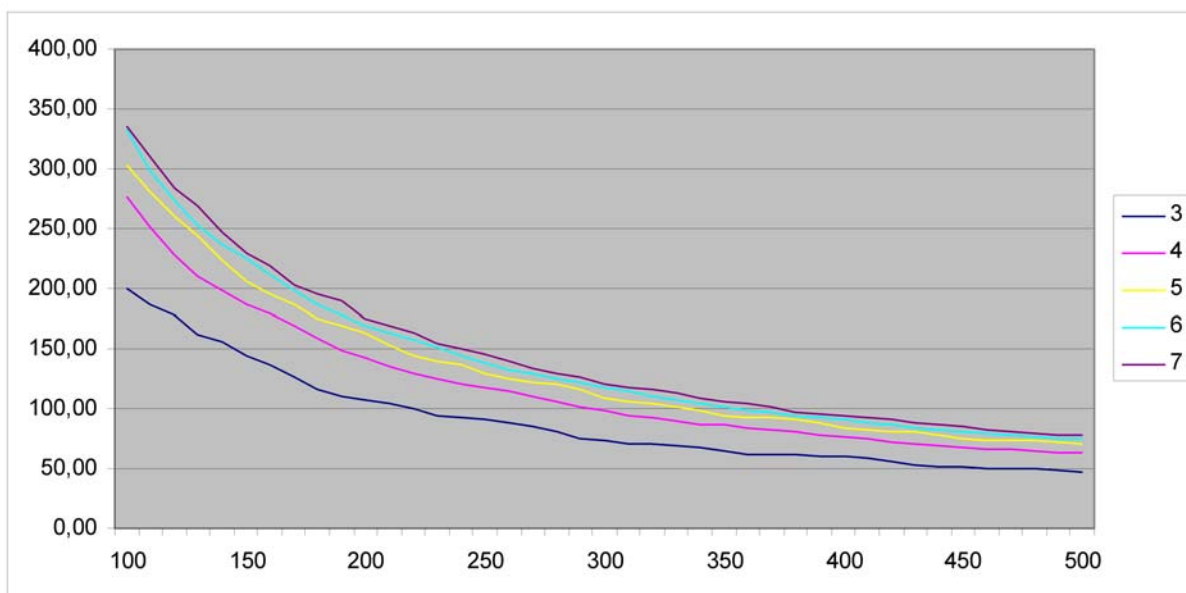
Obr. 6: Hodnoty európskej opcie pri použití sústavy rovníc (4.1), legenda vpravo označuje, koľko výnosov bolo povolených.



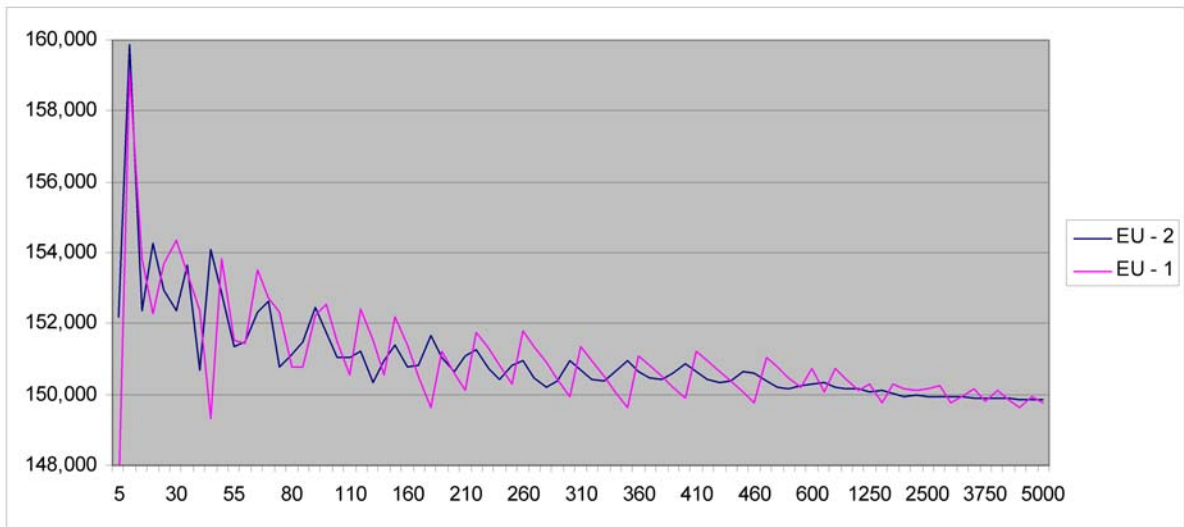
Obr. 7: Hodnoty európskej opcie pri použití sústavy rovníc (4.2), legenda vpravo označuje, koľko výnosov bolo povolených.



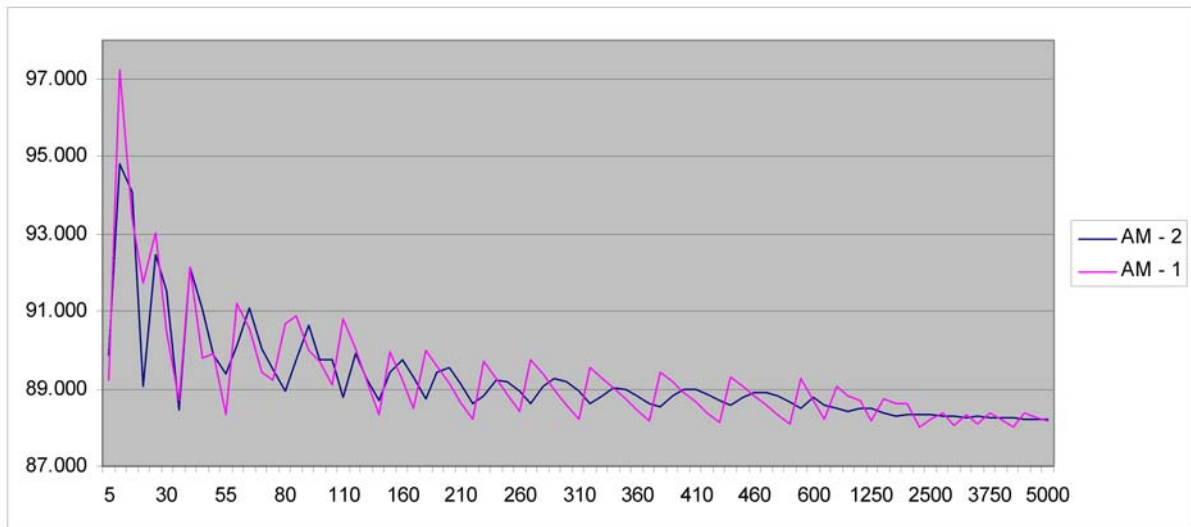
Obr. 8: Očakávaná kvadratická odchýlka (spoločný graf pre oba spôsoby).



