Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzity Komenského
v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika

Teória Optimálneho Zdaňovania Príjmu.

Diplomová práca

Diplomant: Barbora Uherčíková
Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.
Bratislava 2003

Čestne prehlasujem, že túto prácu som vypracovala samostatne a uviedla som všetku použitú literatúru.

Barbora Uherčíková

Touto cestou by som chcela poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce, prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc., za pomoc a poskytovanie cenných rád počas vypracovávania tejto práce.

Obsah.

1. Úvod.

Už oddávna vrchnosť od obyvateľstva vyberala časť z ich nadobudnutého majetku a príjmu v podobe dane za rôznymi účelmi. Jednak chcela vybratou daňou kryť svoje výdavky, na druhej strane sa vyberala daň kvôli redistribúcii a podpore sociálne a ekonomicky slabších jedincov. Postupom času sa začala rozvíjať teória zdaňovania, v ktorej je do značnej miery venovaná pozornosť sociálnemu blahu.

Dôležitou súčasťou teórie zdaňovania príjmu je funkcia úžitku, u, ktorá závisí od príjmu, resp. neskôr od spotreby a úsilia jednotlivca. Keď chceme určiť daň, mali by sme teda túto funkciu poznať.

Možnosťou merania hraničného úžitku z príjmu skúmaním rozpočtu a správania trhu sa už zaoberali mnohí. Úžitok ako taký a teda aj funkcia úžitku sú však v postate len niečo imaginárne, čo sa nedá zistiť, resp. odmerať tak jednoducho, ako výška, alebo váha človeka a preto na zisťovanie funkcie úžitku neexistuje žiaden univerzálny postup. Jednou z možností, ako sa priblížiť k tejto funkcii, je, že jednotlivci budú odpovedať na hypotetické otázky ohľadom ich preferencií, avšak s veľkou pravdepodobnosťou môže dôjsť k nedorozumeniam a taktiež nie je isté, či to, čo si človek myslí, že by urobil, sa bude zhodovať s tým, čo človek za daných podmienok naozaj urobí. O funkcii u a jej vlastnostiach však môžeme aspoň vysloviť niekoľko praktických predpokladov.

Ak teda budeme predpokladať, že funkciu úžitku u už poznáme, môžeme pristúpiť k optimálnemu zdaňovaniu príjmu. Najvýraznejšími osobnosťami, ktoré sa v minulosti zaoberali výpočtom optimálnej dane z príjmu, boli okrem iných F.Y.Edgeworth, W.Vickrey a J.A.Mirrlees. Ich prístupom sa budeme venovať podrobnejšie v nasledujúcich kapitolách.

Mojím prvým cieľom bude matematicky sformulovať Edgeworthov článok z roku 1897, ktorý je napísaný skôr ako filozofická úvaha. Ďalším cieľom je preštudovať a porovnať teórie Vickreyho a Mirrleesa, no a napokon by som chcela ilustrovať Mirrleesov spôsob výpočtu optimálnej dane na niekoľkých príkladoch.

2. Edgeworthov prístup.

Edgeworthov prístup je založený na sociálnej spravodlivosti dane. Ťažiskom je preňho strata na úžitku, spôsobená zdanením

$$u(x) - u(x - t(x)),$$

kde x je príjem, $t(x)$ je daň z príjmu x a $u(.)$ je funkcia úžitku, o ktorej predpokladáme, že

U. u je spojitá, rastúca a konkávna funkcia.

Funkcia dane spĺňa tieto vlastnosti:

T1: $t(x)$ je spojitá, neklesajúca

T2: $t(x)$ je po častiach diferencovateľná

T3: $t(x) < x$ pre všetky $x > 0$

T4: $x - t(x)$ je neklesajúca funkcia, čo je splnené, keď $1 - t'(x) \geq 0 \Leftrightarrow t'(x) \leq 1$ pre $\forall x$, pre ktoré $t'(x)$ existuje.

Ideálne by bolo, keby sme každého jedinca vedeli rozlíšiť podľa jeho funkcie úžitku. To však v praxi neprichádza do úvahy a aj keby toto individuálne rozlíšenie bolo možné, stálo by na zlých základoch, pretože by vyžadovalo veľmi jemné porovnávania úžitku od človeka k človeku. Prijateľnejšie je preto uvažovať, že $u(x)$ je funkcia úžitku pre "reprezentatívneho" člena spoločnosti.

Edgeworth sa zaoberá rozdelením fiškálneho bremena medzi daňovníkov, pričom vláda sa snaží maximalizovať úžitok jednotlivcov za podmienky, že od daňovníkov vyberie určitý, vopred stanovený objem dane. Obeť, ktorú cíti daňovník, je dominantným faktorom pri rozdeľovaní tohto fiškálneho bremena. Edgeworth rozlišuje 3 druhy obete, a to minimálnu, konštantnú a proporčnú.

2.1 Minimálna obeť.

Pozrime sa bližšie na prvý prípad. Nech $F(x)$ označuje podiel počtu ľudí s príjmom menším, ako x, na celé obyvateľstvo. Potom $F(x) \in \langle 0, 1 \rangle$ a zároveň $F(x)$ je rastúca funkcia s limitou rovnou jednej pre $x \to \infty$. Spĺňa teda vlastnosti distribučnej funkcie. $F(.)$ teda bude predstavovať distribučnú funkciu rozdelenia príjmu. Ak navyše budeme predpokladať jej diferencovateľnosť, označíme $F'(x) = f(x)$, čo je vlastne hustota rozdelenia príjmu.

Celková daň, ktorú vyberie štát, je $\int_0^\infty f(x)t(x)dx$. Toto množstvo musí dosiahnuť istú úroveň, z čoho dostaneme ohraničenie

$$\int_0^\infty f(x)t(x)dx \geq A. \tag{1}$$

Celkovú stratu na úžitku chceme minimalizovať, teda

$$\int_0^\infty (u(x) - u(x - t(x)))f(x)dx \to \min .$$

To znamená, že dane by mali byť rozdelené tak, aby sa minimalizovala celková strata na úžitku, zosumovaná cez všetkých jednotlivcov. Dostávame úlohu variačného počtu

$$\min \int_0^\infty \Phi(x, t(x))dx$$

pri podmienke

$$\int_0^\infty \Psi(x, t(x))dx \geq A,$$

kde $\Phi(x, t(x)) = (u(x) - u(x - t(x)))f(x)$ a $\Psi(x, t(x)) = t(x)f(x)$.

Túto úlohu budeme riešiť ako úlohu na voľný extrém pre Lagrangeovu funkciu

$$L(x, t(x), \lambda) = \int_0^\infty (\Phi(x, t(x)) - \lambda\Psi(x, t(x)))dx + \lambda A.$$

Eulerova rovnica pre tento izoperimetrický problém vyzerá nasledovne [2]:

$$\Phi_t - \lambda\Psi_t = \frac{d}{dx}(\Phi_{t'} - \lambda\Psi_{t'}).$$

Keďže v našom prípade Φ a Ψ nezávisia od t', dostávame:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Pre Φ a Ψ definované vyššie teda máme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -u'(x - t(x))(-1)f(x) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= f(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Po dosadení (3) do (2) získame:

$$\begin{aligned} u'(x - t(x))f(x) - \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u'(x - t(x)) = \lambda. \end{aligned}$$

Keďže predpokladáme, že u je konkávna a teda u' je klesajúca, posledná rovnosť nastáva pre jediné $x - t(x) = \lambda'$, $\lambda' > 0$. To znamená, že ak má byť celková obeť minimálna, príjem po zdanení musí byť pre všetkých rovnaký, čo je vlastne princíp komúny. V praxi je toto riešenie nepredstaviteľné a pre väčšinu členov spoločnosti aj neprijateľné.

Je zrejmé, že daň, vypočítaná týmto spôsobom,

$$t(x) = x - \lambda',$$

spĺňa predpoklady T1,..,T4. Pre príjem x nižší, ako λ' dostávame zápornú daň, čiže ľudia s takýmto príjmom sú vlastne dotovaní. Prirodzene, λ' nemôžeme zvoliť ľubovoľne, ale musí byť splnená podmienka (1), ktorá bude v optime splnená ako rovnosť. Pritom v tomto prípade

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t(x)f(x)dx &= \int_0^\infty (x - \lambda')f(x)dx = \\ &= \int_0^\infty xf(x)dx - \lambda' \int_0^\infty f(x)dx. \end{aligned}$$

Prvý výraz predstavuje strednú hodnotu rozdelenia príjmu, $E(X)$, o ktorej je rozumné predpokladať, že je menšia, ako nekonečno, no a, keďže $\int_0^\infty f(x)dx = 1$, (čo je jedna z vlastností hustoty rozdelenia,) dostaneme:

$$E(X) - \lambda' = A \Rightarrow \lambda' = E(X) - A.$$

Z danej hodnoty A vieme teda jednoznačne určiť λ'. Úroveň A musí byť však dosiahnuteľná. Totiž, z predpokladu T3 a podmienky (1) je suprémová hodnota pre A rovná $\int_0^\infty xf(x)dx = E(X)$, teda aby sme požadovanú úroveň vybratej dane A vedeli vôbec dosiahnuť, musí byť nižšia, ako $E(X)$.

2.2 Rovnaká obeť.

Pozrime sa teraz na prípad, kedy nechceme minimalizovať celkovú obeť, ale tú najväčšiu zo všetkých strát jednotlivcov. Pokiaľ chceme minimalizovať maximálnu obeť, táto musí byť pre všetkých rovnaká, teda

$$u(x) - u(x - t(x)) = c.$$

Keby totiž niekto pociťoval obeť $c1$ a niekto iný $c2$, pričom $c1 < c < c2$, obeť $c2$ by bola maximálna a mohli by sme ju zmenšiť tým, že by sme z nej "odobrali" a pridali by sme človeku s nižšou stratou na úžitku. Takto sa musia vyrovnať všetky obete a pre funkciu úžitku vlastne dostávame rekurentný vzťah

$$u(x) = u(x - t(x)) + c.$$

Pre všetky $x > 0$, pre ktoré existuje $t'(x)$ a $t''(x)$, platí:

$$u'(x) = u'(x - t(x))(1 - t'(x))$$

$$0 > u''(x) = u''(x - t(x))(1 - t'(x))^2 + u'(x - t(x))(-t''(x))$$

Keďže u je rastúca funkcia a hraničná daň $t'(x) \leq 1$ (predpoklad T4), dostávame vzťah

$$\frac{u''(x - t(x))}{u'(x - t(x))}(1 - t'(x))^2 < t''(x). \tag{4}$$

Výraz na ľavej strane je nekladný, čo znamená, že táto podmienka je splnená napríklad pre ľubovoľnú konvexnú funkciu, spĺňajúcu T1,..,T4.

Na určenie dane $t(x)$ budeme teda teraz vychádzať z konštantnosti obete, čiže z rovnice $u(x) - u(x - t(x)) = c \Leftrightarrow u(x - t(x)) = u(x) - c$. Z predpokladu U vyplýva, že $u(.)$ je prostá, čiže existuje k nej inverzná funkcia $u^{-1}(.)$. Potom:

$$x - t(x) = u^{-1}(u(x) - c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t(x) = x - u^{-1}(u(x) - c).$$

Vidíme, že daň t je funkciou nielen príjmu x, ale aj obete $c \Rightarrow t = t(x, c)$.

Overme, či takto určená daň spĺňa všetky predpoklady:

T1: $u(x)$ je spojitá, rastúca $\Rightarrow u^{-1}(x)$ je spojitá, neklesajúca $\Rightarrow$ aj $x - u^{-1}(u(x) - c)$ je spojitá funkcia,

T2: takto určená funkcia $t(x)$ je diferencovateľná pre všetky $x > 0$, pre ktoré $[u^{-1}(u(x) - c)]' \neq 0$ a platí:

$$t'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u'(u(x) - c)},$$

T3: je zrejmé, že $t(x) = x - u^{-1}(u(x) - c) < x$,

T4: $x - t(x) = u^{-1}(u(x) - c)$ je určite neklesajúca funkcia, keďže $u(x)$ je rastúca. Naviac, keďže

$$(u^{-1}(u(x) - c))' = \frac{u'(x)}{u'(u(x) - c)} > 0,$$

môžeme povedať, že $x - t(x)$ je rastúca funkcia.

Navyše $t(x, c)$ je spojitá funkcia oboch svojich premenných. Spojitosť v x sme overili v rámci predpokladu T1 a spojitosť v c vyplýva z toho, že $u^{-1}(u(x) - c)$ je spojitá funkcia v c pre všetky $u(x) > c$.

Musíme ešte vyriešiť otázku, či vieme c prispôsobiť podmienke $\int_0^\infty f(x)t(x)dx = A$. Vieme, že existuje c_0, pre ktoré $\int_0^\infty f(x)t(x, c_0)dx < A$ a tiež existuje c_1, pre ktoré $\int_0^\infty f(x)t(x, c_1)dx > A$. Keďže $f(x)$ aj $t(x, c)$ sú spojité funkcie, musí existovať aj nejaké c^*, pre ktoré nastáva rovnosť. Tak, ako predtým, aj teraz teda vieme prispôsobiť daň ľubovoľnej dosiahnuteľnej úrovni A.

