FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

MIROSLAV BRANIK 2004

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

EKONOMICKÁ A FINANČNÁ MATEMATIKA

VYBRANÉ PROBLÉMY EKONOFYZIKY

DIPLOMANT: MIROSLAV BRANIK

VEDÚCI PRÁCE: DOC. RNDr. JÁN BOĎA, CSc.

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

ČESTNE PREHLASUJEM, ŽE SOM TÚTO DIPLOMOVÚ PRÁCU VYPRACOVAL SAMOSTATNE A S VYUŽITÍM UVEDENEJ LITERATÚRY.

PODAKOVANIE

ĎAKUJEM VEDÚCEMU DIPLOMOVEJ PRÁCE DOC. RNDr. JÁNOVI BOĎOVI CSC. ZA MOTIVÁCIU A UŽITOČNÉ RADY PRI TVORBE TEJTO PRÁCE. TAKISTO ÚPRIMNE ĎAKUJEM SVOJÍM NAJBLIŽŠÍM ZA VŠESTRANNÚ PODPORU POČAS CELÉHO ŠTÚDIA.

Obsah

Úvod

Súvislosti medzi jednotlivými ekonomickými javmi a ich dôsledky sú často také zložité, že ekonóm pri ich vysvetľovaní musí využívať aj poznatky iných ako ekonomických vied. Úzke hraničné vzťahy jestvujú medzi ekonomickými a inými spoločenskými vedami – najmä politickými vedami a sociológiou. Mimoriadny význam majú pre ekonóma štatistika a matematické metódy pravdepodobnosti. Prekvapujúce zistenie za posledné roky je však to, že ekonóm môže využiť aj poznatky fyziky. Teda ekonómia je interdisciplinárna veda. V niektorých prípadoch zákony v ekonómii sa podobajú zákonom v prírodných vedách. Hoci sa ekonómia spája s najmä s individuálnym ľudským rozhodovaním, niekedy však kolektívne správanie sa môže byť opísané procesom, založeným na štatistickej báze. Preto cieľom ekonofyziky je aplikovať ideí z prírodných vied, tak dobre, ako je to len možné, do ekonómie.

Cieľom diplomovej práce je poskytnúť globálny pohľad na vybrané problémy ekonofyziky. Stručne uvedieme a popíšeme vybrané okruhy, pričom niektoré z nich budú aplikované na konkrétne údaje.

Práca je členená do štyroch kapitol:

Prvá kapitola obsahuje stručný úvod do ekonofyziky a predmetu jej skúmania, popisuje ekonofyziku, ako samostatný vedný odbor. Ukážeme, že metódy štatistickej fyziky môžu byť aplikované v ekonómii a financiách všeobecne.

V druhej kapitole sa zameriame na rozdelenie bohatstva a distribúciu príjmu. Zároveň popíšeme meranie dôchodkovej nerovnosti a jej analýzu prostredníctvom Lorenzovej krivky a Giniho koeficientu. Použitím niektorých pojmov z fyziky ukážeme ako prostredníctvom nich je možné dobre popísať správanie sa údajov z búrz. Poslednou témou bude fluktuácia rastu HDP a fluktuácia rastu firiem.

Tretia kapitola zahŕňa niektoré teoretické poznatky aplikované na vybranú krajinu, konkrétne Českú Republiku.

Štvrtá kapitola sa sústreďuje na simuláciu vybraných modelov. Použitím výstupov z týchto modelov demoštrujeme, že distribúcia peňazí sa správa podľa určitých zákonov v závislosti od vstupných podmienok.

Kapitola 1
ÚVOD DO EKONOFYZIKY

Ekonofyzika je vedný odbor, ktorý skúša aplikovať fyzikálne metódy v teoretickej ekonómii. Táto náuka vznikla iba nedávno, je jednou z najmladších odvetví. Biofyzika a geofyzika študujú fyzikálne procesy v biológii resp. v geológii, ekonofyzika zase v ekonómii. Ekonómia je subjekt o ľudskom správaní, spojenom s manažmentom zdrojov, financií, príjmov produkcií a spotrebe tovarov a služieb. Ekonómia je preto považovaná za sociálnu vedu. Ekonofyzika je veda, ktorá sa rozvíja v posledných rokoch. Je to subjekt aplikujúci idei, metódy a modely štatistickej fyziky pre dáta získané z ekonomickej oblasti.

Súčasné výskumné práce v oblasti ekonofyziky môžeme rozdeliť do troch oblastí. Prvá z nich sú časové rady cien akcií, výmenných kurzov a ceny tovarov. Veľkosť firiem, HDP, individuálneho bohatstva a príjmu predstavujú druhú tému. Tretia téma je tzv. komplexná analýza. Hlavný nástroj predstavuje štatistická fyzika.

1.1. Štatistická fyzika

Našimi zmyslami môžeme bezprostredne vnímať iba objekty, ktorých rozmery sú oveľa väčšie ako rozmery jednotlivých atómov, resp. molekúl. Makroskopické objekty sa skladajú z mimoriadne veľkého počtu atómov a vyskytujú sa vo veľmi širokom spektre mnohotvárností, ktoré zahŕňa plyny, kvapaliny, tuhé látky a biologické organizmy najrozličnejších foriem a štruktúr.

Štatistická fyzika je teoretická disciplína zaoberajúca sa skúmaním všeobecných zákonitostí, ktorými sa riadia takéto makroskopické systémy.

Za makroskopický považujeme mnohočasticový systém, ktorého vlastnosti sú určené pohybovými rovnicami všetkých častíc tohto systému. Máme na mysli také makroskopické vlastnosti (tlak, teplota, magnetizácia, elektrická vodivosť,...), ktoré sú determinované interakciou veľmi veľkého počtu častíc.

Bez štatistickej fyziky by sa nedali pochopiť a cieľavedome využívať tie vlastnosti látok, ktoré sú podmienené kvantovou povahou mikrosveta. Kvantová štatistika nám umožnila v mnohých prípadoch predvídať makroskopické efekty, ktoré sú priamymi dôsledkami interakcií na mikroskopickej úrovni a načrtnúť ich praktické využitie v spoločenskej praxi.

Charakter týchto zákonitostí závisí do značnej miery od toho, či pohyb častíc možno opísať zákonmi klasickej alebo kvantovej mechaniky:

- Klasická štatistická fyzika je založená na mechanickom modeli, v ktorom sa pohyb častíc opisuje zákonmi klasickej mechaniky
- Kvantová štatistická fyzika vychádza z kvantovo - mechanického opisu pohybu častíc a sveta atómov.

Pri systémoch s veľkým počtom integrujúcich častíc sa stretávame s neprekonateľnými ťažkosťami pri skúmaní ich pohybu. Často nepoznáme zákon interakcie častíc v systéme. Ale aj pri systémoch so známym interakčným zákonom sa stretávame s matematickými ťažkosťami. Ak by sme chceli vysvetliť vlastnosti systému priamo na základe riešenia pohybových rovníc jednotlivých častíc, museli by sme riešiť sústavu obrovského počtu simultánnych rovníc, čo je samozrejme neuskutočniteľné.

Štatistická fyzika sa snaží preklenúť ťažkosti s mechanikou mnohočasticového systému tým, že sa uspokojí s oveľa menšou informáciou o stavoch systému. Tvrdenie, že systém sa nachádza v danom stave - kompatibilnom s danými makroskopickými podmienkami - bude mať teda pravdepodobnostný charakter.

Axiomatická báza štatistickej fyziky je tvorená axiómami:

- teórie pravdepodobnosti
- mechaniky
- špecifickými axiómami štatistickej fyziky.

Z nich štatistická fyzika dedukuje špecifické zákonitosti, ktoré nijako nemožno redukovať na čisto mechanické. Ich špecifičnosť je v tom, že strácajú svoju platnosť pre systémy s malým počtom častíc.

Metódy štatistickej fyziky sa dajú jednoducho prispôsobiť i na opis javov mimo rámec pohybu fyzikálnych foriem hmoty. Je ich možné použiť všade tam, kde sa jedná o systémy s veľkým počtom jedincov, keď elementárne vzťahy medzi spomínanými jedincami sú známe.

1.2. Ekonofyzika ako nová veda

Vráťme sa naspäť k ekonofyzike. Za makroskopický systém môžeme v ekonómii považovať spoločenstvo ľudí, resp. jednotlivé štáty. Častice tohto systému tvoria jedinci - ekonomickí agenti - ktorí medzi sebou uskutočňujú transakcie. Podobne, ako štatistická fyzika, hľadá všeobecné zákonitosti vo "svojich" makroskopických objektoch. Preto cieľom ekonofyziky je nájsť všeobecné vlastnosti ekonomického systému, ktoré sú determinované interakciou veľkého počtu ekonomických agentov. Pri tejto úlohe ekonofyzika používa najviac práve poznatky zo štatistickej fyziky.

Fyzici sú často očarení mocninovými zákonmi[1]. Príkladov vo fyzikálnej literatúre je niekoľko a veľmi dobre sa dajú použiť aj v ekonómii. V najjednoduchšej forme ich môžeme vyjadriť nasledovne:

- mocninová funkcia

$$y = x^{-\alpha}$$

- exponenciálna funkcia

$$y = e^{-\alpha x}$$

Jedným z neoficiálnych dôvodov, ktorý podnietil vznik ekonofyziky je aj skutočnosť, že výskum v ekonomických vedných smeroch je niekedy určite lukratívnejší. Ako jasný príklad môže poslúžiť známa Black –Scholesova rovnica, ktorá opisuje časový vývoj ceny derivátu akcie na finančnom trhu a ktorá vychádzala z fyzikálneho konceptu Brownovho pohybu a vedenia tepla:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

kde S = cena akcie, V = cena opcie.

Dnes sa na burzách s opciami obchoduje v miliardových sumách. O to ťažšie si môžeme predstaviť, že by tomu tak bolo, keby nebola vypracovaná adekvátna teória.

---

[1]Mocninovým zákonom sa budeme podrobnejšie zaoberať v priebehu tejto práce.

Kapitola 2
VYBRANÉ PROBLÉMY EKONOFYZIKY

2.1. Rozdelenie bohatstva a príjmu

Bohatstvo predstavuje stavovú veličinu, ktorá odráža peňažnú hodnotu všetkých aktív v danej domácnosti a v danom okamihu. Aktíva môžu nadobúdať tak finančnú podobu (hotovosť, cenné papiere, šekové účty) ako aj hmotnú podobu (hnuteľný a nehnuteľný majetok). Podľa amerického ekonóma J. K. Galbraitha bohatstvo poskytuje jednotlivcovi *tri blahá*: uspokojenie z moci, fyzickú držbu a pocty, ktoré získava zásluhou bohatstva.

Bohatstvo závisí od pracovnej aktivity, schopností, kvalifikácie, tvorivosti, adaptability, ale ja šťastia alebo získania už nahromadeného majetku. Štúdie dokazujú, že celoživotné úspory tvoria iba 1/5 osobného bohatstva, 4/5 tvorí bohatstvo, ktoré sa získava dedením, darmi.

Medzi dôchodkami[2] *a bohatstvom existuje bezprostredná väzba*. Bohatstvo podmieňuje veľkosť dôchodkov, veľkosť dôchodkov má zase priamy vplyv na veľkosť bohatstva. Čím väčšie bohatstvo domácnosť vlastní, tým má ja väčšie predpoklady nadobudnúť vysoké dôchodky, ktoré zase zvyšujú bohatstvo. Dané konštatovanie však nevylučuje príjem vysokých dôchodkov aj v domácnostiach, ktoré nedisponujú významnejším bohatstvom.

V ekonomickej teórii sa možno stretnúť aj s ekonomickou kategóriou čisté bohatstvo, čo predstavuje rozdiel medzi aktívami a pasívami.