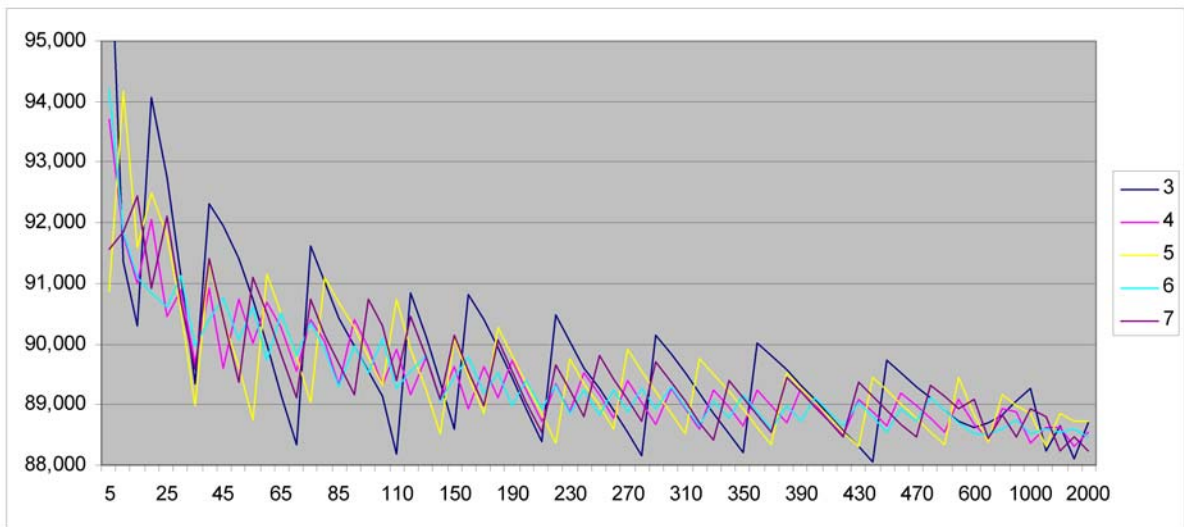
Obr. 9: Očakávaná kvadratická odchýlka pre frekvencie delenia v rozsahu 100-500 (spoločný graf pre oba spôsoby).



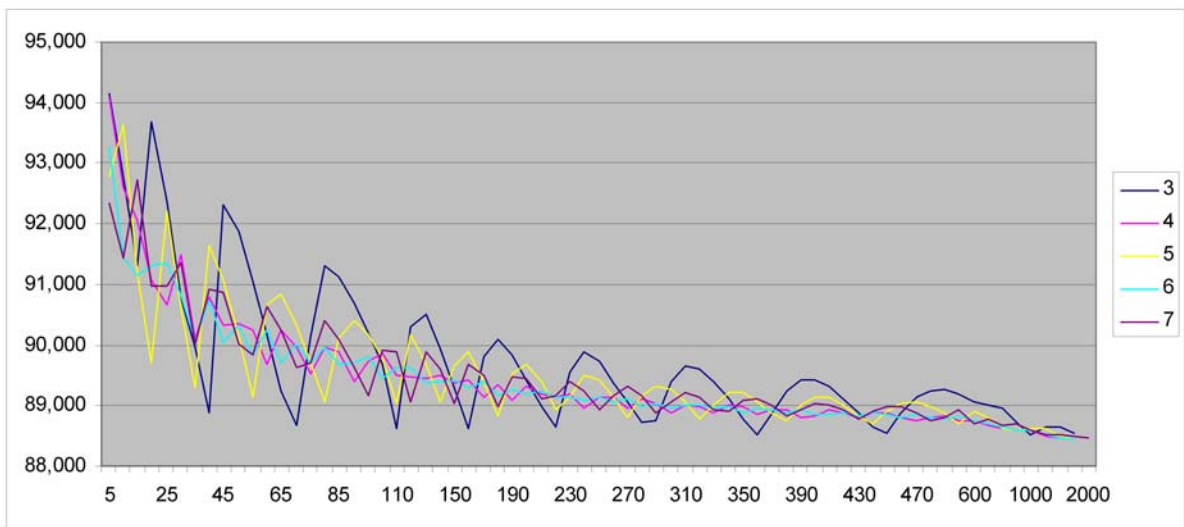
Obr. 10: Hodnoty európskej opcie v závislosti od frekvencie delenia pri použití binomickej metódy (spoločný graf pre oba spôsoby).



Obr. 11: Hodnoty americkej opcie v závislosti od frekvencie delenia pri použití binomickej metódy (spoločný graf pre oba spôsoby).



Obr. 12: Hodnoty americkej opcie pri použití sústavy rovníc (4.1), legenda vpravo označuje, koľko výnosov bolo povolených.



Obr. 13: Hodnoty americkej opcie pri použití sústavy rovníc (4.2), legenda vpravo označuje, koľko výnosov bolo povolených.

Záver

Diskrétné modely oceňovania opcií nám ponúkajú možnosť na získanie relatívne presných hodnôt nielen základných opcií, na oceňovanie ktorých poznáme vo väčšine prípadov explicitné vzorce, ale aj zložitejších a zrejme reálnejších opcií. Zakomponovať určitú podmienku do numerickej schémy býva zväčša oveľa jednoduchšie ako pri explicitnom odvodení.