Ak by sme však naopak chceli danú daň zdôvodniť nejakou funkciou úžitku, dostávame vlastne inverzný problém, pričom za predpokladu, že daň vykazuje konštantnosť obete, platí:

Veta 2.2.1. *Nech $t(x)$ spĺňa predpoklady T1,..,T4 a nech $u(x)$ je funkcia definovaná na intervale $(0, x_1\rangle$, $x_1 > 0$, spĺňa na ňom predpoklad U a podmienku*

$$u(x) - u(x - t(x)) = c. \tag{M}$$

Potom existuje jediné jej rozšírenie na interval $(0, \infty)$, spĺňajúce podmienku (M); toto rozšírenie spĺňa predpoklad U.

Dôkaz. Definujme rekurentne $x_{i+1} = x_i + t(x_i)$ pre $i \geq 1$. Predpokladajme, že $u(.)$, spĺňajúca predpoklad U, je daná na nejakom intervale $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pomocou rekurentného vzťahu $u(x) = u(x - t(x)) + c$ dodefinujeme funkciu u jednoznačne aj na intervale $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$. Spojitosť tejto funkcie je zjavná. Keďže

$$u'(x) = \underbrace{u'(x - t(x))}_{>0}\underbrace{(1 - t'(x))}_{>0}$$

vidno, že takto určená funkcia úžitku je rastúca.

$$u''(x) = \underbrace{u''(x - t(x))}_{<0}(1 - t'(x))^2 - \underbrace{u'(x - t(x))}_{>0}t''(x) < 0,$$

keďže predpokladáme, že daň $t(x)$ vykazuje konštantnosť obete, čiže spĺňa podmienku (4) a teda $u(x)$ je aj konkávna. Obidve tieto vlastnosti platia pre $\forall x > 0$, pre ktoré existuje $t'(x)$ a $t''(x)$.

Túto vetu možno použiť napríklad ak $t(x) = ax + b$, teda daň je lineárna na intervale $(0, x_1\rangle$, pretože v takom prípade vieme pomerne jednoducho nájsť funkciu u, vyhovujúcu podmienke U, napr. $u(x) = \ln x$. Ak daň nie je lineárna, využijeme nasledujúcu vetu:

Veta 2.2.2. *Nech $t(x)$ spĺňa predpoklady T1,..,T4. Ľubovoľne zvoľme bod $x_0 > 0$ a položme $x_1 = x_0 + t(x_0)$. Zvoľme teraz ľubovoľnú funkciu $u(x)$, vyhovujúcu predpokladu U, definovanú na $\langle x_0, x_1\rangle$ takú, že $u(x_1) = u(x_0) + c$. Potom funkciu u môžeme rovnako ako v predchádzajúcej vete rekurentne rozšíriť na interval (x_1, ∞) pomocou predpisu:*

$$u(x) = u(x - t(x)) + c$$

a analogicky rekurentne predpisom

$$u(x) = u(x + t(x)) - c$$

pre $0 < x < x_0$.

Podobne, ako v dôkaze predchádzajúcej vety sa dá ukázať, že takto definovaná funkcia úžitku rieši úlohu (M) a spĺňa predpoklad U.

2.3 Proporčná obeť.

Podobne, ako keď sme chceli minimalizovať najväčšiu z absolútnych strát, $u(x) - u(x - t(x))$, môžeme teraz minimalizovať najväčšiu z pomerných strát na úžitku,

$$\frac{u(x) - u(x - t(x))}{u(x)}.$$

Podobnou úvahou, ako predtým, dospejeme k záveru, že v takomto prípade musí byť proporčná strata pre všetkých rovnaká. To znamená, že každý by mal znášať rovnakú pomernú stratu na úžitku a teda obetovať určitý pomer z celkového úžitku, ktorý má z príjmu. Ak r je miera straty z úžitku, potom pre každý príjem x má platiť

$$\frac{u(x) - u(x - t(x))}{u(x)} = r \Leftrightarrow \frac{u(x - t(x))}{u(x)} = 1 - r.$$

Tento prípad však nie je veľmi zaujímavý, keď si uvedomíme, že rovnaká proporčná obeť je ekvivalentná s rovnakou obeťou, len pri inej funkcii úžitku. Konkrétne, ak zlogaritmujeme obe strany predchádzajúcej rovnice, dostávame:

$$\ln u(x) - \ln u(x - t(x)) = -\ln(1 - r).$$

Vidíme, že rovnaká proporčná obeť pre $u(x)$ je totožná s rovnakou (absolútnou) obeťou pre $\ln u(x)$, čo je tiež funkcia úžitku. Totiž:

Veta 2.3.1. *Nech u je funkcia úžitku. Potom ľubovoľná spojitá rastúca konkávna funkcia $G(u(.))$ je tiež funkciou úžitku.*

Dôkaz. Je zrejmé, že ak G aj u sú spojité funkcie, tak aj $G(u(.))$ bude spojitá funkcia. Počítajme ďalej

$$\frac{dG(u(x))}{dx} = G'(u(x))u'(x) > 0,$$

čím sme overili rastúcosť a napokon

$$\frac{dG'(u(x))u'(x)}{dx} = \underbrace{G''(u(x))}_{<0}\underbrace{u'(x)}_{>0} + \underbrace{G'(u(x))}_{>0}\underbrace{u''(x)}_{<0} < 0,$$

takže je splnená aj konkávnosť.

Okrem toho podľa Vickreyho nemá zmysel uvažovať takúto obeť bez toho, aby bola daná určitá nulová hladina úžitku. Preto sa tomuto prípadu nebudeme ďalej venovať.

3. Funkcia úžitku v SR.

Na ilustráciu inverznej úlohy, spomenutej v kapitole 2.2, použijem dáta pre Slovenskú republiku. Daň z príjmu fyzických osôb v SR môžeme ako funkciu zapísať nasledovne:

$$t_{SR}(x) = \begin{cases} 0.12x, & \text{ak } 0 < x \leq 90 \\ 0.2x - 7.2, & \text{ak } 90 < x \leq 150 \\ 0.25x - 14.7, & \text{ak } 150 < x \leq 240 \\ 0.3x - 26.7, & \text{ak } 240 < x \leq 396 \\ 0.35x - 46.5, & \text{ak } 396 < x \leq 564 \\ 0.4x - 74.7, & \text{ak } 564 < x \leq 1128 \\ 0.42x - 97.26, & \text{ak } x \geq 1128 \end{cases}$$

Premenná x teraz vlastne označuje príjem v tisícoch Sk. Pokúsime sa teraz túto daň zdôvodniť nejakou funkciou úžitku, pričom budeme predpokladať, že obeť na úžitku je pre všetkých rovnaká. Hľadáme teda funkciu, ktorá pri danej dani $t_{SR}(x)$ spĺňa: $u(x) - u(x - t_{SR}(x)) = c$. Najprv však treba overiť, či má naša daň túto vlastnosť.

3.1 Test konštantnosti obete.

Zdalo by sa, že na to, aby sme mohli spraviť akýkoľvek test o tom, či daň, ako je daná v SR, vykazuje konštantnosť obete, musíme mať najprv bližšie špecifikovanú funkciu úžitku. V skutočnosti tomu tak nie je. Namiesto toho budeme predpokladať, že rovnakej obeti prislúcha nejaká neznáma funkcia úžitku a potom ukážeme, že dôležitá informácia o funkcii úžitku môže byť odvodená priamo z dane [3]. Hypotézu, že obeť, spôsobená zdanením je pre všetkých rovnaká príjmeme, ak:

i) odhad funkcie úžitku bude v súlade s teoretickými predpokladmi o jej vlastnostiach

ii) rovnaká obeť, odvodená z tejto funkcie, bude dobre fitovať empirické daňové dáta.

V modernej teórii rizika hrajú pri definovaní funkcie úžitku dôležitú úlohu 2 parametre:

- koeficient absolútnej averzie k riziku $R(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ a

- koeficient proporčnej averzie k riziku $C(x) = -\frac{x.u''(x)}{u'(x)}$.

Všeobecne platí, že prvý koeficient, $R(x)$, je klesajúci, druhý, $C(x)$, je približne konštantný. Konštantná proporčná averzia k riziku znamená, že ľudia držia konštantnú časť svojho bohatstva v nejakom ľubovoľnom rizikovom aktíve. Empirické štúdie bohatstva domácností potvrdzujú tieto vlastnosti koeficientov a odhad koeficientu C je väčší, ako 1 a pravdepodobne je blízky 2. Z toho vyplýva, že funkcia úžitku bude mať tvar $u(x) = -A.x^{1-C} + B$, kde $A > 0$, $C > 1$.

Prvým krokom pri overovaní rovnosti obete bude zistiť správanie sa koeficientu C v závislosti od x. Koeficient C môže byť odhadnutý priamo z dane.

Uvažujme danú funkciu dane $t = t(x)$. Predpokladajme, že existuje funkcia úžitku $u(x)$ taká, že strata z úžitku pre každú úroveň príjmu je konštantná:

$$u(x) - u(x-t) = c.$$

Predelením oboch strán tejto rovnice daňou t dostaneme:

$$\frac{u(x) - u(x-t)}{t} = \frac{c}{t}.$$

Z vety o strednej hodnote diferenciálneho počtu vieme, že ľavá strana tejto rovnice je rovná derivácii funkcie u v nejakom bode w, $w \in (x-t, x)$. Pravdaže w nemôžeme určiť presne bez toho, aby sme poznali u. Aj napriek tomu môžeme w aspoň odhadnúť. Predpokladajme, že C je viac-menej konštantné na nejakom intervale, ktorý obsahuje $x - t$ a x. Potom na tomto intervale $u(x) = -A.x^{1-C} + B$ a bez újmy na všeobecnosti môžme položiť $A = 1$ a $B = 0$. Potom $u(x) = -x^{1-C} \Rightarrow u'(x) = (C-1)x^{-C} \Rightarrow$

$$u'(w) = (C-1)w^{-C} = \frac{u(x) - u(x-t)}{t} = \frac{(x-t)^{1-C} - x^{1-C}}{t}.$$

Po niekoľkých úpravách dostaneme:

$$\frac{w}{x} = \left[\frac{(C-1)(t/x)}{(1-t/x)^{1-C} - 1}\right]^{1/C}.$$

Keď si zoberieme nejakú prípustnú hodnotu t/x, napr. 0.2 a za C dosadíme niekoľko hodnôt, zisíme, že hodnota $\frac{w}{x}$ a teda aj hodnota w pre dané x, nie je citlivá na výber C.

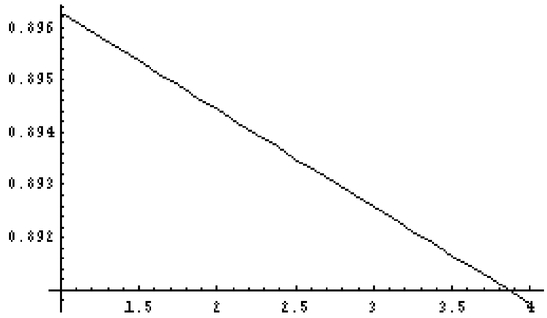

Fig. 1. $\frac{w}{x}(C)$.

Na grafe si môžeme všimnúť, že rozdiel funkčných hodnôt $\frac{w}{x}(C)$ sú len 4 tisíciny. Z toho vyplýva, že v záujme odhadnúť w si môžeme za C zobrať ľubovoľnú prípustnú hodnotu. Zvoľme si teda $C = 2$. Toto vedie k pomerne jednoduchej formuly $w = \sqrt{x(x-t)}$. Z toho a z rovnice pre $u'(w)$ dostaneme $u'(\sqrt{x(x-t)}) = \frac{c}{t}$. Zlogaritmovaním oboch strán a položením $c = 1$ dospejeme k vzťahu: $\ln u'(\sqrt{x(x-t)}) = -\ln t$.

Snažíme sa odhadnúť koeficient proporčnej averzie k riziku

$$C(z) = -\frac{z.u''(z)}{u'(z)} = -\frac{d\ln u'(z)}{d\ln z}.$$

Položme $X = \ln z$ a nech $Y = -\ln u'(z)$. Ak odhadneme Y pomocou X, potom sklon tejto regresie bude odhad C. Totiž, ak budeme linearizovať $Y = \ln t$ pomocou $X = \ln z$, dostaneme:

$$Y = \frac{dY}{dX}X + \varepsilon, \text{ kde}$$
$$\frac{dY}{dX} = -\frac{d\ln u'(z)}{d\ln z} = C(z).$$

Nech $z = \sqrt{x(x-t)}$. Potom $X = \ln z = \ln\sqrt{x(x-t)}$ a $Y = -\ln u'(\sqrt{x(x-t)}) = \ln t$. To znamená, že odhadneme $Y = \ln t$ pomocou $X = 0.5\ln(x(x-t))$. Čím vyššia bude hodnota koeficientu R^2, tým prijateľnejšia bude hypotéza, že C nezávisí od x a že daň vedie k rovnakej obeti vzhľadom na izoelastickú funkciu úžitku.