S efektívnou trhovou ekonomikou je bytostne spätá dôchodková i majetková nerovnosť. P. A. Samuelson uskutočnil nielen kvantitatívnu analýzu dôchodkov domácností, ale aj kvantitatívnu analýzu rodinných majetkov. Z týchto dvoch údajov zostrojil krivku majetkovej diferenciácie. Podľa štatistických údajov za USA dospel k záveru, že krivka majetkovej nerovnosti nie je totožná s krivkou dôchodkovej nerovnosti, ale je vypuklejšia, čo poukazuje na vyššiu majetkovú nerovnosť.

[2]V ekonomickej teórii sa pod dôchodkom rozumie všeobecne príjem.

Skúmanie ekonomického rozvrstvenia spoločnosti viedlo k záverom, že toto rozvrstvenie sa dlhodobejšie výraznejšie nemení. Znázornenie rozvrstvenia spoločnosti v podobe pyramídy naznačuje, že veľmi malá časť obyvateľstva disponuje obrovskými dôchodkami i obrovským majetkom. Podstatná časť obyvateľstva sa nachádza v spodnom priestore pyramídy. Platí to tak v rámci jednotlivých krajín, ako aj v rámci určitých regiónov, resp. v celosvetovom meradle.

Rozdeľovanie dôchodkov i bohatstva je nerovnomerné. Jeden názor hovorí, že je to nevyhnutné, pretože dôchodková i majetková nerovnosť je podmienkou rozvoja spoločnosti. Každý sa môže stať vlastným pričinením súčasťou najmajetnejšej vrstvy, podmienkou je rovnosť šancí a sloboda. V tejto súvislostí sa zdôrazňuje princíp etickej spravodlivosti. Vyššie dôchodky i bohatstvo sú výsledkom práce, aktivity, odmenou za podstúpenie rizika, a preto nie je správne žiadať ich prerozdeľovanie.

Okrem uvedeného prístupu, ktorý odmieta prerozdeľovanie, existuje prístup, ktorý výraznú nerovnomernosť nepovažuje za opodstatnenú, resp. konštatuje, že súčasný stupeň nerovnosti je vyšší než taký , ktorý je potrebný na udržanie pracovnej aktivity, a preto hľadá spôsoby, ako ho zmierniť. Vychádza z predpokladu, že zmiernenie nerovnosti môže zvýšiť aktivitu chudobnejších, čo vykompenzuje zníženie aktivity u bohatších.

V súčasnosti, ale aj v minulosti sa mnoho autorov snažilo nájsť, aké je rozdelenie bohatstva v spoločnosti.

Už viac ako storočie dozadu taliansky sociológ Pareto študoval distribúciu osobných príjmov s cieľom charakterizovať celkovú ekonomickú situáciu v krajine. Pareto pozoroval, že distribúcia sa správa podľa určitého univerzálneho pravidla (zákona) vždy a vo všetkých krajinách.

Pri sledovaní ročných príjmov používal pojem tzv. kumulatívnej pravdepodobnosti N(r), ktorá je definovaná ako pravdepodobnosť, že náhodný človek zo súboru má príjem väčší alebo rovný r :

$$N(x) = P(X > x) = \int_x^\infty f(r)dr \, ,$$

kde f je hustota rozdelenia pravdepodobnosti, R je náhodná premenná z tohto rozdelenia.

Konkrétna podoba pravidla mala podľa Pareta nasledovnú podobu:

$$N(x) = x^{-\alpha}$$

Pre uvedený mocninový zákon kumulatívnych distribúcií mal mať exponent hodnotu blízku k -1,5 pre viacero krajín.

V roku 1922 Gini preveril tie isté štatistiky a prehlásil, že mocninové zákony stále platia, ale hodnoty exponentov sú rozličné pre rôzne krajiny.

V priebehu ďalšieho skúmania boli distribúcii bohatstva postupne pripisované mnohé iné rozdelenia: Levyho, log-normálne, Gamma a dokonca dve ďalšie prezentované samotným Paretom. Uvedieme niekoľko príkladov.

Montroll a Shlesinger analyzovali príjmy jednotlivcov v USA pre roky 1935 - 36 a zistili, že horných 1% príjmových skupín sa správa podľa mocninového zákona s exponentom -1,63, zatiaľ čo zbytok sa správa podľa log-normálnej distribúcie.

Nedávno Drugulescu a Yakovenko [7] vypracovali štúdiu týkajúcu sa distribúcie bohatstva vo Veľkej Británii a v Spojených štátoch amerických.

Podľa nich sa časť rozdelenia bohatstva správa podľa Boltzmann - Gibbsovho zákona používaného vo fyzike, ktorý hovorí, že pravdepodobnostná distribučná funkcia (PDF) energie ε je :

$$P(\varepsilon) = Ce^{-\varepsilon / T},$$

kde T je teplota a C normalizačná konštanta.

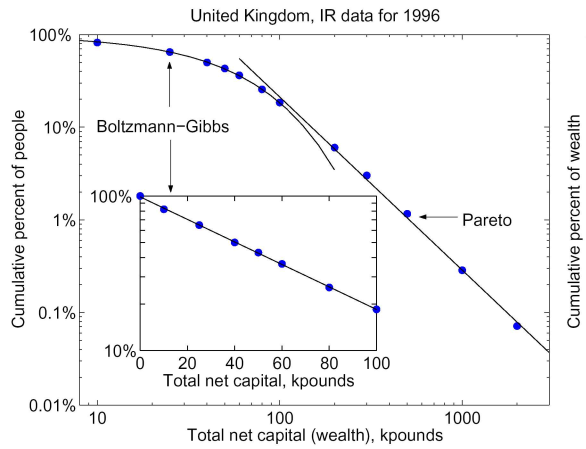
Spomínaní autori sa zaoberali kumulatívnym pravdepodobnostným rozdelením bohatstva N (w), ktoré definovali ako počet ľudí, ktorých bohatstvo je väčšie ako w. Na aproximovanie pozorovaných údajov použili dva typy rozdelenia:

- mocninový zákon $N(w) \propto 1 / w^{\alpha}$ a
- exponenciálny zákon $N(w) \propto \exp(-w/W)$.

Tieto rozdelenia sú charakterizované exponentom α a "teplotou" W. Zodpovedajúce hustoty pravdepodobnosti, P(w) = -dN(w) / dw, sa taktiež správali podľa tohto mocninového, resp. exponenciálneho zákona.

Rozdelenie bohatstva v spoločnosti je ťažko merateľné, pretože ľudia presne neevidujú veľkosť svojho majetku. Avšak veľkosť bohatstva bolo možné odhadnúť na základe údajov o dedičskej dani.

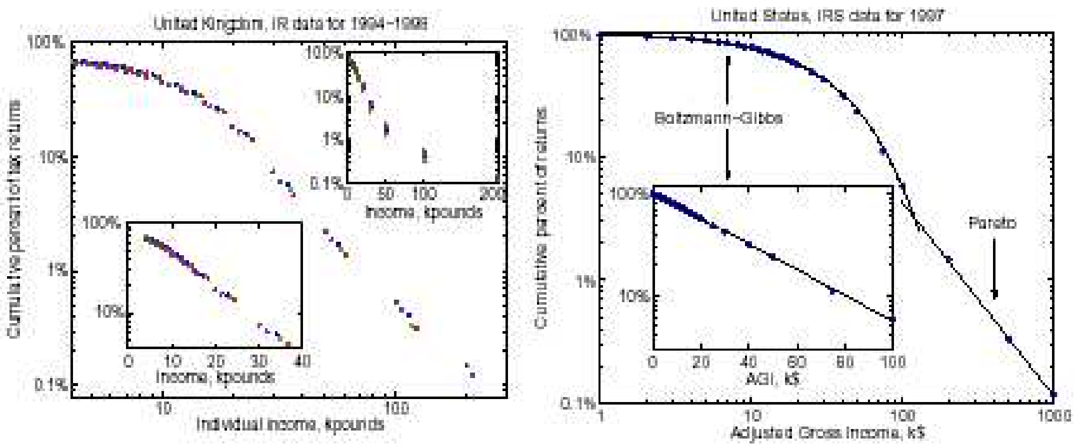
Obrázok 1 ukazuje kumulatívnu pravdepodobnosť ako funkciu osobného čistého kapitálu (bohatstva). Čistý kapitál predstavuje rozdiel medzi aktívami(hotovosť, akcie, nehnuteľnosti,...) a pasívami (pôžičky a iné dlhy).



Obrázok 1. Kumulatívne pravdepodobnostné rozdelenie čistého bohatstva v log – log mierke (vonkajší obrázok) a log – lin mierke (vnútorný obrázok). [7]

Obrázok 1 ilustruje to, že bohatstvo v log – log škále pre hodnoty väčšie ako 100 k£ je dobre aproximované mocninovým rozdelením s exponentom α = 1.9, a naopak, v log – lineárnej škále pre hodnoty menšie ako 100 k£ exponenciálnym rozdelením s “teplotou“ W_{UK} =59.6 k£.

Podobne ako s bohatstvom je to aj s príjmom (r) . Nižšie príjmové skupiny dobre aproximuje exponenciálne rozdelenie N(r) $\propto$ exp (-r/R) s teplotou (rok 98/99) R_{UK} = 11.7 k£. Vyššie príjmy aproximuje mocninové rozdelenie N(r) $\propto$ $1/r^{\alpha}$ s exponentom α =2.0 – 2.3.



Obrázok 2. (a) Kumulatívne pravdepodobnostné rozdelenie ročného individuálneho príjmu [7] v lineárnych mierkach (vrchný vložený obrázok), v log – log škále a log- lin mierke (dolný vložený obrázok). (b) Podobne pre údaje z USA. [10]

Skúmaním skutočných údajov [11] z USA sa zistilo , že distribúcia príjmu absolútnej väčšiny obyvateľstva (viac ako 97%) je opisovaná exponenciálnym Boltzmann – Gibbsovým zákonom. Zvyšok sa správa podľa Paretovho zákona. V log – log mierke, je os y (pravdepodobnosť) logaritmická, os x (príjem) je tiež logaritmická a Boltzmann – Gibbsov zákon má tvar mocninovej funkcie A Paretov zákon má tvar rovnej čiary.

2.1.1. Meranie dôchodkovej nerovnosti

Na meranie dôchodkovej nerovnosti používame hlavne dva spôsoby:

- vizuálne, graficky je to pomocou Lorenzovej krivky a
- ak chceme vyjadriť nerovnosť hodnotovo, pomocou nejakého čísla, tak prostredníctvom Giniho indexu.

2.1.1.1. Lorenzova krivka

Štandardná cesta ako reprezentovať celkovú distribúciu príjmu predstavuje tzv. Lorenzova krivka, ktorá umožňuje zachytiť rozdelenie príjmov medzi jednotlivými domácnosťami.

Klasifikácia domácností sa môže uskutočňovať dvoma spôsobmi.

Prvý spôsob predpokladá, že sa vyčlení veľkosť dôchodku v peňažných jednotkách a zisťuje sa, aké percento domácností poberá dôchodok (príjem) v danom rozpätí. Tento prístup umožňuje určiť stredný dôchodok, t. j. dôchodok, ktorý rozdeľuje domácnosti, pretože 50% domácností má nižší dôchodok a 50% domácností ma vyšší dôchodok. Priemerný dôchodok je vyšší, pretože tí, ktorí získavajú viac, než predstavuje stredný dôchodok, získavajú výrazne vyššie dôchodky než tí, ktorých dôchodok je nižší než stredný dôchodok.

Druhý spôsob predpokladá, že sa vyčlení niekoľko skupín domácností (5 alebo 10 skupín, t. j. jedna skupina predstavuje jednu pätinu, resp. jednu desatinu domácností) v zoradení od najnižších dôchodkov po najvyššie dôchodky. Pre grafické znázornenie diferenciácie dôchodkov možno využiť *Lorenzovu krivku*, ktorá obsahuje hypotetický predpoklad absolútnej rovnosti a absolútnej nerovnosti.

Absolútna rovnosť nastáva v prípade, keď sa dôchodky rozdeľujú rovnomerne medzi všetky domácnosti a absolútna nerovnosť vtedy, keď jedna skupina domácností si prisvojuje všetky dôchodky.