V tejto práci sme si predstavili diskrétny model oceňovania bariérovej opcie na neúplnom trhu. V rámci neho sme si uviedli aj dva spôsoby na jeho zostavenie. Možnosti praktického využitia tohto modelu sme konfrontovali s binomickým modelom a tiež aj s explicitnou formulou. V prípade európskej *down-and-out call* opcie sme sa nedostali až k presnej hodnote (rozdiel bol 0.3%), čo bolo spôsobené aj veľkými výpočtovými nárokmi. Zo získaných výsledkov však možno vysloviť domnienku, že pri vyššej frekvencii hedgovania by sme dosiahli hodnoty veľmi blízke tej explicitnej. V prípade americkej *up-and-out put* opcie sme nemali k dispozícii jej presnú hodnotu, a teda nami namerané hodnoty môžeme porovnávať buď iba v rámci vlastného modelu alebo s binomickým modelom. Čo sa týka výberu spôsobu na zostavenie modelu, obidva vedú k približne rovnakým výsledkom, pri použití druhého spôsobu však dostávame stabilnejšie riešenie. Stabilnejšie riešenie dostávame aj pri povolení párneho počtu výnosov v rámci jednej periódy.

Pri pozorovaní vývoja hodnoty očakávanej kvadratickej odchýlky ceny replikačného portfólia od výplaty bariérovej opcie v čase expirácie sme dospeli k záveru, že zvyšovanie frekvencie hedgovania spomínanú odchýlku znižuje. Tu však treba pripomenúť, že so zvyšovaním frekvencie stúpajú aj transakčné náklady, a teda pri výbere optimálnej zaistovacej stratégie treba byť obozretný.

Referencie

- [1] Wilmott Paul, Howison Sam, Dewynne Jeff (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*
- [2] Černý Aleš (2002). *Derivatives without Differentiation: Optimal Hedging on Markov Chains*
- [3] Hull John (1993). *Options, Futures, and Other Derivative Securities*
- [4] Pliska Stanley R. (1997). *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*
- [5] Ševčovič Daniel (2001). *Analytické a Numerické Metódy Oceňovania Finančných Derivátov*. Skriptá - FMFI UK BA
- [6] Kou Steven G. (2001). *On Pricing of Discrete Barrier Options*
- [7] Ungvarský Cyril (2000). *Metóda Konečných Objemov a Oceňovanie Opcií*. Diplomová práca - FMFI UK BA
- [8] Levitan Shaun M. (2001). *Advanced Mathematics of Finance Honours: Lattice Methods for Barrier Options*

PRÍLOHA

- Tabuľka hodnôt európskej *down-and-out call* opcie pri rôznych frekvenciách a počte výnosov
- Tabuľka hodnôt očakávanej kvadratickej odchýlky pre európsku *down-and-out call* opciu
- Tabuľka hodnôt americkej *up-and-out put* opcie pri rôznych frekvenciách a počte výnosov
- Tabuľka hodnôt očakávanej kvadratickej odchýlky pre americkú *up-and-out put* opciu
- Tabuľka hodnôt európskej *down-and-out call* opcie a americkej *up-and-out put* opcie pri rôznych frekvenciách použitím binomickej metódy
- Zdrojový kód v jazyku C++

frekvencia	3	4	5	6	7
5	3644.416	4604.129	5985.811	5544.912	6171.900
10	2230.506	2616.091	2748.112	2886.201	2993.616
15	1369.139	1807.142	1841.085	1975.698	2163.521
20	946.949	1247.677	1484.911	1542.370	1567.631
25	745.969	1010.191	1171.842	1250.137	1255.883
30	639.164	916.162	955.962	1014.163	1082.623
35	571.782	736.607	816.957	878.783	932.988
40	523.921	644.314	728.312	801.358	805.942
45	476.378	616.790	669.986	691.563	713.918
50	413.289	518.597	608.869	624.144	650.495
55	369.266	481.873	543.140	585.603	605.361
60	327.574	455.499	495.390	528.425	554.941
65	300.895	403.462	451.183	485.668	507.691
70	280.864	393.203	421.554	469.586	471.847
75	265.776	355.285	398.828	424.224	444.530
80	254.423	334.953	381.350	402.791	413.786
85	245.931	328.616	367.916	383.943	395.346
90	239.656	296.164	340.755	358.016	380.817
95	223.990	291.802	320.417	342.135	361.230
100	214.611	274.104	303.880	326.750	335.363
110	190.574	253.932	279.523	302.438	307.574
120	174.325	233.566	253.684	272.975	288.992
130	155.047	214.579	240.926	254.739	267.062
140	145.862	196.273	228.464	237.161	248.970
150	139.494	186.059	206.065	223.441	227.912
160	135.214	174.230	194.527	210.287	217.003
170	132.503	168.650	186.103	198.644	209.157
180	119.696	160.544	180.080	186.210	195.330
190	112.482	152.610	167.714	179.309	185.900
200	106.932	141.927	161.906	170.522	178.734
210	102.719	136.346	154.977	163.265	166.944
220	99.587	128.553	143.167	157.500	162.232
230	97.333	125.018	138.367	148.802	158.725
240	88.834	122.401	134.669	144.150	148.272
250	87.155	116.983	131.883	137.549	143.349
260	85.972	115.403	124.149	134.542	139.459
270	85.204	108.724	121.295	129.413	136.440
280	82.746	105.328	117.434	127.207	128.793
290	80.310	102.609	114.320	120.995	126.658
300	72.614	97.412	111.847	117.972	123.903
310	70.654	95.523	104.570	112.987	116.471
320	69.080	91.365	102.691	110.892	113.822
330	67.840	90.073	101.225	106.839	111.681
340	66.892	89.107	100.119	105.420	109.983
350	66.196	85.864	99.057	102.087	104.467
360	65.721	84.552	92.238	100.137	103.199
370	60.474	82.690	90.294	96.081	101.337
380	60.050	78.736	88.687	94.357	99.491
390	59.777	77.335	87.379	92.946	94.164
400	58.605	76.190	86.335	89.707	92.711
410	57.417	73.009	81.243	88.699	91.524
420	56.430	72.169	80.399	85.953	90.575
430	55.623	71.511	79.744	85.257	89.840
440	50.826	68.907	79.259	84.308	85.585
450	50.104	68.451	78.051	81.150	84.186
460	49.515	68.128	76.973	80.028	83.005
470	49.046	67.405	72.129	77.307	82.021
480	48.685	64.379	71.217	76.459	81.215
490	48.421	63.475	70.460	75.769	77.181
500	48.245	62.716	69.846	73.479	76.528
600	41.259	53.428	58.200	63.321	65.110
700	37.025	45.794	52.151	54.310	56.402
800	32.190	40.946	45.152	48.324	51.558
900	29.258	37.506	41.313	44.537	45.611
1000	26.080	34.224	37.970	40.501	42.477
1250	21.634	28.239	31.170	33.701	34.223
1500	18.285	24.371	27.407	28.500	29.462
1750	15.660	21.433	23.362	25.260	25.815
2000	14.608	19.045	21.052	22.432	23.659