3.2 Výsledky pre SR.

Pre daň, platnú v SR, dospejeme k týmto výsledkom:

$Y = -3.55 + 1.39X, R^2 = 0.996075$ (podrobnejšie výsledky regresie sú uvedené v prílohe.) Z toho môžeme vyčítať, že náš odhad dobre fituje dáta. Toto však samo o sebe nedokazuje konštantnosť obete. Zatiaľ sme získali len dôveryhodný odhad parametra $C = 1.39$. Odhadnutá funkcia úžitku má potom predpis

$$u(x) = -x^{-0.39}.$$

Ďalej musíme odhanúť výšku obete, c. Za týmto účelom vypočítame rozdiely $u(x) - u(x - t(x))$. Táto hodnota však nemá osobitný význam, keďže závisí od škálovania funkcie úžitku. Napriek tomu je to potrebný parameter pre výpočet dane, prislúchajúcej konštantnej obeti, pri danej funkcii úžitku. Pre slovenské dáta je odhad priemernej úrovne obete $c = 0,0109$.

Napokon musíme zistiť, či daň, vypočítaná pri odhadnutých parametroch C a c,

$$t(x) = x - (x^{1-C} + c)^{1/(1-C)},$$

dobre fituje skutočné hodnoty.

Pomer odhadnutej dane ku skutočnej má koeficient variácie, (čiže podiel štandardnej odchýlky a priemeru), ± 6.3 percent. Vzhľadom na veľmi dobrú aproximáciu môžeme teda povedať, že daň, daná funkciou $t_{SR}(x)$ je v súlade s konštantnou absolútnou obeťou pre funkciu úžitku $u(x) = -x^{-0.39}$. Graf tejto funkcie vyzerá nasledovne:

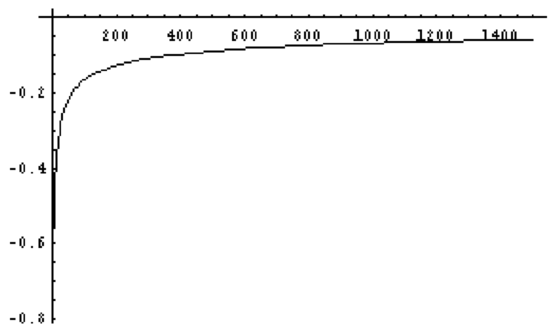

Fig. 2. $u(x) = -x^{-0.39}$.

Teda daň na Slovensku vykazuje konštantnosť obete. Funkciu úžitku môžeme teraz určiť aj iným spôsobom, použitím Vety 2.2.1.

V prvom pásme, teda pre $x \in \langle 0, 90 \rangle$ je $t_{SR}(x) = 0,12x$. Potom

$$u(x) - u(x - t(x)) = u(x) - u(0,88x) = c,$$

čo je ekvivalentné s podmienkou

$$u'(x) - 0.88u'(0,88x) = 0$$

Jednou z funkcií, ktoré vyhovujú tomuto vzťahu, je $u(x) = \ln(x)$, z čoho vyplýva, že $c = \ln(x) - \ln(0,88x) = \ln \frac{1}{0,88} = -\ln 0,88$. Pre ostatné pásma využijeme, že už poznáme konštantu c a funkciu u zadefinujeme ako

$$u(x) = u(x - t_{SR}(x)) - \ln 0,88.$$

Jej graf potom vyzerá takto:

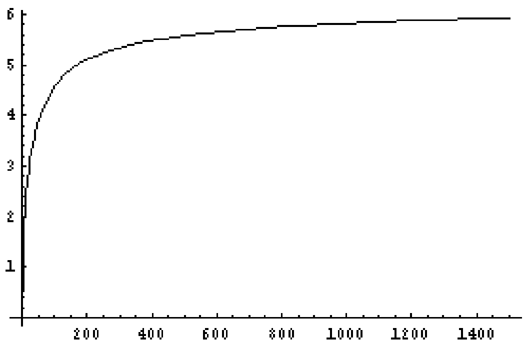

Fig. 3. $u(x) = u(x - t_{SR}(x)) + c$.

Môžeme skonštatovať vysokú podobnosť s grafom predchádzajúcej funkcie.

3.3 Iný pohľad na obeť.

Ďalším prístupom, ktorý je blízky minimalizácii obete, je určiť daň tak, aby minimálna mzda bola čo najvyššia [4]. Predpokladajme, že:

(1) Každý človek je schopný zarábať, úroveň tejto schopnosti označíme n. Ak jednotlivec odpracuje y jednotiek za deň, jeho hrubý príjem je ny. Platí: $n \geq 0$, $y \in \langle 0, 1 \rangle$.

(2) Vláda uvažuje len lineárnu funkciu dane, takže príjem po zdanení je $x = any + b$. Vláda zvolí a aj b. Hraničná daň je potom $(1 - a)$ a b je zaručená minimálna mzda. Tento model sa dá rozšíriť aj pre všeobecnejšiu daňovú funkciu.

(3) Vláda nefinancuje svoje výdavky vybratou daňou a zdaňuje len kvôli redistribúcii.

(4) Vláda sa snaží maximalizovať úžitok ľudí s najmenším úžitkom. Keďže niektorí ľudia majú také malé n, že nemá zmysel, aby pracovali, táto maximalizácia je ekvivalentná s maximalizáciou minimálnej mzdy, čiže b.

(5) Všetci jednotlivci majú rovnakú funkciu úžitku

$$u(x, y) = \ln(x) + \ln(1 - y) = \ln(any + b) + \ln(1 - y).$$

(6) Len zanedbateľný počet ľudí má schopnosť zarábať menšiu, ako 41,4 percent z priemeru.

Človek so schopnosťou n si volí, koľko bude pracovať tak, aby maximalizoval svoj úžitok u.

$$\frac{du}{dy} = \frac{an}{any + b} - \frac{1}{1 - y}.$$

Keď položíme $\frac{du}{dy} = 0$,čo je nutná podmienka pre optimum, dostávame vzťah $y = \frac{1}{2} - \frac{b}{2an}$. Tento výraz je nezáporný pre $n \geq \frac{b}{a}$ a teda pre $n < \frac{b}{a}$ položíme $y = 0$. Hrubý príjem jedinca je teda $ny = \frac{n}{2} - \frac{b}{2a}$, jeho čistý, zdanený príjem je $any + b = \frac{an}{2} - \frac{b}{2}$.

Majme k ľudí so schopnosťami $n_1, ..., n_k$. Priemerná schopnosť je teda

$$m = \frac{n_1 + ... + n_k}{k}.$$

Keďže vláda nepokrýva svoje výdavky daňami, súčet hrubých príjmov sa musí rovnať súčtu čistých príjmov. Z toho dostávame ohraničenie:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i - \frac{kb}{2a} = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i + \frac{kb}{2} \Rightarrow b = \frac{a(1-a)}{1+a}m.$$

Vláda sa snaží maximalizovať b vzhľadom na a.

$$\frac{db}{da} = -\frac{a^2+2a-1}{(1+a)^2}m$$

$$\frac{db}{da} = 0 \Leftrightarrow a^2+2a-1=0.$$

Pozitívny koreň tejto rovnice je $a = -1+\sqrt{2}$. Hraničná daň je potom $1-a = 2-\sqrt{2} \doteq 0,586$. Minimálna mzda by potom predstavovala $b = \frac{a(1-a)}{1+a}m = (3-\sqrt{2})m \doteq 0,172m$. Toto môžeme porovnať s čistým príjmom priemerného človeka nasledovne: priemerný človek má schopnosť m, a teda jeho pracovný čas je $y = \frac{1}{2} - \frac{b}{2am} \doteq 0,293$ z dňa, čo predstavuje približne 7 hodín, a to je rozumný pracovný čas priemerného človeka. Príjem priemerného človeka pred zdanením je $(1-\frac{\sqrt{2}}{2})m$ a je rovný jeho príjmu po zdanení. Priemerný človek dostane $\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3-2\sqrt{2}} \doteq 1,71$ krát viac, ako najchudobnejší človek. Napokon musíme určiť hodnotu $\frac{b}{a}$, keďže ľudia s menšími schopnosťami, ako je táto hranica, nebudú pracovať vôbec.

$$\frac{b}{a} = \frac{3-2\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}m \doteq 0,414m.$$

Ak by sa výrazný počet ľudí pohyboval pod touto hranicou, výpočty by neboli správne. Na druhej strane však aspoň jeden človek musí byť na alebo pod hranicou. Inak by nemalo zmysel maximalizovať b v záujme maximalizovať úžitok človeka s najmenším úžitkom.

3.4 Rozšírenie na model s vládnymi výdavkami.

Pokiaľ vládne výdavky nie sú nulové, ale, povedzme, že sú vo výške g, prichádzame ku komplikovanejšej úlohe. Ohraničenie vlády je teraz:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i - \frac{kb}{2a} = \frac{a}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i + \frac{kb}{2} + g.$$

Rovnakým postupom, ako predtým, prídeme k výsledku:

$$a = -1 + \sqrt{2\left(1 - \frac{g}{km}\right)},$$

z čoho vyplýva, že hraničná daň je rovná $2 - \sqrt{2(1 - \frac{g}{km})}$. Položme $f = \sqrt{1 - \frac{g}{km}}$. Potom $a = \sqrt{2}f$ a $\frac{g}{km} = 1 - f^2$. Potrebujeme ešte vyjadriť vládne výdavky ako zlomok národného príjmu. Národný príjem je:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i - \frac{kb}{a} = \frac{1}{2}km - \frac{kb}{2a}.$$

Z ohraničenia:

$$\frac{kb}{2a} = \frac{km(1-a) - 2g}{2(1+a)},$$

z čoho vyplýva príjem

$$\frac{akm + g}{1 + a}.$$

Predpokladajme, že vláda spotrebuje časť G z národného príjmu. Potom

$$G = \frac{g(1+a)}{akm + g} = \frac{(g/km)(1+a)}{a + (g/km)} = \frac{(1 - f^2)\sqrt{2}}{\sqrt{2} - f}.$$

Úpravou tohto výrazu dostaneme rovnicu:

$$f^2\sqrt{2} - fG - (1 - G)\sqrt{2} = 0.$$

Pozitívny koreň tejto rovnice je

$$f = \frac{G + \sqrt{G^2 - 8G + 8}}{2\sqrt{2}}.$$

Hraničná daň je teda

$$2 - \frac{G + \sqrt{G^2 - 8G + 8}}{2}.$$

Ak G je napríklad $\frac{1}{3}$, hraničná daň je presne $\frac{2}{3} \doteq 0.667$. Vysoké vládne výdavky majú teda zjavný, nie však výrazný efekt na "najlepšiu" hraničnú daň.

4. Vickreyho prístup.

V prvej časti tejto práce, venovanej Edgeworthovej filozofii, sme pri akomkoľvek prístupe k obeti dospeli k progresívnej dani. Podľa Vickreyho však takýto daňový systém nedáva človeku motiváciu zvyšovať svoj výkon. V nasledujúcich kapitolách zistíme, ako budú ovplyvnené výsledky tým, že do modelu zahrnieme aj produktívne úsilie jedincov.

Vickreyho prístup [5] je založený na tom istom utilitarianistickom pricípe ako Edgeworthov, s tým rozdielom, že teraz chce vláda maximalizovať súčet úžitkov všetkých jednotlivcov. Do svojho modelu však zavádza aj úsilie človeka. Predpokladá, že všetci majú rovnaké preferencie, čo sa týka produktívneho úsilia w a spotreby r, ale rôznu schopnosť produkovať tovar a služby. Taktiež predpokladá, že produktívne úsilie w, ktoré musí vynaložiť jedinec so schopnosťou n, nazvime ho $n-$jedinec, aby vyprodukoval množstvo z, je dané funkciou $w = w(z, r)$.

Prostredníctvom zdanenia chceme určiť vzťah $r = r(z)$ medzi výstupom z_n n-jedinca a jeho príjmom, r. Výstup ako taký bude funkciou príjmu r, ponúkanej snahy $\frac{dr}{dz}$. Chceme určiť funkciu $r(z)$ tak, aby maximalizovala celkový súčet úžitkov všetkých jedincov

$$\max \sum_n u(r),$$

kde $u(r)$ je úžitok z príjmu r. Ešte musí byť splnená podmienka, že celkový výnos z dane sa rovná danému požadovanému množstvu:

$$\sum_n (z - r) = R.$$

V tejto forme je to úloha variačného počtu.

Aby sme tento problém previedli do ľahšie spracovateľného tvaru, preformulujeme ho a zavedieme niekoľko zjednodušujúcich predpokladov.

Ak funkcia úžitku závisí nielen od príjmu r, ale tiež od produktívnej snahy w, (tým obsiahneme úžitok z voľného času,) môžeme predpokladať, že úsilie vynaložené $n-$jedincom bude také, aby sa maximalizoval úžitok $u(r, w)$. Predpokladajme, že práca w, potrebná na to, aby $n-$jedinec vyprodukoval výstup z, je daná vzťahom $w = w(z, n)$. Opäť chceme maximalizovať celkový úžitok $\sum u$ cez rôzne r za podmienky $\sum(z - r) = R$.