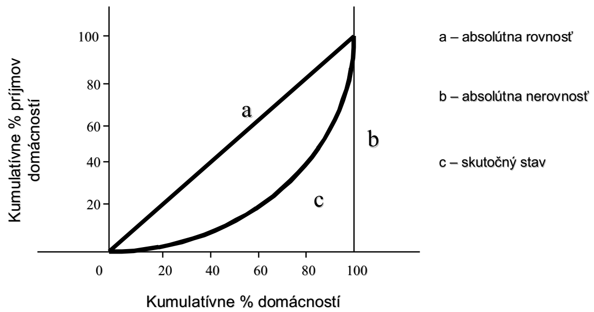
Krivka *c* na Obrázku 3 vyjadruje skutočný stav dôchodkovej nerovnosti. Percentuálny podiel domácností potom podáva informáciu o stupni diferenciácie dôchodkov. Čím je tvar Lorenzovej krivky vypuklejší, tým je v danej spoločnosti vyššia dôchodková nerovnosť.

Lorenzova krivka zachycuje mesačné príp. ročné dôchodky. V ekonomickej literatúre sa poukazuje na skutočnosť, že ak by sa urobil prieskum rozdelenia dôchodkov na základe celoživotných dôchodkov, situácia by sa zmenila. Rozdelenie dôchodkov by bolo vyrovnanejšie. Argumentuje sa tým, že dôchodky sa výrazne menia vekom, pričom najvyššie dôchodky sú v strednom veku. Dokonca v prípade, ak by domácnosti mali rovnaký celoživotný dôchodok, Lorenzova krivka zachycujúca ročné dôchodky by naznačovala dôchodkovú diferenciáciu, pretože populácia v sebe zahŕňa ľudí rôzneho veku.

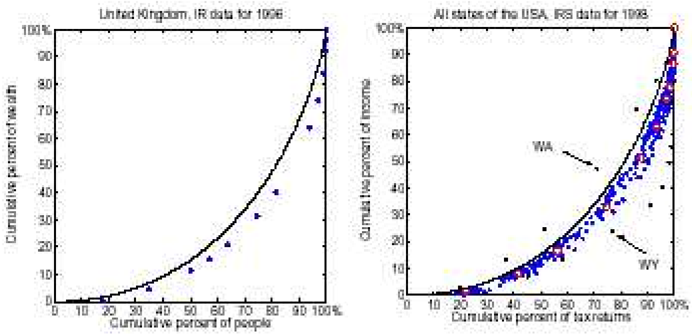
Osobná distribúcia dôchodkov umožňuje získať predstavu nielen o rozdelení domácností podľa výšky dôchodkov, ale aj o rozdelení dôchodkov v čase alebo o rozdelení dôchodkov v jednotlivých krajinách.

Získať reálnu predstavu o skutočnej dôchodkovej diferenciácii však sťažujú viaceré skutočnosti. Nepochybne, že časť dôchodkov, ktoré domácnosti získavajú, sa nevyužíva bezprostredne na spotrebu alebo úspory, ale sa prerozdeľuje neoficiálnymi kanálmi.

Účasť v tieňovej ekonomike, často vo veľmi krátkom časovom horizonte, umožňuje domácnostiam získať značné prostriedky, ktoré nepodliehajú zdaneniu, čím sa výrazne mení ich dôchodková situácia. Je to však zatiaľ, v prevažnej miere, nepostihnuteľná forma diferenciácie dôchodkov, ktorá však zjavne skresľuje všetky analýzy týkajúce sa skúmania štruktúry domácností z hľadiska oficiálne zachytených dôchodkov domácností.



Obrázok 3. Lorenzova krivka.



Obrázok 4. Príklady Lorenzových kriviek [7] (a) Veľká Británia, (b) USA. Na grafe vidieť, že najnižšiu nerovnosť v príjmoch má štát Washington (WA) a naopak najvyššiu štát Wyoming (WY).

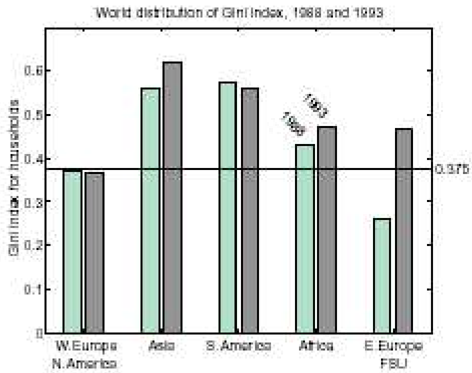
2.1.1.2. Giniho koeficient

Na meranie dôchodkovej nerovnosti pomocou konkrétneho čísla sa využíva *Giniho koeficient*. V ekonomickej teórii sa môžeme stretnúť s viacerými spôsobmi výpočtu tohto koeficientu [5]:

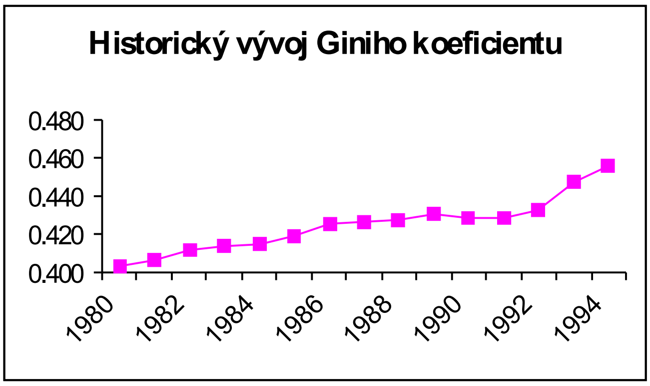
- Vypočíta sa ako pomer medzi obsahom plochy medzi skutočnou a ideálnou krivkou a obsahom plochy pod ideálnou krivkou, resp. zo vzťahu vyšrafovanej plochy a plochy trojuholníka ABC. Giniho koeficient sa pohybuje v rozpätí od 0 (absolútna rovnosť) po 1(absolútna nerovnosť).

• Giniho koeficient sa vypočítava aj ako pomer medzi obsahom plochy pod skutočnou krivkou a obsahom plochy pod ideálnou krivkou. Ak sa Giniho koeficient rovná nule, ide o absolútnu nerovnosť, ak sa rovná jednej, ide o absolútnu rovnosť.

• tak isto sa uvádza, že Giniho koeficient možno zistiť ako dvojnásobok obsahu plochy medzi ideálnou a skutočnou krivkou.



Obrázok 5. Hodnota Giniho koeficientu v jednotlivých regiónoch sveta v rokoch 1998 a 1993. [10]



Obrázok 6. Vývoj Giniho koeficientu pre domácnosti v USA od roku 1980 do roku 1994. Zdroj dát www.census.gov.

Vzhľadom na niekedy rozdielnu metodiku výpočtu, nie je niekedy smerodajné samotné číslo ako skôr trend.

Vidíme, že v USA sa zvyšuje príjmová nerovnosť. Čím je Giniho koeficient bližší k 1, tým je nerovnosť väčšia. Prejavuje sa to tým, že rozdiely medzi domácnosťami s nízkymi príjmami a domácnosťami s vysokými príjmami sa stále zvyšujú.

2.1.2. Simulačné modely

V predchádzajúcej časti sme si uviedli niekoľko zákonov rozdelenia bohatstva, aplikovaných pre reálne údaje. Predtým, než ale nejaké pravidlo aplikujeme, musíme odvodiť najprv akúsi teoretickú bázu. Uvedieme niekoľko najzaujímavejších teoretických modelov simulujúcich rozdelenie bohatstva v spoločnosti.

2.1.2.1. Základný model

Aplikácia metód štatistickej fyziky do ekonómie sľubuje čerstvý pohľad do tých oblastí, ktoré tradične nie sú spojené s fyzikou. Aj štatistická mechanika ako súčasť štatistickej fyziky, aj ekonómia, študujú podobné vlastnosti správania sa: skupín atómov, resp. ekonomických agentov. Základný zákon, ktorý vo fyzike vyjadruje equilibrium v štatistickej mechanike je Boltzmann-Gibbsonov zákon, ktorý hovorí, že pravdepodobnostná distribučná funkcia (PDF) energie ε je :

$$P(\varepsilon) = Ce^{-\varepsilon / T},$$

kde T je teplota a C normalizačná konštanta.

Za základný model môžeme považovať štúdiu Dragulesca a Yakovenka [9], v ktorej prezentovali tento model.

Základné predpoklady modelu sú:

- uvažujeme o uzavretom ekonomickom systéme
- celkové množstvo peňazí je konzervované, dané.

Analogicky, ako v štatistickej fyzike platí Boltzmann – Gibbsov zákon, tak taký istý zákon platí aj pre uvažovaný model, len namiesto energie uvažujeme o množstve peňazí v systéme a namiesto teploty uvažujeme o priemernom množstve peňazí na agenta.

Uvažujme o makroskopickom systém mnohých ekonomických agentov – jednotlivcov, alebo korporácií. Predpokladajme ďalej, že ich počet je konštantný. Peniaze sú používane na uskutočňovanie ekonomický aktivít, ako napríklad nákup alebo predaj materiálnych produktov. Každý agent *i* má pred transakciou určité množstvo peňazí m_i. Výsledok interakcie medzi agentmi *i* a *j* je, že určité množstvo peňazí Δm zmení majiteľa:

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m_i', m_j'] = [m_i - \Delta m, m_j + \Delta m]$$

Agenti uskutočňujú medzi sebou transakcie, množstvo peňazí sa transferuje od jedného agenta k druhému, suma peňazí pred a po transakcii však ostáva nezmenená:

$$m_i + m_j = m_i' + m_j'$$

Tento lokálny zákon peňazí je analógiou fyzikálneho zákona, a to zákona zachovania energie v prípade kolízií medzi atómami.

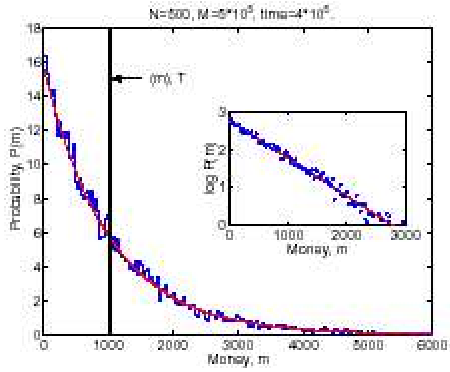
Predpokladáme, že ekonomický systém je uzavretý, t. j. neexistuje externý prílev peňazí, takže celkové množstvo peňazí M v systéme je konštantné. Množstvo peňazí, ktoré držia jednotliví agenti je kladné: $m_i \geq 0$, takže neuvažujeme s dlhom. Podobná podmienka platí aj vo fyzike: kinetická energia atómov $\varepsilon_i \geq 0$.

Pravdepodobnostná distribučná funkcia P(m), ktorá je definovaná ako počet agentov s peniazmi medzi m a m +dm a je daná ako NP(m)dm. P(m) korešponduje s termodynamickým equilibriom vo fyzike, čo znamená, že množstvo peňazí m_i agenta i fluktuuje, ale celková P(m) sa nezmení.

P(m) môžeme odvodiť podobným spôsobom ako distribučnú funkciu energie $P(\varepsilon)$ vo fyzike. Rozdeľme systém na dva podsystémy 1 a 2. Množstvo peňazí je konštantné a aditívne: $m = m_1 + m_2$, kým pravdepodobnosť je multiplikatívna: $P = P_1 P_2$. Z toho dostaneme $P(m_1 + m_2) = P(m_1)P(m_2)$. Riešenie takejto rovnice je:

$$P(m) = Ce^{-m/T}$$

Z normalizačných podmienok $\int_0^\infty P(m)dm = 1$ a $\int_0^\infty mP(m)dm = M/N$ dostaneme C=1/T a T=M/N.



Obrázok 7. Histogram rozdelenia pravdepodobnosti P(m) [9] v lineárnej a log – lineárnej mierke (vsadený obrázok).