frekvencia	3	4	5	6	7
5	3502.409	4947.914	5468.594	5579.677	6514.204
10	1959.506	2824.818	2913.228	2954.491	2986.644
15	1507.893	1668.711	1837.766	2093.754	2059.456
20	1034.656	1243.655	1400.369	1521.607	1634.269
25	778.174	1091.490	1155.519	1202.931	1277.721
30	639.094	854.368	1007.137	1033.451	1056.696
35	544.139	736.452	849.658	895.614	910.184
40	480.391	686.015	733.090	769.983	813.377
45	436.536	575.290	643.861	699.630	735.215
50	405.711	532.404	581.345	632.108	662.529
55	380.543	487.135	535.495	568.924	599.750
60	354.911	435.883	501.868	534.799	543.317
65	328.143	431.373	464.356	489.637	504.623
70	298.548	377.415	440.929	452.461	475.168
75	275.436	361.315	408.416	437.244	442.876
80	257.589	339.624	382.565	397.563	421.307
85	242.142	313.775	355.728	381.935	400.959
90	220.868	310.178	332.324	359.294	378.665
95	209.776	284.327	316.578	339.901	352.705
100	200.666	276.973	303.652	332.444	335.067
110	187.041	250.801	281.208	299.150	310.072
120	178.307	227.579	259.687	273.225	283.420
130	162.264	211.018	243.604	252.463	269.266
140	156.325	198.380	223.851	236.535	247.340
150	144.846	186.496	206.100	224.929	229.631
160	136.284	179.508	196.128	211.910	218.575
170	125.736	168.852	187.308	197.807	203.614
180	115.557	159.352	174.723	187.454	196.150
190	110.748	149.047	169.508	177.477	188.998
200	107.089	142.355	163.748	169.771	175.530
210	104.632	135.297	153.658	163.267	168.712
220	100.562	130.108	144.612	157.089	162.819
230	93.864	125.505	139.951	151.267	154.100
240	92.189	120.959	136.091	143.837	149.379
250	90.870	118.198	130.049	138.542	146.153
260	87.613	114.180	124.311	132.933	140.171
270	84.841	109.990	122.088	128.878	133.464
280	80.317	105.368	120.302	124.565	130.068
290	74.708	101.263	115.956	121.544	126.333
300	72.813	98.377	108.959	118.007	120.897
310	71.266	94.714	106.155	115.030	117.824
320	70.115	92.378	104.069	110.752	115.930
330	69.220	90.173	101.822	107.663	113.338
340	67.697	87.424	98.266	104.175	108.568
350	64.467	86.031	94.378	101.766	105.848
360	62.105	84.328	93.210	98.997	103.775
370	61.544	82.306	92.266	96.916	101.144
380	61.141	80.762	91.001	94.805	97.546
390	60.947	78.388	87.926	92.893	95.586
400	59.758	75.835	84.122	91.361	94.393
410	58.194	74.307	82.658	88.663	92.809
420	55.701	72.553	81.491	86.731	90.467
430	52.671	70.553	80.183	84.545	87.786
440	51.709	69.395	78.296	82.761	86.457
450	51.012	68.173	75.619	81.137	84.976
460	50.481	66.622	74.073	79.371	83.027
470	50.069	65.608	73.510	78.177	80.614
480	49.582	64.775	72.926	76.751	79.332
490	48.747	63.640	72.071	75.526	78.530
500	47.236	62.631	70.612	74.550	77.485
600	39.434	52.650	59.564	62.948	65.771
700	34.282	46.380	51.444	54.866	57.184
800	30.814	41.150	46.180	48.865	50.501
900	27.907	37.027	41.865	44.399	46.160
1000	26.502	33.943	38.060	40.212	41.831
1250	21.844	28.205	31.556	33.356	34.722
1500	18.735	24.262	26.881	28.488	29.877
1750	16.195	21.309	23.910	25.087	26.178
2000	14.667	19.004	21.426	22.500	23.347

(a) pri použití sústavy (4.1)

(b) pri použití sústavy (4.2)

Tab. 3: Očakávaná kvadratická odchýlka pri európskej *down-and-out call* opcii.