Ak dosadíme $w = w(z, n)$ do $u(r, w)$, dostaneme funkciu $u(r, w) = v(r, z, n)$. $n-$jedinec prispôsobí svoje pracovné úsilie záujmu maximalizovať v, z čoho vyplynie podmienka

$$v'_z + v'_r p = 0,$$

kde $p = r'(z)$. Z toho dostaneme vzťah medzi z a n. Ak položíme $G(z, n) = v'_z + v'_r p = 0$, potom platí $G'_z dz = -G'_n dn$. Použitím Lagrangeovho multiplikátora a zámenou premenných $n \to z$ sa dostaneme k výnosovej podmienke maximalizáciou

$$\int_0^\infty (u + \lambda(z - r))dn = -\int_0^\infty (v + \lambda(z - r))\frac{G'_z}{G'_n}dz$$

kde pre zjednodušenie prejdeme na spojitý integrál namiesto sumy diskrétnych elementov. Ak teraz označíme

$$J(z, r, p, q) = (v + \lambda(z - r))\frac{G'_z}{G'_n}, q = r''(z)$$

Eulerova rovnica vyzerá nasledovne:

$$J'_r = \frac{d}{dz}J'_p - \frac{d^2}{dz^2}J'_q.$$

Dosadením za J dostaneme rovnicu

$$(v'_r + \lambda)G'_z + G'_n\frac{d}{dz}\left(\frac{\lambda v'_r(1 - p)}{G'_n}\right) - \lambda(1 - p)(v''_{rr}p + v''_{rz}) = 0.$$

Keď spätne dosadíme u, w, r a ich derivácie, privedie nás to k nanajvýš zložitému výrazu.

Vickrey tento problém uzavrel ako neriešiteľný. Tento jeho záver, ako sa ukázalo neskôr, bol až príliš pesimistický.

5. Mirrleesov prístup.

Mirrleesov model [6] výpočtu optimálnej dane z príjmu je podobný Vickreyho modelu. Súčasťou jeho modelu je tiež potenciál produktivity. Tento sa dá zistiť napr. z IQ, stupňa vzdelania alebo veku, najlepším a najdôveryhodnejším indikátorom tohto potenciálu je však jeho príjem. Pri výpočte optimálnej dane budeme predpokladať:

(1) Intertemporálne vzťahy sú zanedbané. Neberieme ohľad na čas, takže neuvažujeme ani vplyv dane na úspory. Budeme sa zaoberať len daňou zo "zarobeného" príjmu.

(2) Nebudeme brať ohľad ani na rozdiely medzi vkusom jednotlivcov, veľkosťou ich rodiny a pod. Zahrnutie týchto okolností by totiž viedlo k celkom odlišnému problému.

(3) Jednotlivci si volia množstvo a druh práce na základe racionálnej úvahy, v záujme maximalizovať svoj úžitok. Celkový úžitok je funkciou úžitku jednotlivcov.

(4) V modeli nepripúšťame možnosť migrácie.

(5) Štát má dokonalé informácie o jednotlivcoch, ich úžitku a činnosti.

(6) Predpokladáme, že v hospodárstve je jediné zamestnanie a jediný spotrebný tovar.

(7) Uvažujeme, že cena za spravovanie daňového systému je zanedbateľná.

5.1 Model.

Jednotlivci majú rovnaké preferencie. Budeme predpokladať, že funkcia úžitku u závisí od spotreby x a odpracovaného času y, $u = u(x, y)$. Premenné x a y sú nezáporné, y je nanajvýš rovné jednej. Funkcia u je rýdzo konkávna, spojito diferencovateľná, rastúca v x, klesajúca v y, je definovaná pre $x > 0$, $0 \le y < 1$. Pre okrajové hodnoty x a y platí $\lim_{x \to 0^+} u(x, y) = -\infty = \lim_{y \to 1^-} u(x, y)$. Jednou z funkcií, ktoré spĺňajú tieto vlastnosti a ktorú neskôr aj použijeme, je $u(x, y) = \alpha \ln(x) + \ln(1 - y)$.

Predpokladáme, že jedinci sa odlišujú v schopnosti produkovať, teda efekt nimi odpracovaného času je rôzny. Každého jednotlivca by sme mohli charakterizovať číslom n, čo predstavuje množstvo diela, ktoré je schopný vyprodukovať za jednotku času. Ak odpracuje y jednotiek času, množstvo práce, ktoré vyprodukuje, je ny. Rozdelenie schopnosti n jednotlivcov v populácii je známe: podiel ľudí so schopnosťou menšou, nanajvýš rovnou n, k celej populácii je $F(n)$. O $F(n)$ budeme predpokladať, že je diferencovateľná a teda môžme zadefinovať $f(n) = F'(n)$, čím dostaneme hustotu rozdelenia n. Človeka s produktívnou schopnosťou n budeme nazývať $n-$človek.

Voľba spotreby $n-$človeka je (x_n, y_n). Označme $z_n = ny_n$ prácu, ktorú vykoná. Potom celková práca, dostupná pre produkciu v ekonomike je

$$Z = \int_0^\infty z_n f(n) dn, \tag{1}$$

a agregovaný dopyt po spotrebných statkoch je

$$X = \int_0^\infty x_n f(n) dn. \tag{2}$$

V záujme vylúčiť možnosť nekonečnej zásoby práce budeme predpokladať, že

$$\int_0^\infty n f(n) dn < \infty. \tag{3}$$

Každý si volí (x_n, y_n) tak, aby bolo splnené jeho rozpočtové ohraničenie. Prostredníctvom dane z príjmu vláda určí, že človek, ktorý ponúkne množstvo práce z bude mať po zdanení spotrebu nanajvýš $c(z)$. Funkcia $c(z)$ je zvolená vládou. O tejto funkcii sa dá predpokladať, že je spojitá, a teda každý jednotlivec si môže zvoliť spotrebu, ktorá bude maximalizovať jeho úžitok pri jeho rozpočtovom ohraničení,

$$(x_n, y_n) \text{ maximalizuje } u(x, y) \text{ za podmienky } x \leq c(ny). \tag{4}$$

(x_n, y_n) nemusí byť jednoznačne určené pre všetky n. Aby sme sa vyhli niektorým komplikáciám, budeme predpokladať, že platí:

$$y_n \text{ je jednoznačne definované pre všetky } n \text{ až na množinu miery } 0. \tag{A}$$

Táto podmienka nám zúži triedu funkcií c. Označíme

$$u_n = u(x_n, y_n). \tag{5}$$

Tvrdenie 5.1.1. *Existuje číslo* $n_0 \geq 0$, *pre ktoré platí:*

$$y_n = 0 \textit{ pre } n \leq n_0$$

$$y_n > 0 \textit{ pre } n > n_0. \tag{6}$$

Dôkaz. Ak $m < n$ a $y_m > 0$, $u[c(my_m), y_m] < u[c(n.\frac{m}{n}y_m), \frac{m}{n}y_m] \leq u_n$. Z toho vyplýva, že $y_m = 0$ ak $y_n = 0$, keďže y_m dáva úžitok u_n $n-$človeku. Potom

$$n_0 = \inf[n|y_n > 0]$$

spĺňa požadovanú vlastnosť.

Toto tvrdenie v podstate hovorí, že ak $n_0 > 0$, niektorí ľudia majú takú malú schopnosť zarábať, že sa im neoplatí pracovať a sú "zbytoční". Presnejšie, ak človek s nejakou výkonnosťou nepracuje, potom nepracujú všetci, ktorí majú výkonnosť nižšiu. Neskôr zistíme, že prípad $n_0 = 0$, kedy pracujú všetci, nastáva len za veľmi špeciálnych a v praxi neobvyklých podmienok.

Vláda volí funkciu c tak, aby maximalizovala funkciu bohatstva

$$W = \int_0^\infty G(u_n)f(n)dn. \tag{7}$$

Neskôr sa budeme bližšie zaoberať špeciálnym prípadom, kedy $u_{xy} = 0$, čiže u môžeme napísať ako súčet funkcie závislej len od x a funkcie závislej len od y.

Pri maximalizácii blahobytu je vláda obmedzovaná produkčnými možnosťami: musí byť možné vyrobiť toľko, aby sa pokryl spotrebný dopyt, X, vyplývajúci z voľby funkcie c, so vstupom práce nanajvýš Z. Produkčné ohraničenie je teda:

$$X \leq H(Z). \tag{8}$$

5.2 Nutné podmienky pre optimum.

Za predpokladu, že optimálne riešenie nášho problému existuje, odvodíme teraz podmienky, ktoré musí spĺňať.

Ak budeme predpokladať, že c je diferencovateľná, derivácia $u(c(ny), y)$ podľa y musí byť v optime rovná nule. Keď označíme derivácie u podľa prvého a druhého argumentu u_1, resp. u_2, dostaneme

$$u_1 n c'(ny) + u_2 = 0. \tag{9}$$

Pripomeňme si, že u_n je úžitok $n-$človeka. Potom z rovnice (9) vyplýva, že

$$\frac{du_n}{dn} = u_1 y c' = -\frac{y u_2}{n}. \tag{10}$$

Naším cieľom je maximalizovať W za podmienok $X \leq H(Z)$, diferenciálnej rovnice (10) a definície $u_n = u(x_n, y_n)$. V zmysle Lagrangeovej metódy riešime túto úlohu s ohraničeniami ako úlohu na voľný extrém pre Lagrangeovu funkciu

$$W - pX + wZ = \int_0^\infty (G(u_n) - px_n + wy_n n) f(n) dn \tag{11}$$

za podmienky (10), pričom p a w majú rozmer tieňových cien pre X a Z. Úloha má teraz podobu úlohy optimálneho riadenia, kde u_n je stavová premenná a y_n je riadiaca premenná, x_n je funkcia u_n a y_n je implicitne daná vzťahom $u_n = u(x_n, y_n)$. Takto sformulovanú úlohu vyriešime pomocou Pontrjaginovho princípu maxima. Hamiltonián pre tento problém má nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} M &= (G(u_n) - px_n + wy_n n) f(n) + \Phi_n \frac{du_n}{dn} = \\ &= (G(u_n) - px_n + wy_n n) f(n) - \Phi_n \frac{y_n u_2}{n}, \end{aligned}$$

kde Φ_n je funkcia n spĺňajúca (tzv. adjungovanú) diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dn} &= -\frac{\partial M}{\partial u} = \\ &= -\left[G'(u_n) - \frac{p}{u_1}\right] f(n) + \Phi \frac{y_n u_{12}}{n u_1}. \end{aligned} \tag{12}$$

y_n by malo maximalizovať M, z čoho vyplýva podmienka:

$$\left[wn + \frac{pu_2}{u_1}\right] f(n) + \Phi \frac{\Psi_y}{n} = 0, \tag{13}$$

kde funkcia $\Psi(u, y)$ je definovaná vzťahom

$$\Psi(u, y) = -yu_2(x, y), \tag{14}$$

a Ψ_y je parciálna derivácia Ψ vzhľadom na y.

Rovnicu (12) by sme mohli teraz zintegrovať, aby sme dostali funkciu Φ_n, ktorú by sme potom dosadili do (13), čím by sme dospeli k rovnici, ktorú musí spĺňať naše hľadané optimum. K tejto podmienke sa ale môžeme dopracovať aj spôsobom, ktorý je bližší variačnému počtu. Za týmto účelom budeme rovnicu (10) písať v integrovanej forme

$$\begin{aligned} u_n &= -\int_0^n y_m u_2(x_m, y_m) \frac{dm}{m} + u(c(0), 0) = \\ &= \int_0^n \Psi(u_m, y_m) \frac{dm}{m} + u_0, \end{aligned} \tag{15}$$

kde Ψ je funkcia, definovaná vyššie a u_0 predstavuje úžitok, prislúchajúci človeku s nulovým výkonom. Predpokladajme najprv, že Ψ je nezávislé na u, čo zodpovedá špeciálnemu prípadu $u_{12} = 0$. Ak uvažujeme odchýlku od optima, ktorá zmení funkcie u_n a y_n o "malú" variáciu δu_n a δy_n, z rovnice (15) dostaneme vzťah medzi týmito variáciami:

$$\delta u_n = \int_0^n \Psi_y \delta y_m \frac{dm}{m} + \delta u_0. \tag{16}$$

Tieto variácie spôsobia zmeny aj vo W, X aj Z. Tak, ako predtým, aj teraz sú prítomné tieňové ceny pre X a Z. Potom výraz (11) musí ostať po variácii konštantný:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_0^\infty (G(u_n) - px_n + wy_n n) f(n) dn = \\ &= \int_0^\infty \left(G'(u_n)\delta u_n - p\left(\frac{1}{u_1}\delta u_n - \frac{u_2}{u_1}\delta y_n\right) + w\delta y_n n\right) f(n) dn, \end{aligned} \tag{17}$$

kde variácia x je daná vzťahom

$$\delta u_n = \delta u(x_n, y_n) = u_1 \delta x_n + u_2 \delta y_n. \tag{18}$$

Zostáva nám už len dosadiť (16) do (17), čo vedie k

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^\infty \left\{ \left[G'(u_n) - \frac{p}{u_1} \right] \left[\int_0^n \Psi_y \delta y_m \frac{dm}{m} + \delta u_0 \right] + \left[wn + p\frac{u_2}{u_1} \right] \delta y_n \right\} f(n) dn = \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_n^\infty \left[G'(u_m) - \frac{p}{u_1} \right] f(m) dm \frac{\Psi_y}{n} + \left(wn + p\frac{u_2}{u_1} \right) f(n) \right\} \delta y_n dn + \\ &\qquad + \int_0^\infty \left[G'(u_n) - \frac{p}{u_1} \right] f(n) dn \delta u_0.\end{aligned} \tag{19}$$

Rovnica (19) musí byť splnená pre všetky možné variácie funkcie y_n a čísla u_0. Keďže u_0 môže v optime aj vzrásť, aj klesnúť, v bode optima musí platiť:

$$\int_0^\infty \left[G'(u_n) - \frac{p}{u_1} \right] f(n) dn = 0. \tag{20}$$

Ak by boli možné všetky variácie y_n, mohli by sme tiež žiadať, aby aj výraz v kučeravých zátvorkách bol rovný nule:

$$\left(wn + p\frac{u_2}{u_1} \right) f(n) = \frac{\Psi_y}{n} \int_n^\infty \left[\frac{p}{u_1} - G'(u_m) \right] f(m) dm. \tag{21}$$

Musíme si však uvedomiť, že toto platí len pre $n > n_0$. Totiž pre všetky n (okrem n_0), pre ktoré $y_n = 0$, nie sú možné všetky variácie y, nakoľko y nemôže byť záporné.