Po uskutočnení simulácie (počet agentov=500, množstvo peňazí v systéme=5*10^5, $\Delta m = \upsilon(m_i + m_j)/2$, $0 \leq \upsilon \leq 1$, kde υ je náhodný zlomok) získané hodnoty sa veľmi dobre dajú aproximovať Boltzmann – Gibbsovým zákonom $P(m) \propto \exp(-m/T)$. To znamená, že po uskutočnení transakcií väčšina agentov má malé množstvo peňazí, kým počet najbohatších agentov exponencionálne klesá s m.

2.1.2.2. Ostatné modely

Scafetta, Picozzi a West vo svojej práci odvodili [12] niektoré modely popisujúce distribúciu bohatstva medzi členmi spoločnosti. Zamerali sa hlavne na podmienky, pri ktorých dochádza k vzájomnej výmene medzi jednotlivými ekonomickými agentmi.

Spoločnosti na západe sú historicky rozdelené do troch tried: chudobní, stredná trieda a bohatí. Relatívna veľkosť každej triedy je podmienená nejakou arbitrážnou úrovňou príjmu, ale môžeme bezpečne povedať, že v stabilnej spoločnosti najmenšiu triedu tvoria bohatí a najpočetnejšou je stredná trieda. Toto členenie musí byť včlenené do každého reálneho matematického modelu opisujúceho ako bohatstvo je distribuované v rámci spoločnosti.

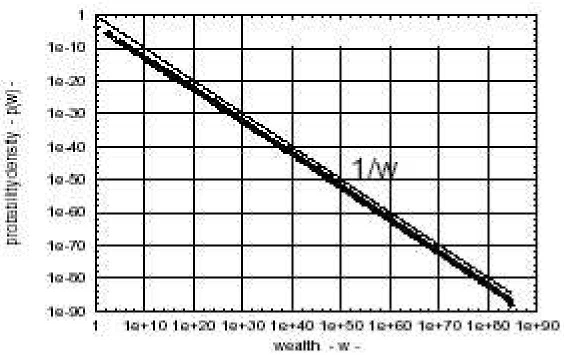
Uvedení autori skúmali viacero modelov rozdelenia bohatstva:

Model 1 - dokonalá obchodná cena.

Najjednoduchšia hypotéza je predpoklad, že bohatstvo nemôže byť vytvárané alebo zničené a že všetky transakcie medzi agentmi sa uskutočňujú za dokonalú cenu. Model je založený na predpoklade, že cena nejakého aktíva je definovaná ako jeho prirodzená hodnota. Tento model je kompletne symetrický, čo znamená, že každý agent získa / obdrží také množstvo bohatstva, ktoré iný agent stratí. Z toho dôvodu bohatstvo každého agenta je konštantné a finálna distribúcia v uzavretej spoločnosti je identická ako počiatočné rozdelenie. Teda tento model je jasne v spore so skúsenosťami súčasného sveta.

Model 2 - náhodná symetrická obchodná cena

V tomto modeli predpokladáme, že transakcie sa možu uskutočňovať za cenu, ktorá náhodne fluktuuje okolo ideálnej. Preto, bohatstvo každého agenta môže vzrásť alebo klesnúť v závislosti od toho, či sa urobili dobré alebo zlé rozhodnutia. Rovnako predpokladáme symetriu, to znamená, že obaja agenti majú rovnakú šancu získať alebo stratiť. Obrázok 8 ukazuje rozdelenie bohatstva po 100 miliónoch náhodných transakciách.



Obrázok 8. Symetrická, stacionárna ekonomika, bohatstvo je merané v jednotkách bohatstva najchudobnejšieho agenta. [12]

Rozdelenie bohatstva sa podobá mocninovému zákonu typu

$$p(w) = 1/w$$

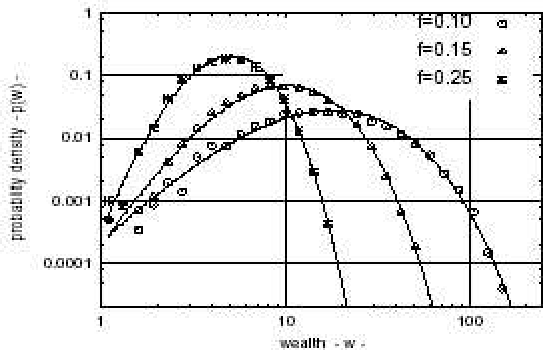
Obrázok 8 ukazuje, že rozdiel v bohatstve medzi najbohatšími a najchudobnejšími je obrovský. Prakticky úplne celé bohatstvo spoločnosti je koncentrované v rukách malého počtu ľudí. V skutočnosti, ak obidvaja agenti počas transakcií majú rovnakú šancu vyhrať alebo stratiť, riziko pre bohatého obchodníka je menšie, pretože ak stratí, tak jeho strata predstavuje menší zlomok jeho bohatstva, než ten, ktorú chudobný agent môže stratiť.

Model 3 - náhodná asymetrická cena

Tento model predpokladá, že chudobnejší z dvojice agentov je trochu zvýhodnený počas obchodovania a má väčšiu šancu formulovať dobré rozhodnutie. Túto možnosť vyjadríme, ak pravdepodobnosť, že chudobnejší získa, bude daná vzťahom

$$p(\Pi) = 0.5 + f\,\frac{w_r - w_p}{w_r + w_p},$$

kde $0 \le f \le 1$ je asymetricky meniaci sa index, w_r a w_p je bohatstvo bohatšieho a chudobnejšieho agenta. Rovnica vyjadruje, že ak obaja agenti budú mať rovnaký majetok, šanca urobiť dobré rozhodnutie bude u oboch rovnaká $(w_r - w_p = 0 \Rightarrow p(\Pi_{r,p}) = 0.5)$. Zase naopak, ak jeden agent má viac majetku ako druhý, tak chudobnejší bude mať väčšiu pravdepodobnosť, že urobí dobre rozhodnutie $(w_r - w_p > 0 \Rightarrow p(\Pi_p) \ge 0.5)$.



Obrázok 9. Asymetrická, stacionárna ekonomika. [12]

Obrázok ukazuje, že hustota pravdepodobnostného rozdelenia je dobre aproximovaná krivkami typu

$$p(w) = \alpha w^{\gamma} \exp\left(-bw^{\delta}\right)$$

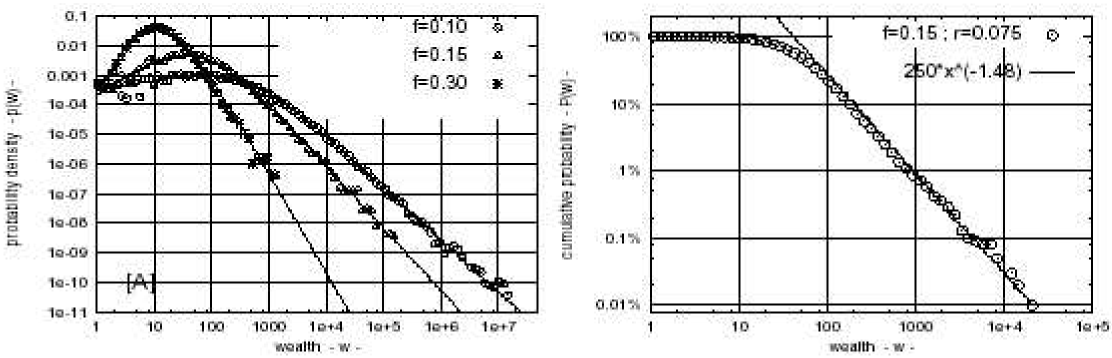
Náhodná asymetrická cena vedie k stabilnej distribúcii bohatstva, a p(w) je veľmi dobra odhadnutá predchádzajúcim vzťahom. Model vedie k rozdeleniu spoločnosti na spomenuté 3 časti: chudobný, stredná trieda a bohatí, pričom stredná trieda je najpočetnejšia, nasleduje chudobná vrstva a napokon bohatí.

Model 4 - náhodná asymetrická obchodná cena s nestacionárnym bohatstvom.

Do predchádzajúceho modelu pridáme vlastnosť, že celkové bohatstvo nie je konštantné. V skutočnom svete bohatstvo nie je konštantné, môže nastať jeho prirodzený úbytok, alebo naopak prírastok. Po každých 10000 transakciách bohatstvo sme každého jednotlivca zmenili nasledovným výrazom:

$$w_i(t+1) = (1 + r\xi)w_i(t),$$

kde $w_i(t)$ je bohatstvo i-teho agenta po t-tej iterácii, $w_i(t+1)$ bohatstvo pri štarte ďalšej iterácie, r>0 predstavuje štandardnú odchýlku v procese úbytku/prírastku bohatstva a ξ je premenná s Gaussovým rozdelením (0,1).



Obrázok 10. (a) Asymetrická, nestacionárna ekonomika, r=0.1, pre dané f sú hodnoty δ: $\delta = 1.76 \pm 0.05$, $\delta = 2.1 \pm 0.05$ a $\delta = 3.3 \pm 0.2$. (b) Aproximácia mocninovým zákonom s exponentom $\alpha = 1.48 \pm 0.02$. [12]

Obrázok 10 ukazuje, že p(w) môže byť dobre odhadnutá krivkami typu

$$p(w) = \alpha w^{\gamma} \exp\left(-bw^{\delta}\right)$$

Spoločnosť, ktorá dovolí malej skupine ľudí absorbovať všetko jej bohatstvo je nestabilná a skolabuje, či už ekonomicky, alebo bude zničená revolúciou. To sa môže tiež stať v prípade ekonomického vykorisťovania chudobných bohatými. Stabilná spoločnosť vyžaduje, aby chudobní mali výhodu v transakciách s bohatými a aby boli chránení individuálnymi právami a trhovou slobodou.

Model 5 – model s nenulovým sklonom k úsporám

Nakoniec predstavíme model autorov Patriarca, Chakraborti a Kaski [13], ktorý mierne upravili základný model, tým, že zaviedli koeficient sporenia λ.

Koeficient sporenia λ predstavuje situáciu, keď agenti si nechávajú časť z peňazí vo forme úspor, predtým než uskutočnia transakcie. Rovnice nadobudnú tvar:

$$m_i' = \lambda m_i + \varepsilon(1-\lambda)(m_i + m_j)$$

$$m_j' = \lambda m_j + (1-\varepsilon)(1-\lambda)(m_i + m_j)$$

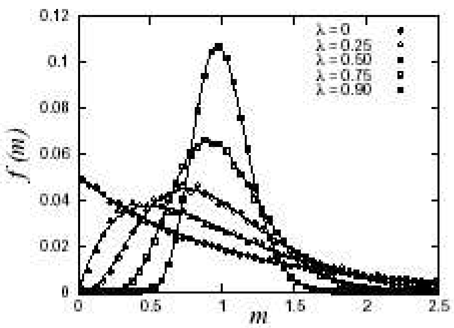
po úprave:

$$m_i' = m_i + \Delta m$$

$$m_j' = m_j - \Delta m$$

$$\Delta m = (1-\lambda)[\varepsilon m_j - (1-\varepsilon) m_i],$$

kde $\varepsilon \in (0,1)$ je náhodné číslo.



Obrázok 11. Distribúcia príjmu pre rôzne hodnoty λ. [13]

Jednotlivé hodnoty na obrázku 11 sú dobre aproximované krivkami typu

$$P(x) = a_n x^{n-1} \exp(-nx),$$

kde $x = \frac{m}{m_0}$, $n(\lambda) = 1 + \frac{3\lambda}{1-\lambda}$, $a_n = \frac{n^n}{\Gamma(n)}$, pričom $\Gamma(n)$ je Gamma funkcia.

2.2. Rozdelenie fluktuácii na burzách

Hestonov model predstavuje jeden z modelov Brownovho pohybu so stochastickou volatilitou. Pre model bola odvodená uzavretá analytická formula pre pravdepodobnostnú distribučnú funkciu (PDF) log - výnosov, ktorá sa dala veľmi dobre aplikovať na empirické dáta (burzové indexy).

Základná rovnica Brownovho pohybu má tvar:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)},$$

kde S_t je cena akcie v čase t, μ je drift, $W_t^{(1)}$ je štandardný náhodný Wienerov proces a σ_t je volatilita.