frekvencia	3	4	5	6	7
5	97.325	93.712	90.855	94.190	91.562
10	91.366	91.807	94.164	91.859	91.860
15	90.292	90.996	91.583	91.103	92.434
20	94.059	92.054	92.490	90.853	90.906
25	92.755	90.462	91.806	90.602	92.098
30	91.103	90.900	90.518	91.118	90.697
35	89.341	89.686	88.981	89.970	89.588
40	92.318	90.926	91.353	90.405	91.403
45	91.958	89.597	90.400	90.773	90.433
50	91.415	90.738	89.628	90.073	89.371
55	90.748	90.012	88.751	90.602	91.112
60	89.988	90.685	91.161	89.735	90.511
65	89.173	90.261	90.494	90.500	89.838
70	88.323	89.547	89.780	89.813	89.112
75	91.604	90.414	89.038	90.363	90.744
80	91.025	90.040	91.096	89.907	90.142
85	90.428	89.325	90.697	89.282	89.668
90	89.968	90.404	90.261	89.964	89.163
95	89.561	89.950	89.795	89.521	90.735
100	89.124	89.324	89.307	90.091	90.308
110	88.187	89.922	90.738	89.277	89.398
120	90.844	89.172	89.916	89.560	90.444
130	90.127	89.795	89.244	89.797	89.791
140	89.372	89.056	88.525	89.050	89.084
150	88.593	89.634	90.101	89.440	90.142
160	90.816	88.942	89.483	89.778	89.543
170	90.390	89.625	88.842	89.195	88.989
180	89.929	89.112	90.263	89.524	90.064
190	89.438	89.740	89.818	88.973	89.562
200	88.924	89.246	89.349	89.385	89.041
210	88.395	88.736	88.861	88.919	88.544
220	90.471	89.354	88.358	89.312	89.655
230	90.048	88.876	89.755	88.858	89.239
240	89.613	89.522	89.352	89.234	88.808
250	89.263	89.154	88.975	88.823	89.804
260	88.905	88.772	88.587	89.242	89.420
270	88.535	89.398	89.899	88.876	89.074
280	88.155	89.036	89.560	89.274	88.717
290	90.140	88.666	89.211	88.920	89.702
300	89.831	89.268	88.855	89.298	89.378
310	89.514	88.920	88.505	88.957	89.047
320	89.190	88.598	89.766	88.647	88.709
330	88.861	89.227	89.493	89.065	88.402
340	88.527	88.944	89.211	88.769	89.393
350	88.210	88.653	88.923	89.166	89.115
360	90.026	89.251	88.630	88.880	88.830
370	89.798	88.976	88.332	88.590	88.541
380	89.564	88.697	89.528	88.981	89.458
390	89.323	89.265	89.266	88.719	89.202
400	89.078	89.000	89.031	89.120	88.962
410	88.828	88.734	88.791	88.879	88.717
420	88.573	88.498	88.548	88.634	88.468
430	88.316	89.089	88.300	89.026	89.367
440	88.056	88.866	89.453	88.790	89.140
450	89.743	88.640	89.233	88.550	88.908
460	89.522	89.199	89.009	88.933	88.674
470	89.299	88.985	88.782	88.714	88.457
480	89.106	88.767	88.552	89.100	89.329
490	88.913	88.547	88.344	88.899	89.131
500	88.717	89.090	89.441	88.695	88.931
600	88.615	88.676	88.825	88.519	89.080
700	88.702	88.437	88.394	88.505	88.438
800	88.828	88.928	89.170	88.593	88.838
900	89.047	88.877	88.971	88.744	88.454
1000	89.271	88.351	88.840	88.514	88.941
1250	88.229	88.625	88.307	88.605	88.794
1500	88.653	88.611	88.854	88.531	88.223
1750	88.101	88.305	88.726	88.600	88.475
2000	88.707	88.536	88.723	88.454	88.223

(a) pri použití sústavy (4.1)

frekvencia	3	4	5	6	7
5	94.151	94.083	92.780	93.275	92.338
10	92.767	92.587	93.624	91.444	91.423
15	91.297	92.062	91.169	91.151	92.729
20	93.672	91.079	89.709	91.302	90.964
25	92.359	90.669	92.198	91.351	90.976
30	90.752	91.493	90.614	90.804	91.348
35	89.969	90.105	89.301	90.079	90.004
40	88.883	90.784	91.647	90.732	90.917
45	92.315	90.328	91.069	90.036	90.861
50	91.881	90.343	90.140	90.333	90.018
55	91.051	90.243	89.135	89.837	89.824
60	90.157	89.687	90.658	90.237	90.637
65	89.243	90.256	90.847	89.704	90.238
70	88.670	89.966	90.313	90.019	89.635
75	90.152	89.525	89.704	89.696	89.701
80	91.300	89.969	89.057	89.971	90.397
85	91.136	89.891	90.119	89.686	90.092
90	90.687	89.405	90.395	89.698	89.626
95	90.202	89.726	90.176	89.797	89.175
100	89.690	89.863	89.776	89.449	89.909
110	88.620	89.504	89.028	89.620	89.894
120	90.290	89.473	90.179	89.628	89.065
130	90.506	89.434	89.682	89.372	89.895
140	89.936	89.501	89.056	89.406	89.591
150	89.290	89.372	89.666	89.414	89.040
160	88.609	89.414	89.875	89.281	89.679
170	89.803	89.137	89.396	89.392	89.492
180	90.089	89.336	88.824	89.169	88.992
190	89.842	89.089	89.519	89.271	89.472
200	89.421	89.329	89.687	89.183	89.451
210	88.970	89.195	89.385	89.232	89.119
220	88.636	89.130	88.920	89.140	89.174
230	89.561	89.184	89.129	89.140	89.406
240	89.880	88.958	89.490	89.076	89.236
250	89.729	89.137	89.424	89.135	88.936
260	89.370	89.130	89.139	89.049	89.173
270	89.047	88.960	88.792	89.107	89.306
280	88.713	89.108	89.159	88.969	89.164
290	88.755	89.037	89.330	89.045	88.877
300	89.388	88.891	89.273	88.968	89.062
310	89.642	89.008	89.071	89.018	89.214
320	89.600	88.983	88.788	89.001	89.143
330	89.394	88.874	89.006	88.958	88.938
340	89.104	89.000	89.225	88.979	88.896
350	88.787	88.984	89.217	88.878	89.088
360	88.510	88.846	89.070	88.947	89.111
370	88.844	88.927	88.876	88.929	89.001
380	89.252	88.936	88.751	88.891	88.817
390	89.432	88.812	89.016	88.926	88.935
400	89.427	88.832	89.147	88.855	89.042
410	89.308	88.921	89.129	88.865	89.019
420	89.117	88.877	89.008	88.875	88.919
430	88.885	88.791	88.822	88.816	88.776
440	88.639	88.868	88.701	88.872	88.899
450	88.555	88.884	88.904	88.856	88.990
460	88.871	88.798	89.041	88.808	88.976
470	89.132	88.758	89.062	88.840	88.877
480	89.252	88.806	88.994	88.809	88.754
490	89.254	88.816	88.866	88.772	88.811
500	89.182	88.749	88.701	88.814	88.920
600	89.048	88.746	88.910	88.752	88.701
700	89.007	88.683	88.789	88.702	88.771
800	88.947	88.629	88.616	88.647	88.671
900	88.714	88.606	88.585	88.602	88.706
1000	88.506	88.590	88.610	88.583	88.588
1250	88.657	88.494	88.623	88.515	88.522
1500	88.647	88.466	88.495	88.472	88.525
1750	88.536	88.444	88.445	88.451	88.484
2000	88.474	88.413	88.438	88.418	88.469