Vieme ešte, že hraničný produkt práce sa musí rovnať tieňovej mzde:

$$pH'(Z) = w. \tag{22}$$

Rovnice (20) a (21) boli odvodené za špeciálneho predpokladu, že Ψ je nezávislé na u. Vo všeobecnejšom prípade musíme výraz (16) nahradiť výrazom

$$\delta u_n = \int_0^n T_{mn} \Psi_y \delta y_m \frac{dm}{m} + \delta u_0, \tag{23}$$

kde

$$T_{mn} = \exp \int_m^n \Psi_u \frac{dm'}{m'}. \tag{24}$$

Totiž, keď sa vrátime späť k rovnici (10) a použijeme variáciu, dostaneme

$$\frac{d}{dn} \delta u_n = \frac{1}{n} \Psi_u \delta u_n + \frac{1}{n} \Psi_y \delta y_n. \tag{25}$$

Toto je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu a teda sa dá vyriešiť štandardným spôsobom, z čoho dostaneme (23).

Keď nahradíme výraz (16) výrazom (23), môžeme pokračovať vo výpočtoch tak, ako predtým. Zistíme, že (20) sa zovšeobecní na

$$\int_0^\infty \left[G'(u_n) - \frac{p}{u_1}\right] T_{0n} f(n) dn = 0, \tag{26}$$

kým z (21) vznikne

$$\left(wn + p\frac{u_2}{u_1}\right) f(n) = \frac{\Psi_y}{n} \int_n^\infty \left[\frac{p}{u_1} - G'(u_m)\right] T_{nm} f(m) dm. \tag{27}$$

Rovnice (15) a (27) môžeme považovať za rovnice určujúce funkcie u_n a y_n, keď máme dané 3 parametre u_0, w a p. Hodnoty týchto parametrov sú zafixované troma rovnicami (26), (22) a (8). Máme teda formálne dosť vzťahov na určenie optimálnej daňovej tabuľky, keďže funkcia c môže byť určená, keď už poznáme u_n a y_n.

5.3 Nutné podmienky: Zhrnutie.

Doterajšie výsledky nám neposkytujú veľa informácií o riešení našej úlohy. Viac sa dá povedať za predpokladu

(B) $V(x,y) = -y\frac{u_2}{u_1}$ je rastúca funkcia pre všetky $x > 0$ (a ohraničená na $0 \le x \le \bar{x}$, $0 \le y \le \bar{y}$ pre všetky $\bar{x} < \infty$ a $\bar{y} < 1$).

Za tohto predpokladu platí nasledujúca

Veta 5.3.1. *$z_n = ny_n$ maximalizuje úžitok pre všetky n pri danej funkcii spotreby c vtedy a len vtedy, keď*

(i) z_n je neklesajúca funkcia definovaná pre všetky $n > 0$,

(ii) $0 \le z_n < n$ pre všetky $n > 0$.

Dôkaz. Úplný dôkaz je spravený v [7].

Pre overenie predpokladajme, že z_n je diferencovateľná a c je dvakrát diferencovateľná funkcia. Podmienku prvého rádu (9) môžeme upraviť takto:

$$\frac{\partial}{\partial z} u\left(c(z), \frac{z}{n}\right) = \frac{u_1}{z}\left[zc'(z) - V\left(c(z), \frac{z}{n}\right)\right] = 0. \tag{28}$$

Ďalej máme podmienku druhého rádu, podľa ktorej je derivácia tohto výrazu nerastúca v z_n. Keďže v z_n je rovná nule, nemusíme derivovať pozitívny faktor $\frac{u_1}{z}$. Inými slovami,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[zc'(z) - V\left(c(z), \frac{z}{n}\right)\right] \leq 0 \text{ v } z = z_n. \tag{29}$$

Zderivujme teraz rovnicu $z_n c'(z) - V(c(z), z/n) = 0$ vzhľadom na n :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[zc' - V\right]|_{z=z_n}\frac{dz_n}{dn} + V_2\left(c(z_n), \frac{z_n}{n}\right)\frac{z}{n^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[zc' - V\right]|_{z=z_n}\frac{dz_n}{dn} = -V_2\left(c(z_n), \frac{z_n}{n}\right)\frac{z}{n^2}. \tag{30}$$

Z (29) a z predpokladu (B) teda vyplýva, že

$$\frac{dz_n}{dn} > 0 \tag{31}$$

pokiaľ $z_n \neq 0$. V skutočnosti je z_n striktne rastúca, keď $n > n_0$ a c je diferencovateľná. Podmienka (ii) je zjavne splnená pre voľbu spotreby, ktorá maximalizuje úžitok.

Aby sme dokázali, že existuje vhodná funkcia spotreby pre danú funkciu z spĺňajúcu vyššie spomenuté dve podmienky, môžeme definovať c pomocou podmienky prvého rádu (28). Z (30) potom vyplýva, že podmienka druhého rádu je tiež splnená.

Treba si uvedomiť, že, ako dôsledok Vety 5.3.1, podmienka (A) je splnená, keď je splnená podmienka (B), keďže z_n je neklesajúca funkcia.

Z Vety 5.3.1 ďalej vyplýva, že z_n, a teda aj x_n sú neklesajúce funkcie, keď zavedieme optimálnu daň. Navyše nám ukazuje, aké zmeny funkcie y_n môžeme pozorovať, keď použijeme variačný argument, že prípustné malé zmeny by mali spôsobiť zmenu len druhého rádu v maximande. Presný argument je komplikovaný, sčasti preto, že musíme zvážiť aj možnosť, že z_n je konštantná na nejakom intervale a nespojitá pre niektoré n. Úplný prehľad výsledku, ktorý je dokázaný v [7], vyzerá nasledovne:

Veta 5.3.2. *Ak preferencie spĺňajú predpoklad (B) a (u_n, x_n, y_n) sú určené na základe optimálnej dane, potom*

(i) $z_n = ny_n$ je neklesajúca funkcia n

(ii) $u_n = u_0 - \int_0^n y_m \frac{u_2(x_m, y_m)}{m} dm$ $(n \geq 0)$ (32)

(iii) pre všetky body rastu funkcie z_n platí:

$$A_n \equiv \left[w + \frac{u_2^{(n)}}{nu_1^{(n)}}\right]f(n) - \frac{\Psi_y}{n^2}\int_n^\infty \left[\frac{1}{u_1^{(m)}} - \lambda G'(u_m)\right]T_{nm}f(m)dm = 0, \tag{33}$$

kde index "(n)" znamená, že hodnota funkcie je určená pre $n-$človeka maximalizujúceho svoj úžitok, a

$$\Psi_y = -u_2^{(n)} - y_n u_{22}^{(n)} + y_n \frac{u_2^{(n)} u_{12}^{(n)}}{u_1^{(n)}}, \tag{34}$$

$$T_{nm} = \exp\left[-\int_n^m y_{m'} \frac{u_{12}(x_{m'}, y_{m'})}{u_1(x_{m'}, y_{m'})} dm'\right] \tag{35}$$

(iv) Ak $n \in \langle n_1, n_2 \rangle$, pričom $\langle n_1, n_2 \rangle$, je maximálny interval, na ktorom je z konštantná, tak

$$\int_{n_1}^{n} A_m dm \geq 0, \quad \int_{n}^{n_2} A_m dm \leq 0, \tag{36}$$

(v) Ak z je nespojitá v n, $\bar{y}_n$ je definované ako $\lim_{m \to n^-} y_m$, $\bar{x}_n$ definujeme vzťahom

$$u(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = u_n = u(x_n, y_n),$$

a $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ označuje hodnotu u_1, resp. u_2, v bode $\bar{x}_n$, $\bar{y}_n$, kým u_1, u_2 označuje hodnotu v x_n, y_n, ($y_n = \lim_{m \to n^+} y_m$,) pričom platí:

$$\frac{(wy_n - x_n/n) - (w\bar{y}_n - \bar{x}_n/n)}{\bar{y}_n \bar{u}_2 - y_n u_2} = \frac{w + u_2/nu_1}{\Psi_y} = \frac{w + \bar{u}_2/n\bar{u}_1}{\bar{\Psi}_y}. \tag{37}$$

Ak Ψ_y je neklesajúca funkcia v y pre konštantné u, z_n je spojitá pre všetky n.

Pozn.: Tento bod nám vlastne hovorí, že aj keď z je nespojitá, funkcia $v = \frac{w + \frac{u_2}{nu_1}}{\Psi_y}$ je spojitá, alebo aspoň spojito dodefinovateľná.

(vi) Pripomenieme si vzťah (26)

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{u_1} - \lambda G'(u_m)\right] T_{0m} f(m) dm = 0, \tag{38}$$

a napokon

(vii) $X = H(Z)$ (39)

$w = H'(Z)$ (40)

V tomto prípade w predstavuje tieňovú komoditnú cenu príjmu (w/p v predchádzajúcom značení), kým λ (predtým $1/p$) je inverzná k hraničnému sociálnemu úžitku z tovarov (národný príjem).

5.4 Interpretácia.

Ak z nie je konštantná v n a teda $c(.)$ je diferenecovateľná funkcia v z_n, platí podmienka prvého rádu (9). Túto môžme previesť do tvaru

$$-\frac{u_2}{nu_1} = c'(z). \tag{41}$$

Ak označíme hraničnú daň, $\frac{d}{d(wz)}[wz - c(z)]$ ako θ, dostaneme

$$\begin{aligned} w\theta &= \frac{d}{dz}[wz - c(z)] = w + \frac{u_2}{nu_1} = \\ &= \frac{\Psi_y}{n^2 f(n)} \int_n^\infty \frac{1 - \lambda G' u_1}{u_1} T_{nm} f(m) dm, \end{aligned} \tag{42}$$

kde posledná rovnosť vyplýva zo vzťahu (33). Vzťah (42) nám veľa napovie o vlastnostiach hraničnej dane. Predovšetkým nám dá informáciu o znamienku dane: už vieme, že θ nebude väčšia, ako 1 ($\theta = 1 + \underbrace{\frac{u_2}{wnu_1}}_{<0} < 1$). Prirodzene predpokladáme, že θ bude zvyčajne kladná. Použitím (42) a Vety 5.3.1 to môžeme dokázať.

Uvedomme si najprv, že $1 - \lambda G' u_1$ je neklesajúca funkcia n, keďže x_n je neklesajúca funkcia n a $\frac{\partial}{\partial x} G = G' u_1$ je neklesajúca funkcia v x. Ak by $1 - \lambda G' u_1$ bolo vždy kladné, alebo vždy záporné, rovnica (38) by nemohla byť nikdy splnená. Z toho vyplýva, že výraz

$$\int_n^\infty \frac{1}{u_1}(1 - \lambda G' u_1) T_{nm} f(m) dm$$

je rastúci v n pre n menšie, nanajvýš rovné nejakému $\bar{n}$, v každom prípade je však kladný pre $n > \bar{n}$ (použili sme vlastnosti $u_1 > 0$, $T_{mn} > 0$.) Keďže je nulový, keď $n = 0$, musí byť nezáporný pre všetky n. Ako dôsledok, hraničná daň je nezáporná vo všetkých bodoch rastu z. Ak n nie je bodom rastu z, c nie je diferencovateľná v z. Toto sa dá zhrnúť do:

Tvrdenie 5.4.1. *Za predpokladu (B) je $wz - c(z)$ neklesajúca funkcia pre všetky z.*

Rovnicu (38) môžeme prepísať do tvaru

$$\left[\frac{1}{u_1(x_0, 0)} - \lambda G'(u_0)\right] F(n_0) + \int_{n_0}^\infty \left[\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right] T_{n_0 m} f(m) dm = 0 \tag{43}$$

Keď výraz (43) pripočítame k výrazu (33) pre $n = n_0$, dostaneme

$$w + \frac{u_2(x_0,0)}{n_0 u_1(x_0,0)} = \Psi_y(u_0,0)\frac{F(n_0)}{n_0^2 f(n_0)}\left[\lambda G'(u_0) - \frac{1}{u_1(x_0,0)}\right]. \tag{44}$$

Nanešťastie sa z týchto lokálnych podmienok nedá vyčítať veľa informácií, dokonca ani pre malé n. Aby sme získali akýkoľvek detail pre konkrétny prípad, musíme vyšetriť celý systém rovníc. Je však jednoduchšie ich vyšetrovať pre určitý prípad a to aj onedlho spravíme. Z rovnice (44) však môžeme získať aspoň nejaké informácie o n_0 a x_0. Napríklad je z nej jasné, že n_0 môže byť nula len keď F/nf konverguje k nule pre n idúce k nule, keďže ľavá strana rovnice (44) je ohraničená, $n_0 = 0$ len keď $x_0 = 0$ a teda $1/u_1 = 0$. Z toho vyplýva, že $n_0 = 0$ len keď $F/(n^2 f)$ je ohraničená pre n idúce do nuly, čo znamená, že F konverguje k nule rýchlejšie, ako $\exp(-1/n)$. Toto však nezahŕňa ani prípady, ktoré bežne uvažujú ekonómovia. V tejto chvíli však môžme spraviť záver, že v najzaujímavejších prípadoch bude optimálne podporiť niektorých ľudí v tom, aby nepracovali a boli "zbytoční".