Ak zameníme premennú z ceny S_t na log – výnos $r_t = \ln(S_t / S_0)$ a eliminujeme drift zavedením $x_t = r_t - \mu t$, dostaneme:

$$dx_t = -\frac{v_t}{2} dt + \sqrt{v_t} dW_t^{(1)} \qquad (*)$$

Ďalej predpokladajme, že variancia v_t sleduje diferenciálnu rovnicu:

$$dv_t = -\gamma(v_t - \theta)dt + \kappa\sqrt{v_t} dW_t^{(2)}., \qquad (**)$$

kde θ je dlhodobý priemer v, γ je miera rozptýlenia tohto priemeru a κ variačný šum. Vo všeobecnosti Wienerov proces $W_t^{(2)}$ môže byť korelovaný s Wienerovým procesom $W_t^{(1)}$:

$$dW_t^{(2)} = \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dZ_t,$$

kde $\rho \in [-1,1]$ je korelačný koeficient.

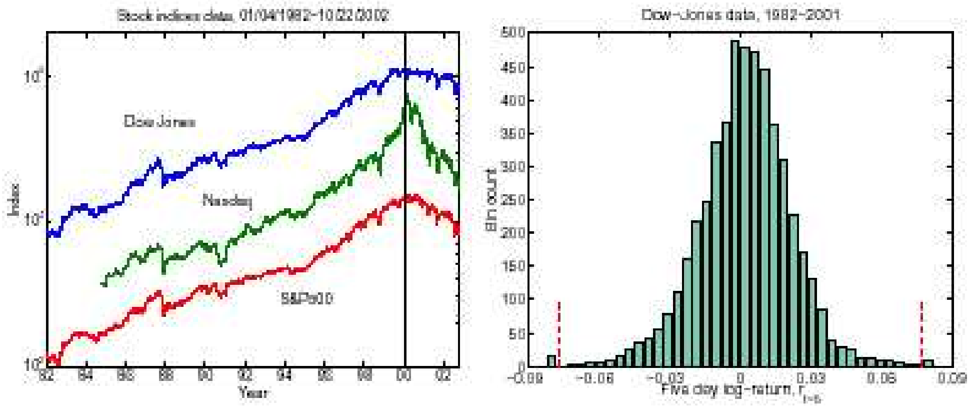
Stochastické procesy $(*)$ a $(**)$ konštituujú spolu Hestonov model. Pre tento proces je charakteristická tranzitívna pravdepodobnosť $P_t(x, v|v_i)$, ktorá je odvodená z Fokker – Planckovej (Kolmogorovej) rovnice. Ďalšími úpravami získame konečný vzťah pre pravdepodobnostnú distribučnú funkciu log – výnosov $P_t(x)$, ktorá nadobúda tvar Fourierovho integrálu.

$$P_t(x) = \frac{e^{-x/2}}{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{p}}{2\pi} e^{i\tilde{p}\tilde{x} + F_{\tilde{t}}(\tilde{p})}$$

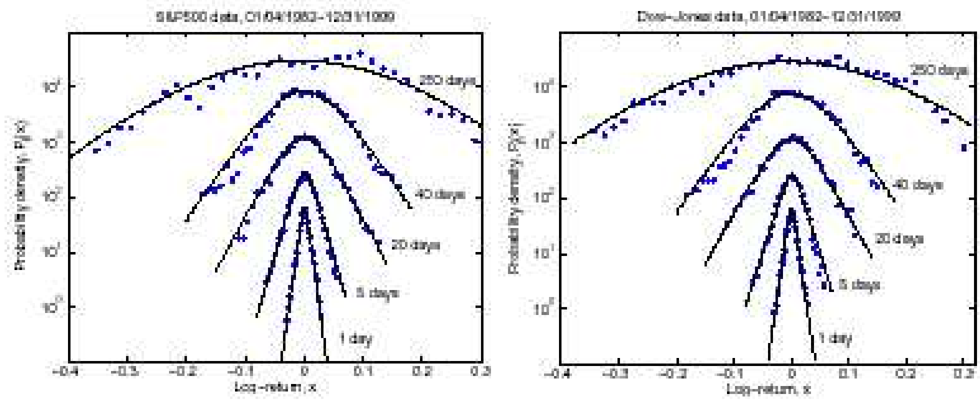
$$F_{\tilde{t}}(\tilde{p}) = \frac{\alpha\tilde{t}}{2} - \alpha \ln\left[\cosh\frac{\tilde{\Omega}\tilde{t}}{2} + \frac{\tilde{\Omega}^2 + 1}{2\tilde{\Omega}} \sinh\frac{\tilde{\Omega}\tilde{t}}{2}\right]$$

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{1+\tilde{p}^2},\ \tilde{t} = \gamma t,\ \tilde{x} = x / x_0,\ x_0 = \kappa / \gamma,\ \alpha = 2\gamma\theta / \kappa^2$$

Dragulescu a Yakovenko [15,16,18] odvodili uvedené rovnice a porovnali ich so skutočnými údajmi. Logaritmus výnosov x = ln (S_2 / S_1), je logaritmus pomeru cien v dvoch rôznych časových úsekov t_2 a t_1, s odrátaním priemerného trendu na trhu. Pravdepodobnostné rozdelenie $P_t(x)$ závisí od časového úseku $t_2 - t_1$, ktoré je zaznamenané na obrázku 12.



Obrázok 12. (a) Vývoj hlavných burzových indexov v USA. [16] (b) Príklad histogramu pre 5-dňové log – výnosy indexu Dow – Jones. [18]



Obrázok 13. (a) Porovnanie údajov pre index S&P 500 s odvodeným vzorcom. (b) To isté pre Dow Jones. [10]

Krivky zobrazujú aproximáciu dát, odvodením pravdepodobnostnej funkcie Hestonovho modelu založenej na geometrickom Brownovom pohybe.

Chvosty ln P_t (x) sú rovné čiary, čo znamená, že sú exponenciálne v x. Pre malé časy t je rozdelenie úzke a chvosty sú takmer vertikálne. S rastúcim časom sa rozdelenie rozširuje.

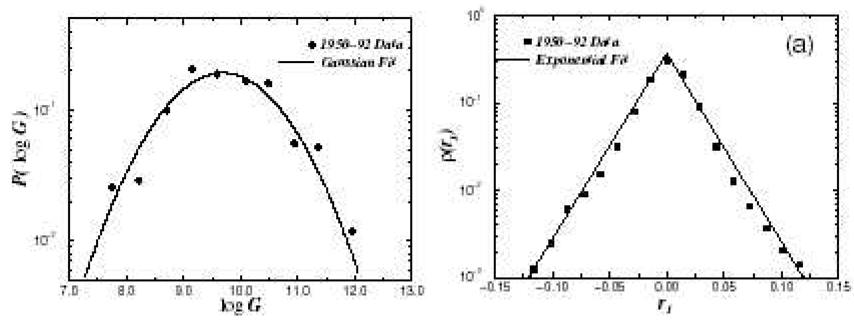
2.3. Fluktuácia rastu HDP

Autori Lee, Amaral, Canning, Mezer, Stanley [19] analyzovali fluktuácie hrubého domáceho produktu (HDP) v 152 krajinách za obdobie rokov 1950 – 1992.

Za základ skúmania určili pravdepodobnostnú distribučnú funkciu p(lnG), kde G je hodnota HDP, očistená od trendu globálneho priemerného rastu. Ako napovedá obrázok 1, p(lnG) je konzistentné s Gaussovým rozdelením, čo implikuje, že P(G) má log – normálne rozdelenie.

Rozdelenie hustoty pravdepodobnosti ročných rýchlostí rastu $r_1 \equiv \ln(G_{t+1} / G_t)$, kde G_t a G_{t+1} predstavuje mieru rastu HDP v rokoch t a t+1, je exponenciálneho tvaru:

$$\rho(r_1) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_0} \exp\left(- \frac{\sqrt{2}|r_1 - \bar{r}_1|}{\sigma_0} \right)$$

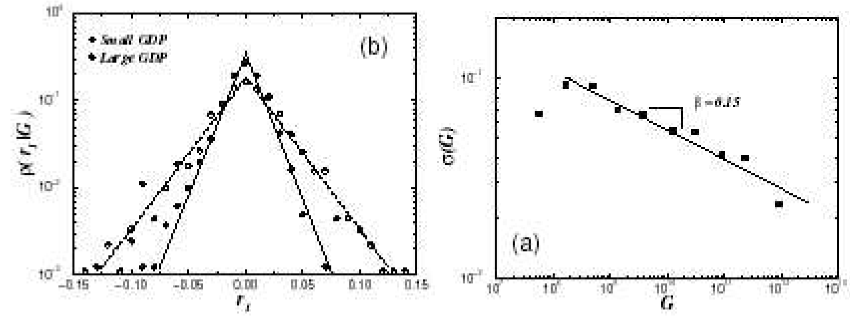


Obrázok 14. (a) Pravdepodobnostné rozdelenie logaritmov HDP, pre očistené údaje. Zobrazené sú priemery počas rokov 1950 – 1992. Rozdelenie je stacionárne (rovnaké pre rôzne časové intervaly) . (b)Hustota pravdepodobnosti ročnej rýchlosti rastu r_1. [19]

Ďalším predmetom skúmania bolo to, ako miera rastu závisí od počiatočného HDP. Po rozdelení krajín do skupín podľa dosiahnutej výšky HDP, empirická hustota podmienenej pravdepodobnosti nadobudla tvar

$$\rho(r_1 | G) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma(G)} \exp\left(- \frac{\sqrt{2}|r_1 - \bar{r}_1|}{\sigma(G)} \right),$$

kde $\sigma(G)$ je štandardná odchýlka pre krajiny s HDP rovným G.

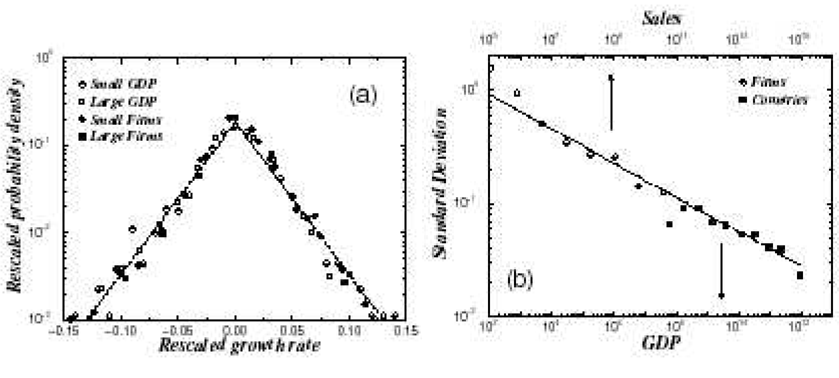


Obrázok 15. (a) Hustota pravdepodobnosti $\rho(r_1|G)$ pre krajiny s najmenším a najväčším rastom HDP (b) Štandardná odchýlka $\sigma(G)$ ako funkcia G, priamka predstavuje aproximáciu mocninovým zákonom. [19]

Záver: výsledkom štúdie z pohľadu ekonofyziky je najmä to, že štandardná odchýlka $\sigma(G)$ sa správa podľa mocninového zákona $\sigma(G) \approx G^{-\beta}$, s exponentom $\beta \approx 0.15$.