(b) pri použití sústavy (4.2)

Tab. 4: Hodnoty americkej *up-and-out put* opcie pri rôznych frekvenciách a počte výnosov.

frekvencia	3	4	5	6	7
5	2801.646	3498.922	4592.943	4219.840	4463.190
10	1745.596	1927.106	2082.726	2187.817	2328.619
15	996.669	1410.414	1443.098	1500.546	1615.967
20	721.959	981.211	1155.150	1161.529	1190.879
25	580.380	772.264	880.693	970.371	979.015
30	504.044	677.724	729.959	791.543	838.003
35	459.271	583.418	640.693	674.151	707.594
40	410.216	493.268	572.209	600.781	614.868
45	348.455	460.259	516.925	544.197	555.525
50	305.316	407.559	458.102	480.371	514.612
55	274.645	366.220	416.426	439.757	460.702
60	252.634	351.157	375.472	415.511	419.947
65	236.680	313.343	350.830	372.756	389.464
70	225.093	294.397	332.310	351.092	366.479
75	207.603	281.362	318.314	331.840	341.229
80	199.792	255.635	292.678	306.726	326.407
85	193.832	249.471	273.091	294.271	305.573
90	182.464	230.176	257.337	277.288	288.798
95	170.561	218.152	244.630	261.375	268.891
100	160.901	216.024	234.366	251.447	257.088
110	146.664	193.133	212.513	228.578	239.601
120	129.269	176.609	201.292	209.291	217.925
130	121.788	161.356	184.764	194.905	201.501
140	116.761	152.807	172.837	185.416	189.728
150	113.491	143.504	157.707	170.423	176.145
160	102.236	139.031	150.774	158.620	167.856
170	95.128	127.501	145.794	151.454	158.570
180	89.689	120.590	133.961	143.661	147.013
190	85.560	112.678	126.993	138.851	141.204
200	82.467	108.422	121.576	129.982	136.810
210	80.198	105.215	117.410	124.690	132.010
220	73.989	100.289	114.249	118.324	122.711
230	72.480	98.375	107.201	114.953	118.385
240	71.414	92.169	103.900	110.280	114.978
250	68.224	88.643	100.025	107.251	108.764
260	65.586	85.799	96.893	101.703	106.316
270	63.455	81.430	90.524	98.647	102.724
280	61.754	79.493	88.266	94.374	99.787
290	56.523	77.970	86.468	92.283	94.206
300	55.237	74.850	85.061	88.955	92.082
310	54.224	73.859	83.575	87.557	90.369
320	53.445	72.165	77.977	85.266	89.013
330	52.867	68.429	75.918	81.580	86.767
340	52.461	66.716	74.200	79.791	81.879
350	51.676	65.290	72.778	76.806	80.161
360	47.221	62.459	71.618	75.519	78.736
370	45.949	61.421	70.686	74.474	77.567
380	44.869	60.578	66.909	72.187	74.000
390	43.961	58.393	66.106	70.935	72.903
400	43.204	57.807	64.635	68.192	71.397
410	42.583	57.335	63.375	66.937	70.114
420	42.083	56.113	62.304	65.875	69.030
430	41.689	53.612	61.403	63.699	65.724
440	41.392	52.654	57.951	62.910	64.875
450	38.448	51.839	57.230	62.260	64.171
460	38.206	49.829	56.634	60.507	63.597
470	38.035	49.205	56.152	59.722	62.604
480	37.293	48.685	55.771	57.640	59.528
490	36.606	48.261	54.875	56.775	58.671
500	36.009	46.674	51.714	56.030	57.935
600	30.876	39.856	44.701	47.723	48.801
700	26.367	34.940	39.662	41.528	43.521
800	23.536	30.507	33.999	36.690	37.957
900	20.771	27.516	30.671	32.817	34.697
1000	18.771	25.518	28.043	30.253	30.847
1250	16.237	20.852	23.744	24.743	25.475
1500	13.517	17.652	19.577	21.090	22.375
1750	12.284	15.711	17.297	18.349	19.290
2000	10.529	13.819	15.356	16.516	17.527