Hlavným doterajším výsledkom teda je, že optimálna daň závisí na rozdelení schopností v populácii a na preferenciách medzi prácou a spotrebou, avšak takým komplikovaným spôsobom, že vo všeobecnosti nie je možné povedať, či by mala byť hraničná daň vyššia pre vyššiu, nižšiu, alebo strednú výkonnostnú kategóriu. Aj napriek tomu sú však dve integrálne rovnice, charakterizujúce optimálnu daň, v takej forme, že ju môžeme vypočítať bez väčších ťažkostí.

5.5 Aditívna funkcia úžitku.

Špeciálne zaujímavý je prípad, keď pre všetky x a y platí

$$u_{12} = 0 \tag{45}$$

To znamená, že u_1 závisí len od x a u_2 len od y.

Tvrdenie 5.5.1. *Ak platí predpoklad (45), potom funkcia $V(x,y)$, definovaná vyššie, je rastúca funkcia v y a ohraničená pre malé x a y.*

Dôkaz. $V = -yu_2(y)/u_1(x)$ a $V_2 = (-u_2 - yu_{22})/u_1 > 0$. Ohraničenosť je zjavná.

Dôsledok: Za predpokladu (45) platí Veta 5.3.2.

Z bodu (v) tejto vety vieme, že y_n je spojitá, keď Ψ_y je neklesajúca. V prípade aditívnej funkcie úžitku je táto podmienka ekvivalentná s podmienkou

$$-yu_2(y) \text{ je konvexná.} \tag{46}$$

Nie je dôvod, prečo by táto podmienka mala byť vo všeobecnosti splnená, ale môžeme ju ľahko overiť v každom konkrétnom prípade. V [7] je dokázané, že za tejto podmienky je Veta 5.3.2 nielen nutnou, ale aj postačujúcou podmienkou optimality.

Ak zameriame našu pozornosť špeciálne na prípad, keď z je striktne rastúca pre $n > n_0$, optimálny stav je riešením systému rovníc

$$\left(w + \frac{u_2}{nu_1}\right) n^2 f(n) = \Psi_y \int_n^\infty \left(\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right) f(m) dm, \tag{47}$$

$$u_n = u_0 - \int_0^n y_m u_2 \frac{dm}{m}. \tag{48}$$

Ďalej budeme predpokladať, že f je spojito diferencovateľná. Keďže x_n a y_n sú v takom prípade spojité, tak u_n a $\left(w + \frac{u_2}{nu_1}\right)/\Psi_y$ sú diferencovateľné funkcie n. Označme

$$v = \frac{w + \frac{u_2}{nu_1}}{\Psi_y}. \tag{49}$$

Potom u a v sú spojito diferencovateľné funkcie x a y. Keďže $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ a $\frac{\partial v}{\partial x} < 0$ aj $\frac{\partial v}{\partial y} < 0$, Jakobián $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ je vždy záporný. Z toho vyplýva, že x a y sa dajú vyjadriť ako spojito diferencovateľné funkcie premenných u a v a teda sú aj diferencovateľnými funkciami n.

Rovnice (47) a (48) môžeme prepísať na diferenciálne rovnice

$$\frac{dv}{dn} = -\frac{v}{n}\left(2 + \frac{nf'}{f}\right) - \frac{1}{n^2 u_1} + \frac{\lambda G'}{n^2}, \tag{50}$$

$$\frac{du}{dn} = -\frac{yu_2}{n} \tag{51}$$

ktoré, ako sme pred chvíľou ukázali, môžu byť chápané ako rovnice pre u a v. Konkrétne riešenie a konkrétna hodnota λ sú definované okrajovými podmienkami, rovnicami (39), (40),

$$v_{n_0} = \frac{F(n_0)}{n_0^2 f(n_0)} \left[\lambda G'(u_{n_0}) - \frac{1}{u_1(x_{n_0})}\right], \tag{52}$$

čo je vlastne (38) pre tento prípad a podmienkou, ktorá vyplýva zo (47),

$$v_n n^2 f(n) \to 0 \text{ pre } n \to \infty. \tag{53}$$

Keďže z_n je striktne rastúce pre $n \geq n_0$, riešenie, ktoré bude spĺňať všetky predchádzajúce podmienky, bude podľa Vety 5.3.2 a [7] optimálne.

Rovnice (39) a (40), produkčná funkcia a rovnica hraničnej produktivity, môžu byť pri samotnom výpočte zanedbané. Ku konkrétnym hodnotám w a λ, použitým pri výpočte, môžeme určiť prislúchajúce hodnoty X a Z. Z toho vieme určiť optimálnu daň pre hraničný produkt w a priemerný produkt X/Z. Týmto spôsobom môžeme vypočítať schémy optimálnej dane zodpovedajúce rôznym priemerným a hraničným produktom.

Aby sme ešte zistili znamienko $\frac{dz}{dn} = y_n + n\frac{dy_n}{dn}$, počítame z rovníc (49) a (51):

$$\Psi_y \frac{dv}{dn} = \frac{1}{n}\left(\frac{u_{22}}{nu_1} - v\Psi_{yy} + \frac{u_2^2 u_{11}}{nu_1^3}\right)\frac{dz}{dn} - \frac{y_n}{n}\left(\frac{u_{22}}{nu_1} - v\Psi_{yy}\right) - \frac{u_2}{n^2 u_1}. \tag{54}$$

Potom, použitím (50):

$$\left[\frac{u_{22}}{nu_1} - v\Psi_{yy} + \frac{u_2^2 u_{11}}{nu_1^3}\right]\frac{dz}{dn} = -\Psi_y\left\{\left(2 + \frac{nf'}{f} + \frac{y\Psi_{yy}}{\Psi_y}\right)v + \frac{2}{nu_1} - \frac{\lambda G'}{n}\right\}. \tag{55}$$

Na overenie predpokladu $\frac{dz}{dn} \geq 0$ nám potom stačí pre riešenie overiť, či

$$\left(2 + \frac{nf'}{f} + \frac{y\Psi_{yy}}{\Psi_y}\right)v + \frac{2}{nu_1} - \frac{\lambda G'}{n} \geq 0. \tag{56}$$

Nerovnica (56) je ekvivalentná s nerovnicou $\frac{dz}{dn} \geq 0$, pretože výraz v hranatých zátvorkách v (55) je člen po člene záporný.

Pri samotných výpočtoch môžeme postupovať nasledovne:

(1) Zvolíme λ. Aby sme zvolili správnu hodnotu, vypočítame ju z rovnice (38) pre nejaké možné a prijateľné rozdelenie spotreby a práce.

(2) Zvolíme n_0. (Interval, z ktorého budeme voliť n_0 je obmedzený podmienkou (52), že $v_{n_0} \geq 0$.)

(3) Keď si uvedomíme, že $y_{n_0} = 0$, tak v_{n_0} a u_{n_0} vypočítame z (49) a (52).

(4) Vypočítame riešenie rovníc (50) a (51) pre rastúce n, kým neprestane byť splnená podmienka (56), alebo je zjavné, že nebude splnená podmienka (53)(pozri (6) dole.)

(5) Ak (56) prestane byť splnená, z_n je konštantné a u_n (a v_n) sa počítajú zo (49), kým (56) nebude opäť platiť, kedy z_n začne opäť rásť a pokračujeme ako v bode (4) vyššie.

(6) Riešenie by malo skončiť, keď u_n alebo x_n začnú klesať, alebo y_n alebo v_n klesnú na nulu. Iné zastavujúce pravidlá sa dajú určiť pre konkrétne prípady.

(7) Obor hodnôt, z ktorých vyberáme n_0 musí byť taký, aby bola čo najlepšie splnená podmienka (53). Efektívnejšie iterácie na počítanie dane sa dajú nájsť v konkrétnych prípadoch.

5.6 Príklad.

Pozrime sa teraz, ako by vyzeral výpočet dane pre nasledujúce údaje:

$$u(x,y) = \alpha \ln x + \ln(1-y) \tag{57}$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma n} \exp\left[-\frac{(\ln n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] & \text{pre } n > 0 \\ 0 & \text{pre } n \le 0, \end{cases} \tag{58}$$

Výkonnosť má teda lognormálne rozdelenie. Priemerný hraničný produkt celodennej práce je potom $e^{\frac{1}{2}\sigma^2+\mu}$, ale len pre voľbu jednotiek spotrebného tovaru. Pre zjednodušenie položíme $G(u) = u$.

Položme $w = 1$, $\mu = -1$. Pre tieto hodnoty parametrov nadobúdajú rovnice (50) a (51) tvar:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dn} &= \frac{v}{n}\left(\frac{\ln n + 1}{\sigma^2} - 1\right) - \frac{x}{\alpha n^2} + \frac{\lambda}{n^2} \\ \frac{du}{dn} &= \frac{y}{n(1-y)}, \end{aligned} \tag{59}$$

kde, podľa (49),

$$v = \frac{1 - \frac{x}{\alpha n(1-y)}}{1/(1-y)^2} = (1-y)\left(1 - y - \frac{x}{\alpha n}\right). \tag{60}$$

Zavedieme substitúciu:

$$s = 1 - y$$

$$t = \ln n.$$

Potom pre v podľa (60) platí:

$$v = s\left(s - \frac{x}{\alpha n}\right),$$

z čoho

$$x = \alpha n\left(s - \frac{v}{s}\right) \tag{61}$$

Dosadenie tohto vyjadrenia do (57) nám dá

$$u(x,y) = \alpha \ln \alpha n + \ln\left(s - \frac{v}{s}\right) + \ln s \tag{62}$$

Z rovníc pre $\frac{dv}{dn}$ a $\frac{du}{dn}$ po substitúcii dostaneme:

$$\frac{dv}{dt} = v\left(\frac{t+1}{\sigma^2} + \frac{1}{s} - 1\right) - s + \lambda e^{-t}, \tag{63}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{[1-\alpha-(1+\alpha)s](s^2-v) + \alpha s(vt + \lambda e^{-t})}{(1+\alpha)s^2 - (1-\alpha)v}. \tag{64}$$

Totiž: vieme, že

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha \ln \alpha n + \ln\left(s - \frac{v}{s}\right) + \ln s\right). \tag{65}$$

Na druhej strane, z rovnice (59):

$$\frac{du}{dt} = \frac{1-s}{s}. \tag{66}$$

Keď dáme do rovnosti vzťahy (65) a (66), dostaneme vzťah (64). Takto získame sústavu diferenciálnych rovníc pre funkcie v a s. Rovnica (64) je dôležitá a potrebná pre určenie vzťahu medzi výkonnosťou n a počtom odpracovaných hodín, y.

Dá sa ukázať, že pre $t \to \infty$ $s \to \frac{1}{1+\alpha}$ a $vt \to \frac{1}{1+\alpha}$. Potom hraničná daň, vypočítaná zo vzťahu (42),

$$\theta = \frac{v}{s^2} \sim \frac{1+\alpha}{t}. \tag{67}$$

Pre naše rozdelenie má len 1 percento populácie t väčšie, ako 1.7 a len jedna tisícina ľudí má t väčšie, ako 2.4. Keďže α môže byť rovná 1, táto aproximácia určite nie je uspokojujúca.

5.7 Numerická ilustrácia.

Sústava diferenciálnych rovníc z príkladu nemá explicitné riešenie v podobe konkrétnej formule, môžeme ju však vyriešiť aspoň numericky. Položme $\alpha = 1$, $w = 1$, $\sigma = 0.39$. Z výsledkov, uvedených v Tab. 1 v prílohe č.5, môžeme vyčítať, aká je optimálna daň pre konkrétne hodnoty priemerného produktu práce X/Z a aké je rozdelenie spotreby a práce v populácii.