2.5. Fluktuácie rastu firiem

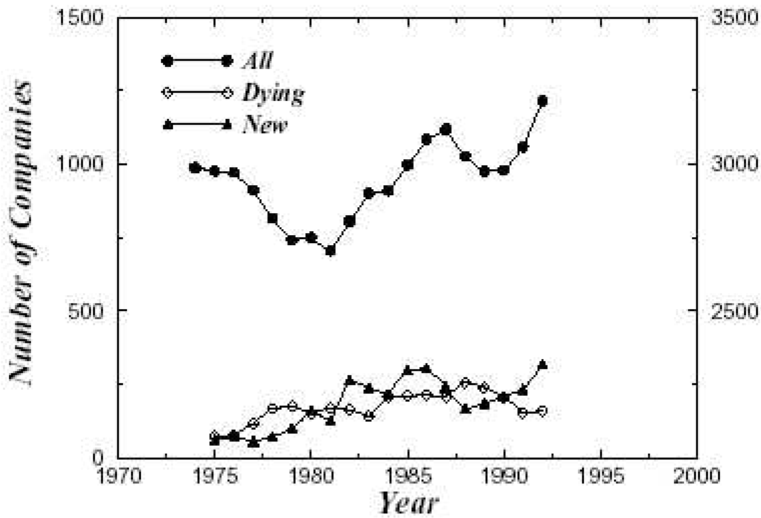
Výsledky predchádzajúcej časti kapitoly kvantitatívne súhlasia s výsledkami pre rast firiem.



Obrázok 16. (a) Porovnanie výsledkov miery rastu HDP jednotlivých krajín a miery rastu firiem. (a) preškálovaná hustota podmienenej pravdepodobnosti ročných rýchlostí ekonomík a firiem $\sigma(G)\rho(r_1|G)$ ako funkcia preškálovanej ročnej miery rastu $r_1 / \sigma(G)$. (b) Štandardná odchýlka $\sigma(G)$ rozdelenie ročných rýchlostí rastu ekonomík a firiem. Exponent β je rovnaký, čo dokumentuje dobrá aproximácia priamkou. [19]

Podobnú štúdiu prezentovala skupina autorov prevažne z Bostonskej univerzity [21], ktorá analyzovala verejne obchodovateľné výrobné firmy za roky 1974 – 1993. Základnými výsledkami ich analýzy nasledovné poznatky:

- Rozdelenie veľkostí firiem počas sledovaného zostalo stabilné, to znamená, že stredná hodnota a štandardná odchýlka boli približne konštantné
- Rozdelenie novo vzniknutých firiem každý rok sa dá dobre aproximovať log – normálnym rozdelením.



Obrázok 17. Počet verejne – obchodovateľných výrobných spoločností v USA za roky 1974 – 1993 (pravá škála). Počet nových firiem vstupujúcich na trh a odstupujúcich z trhu (ľavá škála). [21]

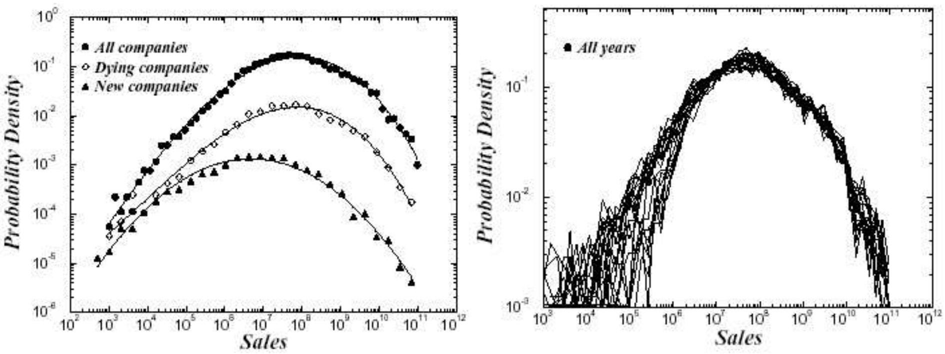
Na začiatku analýz musíme najprv definovať samotnú veľkosť firmy. Veľkosť môžeme merať alebo vo fyzických alebo v peňažných jednotkách. Ak napríklad porovnávame veľkosti firiem v oceliarskom priemysle, tak ako váhu môžeme zobrať množstvo vyrobenej ocele v tonách. Pri porovnávaní finančných spoločností ako určujúce kritérium môže slúžiť veľkosť aktív v peňažných jednotkách. V praxi sa často stretávame s rozdelením firiem podľa počtu zamestnancov. No a nakoniec to je hodnota predaja v peňažnom vyjadrení, ktorú budeme používať v ďalších analýzach.

Ako predpoklad budeme využívať tzv. zákon proporcionálneho efektu, ktorý hovorí o tom, že rast firmy R je nezávislý na jej veľkosti. Pretože zákon proporcionálneho efektu implikuje multiplikatívny proces pre rast firiem, je prirodzené študovať logaritmy tržieb. Teda definujme

$$s_0 \equiv \ln S_0$$

$$r_1 \equiv \ln R_1 = \ln \frac{S_1}{S_0}$$

kde S_0 je veľkosť firmy v danom roku a S_1 v nasledujúcom.

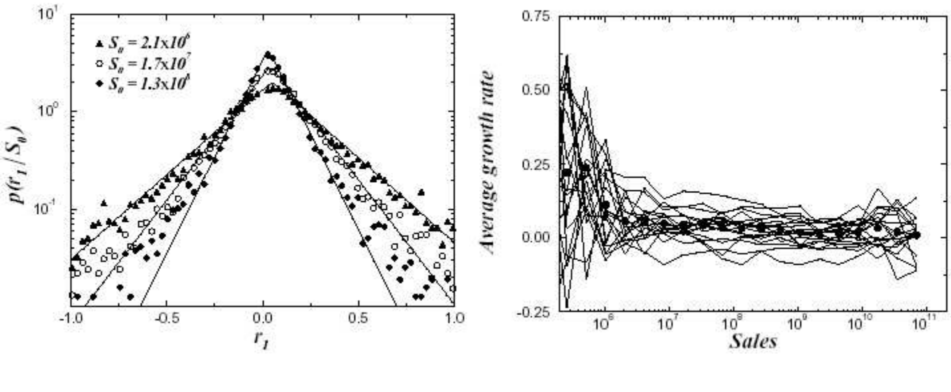


Obrázok 18. (a) Rozdelenie veľkostí všetkých firiem, novovzniknutých (mierka prenásobená 1/100) a zaniknutých firiem (mierka prenásobená 1/1000). (b) Hustota rozdelenia pravdepodobnosti pre roky 1974 – 1993. [21]

Z obrázka 18 je vidieť, že rozdelenie je stabilné počas celej periódy.

Podobne, ako sme to urobili v časti kapitoly o hrubom domácom produkte, aj tu môžeme definovať empirickú hustotu rozdelenia pravdepodobnosti

$$p(r_1|s_0) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_1} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\left|r_1 - \bar{r}_1(s_0)\right|}{\sigma_1(s_0)} \right)$$

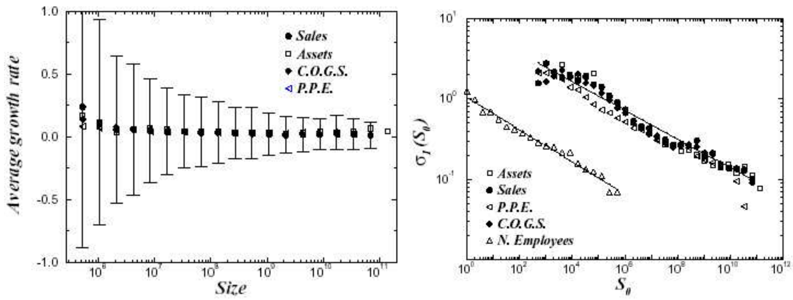


Obrázok 19. (a) Hustota pravdepodobnosti $\rho(r_1|s_0)$ miery rastu $r \equiv \ln(S_1 / S_0)$ a pre rozličné veľkosti tržieb S_0, (b) Stredné rýchlosti rastu $\bar{r}_1(s_0)$ pre jednotlivé roky. [21]

Ako obrázok 19a naznačuje, že údaje pre jednotlivé ročné intervaly sú dobre aproximované predchádzajúcou rovnicou, s len malými odchýlkami v parametroch $\bar{r}_1(s_0)$ a $\sigma_1(s_0)$

Ekonómovia často študujú vzťah strednej rýchlosti rastu a veľkosťou firmy pomocou regresie uplatnenej medzi týmito dvoma veličinami. Ako sme už uviedli, veľkosť môžeme merať v rôznych jednotkách. Ak urobíme regresiu medzi priemernou mierou rastu a veľkosťou firmy, meranou objemom tržieb (obrázok 19 b), môžeme si všimnúť nasledovné skutočnosti:

- pri malých objemoch tržieb, teda pri malých firmách pozorujeme veľkú fluktuáciu rastu a naopak u veľkých firmách je vzťah sledovaných veličín pomerne stabilný
- pri celkovom pohľade však závislosť nie je až taká signifikantná.



Obrázok 20. (a) Stredná rýchlosť rastu pre rôzne definície veľkosti firmy (podľa tržieb, aktív, nákladov na predané tovary a veľkosti nehmotného majetku). (b) Štandardná odchýlka. [21]

Ďalšia analýza potvrdila, že výsledky pre jednotlivé definície firmy sú podobné. Z obrázka 20 je vidieť, že štandardná odchýlka rýchlosti rastu, klesá s nárastom s_0. $\sigma_1(s_0)$ je dobre aproximovateľná zákonom

$$\sigma_1(s_0) \approx \exp(-\beta_0),$$

čo implikuje

$$\sigma(S_0) \approx S_0^{-\beta}$$

Exponent β vyšiel pre jednotlivé definície takmer rovnako s hodnotou

- $\beta =$ 0.18 pre “aktíva“, “náklady na predané tovary“ a “počet zamestnancov“

- β = 0.20 pre “tržby“ a “nehmotný majetok“

Paralelná analýza pre počet zamestnancov ukázala, že rozdelenie rýchlosti rastu firiem a štandardná odchýlka sa správajú rovnako.

Záver: Uvažujme nasledovné limitné prípady [19]:

(i) Predpokladajme, že ekonomická organizácia, ako napríklad štát alebo firma sa skladá z veľkého počtu jednotiek rovnakej veľkosti. Ďalej predpokladajme, že miera rastu každej z nich nezávisí od druhej. Potom fluktuácia rastu - meraná šírkou rozdelenia σ - sa správa podľa mocninového zákona $\sigma \approx S^{-\beta}$ s exponentom β = 0.5.

(ii) Na druhej strane stojí opozičný limitný prípad, ktorý predpokladá silnú koreláciu medzi jednotkami. Exponent v tomto prípade nadobúda hodnotu $\beta = 0$.

Exponent získaný z empirických údajov sa nachádzal medzi uvedenými hodnotami. Z toho vyplýva, že v reálnom svete miera rastu jednej jednotky čiastočne nezávisí od druhej a čiastočne je medzi nimi istá korelácia.

Kapitola 3
APLIKÁCIA NIEKTORÝCH TEORETICKÝCH POZNATKOV NA VYBRANÚ KRAJINU

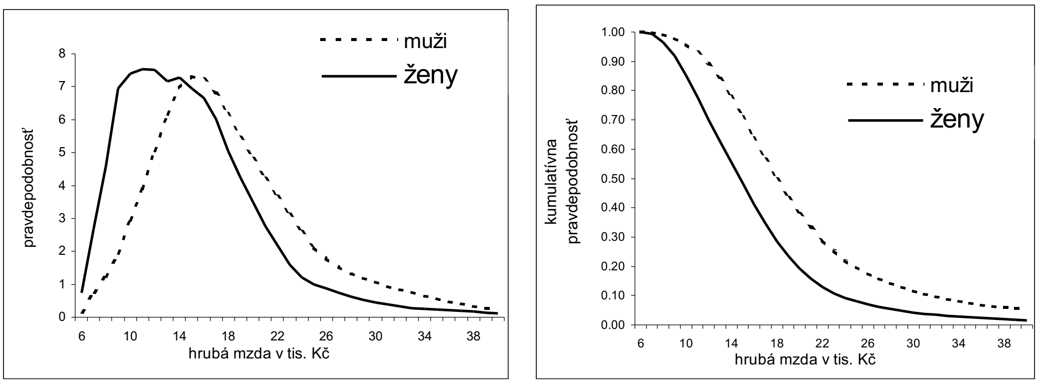
Aplikáciu teoretických poznatkov z oblasti merania dôchodkovej nerovnosti z dôvodu aktuálnejších údajov ilustrujeme na príklade Českej republiky. V Slovenskej republike sa podobné štatistické zisťovania uskutočňujú v rámci programu Mikrocenzus v niekoľko ročných-intervaloch. Výsledky (resp. pokladové údaje) z Mikrocenzu 2003 zatiaľ (k 1. marcu 2004) neboli publikované ani v elektronickej ani v knižnej forme. Posledné uverejnené údaje pre Slovenskú republiku obsahoval Microcenzus v roku 1996.