frekvencia	3	4	5	6	7
5	3059.500	3397.633	4239.969	4401.770	4311.409
10	1561.455	1837.190	2099.507	2286.753	2439.791
15	935.407	1296.596	1527.234	1531.982	1568.479
20	729.828	1050.300	1081.364	1147.504	1227.262
25	625.477	793.008	869.947	924.538	984.814
30	548.185	647.426	757.431	792.932	808.862
35	442.385	579.442	656.064	703.664	711.669
40	378.147	515.490	556.963	596.206	632.731
45	328.891	441.869	494.612	531.584	552.191
50	299.120	408.930	453.538	487.009	499.473
55	279.537	378.290	426.070	448.336	463.598
60	266.577	337.243	388.900	402.341	429.912
65	257.268	318.713	352.087	378.314	392.067
70	233.072	296.764	326.062	355.854	363.949
75	211.411	273.937	306.659	327.070	342.003
80	191.750	265.001	292.237	308.323	319.797
85	179.678	243.418	276.480	296.027	306.548
90	170.512	231.681	264.703	275.312	290.007
95	163.515	225.881	248.019	262.198	274.644
100	158.237	206.871	234.691	253.041	258.406
110	151.476	192.917	215.647	229.191	237.032
120	136.356	181.994	196.155	209.026	222.690
130	122.332	164.787	186.824	195.445	200.995
140	113.379	151.228	172.565	184.397	188.440
150	107.286	142.216	158.815	170.844	180.291
160	103.318	134.523	148.963	159.891	166.458
170	96.890	130.262	143.635	151.006	156.847
180	93.384	121.540	138.186	145.235	150.386
190	87.244	114.829	127.806	137.285	142.317
200	82.542	108.156	120.605	130.164	135.454
210	79.017	103.697	116.347	123.753	129.650
220	76.404	100.286	113.314	119.277	123.941
230	71.557	96.928	109.463	115.204	118.298
240	68.645	93.792	102.786	110.609	115.220
250	67.408	88.889	98.557	105.488	110.941
260	66.576	85.032	95.643	101.793	105.848
270	63.783	82.443	93.418	98.191	101.573
280	61.538	79.414	89.759	95.829	99.011
290	59.277	77.351	86.976	92.939	97.376
300	55.828	76.036	83.970	89.569	93.280
310	53.619	73.745	81.563	86.448	89.490
320	52.421	70.924	79.671	83.848	87.024
330	51.728	68.824	76.905	81.824	85.380
340	51.270	66.405	74.237	79.823	83.680
350	50.987	64.586	72.645	78.323	80.794
360	49.878	63.381	71.741	75.665	78.193
370	47.681	61.907	69.965	73.499	76.389
380	45.307	60.712	68.327	71.758	75.088
390	43.672	59.891	65.770	69.973	73.203
400	42.635	58.072	63.777	68.710	71.363
410	41.953	56.204	62.481	67.483	69.798
420	41.473	54.841	61.662	65.901	68.269
430	41.111	53.799	61.132	64.362	67.101
440	40.854	52.521	60.259	62.709	65.392
450	40.523	51.481	58.183	61.379	63.792
460	39.469	50.805	56.385	60.343	62.668
470	37.875	50.195	55.104	59.205	61.953
480	36.664	49.423	54.223	58.331	60.874
490	35.810	48.141	53.610	57.440	59.505
500	35.191	47.161	53.173	56.037	57.998
600	30.264	39.939	44.654	47.322	49.697
700	26.260	34.936	39.039	41.215	43.051
800	23.069	31.010	34.881	36.646	38.252
900	21.287	27.739	31.384	33.028	34.258
1000	19.632	25.231	28.445	30.076	31.382
1250	15.944	20.938	23.270	24.809	25.893
1500	13.535	17.805	20.008	21.184	22.084
1750	11.953	15.662	17.651	18.516	19.364
2000	10.750	13.927	15.666	16.539	17.233

(a) pri použití sústavy (4.1)

(b) pri použití sústavy (4.2)

Tab. 5: Očakávaná kvadratická odchýlka pri americkej *up-and-out put* opcii.

frekvencia	EU-1	EU-2	AM-1	AM-2
5	147.090	152.185	89.234	89.882
10	159.091	159.856	97.228	94.794
15	153.821	152.347	93.408	94.095
20	152.292	154.286	91.723	89.071
25	153.673	152.924	93.025	92.448
30	154.360	152.371	90.495	91.525
35	153.440	153.666	88.694	88.442
40	152.384	150.710	92.127	92.146
45	149.344	154.088	89.785	91.028
50	153.808	152.860	89.929	89.855
55	151.539	151.366	88.352	89.373
60	151.438	151.470	91.219	90.133
65	153.504	152.312	90.559	91.081
70	152.724	152.652	89.436	90.040
75	152.306	150.784	89.206	89.525
80	150.795	151.133	90.700	88.950
85	150.792	151.493	90.875	89.765
90	152.222	152.473	89.982	90.635
95	152.552	151.739	89.717	89.755
100	151.500	151.041	89.123	89.763
110	150.547	151.051	90.789	88.785
120	152.401	151.228	90.025	89.929
130	151.528	150.342	89.205	89.279
140	150.571	150.945	88.351	88.692
150	152.206	151.416	89.940	89.442
160	151.385	150.759	89.221	89.744
170	150.529	150.822	88.492	89.319
180	149.648	151.668	89.981	88.739
190	151.241	151.022	89.571	89.420
200	150.611	150.645	89.135	89.532
210	150.110	151.084	88.673	89.161
220	151.742	151.272	88.195	88.631
230	151.298	150.714	89.702	88.816
240	150.820	150.445	89.285	89.224
250	150.316	150.808	88.856	89.188
260	151.800	150.974	88.419	88.929
270	151.359	150.481	89.757	88.609
280	150.901	150.190	89.374	89.050
290	150.427	150.396	88.986	89.245
300	149.942	150.966	88.593	89.166
310	151.359	150.679	88.215	88.928
320	150.935	150.429	89.542	88.606
330	150.502	150.401	89.282	88.827
340	150.063	150.668	89.015	89.017
350	149.637	150.970	88.740	88.988
360	151.092	150.665	88.459	88.810
370	150.809	150.458	88.171	88.624
380	150.513	150.416	89.430	88.525
390	150.205	150.620	89.176	88.818
400	149.887	150.889	88.917	88.979
410	151.234	150.629	88.654	88.970
420	150.953	150.418	88.388	88.870
430	150.663	150.334	88.118	88.696
440	150.367	150.399	89.294	88.581
450	150.064	150.636	89.053	88.784
460	149.756	150.599	88.810	88.900
470	151.038	150.373	88.565	88.906
480	150.764	150.222	88.319	88.820
490	150.485	150.173	88.111	88.674
500	150.201	150.269	89.251	88.492

(a) delenia v rozsahu 5-500

frekvencia	EU-1	EU-2	AM-1	AM-2
600	150.722	150.300	88.700	88.784
700	150.064	150.358	88.195	88.597
800	150.716	150.201	89.061	88.490
900	150.430	150.152	88.823	88.421
1000	150.133	150.176	88.699	88.479
1250	150.311	150.075	88.154	88.497
1500	149.769	150.101	88.730	88.364
1750	150.297	150.021	88.625	88.310
2000	150.177	149.951	88.610	88.321
2250	150.111	149.978	88.027	88.352
2500	150.156	149.924	88.207	88.336
2750	150.248	149.942	88.392	88.277
3000	149.744	149.951	88.061	88.309
3250	149.947	149.926	88.316	88.254
3500	150.175	149.903	88.078	88.286
3750	149.829	149.903	88.372	88.236
4000	150.118	149.882	88.197	88.257
4250	149.838	149.899	88.030	88.250
4500	149.626	149.853	88.377	88.227
4750	149.953	149.870	88.258	88.217
5000	149.771	149.875	88.154	88.228

(b) delenia v rozsahu 600-5000

Tab. 6: Hodnoty európskej *down-and-out call* opcie a americkej *up-and-out put* opcie pri rôznych frekvenciách použitím binomickej metódy.