Budeme predpokladať lineárnu produkčnú funkciu

$$X = Z + a \tag{68}$$

Maximalizujeme

$$\int_0^\infty [\ln x + \ln(1-y)] f(n) dn \tag{69}$$

za podmienky

$$\int_0^\infty x f(n) dn = \int_0^\infty n y f(n) dn + a.$$

Potom Lagrangeova funkcia má tvar

$$L(x, y, \lambda) = \ln x + \ln(1-y) + \lambda(x - ny). \tag{70}$$

Nutná podmienka optima $\partial L/\partial x = 0$ je splnená pre $x = -1/\lambda$, a teda x by malo byť v plnom optime pre všetkých rovnaké, označíme $x = x_0$. Potom y musí maximalizovať

$$\ln(1-y) + ny/x_0. \tag{71}$$

Nutné podmienky maximalizácie tohto výrazu nás privedú k

$$y_n^0 = [1 - x_0/n]_+,$$

kde $[\ldots]_+$ znamená $\max(0, \ldots)$.

Je vhodné poznamenať, že v optime budú pracovať len ľudia, ktorých n presiahne hodnotu x_0. Je zaujímavé, že pre funkciu blahobytu, definovanú v (69), budú mať zručnejší ľudia nižší úžitok, ako tí menej zruční. Toto je však nemožné po zdanení príjmu. Hodnotu x_0 nám určí produkčné ohraničenie

$$x_0 = \int_{x_0}^{\infty} (n - x_0) f(n) dn + a. \tag{72}$$

Pre lognormálne rozdelenie ho môžeme upraviť na tvar

$$2x_0 - x_0 F(x_0) - e^{\frac{1}{2}\sigma^2 - 1}[1 - F(e^{-\sigma^2})] = a. \tag{73}$$

Riešenie tejto rovnice nám dá úroveň spotreby v optime a tiež úroveň zručnosti, pod ktorou nebude od človeka vyžadovaná žiadna práca, teda úroveň, pri ktorej celodenná práca by človeku vyniesla mzdu rovnú jeho spotrebe.

V Mirrleesovej práci ešte nájdeme tabuľky, v ktorých je uvedené optimálne rozdelenie spotreby a práce, ako aj optimálna daň. Tieto tabuľky sa mi však nepodarilo "zrekonštruovať". Uvádzam preto v prílohe vlastné výsledky, ku ktorým som dospela už spomínaným postupom.

Tabuľka 1 bola vypočítaná pre lognormálne rozdelenie s parametrami $\mu = -1$, $\sigma = 0.39$. Pre vlastné výpočty som zvolila rozdelenia na konečnom intervale, nakoľko nepovažujem za rozumné a potrebné uvažovať možnosť nekonečných schopností. Výhodou takýchto rozdelení je tiež možnosť interpretovať premennú n, napr. hodnotu $n = 1$ môžeme považovať za 100 percentnú výkonnosť. V tabuľke 2 som teda uvažovala rovnomerné rozdelenie schopností na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ a v poslednej tabuľke je použité rozdelenie výkonnosti, ktoré nemá špeciálny názov, nazvime ho napr. trojuholníkové.

Z výsledkov sa nedá jednoznačne usúdiť, ktoré rozdelenie motivuje ľudí zvyšovať svoj výkon viac a ktoré menej. Pri trojuholníkovom rozdelení sa ľudia javia byť najmenej motivovaní a hodnoty pre y sú pre toto rozdelenie najnižšie, avšak pri rovnomernom a lognormálnom rozdelení sú tieto hodnoty veľmi vyrovnané. Spotrebu môžeme porovnať zvlášť pre "nižšiu výkonnostnú triedu" a zvlášť pre "vyššiu". Totiž ľudia s nižšou výkonnosťou ($n \leq 0.5$) majú najvyššiu spotrebu pri lognormálnom rozdelení, avšak pri vyššej výkonnosti vychádza najvyššia spotreba pre trojuholníkové rozdelenie. Čo sa týka hraničnej dane, len v prípade lognormálneho rozdelenia sme dospeli k rastúcim hodnotám. Je veľmi zaujímavé, že hraničná daň je pre rovnomerné a trojuholníkové rozdelenie pre nízke n veľmi vysoká. Tým sú nevýkonní jedinci akoby potrestaní za malú snahu. Tiež je pozoruhodné, že pri trojuholníkovom rozdelení má až 36 percent populácie hraničnú daň rovnú nule. Na základe takýchto výsledkov nám neostáva nič iné, len súhlasiť s konštatovaním, že sa nedá jednoznačne a všeobecne povedať, pre ktorú výkonnostnú skupinu má byť hraničná daň vyššia, či nižšia, nakoľko jej hodnoty sú úzko späté s rozdelením výkonnosti v populácii.

5.8 Nejasnosti.

Na záver tejto kapitoly by som spomenula niekoľko nejasností, spojených s Mirrleesovým modelom:

Vo formulácii problému je zahrnuté ohraničenie $X \leq H(Z)$, no funkcia $H(Z)$ prekvapujúco v Lagrangeiáne vôbec nevystupuje. Jedno z možných vysvetlení je, že Mirrlees jednoducho predpokladá lineárnu funkciu $H(Z) = kZ$ a konštantu k potom zahŕňa do multiplikátorov.

Ďalším problémom je, že Mirrlees presnejšie neopísal dôvod použitia dvoch multiplikátorov, w a p. Keďže vo formulácii vystupuje len jedno ohraničenie, $X \leq H(Z)$, bolo by prirodzené očakávať len jeden multiplikátor. Opäť môžeme vysloviť akúsi domnienku, ktorá by vysvetľovala tento jav: povedzme, že do modelu zahrnieme aj pridzený predpoklad, že $X \geq 0$. Potom, keď maximalizujeme W za podmienok $X \leq kZ$ a $X \geq 0$, Lagrangeova funkcia vyzerá nasledovne:

$$W + \lambda_1 X + \lambda_2(kZ - X) = W - (\lambda_2 - \lambda_1)X + \lambda_2 kZ,$$

z čoho už vyplýva výraz (11)

$$W - pX + wZ,$$

pre $p = \lambda_2 - \lambda_1$ a $w = \lambda_2 k$.

Tiež nie je vysvetlené, odkiaľ pochádza a čo predstavuje výraz na ľavej strane vzťahu (37).

A napokon Mirrlees bez bližšieho okomentovania rozlišuje pojmy "full optimum" a "optimal regime". Na tento jav sa ponúka vysvetlenie, že "full optimum" je optimálne riešenie a "optimal regime", resp. "partial optimum" je "druhé najlepšie" riešenie. Metóda na jeho nájdenie však v tejto jeho práci nebola popísaná.

6. Porovnanie.

Pri porovnaní Vickreyho a Mirrleesovej práce môžeme, okrem drobných rozdielov v značení, ktoré nijako neovplyvňujú výsledky, spozorovať aj niekoľko významnejších rozdielov. Medzi ich prístupmi však môžeme spozorovať aj niekoľko súvislostí a spoločných znakov.

Prvým dôležitým rozdielom je zavedenie rozdelenia výkonnosti v populácii. Vickrey si jednotlivcov očísloval, resp. "označkoval" pomocou n a potom $w(z,n)$ označil prácu, potrebnú na to, aby jednotlivec n vyprodukoval dielo z. Mirrlees do svojho modelu zaviedol distribučnú funkciu rozdelenia schopností, čím umožnil citlivejší prístup k rôznym populáciám. Ak výkonnosť jednotlivca označíme m, (v predchádzajúcom texte n, m zavádzame len kvôli lepšej prehľadnosti.) Potom v zmysle Mirrleesovej definície platí:

$$w(z,n) = z/m(n),$$

kde $m(n)$ vyjadruje výkonnosť $n-$človeka z Vickreyho modelu.

Nech teraz $N(m)$ predstavuje už spomínanú distribučnú funkciu rozdelenia výkonnosti, $N'(m) = f(m)$. Potom po substitúcii $n = N(m)$ dostaneme

$$\int (u + \lambda(z-r))dn = \int (u + \lambda(z-r))N'(m)dm = \int (u + \lambda(z-r))f(m)dm.$$

Potom ohraničenie $\sum(z-r) = R$, ktoré neskôr Vickrey zjednodušil do spojitej, integrálnej podoby, vyzerá nasledovne:

$$\int (z-r)f(m)dm = R \Leftrightarrow \int zf(m)dm = \int rf(m)dm + R,$$

čo sa výrazne podobá na produkčné ohraničenie z Mirrleesovho modelu.

Môžeme teda skonštatovať, že Mirrlees použil špeciálny prípad funkcie $w(z,n)$, ale zato všeobecnejšiu podmienku na vzťah medzi X a Z.

Veľmi dôležité je tiež zavedenie empiricky podloženého obmedzenia na funkciu úžitku v podobe podmienky (B). Práve táto podmienka umožňuje vziať y za riadiacu premennú.

Najpodstatnejším rozdielom medzi Vickreyho a Mirrleesovým modelom je však určenie diferenciálnej rovnice $\frac{du}{dn}$. Potom sa na tento problém môžeme pozerať ako na problém dynamického riadenia. Premenná n pritom môže byť interpretovaná ako čas, hodnota úžitku $u(n)$ ako stav v čase n, diferenciálna rovnica vyjadruje zmenu stavovej premennej $u(n)$ a napokon produkcia $n-$ človeka predstavuje riadiacu premennú. Úloha je teraz preformulovaná tak, že ju môžeme vyriešiť pomocou Pontrjaginovho princípu maxima.

7. Záver.

Predstavili sme si teda niekoľko spôsobov, ktorými sa dá pristupovať k optimálnemu zdaňovaniu príjmu.

V druhej kapitole tejto práce, venovanej Edgeworthovej teórii, sme dospeli k progresívnej dani, či už pri minimálnej, rovnej alebo proporčnej obeti na úžitku. Ukázali sme si, že daň v Slovenskej republike implikuje konštantnú obeť na úžitku a vypočítali sme funkciu úžitku, zdôvodňujúcu daň v SR.

Potom sme prešli k Vickreymu, podľa ktorého je nedostatkom Edgeworthovho prístupu, že na človeka pôsobí demotivujúco a nepodnecuje ho zvyšovať svoj výkon. V záujme zohľadniť motiváciu človeka, zahrnul Vickrey do svojho modelu výkonnosť, avšak pri jeho formulácii nedospel ku konkrétnemu riešeniu tohto problému.

Na rozdiel od toho, Mirrlees vďaka preformulovaniu úlohy tento problém vyriešil. Ani on však nedospel k všeobecným vlastnostiam optimálnej dane. Môžeme skonštatovať, čo koniec - koncov vidno aj z tabuliek, uvedených v prílohe tejto práce, že optimálna daň je citlivá na rozdelenie výkonnosti v populácii.

Literatúra.

[1] F. Y. Edgeworth: *The Pure Theory of Taxation*, The Economic Journal, Volume 7, Issue 28 (Dec. 1897), 550–571.

[2] M. I. Kamien, N. L. Schwartz: *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier, 1995, pp. 49–51.

[3] H. P. Young: *Progressive Taxation and Equal Sacrifice*, The American Economic Review, Volume 80, Issue 1 (Mar. 1990), 253–266.

[4] J. Broome: *An Important Theorem on Income Tax*, Review of Economic Studies, Volume 42, No. 4 (Oct. 1975), 649–652.

[5] W. Vickrey: *Measuring Marginal Utility by Reactions to Risk*, Econometrica, Volume 13, Issue 4 (Oct. 1945), 319–333.

[6] J. A. Mirrlees: *An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation*, The Review of Economic Studies, Volume 38, Issue 2 (Apr. 1971), 175–208.

[7] J. A. Mirrlees: *Characterization of the Optimum Income Tax*, unpublished.

Príloha 1.

Výsledky ku kapitole 3.2:

1. odhad parametra C v lineárnej regresii $\ln t = k + C \ln \sqrt{x(x-t)} + \varepsilon$

	koeficienty	t-štatistika	hodnota p
k	-3.55	-83.0997	9exp(-138)
C	1.39	205.8657	7.5exp(-203)

Tieto výsledky potvrdzujú významnosť oboch parametrov a spolu s $R^2 = 0,996$ nás vedú ku konštatovaniu, že odhad $\ln t$ dobre fituje skutočné hodnoty.

2. overenie, či odhadnutá daň je v súlade so skutočnou daňou

údaje pre podiel odhadnutej dane ku skutočnej:

Štandardná odchýlka	0.063519
Priemer	1.00477
Koeficient variácie	0.063217

Príloha 2.

V tejto prílohe sú detailnejšie odvodené a popísané niektoré vzorce, ktorým sa vo svojej práci prof. Mirrlees bližšie nevenoval, resp. nezdôvodnil ich pôvod:

Vzťah (12): keďže x je funkciou u,

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\left[(G(u_n) - px_n + wy_n n)\, f(n) - \Phi \frac{y_n u_2(x_n, y_n)}{n}\right] = \\ &= \left(G'(u_n) - p\frac{dx}{du}\right) f(n) - \Phi \frac{y_n}{n}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{dx}{du}.\end{aligned}$$

Hodnotu $\frac{dx}{du}$ vypočítame za predpokladov vety o derivácii inverznej funkcie:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}} = \frac{1}{u_1}.$$

Dokopy nám to dá:

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \left(G'(u_n) - \frac{p}{u_1}\right) f(n) - \Phi \frac{y_n u_{12}}{n u_1},$$

čo už je výraz, vyskytujúci sa v (12).