3.1. Distribúcia príjmu v Českej republike

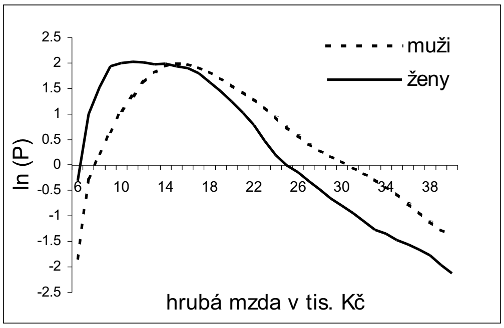
Na modelovanie distribúcie príjmu sme použili české štatistické dáta získané z Českého štatistického úradu za rok 2002 a to konkrétne čísla o príjme a jeho distribúcii a o počte domácností.

V tabuľke (Príloha č. 1) je pre každý príjmový interval uvedený počet domácností, ktorých príjem sa nachádzal v danom roku v danom pásme. Zároveň je uvedený aj priemerný príjem domácností v každom intervale. Pri grafickom zobrazení je vidieť, že posledný interval nie je vhodný na modelovanie distribúcie príjmu , preto ho v ďalších analýzach vynecháme. Posledný interval zachytáva príjmy najbohatších domácností, ktorých príjem je mnohonásobne vyšší ako priemerný príjem z predposledného intervalu. V ďalších výpočtoch odstránime posledný interval, kvôli možnému skresleniu neskorších výsledkov.

Pravdepodobnosť (v tomto prípade relatívna početnosť) toho, že domácnosť sa nachádza v určitom intervale, vypočítame ako podiel počtu domácností spadajúcich do daného intervalu k celkovému počtu domácností.



Obrázok 21. Rozdelenie distribúcie príjmu domácností (a) a kumulatívne rozdelenie (b).

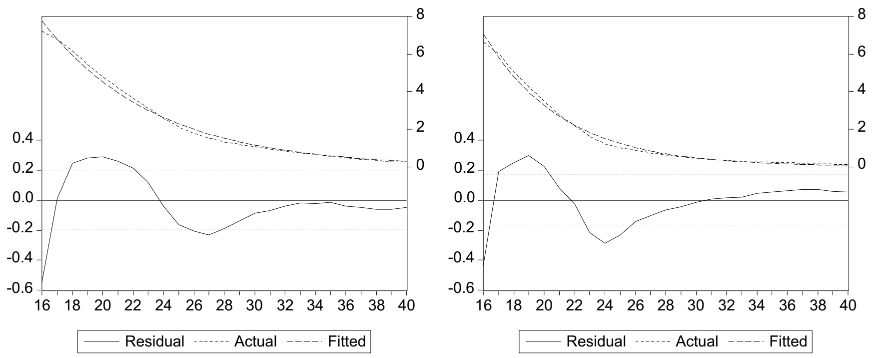


Obrázok 22. Rozdelenie distribúcie príjmu v log – lin mierke

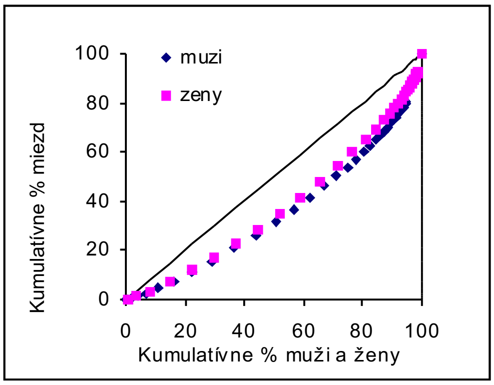
Z obrázkov 21 a 22 vidíme, že rozdelenie príjmov môžeme aproximovať exponenciálnym zákonom pre príjmy z intervalu od 16 000 do 40 000.

$$P(r) = Ce^{-r/T}$$

Na výpočet použijeme program EVIEWS 3.0 a konkrétne nelineárnu iteračnú metódu najmenších štvorcov. Hodnoty koeficientov pre mužov: C=68.62, T=7.34 a R^2=0.9927, pre ženy: C=159, T=5.14 a R^2=0.9927.



Obrázok 23. Aproximácia exponenciálnym rozdelením (a) muži, (b) ženy



Obrázok 24. Lorenzova krivka pre mužov a ženy

Lorenzova krivka zachytáva vzťah medzi kumulatívnym % domácností a kumulatívnym % príjmov. Pre ďalšie výpočty musíme jednotlivými bodmi preložiť krivku.

Na to, aby sme mohli vypočítať Giniho koeficient, potrebujeme poznať obsah medzi ideálnou a skutočnou krivkou. Môžeme využiť nasledovnú vetu:

VETA: Nech f, g : $[a,b] \to \mathbf{R}$ sú spojité funkcie a $f(x) \le g(x)$ pre všetky $x \in [a,b]$. Potom plošným obsahom množiny $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)$ je číslo $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$.

Teda obsah medzi ideálnou a skutočnou(lepšie povedané aproximovanou) krivkou vypočítame podľa vzťahu:

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx\,,$$

kde $g(x) = x$, $f(x)$ = aproximovaná funkcia, $a = 0$, $b = 1$.

Giniho koeficient pre dané údaje však nemôžeme vypočítať, nakoľko nemáme údaj o výške priemerného príjmu v poslednom intervale. Priemerný príjem v predposlednom intervale je 39 500 Kč. Obrázok 24 predstavuje situáciu, keď sme za priemerný príjem pre posledný interval zobrali dvojnásobok predposledného priemerného príjmu.

Lorenzova krivka bude tým vypuklejšia (v konkávnom smere), čím väčší bude príjem posledného intervalu. Posledný interval zahŕňa aj osoby s príjmami nad stotisíc, prípadne aj ostatných s miliónovými príjmami. Publikovanie príjmov v tak vysokých finančných čiastkach je často nekompletné, nakoľko ich majitelia nie sú ochotní dobrovoľne ich poskytovať pre štatistické zisťovanie. Na základe mesačných prípadne ročných údajov sa daný index priebežne vypočítava a okrem samotného čísla je dôležitý jeho trend.

Záver: Na základe tvaru predpokladanej Lorenzovej krivky môžeme konštatovať, že v Českej republike nie je príliš veľká dôchodková nerovnosť. Čo je však zaujímavé je si všimnúť rozdiely medzi pohlaviami. Medzi ženami je menšia dochôdková diferenciácia, teda príjmy v danej skupine sú viac menej rovnomernejšie rozložené v porovnaní s mužmi. Ak však ale zoberieme príjem v absolútnom vyjadrení, tak ženy sú na tom výraznejšie horšie.

Kapitola 4
SIMULÁCIE

4. 1. Štatistická mechanika peňazí

V tejto kapitole sa vrátime k základnému zákonu štatistickej mechaniky – Boltzmann-Gibbsovmu zákonu. Namiesto energie a elementárnych častíc však budeme uvažovať o množstve peňazí a ekonomických agentoch. Simulácie prevedieme pomocou programu C++Builder 4.

4.1.1. Základný model

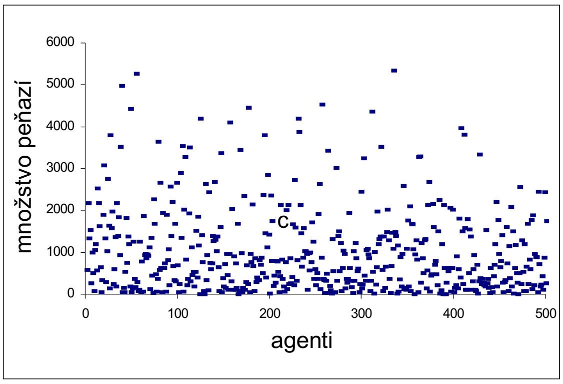
- Množstvo peňazí (M) v systéme sa rovná $5*10^5$
- Počet ekonomických agentov (N) v systéme = 500
- Počiatočné množstvo peňazí na agenta (M/N) = 1000
- Počet iterácií $4*10^5$
- Transakčné množstvo peňazí Δm:

Δm=konštanta 1. prípad

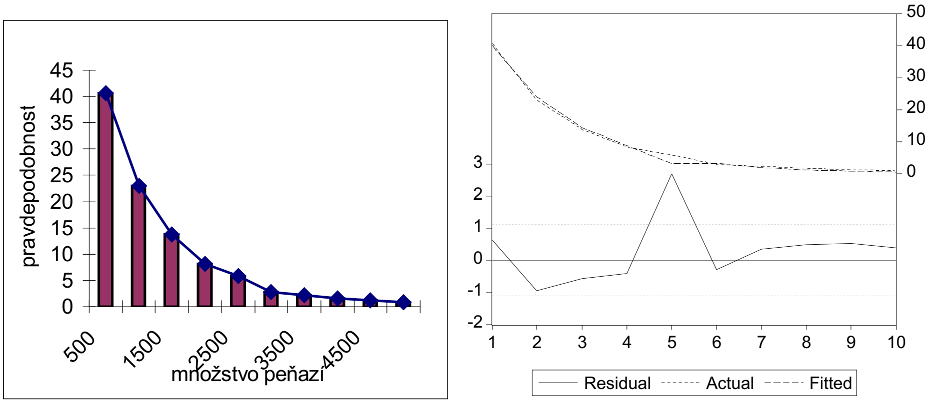
$\Delta m = \nu (m_i + m_j)/2, \quad 0 \le \nu \le 1$ 2. prípad

$\Delta m = \nu M/N, \quad 0 \le \nu \le 1$ 3. prípad

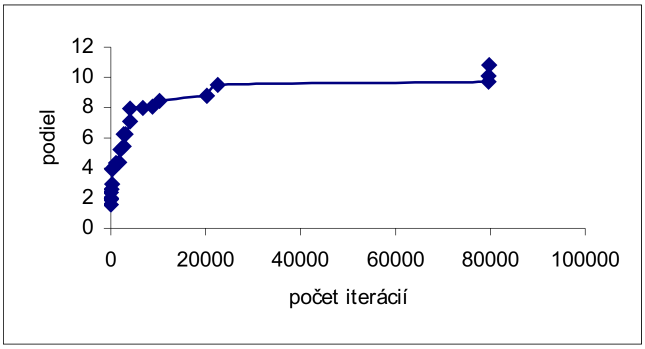
Uvedené výsledky budú prezentované pre tretí prípad (prvé dva prípady dávajú rovnaké výsledky). Pri všetkých troch prípadoch celkové množstvo peňazí v systéme zostane rovnaké.



Obrázok 25. Výskyt konečného príjmu v jeho jednotlivých pásmach na skúmanej vzorke ekonomických agentov.



Obrázok 26. (a) Histogram rozdelenia pravdepodobnosti , že agent sa nachádza v danom intervale . (b) Aproximácia rozdelenia pravdepodobnosti exponenciálnym zákonom $P(m) = Ce^{-m/T}$ s koeficientmi C=51.62, T=976 (hodnota T je blízka optimálnej hodnote T=1000, v rámci 5% chyby)



Obrázok 27. Entropia systému

Obrázok 27 predstavuje entropiu systému - meranú ako podiel agenta s najvyšším množstvom peňazí ku začiatočnému množstvu peňazí v jednotlivých iteráciách. V 79817 -tej iterácii dosiahol jeden agent najvyššie množstvo peňazí - 10829, počas celého trvania simulácie.

A čo je vlastne entropia?. Na vysvetlenie môže poslúžiť nasledovná citácia[3]:

„...Príčinu nevratnosti tepelných javov treba hľadať v tom, že teplo je dôsledkom neusporiadaného pohybu molekúl štatistického charakteru, a teda v sústave zloženej z veľkého počtu častíc môžu samovoľne prebiehať len prechody zo stavu menej pravdepodobného do stavu pravdepodobnejšieho.