Zdrojový kód programu na výpočet hodnoty európskej *down-and-out call* opcie (časový úsek sme rozdelili na 500 dielov a povolených je 5 výnosov v jednej perióde)

```

#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>

const MAXMulti=7;
const MAX=2001;
typedef double STROM[MAX+1][1+MAX*(MAXMulti-1)];
STROM s,h,error;
double Kt [MAX+1],q[MAXMulti],TotalError,yield[MAXMulti],dt,rNEW;
double S=4000,E=4250,X=3600,delta=0.2,r=0.04,T=0.5;
int pocet=500,multi=5,i,j,k;

double BpayoffCALL(double w);
double BpayoffPUT(double w);
double MoveBack();
RNprob();
priceS();
processH();
optimKt();
double CountError(int I,int J);
double ERROR();
int fc(int x);

main()
{ RNprob();
  priceS();
  processH();
  optimKt();
  for(i=0;i<pocet;i++)
    for(j=0;j<=i*(multi-1);j++)
      error[i][j]=CountError(i,j);
  ERROR();
}

double BpayoffCALL(double w)
{ if(w<X) return 0;
  if(w>E) return(w-E);
  else return 0;
}

double BpayoffPUT(double w)
{ if(w<X) return 0;
  if(w<E) return(E-w);
  else return 0;
}

double MoveBack()
{ double sum=0;
  for(k=0;k<multi;k++)
    sum+=q[k]*h[i+1][j+k];
  return(sum/rNEW);
}

```

```

RNprob()
{ double u,d,A,p;
  dt=double(T)/pocet;
  rNEW=pow(1+r,dt);
  dt=dt/(multi-1);
  d=exp(r*dt)*(1-sqrt(exp(pow(delta,2)*dt)-1));
  u=exp(r*dt)*(1+sqrt(exp(pow(delta,2)*dt)-1));
  for(i=0;i<multi;i++)
  { q[i]=pow(0.5,multi-1)*fc(multi-1)/(fc(multi-1-i)*fc(i));
    yield[i]=pow(d,multi-1-i)*pow(u,i);
  }
  /* A=0.5*(expl(-r*dt)+expl((r+pow(delta,2)*dt)));
  d=A-sqrt(pow(A,2)-1);
  u=A+sqrt(pow(A,2)-1);
  p=(expl(r*dt)-d)/(u-d);
  for(i=0;i<multi;i++)
  { q[i]=pow(1-p,multi-1-i)*pow(p,i)*fc(multi-1)/(fc(multi-1-i)*fc(i));
    yield[i]=pow(d,multi-1-i)*pow(u,i);
  }
  */
}

priceS()
{ s[0][0]=S;
  for(i=0;i<pocet;i++)
  { for(j=(multi-1)*i;j>0;j-)
    s[i+1][j+multi-1]=yield[multi-1]*s[i][j];
    for(j=multi-1;j>=0;j-)
    s[i+1][j]=yield[j]*s[i][0];
  }
}

processH()
{ for(j=0;j<1+pocet*(multi-1);j++)
  h[pocet][j]=BpayoffCALL(s[pocet][j]);
  // h[pocet][j]=BpayoffPUT(s[pocet][j]);
  for(i=pocet-1;i>=0;i-)
  for(j=0;j<=i*(multi-1);j++)
  if(s[i][j]>X) h[i][j]=MoveBack();
  // if(s[i][j]<X) h[i][j]=max(BpayoffPUT(s[i][j]),MoveBack());
  else
  h[i][j]=0;
}

optimKt()
{ Kt[pocet]=1;
  for(i=pocet-1;i>0;i-)
  Kt[i]=pow(rNEW,2)*Kt[i+1];
}

```

```

double CountError(int I,int J)
{ int i;
  double InvA[MAXMulti][2],A[MAXMulti][2],b[MAXMulti],det,ERR=0;
  double pomV[2]={0,0},x[2],pomM[2][2]={0,0,0,0};
  for(i=0;i<multi;i++)
  { A[i][0]=rNEW*sqrt(q[i]);
    A[i][1]=s[I+1][J+i]*sqrt(q[i]);
    b[i]=h[I+1][J+i]*sqrt(q[i]);
  }
  for(i=0;i<multi;i++)
  { pomM[0][0]+=pow(A[i][0],2);
    pomM[1][1]+=pow(A[i][1],2);
    pomM[0][1]+=A[i][0]*A[i][1];
    pomV[0]+=A[i][0]*b[i];
    pomV[1]+=A[i][1]*b[i];
  }
  pomM[1][0]=pomM[0][1];
  det=pomM[0][0]*pomM[1][1]-pomM[0][1]*pomM[1][0];
  InvA[0][0]=pomM[1][1]/det;
  InvA[1][1]=pomM[0][0]/det;
  InvA[0][1]=-1*pomM[0][1]/det;
  InvA[1][0]=-1*pomM[1][0]/det;
  x[0]=InvA[0][0]*pomV[0]+InvA[0][1]*pomV[1];
  x[1]=InvA[1][0]*pomV[0]+InvA[1][1]*pomV[1];
  for(i=0;i<multi;i++)
    ERR+=pow(A[i][0]*x[0]+A[i][1]*x[1]-b[i],2);
  return(ERR);
}

double ERROR()
{ double pom;
  int w;
  TotalError+=Kt[1]*error[0][0];
  for(k=1;k<pocet;k++)
  { for(i=k-1;i>=0;i-)
    for(j=0;j<=i*(multi-1);j++)
    { pom=0;
      for(w=0;w<multi;w++)
        pom+=error[i+1][j+w]*q[w];
      error[i][j]=pom;
    }
    TotalError+=Kt[k+1]*error[0][0];
  }
  return(TotalError);
}

int fc(int x)
{ int i,mult=1;
  for(i=2;i<=x;i++)
    mult*=i;
  return(mult);
}

```