Vzťah (13): keďže x je, ako sme spomenuli vyššie, funkciou u, je aj funkciou premennej y. Potom

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \left(wn - p\frac{dx}{dy}\right) f(n) + \frac{\Phi}{n}\frac{\partial}{\partial y}(-y_n u_2), \\ \frac{dx}{dy} &= -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = -\frac{u_2}{u_1},\end{aligned}$$

čo vyplýva z vety o derivácii funkcie danej implicitne. Po substitúcii $\Psi = -yu_2(x, y)$ napokon dostaneme:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(wn + \frac{pu_2}{u_1}\right) f(n) + \Phi\frac{\Psi_y}{n}.$$

Vzťah (22): keď chceme maximalizovať výraz $W - pX + wZ$ pri podmienke $X = H(Z)$, dostaneme $W - pH(Z) + wZ$. Derivácia tohto výrazu podľa Z musí byť v optime rovná nule, teda

$$-pH'(Z) + w = 0 \Leftrightarrow pH'(Z) = w.$$

Vzťah (28):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} u\left(c(z), \frac{z}{n}\right) &= u_1 c'(z) + u_2 \frac{1}{n} = \frac{u_1}{z}\left(zc'(z) + \frac{u_2}{u_1}\frac{z}{n}\right) = \\ &= \frac{u_1}{z}\left(zc'(z) - V\left(c(z), \frac{z}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Vzťah (34):

$$\Psi_y = \frac{d}{dy}(-yu_2(x,y)) = -\left(u_2 + y\left(u_{21}(x,y)\frac{dx}{dy} + u_{22}\right)\right) =$$
$$= -u_2 - yu_{22} + y\frac{u_2u_{21}}{u_1}.$$

Vzťah (37):

$$\frac{(wy_n - x_n/n) - (w\bar{y}_n - \bar{x}_n/n)}{\bar{y}_n\bar{u}_2 - y_nu_2} = \lim_{m\to n^-} \frac{(wy_n - x_n/n) - (wy_m - x_m/n)}{y_mu_2^{(m)} - y_nu_2} =$$

$$= \lim_{m\to n^-} \frac{-\frac{d}{dy_m}(wy_m - x_m/n)}{\frac{d}{dy_m}(y_mu_2^{(m)})} = \frac{w - \frac{1}{n}\frac{dx_m}{dy_m}}{\frac{d}{dy_m}\Psi} = \frac{w + \frac{n\bar{u}_2}{\bar{u}_1}}{\bar{\Psi}_y},$$

keďže, ako sme už ukázali, $\frac{dx}{dy} = -\frac{u_2}{u_1}$. Z (33) vieme, že

$$\frac{w + u_2/nu_1}{\Psi_y} = \frac{1}{n^2f(n)}\int_n^\infty \left[\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right] T_{nm}f(m)dm,$$

a keďže pravá strana tohto výrazu je spojitá funkcia v n, tak aj výraz na ľavej strane musí byť spojitý v n a teda platí:

$$\frac{w + \bar{u}_2/n\bar{u}_1}{\bar{\Psi}_y} = \frac{w + u_2/nu_1}{\Psi_y}.$$

Vzťah (43): Tento vzťah pochádza z (38), pričom využijeme aditivitu integrálov, teda že $\int_0^\infty \ldots dn = \int_0^{n_0} \ldots dn + \int_{n_0}^\infty \ldots dn$. Konkrétne:

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right] T_{0m}f(m)dm = \int_0^{n_0} \left[\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right] T_{0m}f(m)dm + \int_{n_0}^\infty \left[\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right] T_{0m}f(m)dm =$$

keďže pre $n \leq n_0$ $y_n = 0 \Rightarrow T_{0n} = 1$

$$= \left[\frac{1}{u_1(x_0,0)} - \lambda G'(u_0)\right] F(n_0) + \int_{n_0}^\infty \left[\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right] T_{0m}f(m)dm.$$

Vzťah (50): Zo (49) máme skombinovaním so (47)

$$v = \frac{w + \frac{u_2}{nu_1}}{\Psi_y} = \frac{1}{n^2f(n)}\int_n^\infty \left(\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right) f(m)dm.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dn} &= \frac{d}{dn}\left[\frac{1}{n^2 f(n)}\int_n^\infty \left(\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right) f(m)dm\right] = \\
&= \frac{-(2nf(n) + n^2 f'(n))}{n^4 f^2(n)}\int_n^\infty \left(\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right) f(m)dm - \frac{1}{n^2 f(n)}\left(\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right) f(n) = \\
&= -\frac{v}{n}\left(2 + \frac{nf'}{f}\right) - \frac{1}{n^2 u_1} + \frac{\lambda G'}{n^2}.
\end{aligned}$$

Vzťah (52): vyplýva zo vzťahu (47)

Vzťah (53): opäť súvisí so vzťahom (47), totiž tento vzťah sa dá prepísať nasledovne:

$$\frac{\left(w + \frac{u_2}{nu_1}\right)}{\Psi_y} n^2 f(n) = \int_n^\infty \left(\frac{1}{u_1} - \lambda G'\right) f(m)dm,$$

no a keďže výraz na pravej strane konverguje k nule pre $n \to \infty$, výraz na ľavej strane, čo je vlastne $vn^2 f(n)$, musí tiež konvergovať k nule pre $n \to \infty$.

Vzťah (65):

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\alpha \ln \alpha e^t + \ln\left(s - \frac{v}{s}\right) + \ln s\right] = \\
&= \alpha + \alpha \frac{1}{s - \frac{v}{s}}\left(\frac{ds}{dt} - \frac{\frac{dv}{dt}s - \frac{ds}{dt}v}{s^2}\right) + \frac{1}{s}\frac{ds}{dt}
\end{aligned}$$

Na druhej strane zo vzťahu (59) máme

$$\frac{du}{dt} = \frac{1-s}{s}.$$

Teraz už len položíme do rovnosti tieto dva výrazy a vyjadríme $\frac{ds}{dt}$.

Príloha 3.

V tejto časti uvádzam konkrétny tvar rovníc (50) a (51) pre rovnomerné a "trojuholníkové" rozdelenie, funkcia úžitku ostáva nezmenená.

Rovnomerné rozdelenie:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{ak } n \in (0,1\rangle \\ 0, & \text{inde,} \end{cases}$$

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pre } n \leq 0 \\ n, & \text{pre } n \in (0,1\rangle \\ 1, & \text{pre } n > 1. \end{cases}$$

Potom

$$\frac{dv}{dn} = -2v - \frac{x}{n^2} + \frac{\lambda}{n^2}$$

no a po substitúcii $t = \ln n$ a $x = n(s - \frac{v}{s})$ dostaneme

$$\frac{dv}{dt} = -2v - s + \frac{v}{s} + \lambda e^{-t}.$$

Výraz pre $\frac{ds}{dt}$ sa nemení, nakoľko jeho podoba závisí len od voľby funkcie úžitku a túto necháváme rovnakú.

"Trojuholníkové" rozdelenie:

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{ak } n \in (0,1\rangle \\ 0, & \text{inde} \end{cases}$$

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{pre } n \leq 0 \\ n^2 & \text{pre } n \in (0,1\rangle \\ 1 & \text{pre } n > 1. \end{cases}$$

Pre tento prípad

$$\frac{dv}{dn} = -3\frac{v}{n} - \frac{x}{n^2} + \frac{\lambda}{n^2}$$

a opäť po substitúcii dostaneme:

$$\frac{dv}{dt} = -3v - s + \frac{v}{s} + \lambda e^{-t}.$$

Príloha 4.

Teraz si bod po bode uvedieme, ako vyzerá postup na určenie optimálnej dane pre konkrétnu funkciu úžitku

$$u(x,y) = \ln x + \ln(1-y)$$

a konkrétne rozdelenia výkonnosti.

(1) Hodnotu λ vypočítame z rovnice (38):

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty u_1^{-1} f(n)dn}{\int_0^\infty G' f(n)dn} = \\ = \int_0^\infty x_n f(n)dn,$$

keďže $1/u_1 = x$ a $G(u) = u$, čiže $G'(u) = 1$ a $\int_0^\infty f(n) = 1$.

V našom prípade teda λ predstavuje agregovaný dopyt po spotrebných statkoch, X. Zvolíme si teda nejakú prípustnú hodnotu tejto veličiny.

(2) Zvolíme n_0 tak, aby bol splnený vzťah $v_{n_0} \geq 0$, v_{n_0} získame z rovnice (52). Tá v tomto prípade nadobúda tvar:

$$\frac{F(n_0)}{n_0^2 f(n_0)} [\lambda - x_{n_0}] \geq 0.$$

Výraz $\frac{F(n_0)}{n_0^2 f(n_0)}$ je vždy nezáporný, takže stačí počítať

$$\lambda - x_{n_0} \geq 0.$$

(3) Keďže $y_{n_0} = 0$, hodnoty v_{n_0} a u_{n_0} vypočítame zo vzťahov (49) a (52), pre našu funkciu úžitku bude výpočet vyzerať takto:

$$(49) : v = (1-y)\left(1 - y - \frac{x}{n}\right)$$
$$(52) : v_{n_0} = \frac{F(n_0)}{n_0^2 f(n_0)}[\lambda - x_{n_0}]$$

Vzťah (49) má v n_0 hodnotu: $v_{n_0} = 1 - \frac{x_{n_0}}{n_0}$. Keď dáme tento výraz do rovnosti s výrazom, vyplývajúcim z rovnice (52), dostaneme:

$$x_{n_0} = \frac{\lambda F(n_0) - n_0^2 f(n_0)}{F(n_0) - n_0 f(n_0)}.$$

V tomto momente teda vieme vypočítať v_{n_0}, $u_{n_0} = \ln x_{n_0}$, keďže $y_{n_0} = 0$. Môžeme si všimnúť, že body (2) a (3) sú úzko prepojené. Treba ich preto riešiť simultánne.

(4) Počítame riešenie sústavy rovníc (50) a (51) pre rastúce n, kým je splnená podmienka (56). Táto nadobúda pre každé rozdelenie iný tvar:

- lognormálne:

$$\left(1 - \frac{\ln n + 1}{\sigma^2} + \frac{2y}{1-y}\right) v + \frac{2x}{n} - \frac{\lambda}{n} \geq 0.$$

- rovnomerné :

$$\left(2 + \frac{2y}{1-y}\right) v + \frac{2x}{n} - \frac{\lambda}{n} \geq 0.$$

- trojuholníkové:

$$\left(3 + \frac{2y}{1-y}\right) v + \frac{2x}{n} - \frac{\lambda}{n} \geq 0.$$

Body (5), (6) a (7) už vyplývajú z konkrétnej realizácie postupu.

Príloha 5.

A napokon uvádzam tabuľky, vypočítané pomocou postupu, uvedeného vyššie. Na výpočet numerického riešenia sústavy diferenciálnych rovníc (50) a (51) bol použitý software Mathematica, konkrétne funkcia NDSolve[...].

Tabuľka 1.

$f(n)$ je hustota lognormálneho rozdelenia s parametrami $\mu = -1$, $\sigma = 0.39$.
$\lambda = 0.3$, $n_0 = 0.04$, $x_{n_0} = 0.02$.

n	$F(n)$	y_n	z_n	x_n	θ
0.25	0.16	0	0	0.23	0.096
0.3	0.3	0.054	0.016	0.256	0.098
0.4	0.58	0.159	0.064	0.301	0.105
0.5	0.78	0.233	0.117	0.339	0.12
0.6	0.895	0.288	0.173	0.367	0.141
0.7	0.95	0.329	0.231	0.379	0.193

Tabuľka 2.

$f(n)$ je hustota rovnomerného rozdelenia na intervale $\langle 0, 1 \rangle$
$\lambda = 0.225$, $n_0 = 0.04$, $x_{n_0} = 0$.

n	$F(n)$	y_n	z_n	x_n	θ
0.2	0.2	0.045	0.009	0.005	0.975
0.3	0.3	0.117	0.035	0.056	0.788
0.4	0.4	0.173	0.069	0.123	0.628
0.5	0.5	0.222	0.111	0.195	0.498
0.6	0.6	0.267	0.16	0.27	0.387
0.7	0.7	0.31	0.217	0.345	0.285
0.8	0.8	0.352	0.281	0.42	0.189
0.9	0.9	0.391	0.352	0.498	0.091

Tabuľka 3.

$f(n)$ je hustota trojuholníkového rozdelenia

$\lambda = 0.3$, $n_0 = 0.04$, $x_{n_0} = 0$.

n	$F(n)$	y_n	z_n	x_n	θ
0.25	0.0625	0.019	0.005	0.05	0.794
0.3	0.09	0.049	0.015	0.11	0.612
0.4	0.16	0.116	0.047	0.215	0.392
0.5	0.25	0.182	0.091	0.305	0.255
0.6	0.36	0.242	0.145	0.386	0.15
0.7	0.49	0.297	0.208	0.462	0.06
0.8	0.64	0.346	0.277	0.534	0