[3]Jozef Vavra: Spoločnosť a termodynamika; SME 4.3.2004

Takto je entropia mierou degradácie energie, ale aj usporiadanosti systému a každý izolovaný fyzikálny systém s nevratným dejom nevyhnutne prechádza do stavu s maximálnou entropiou. Tento stav je najpravdepodobnejší, a teda príroda má všeobecnú tendenciu k neporiadku, chaosu. Ak otvoríme v miestnosti nádobku s voňavkou, jej molekuly sa postupne rozptýlia a nikdy nepozorujeme obnovenie „poriadku“ v tom zmysle, že by sa zhromaždili v nádobke...“

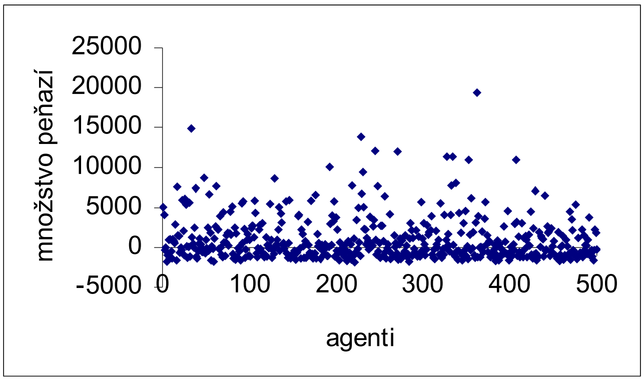
4.1.2. Model s dlhom

- Množstvo peňazí v systéme = 5* 10^5
- Počet ekonomických agentov v systéme = 500
- Počiatočné množstvo peňazí na agenta = 1000
- Počet iterácií = 4*10^5
- Maximálny dlh na agenta m_d = -500

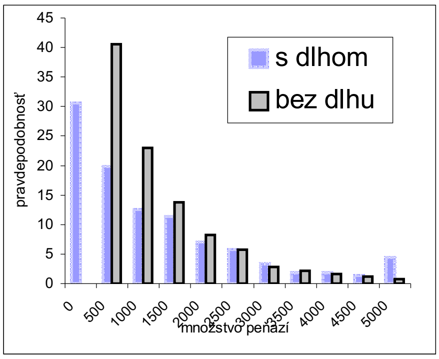
Uvažujme teraz o tom, čo sa stane, ak sa agenti môžu dostať do dlhu. Dlh v tomto prípade môže byť definovaný ako negatívne peniaze. Ak v uvažovaných simuláciách „porazený“ nemá dostatočné množstvo peňazí, môže si požičať a jeho bilancia bude negatívna. Konzervačné pravidlo nebude porušené: suma kladných peňazí pre „víťaza“ a záporných peňazí pre „porazeného bude vyrovnaná. Keď agent so záporným množstvom peňazí získa peniaze v ďalších transakciách, použije tieto prostriedky na vyrovnanie dlhu, kým jeho bilancia nebude pozitívna. Pre jednoduchosť predpokladajme, že za použije pôžičky sa neplatí úrok. Samozrejme, že nie je rozumné uvažovať o nelimitovanom dlhu, z toho dôvodu zavedieme limit m_d, ako maximálneho dlhu na agenta:

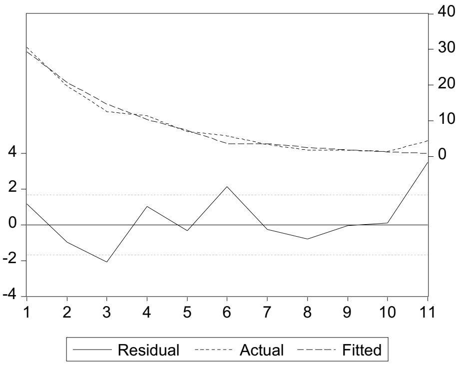
$$m_i \geq m_d$$

Podmienka $P(m<0)=0$ bude nahradená podmienkou $P(m<-m_d)$.



Obrázok 28. Výskyt konečného príjmu v jeho jednotlivých pásmach.





Obrázok 29. Porovnanie rozdelenia pravdepodobnosti modelu s dlhom s predchádzajúcim modelom(a) a jeho aproximácia exponenciálnym zákonom s koeficientmi C=24.72, T=1435 (hodnota T je blízka optimálnej hodnote T=1500, v rámci 5% chyby)(b)

4.1.3. Asymetrický model

V tomto modeli "porazený" stráca fixný zlomok svojich peňazí a "víťaz" si prilepší práve o túto čiastku, čo môžeme zapísať nasledovne:

$$[m_i, m_j] \rightarrow [(1-\alpha)m_i, m_j + \alpha m_i]$$

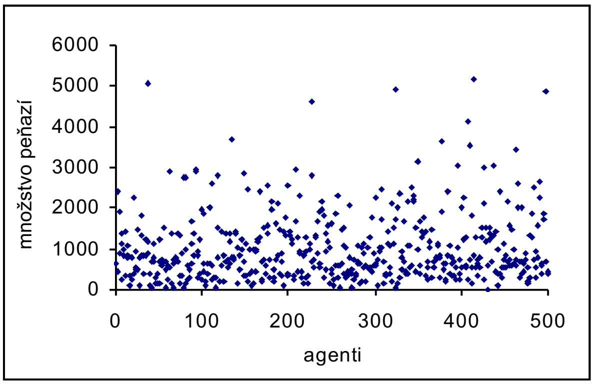
Asymetria modelu spočíva v tom, že ak v nasledujúcej transakcii vymeníme jednotlivé pozície, teda z "víťaza" sa stane "porazený" a naopak, tak systém sa nevráti do pôvodného stavu:

$$[(1-\alpha)m_i, m_j + \alpha m_i] \rightarrow [(1-\alpha)m_i + \alpha(m_j + \alpha m_i), (1-\alpha)(m_j + \alpha m_i)]$$

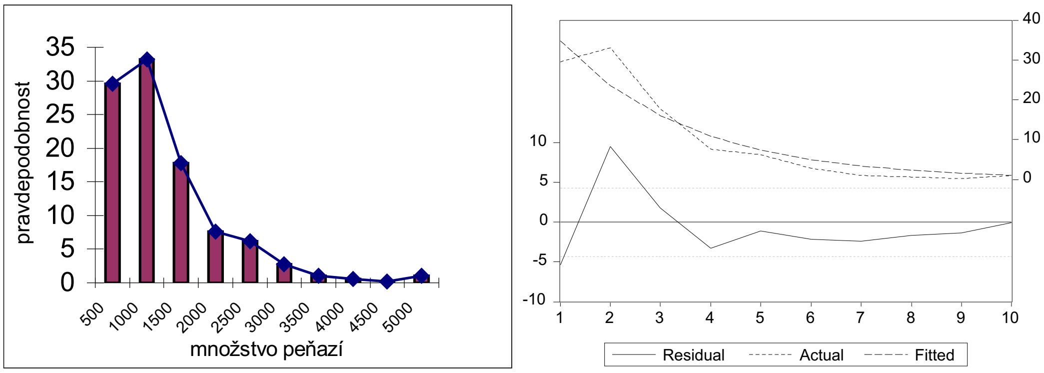
S výnimkou α=1/2, exponenciálna distribučná funkcia už nie je stacionárna.

Kvôli kompatibilite s výsledkami predchádzajúcich modelov, vstupné podmienky zostali nezmenené:

- Množstvo peňazí v systéme = $5 * 10^5$
- Počet ekonomických agentov v systéme = 500
- Počiatočné množstvo peňazí na agenta = 1000
- Počet iterácií = $4*10^5$
- Fixný zlomok α=0.4



Obrázok 28. Výskyt konečného príjmu v jeho jednotlivých pásmach.



Obrázok 26. Histogram rozdelenia pravdepodobnosti , že agent sa nachádza v danom intervale (a). Aproximácia rozdelenia pravdepodobnosti exponenciálnym zákonom s koeficientmi C=51.62, T=1280(hodnota T nie je blízka optimálnej hodnote T=1000 a teda exponenciálny zákon nie je stacionárnym riešením systému) (b).

5. Záver

Cieľom diplomovej práce bolo poukázať na vybrané témy ekonofyziky, vrátane niektorých mocninových zákonov prezentovaných v rozličných formách.

Zistili sme, že mocninové zákony sa prekvapivo vyskytujú, a súčasne sú približne aj veľmi podobné, vo viacerých sférach ekonomiky, ako je napríklad fluktuácia rastu firiem a fluktuácia rastu HDP. Najlepšie sa však mocninové zákony ukázali pri popisovaní rozdelenia individuálneho bohatstva a príjmu medzi jednotlivými agentmi. Uvedená ekonomická kategória je s najväčšou pravdepodobnosťou najznámejším príkladom, v ktorom črta mocninového zákona bola identifikovaná. Daná téza sa potvrdila jednak skúmaním empirických dát a jednak rozličnými simuláciami. Na príklade Českej republiky sme to potom i konkrétne aplikovali. Výsledky aplikácie ukázali, že značná časť domácností kopírovala exponenciálne rozdelenie. Bolo by zaujímavé podobnú analýzu aplikovať na Slovensko, keby boli k dispozícií aktuálne údaje za posledné roky.

Na príklade ďalšej témy sme zistili zaujímavé skutočnosti. Pomocou takých pojmov, používaných vo fyzike, ako je Fourierov integrál, Brownov pohyb, Fokker – Planckovej rovnica sme odvodili rovnicu, ktorá dobre aproximuje rozdelenie výnosov na burze.

V práci prezentované počítačové simulácie ukazujú, že distribúcia bohatstva (peňazí) sa správa pomocou určitých zákonitostí v závislosti od vstupných podmienok jednotlivých teoretických modelov.

Jedným z hlavných predmetov skúmania ekonofyziky v budúcnosti bude špecifikovanie nových podmienok a ich aplikácia do modelov tak, aby čo najvernejšie zodpovedali reálnemu svetu. Kvalitné modely, popisujúce súčasný stav, môžu byť dobrým základom pre predpovede do budúcnosti, napríklad pre problém distribúcie bohatstva. Vzhľadom k tomu, že jednotlivé indikátory jeho rozdelenia vo svete sa vyvíjajú veľmi negatívne, je potrebné poznať tú kritickú hranicu (hranicu únosnosti), kam až nerovné rozdelenie bohatstva môže zájsť.

6. Použitá literatúra:

[1]. František Čulík, Milan Noga: Úvod do štatistickej fyziky a termodynamiky; Bratislava: Alfa, 1982

[2]. Jozef Kvasnica: Statistická fyzika; Praha: Academia, 1983

[3]. Yougui Wang, Jinshan Wu, Zengru Di: *Physics of Econophysics*, 2004 cond-mat / 0401025

[4]. Jean – Phillipe Bouchaud: *Power–laws in economy and finance: some ideas from physics, 2000,* cond-mat / 0008103

[5]. Ján Lisý a kolektív: *Ekonómia;* Bratislava: IURA EDITION, 2000

[6]. D. Rozborilová: *Teórie spotreby, úspor a verejných výdavkov;* Bratislava: IURA EDITION, 2001

[7]. Adrian A. Drăgulescu, Victor M. Yakovenko: *Exponential and power-law probability distributions of wealth and incom in the United Kingdom and the Unites States, 2001,* cond-mat / 0103544

[8]. Adrian A. Drăgulescu, Victor M. Yakovenko: *Evidence for the exponential disribution of income in the USA, 2002,* cond-mat / 0008305

[9]. Adrian A. Drăgulescu, Victor M. Yakovenko: *Statistical Mechanics of Money, 2002,* cond-mat / 0001432

[10]. Adrian A. Drăgulescu, Victor M. Yakovenko: *Statistical Mechanics of Money, Income, and Wealth: A Short Survey, 2002,* cond-mat / 0211175

[11]. Victor M. Yakovenko: *Reserch of Econophysics, 2003,* cond-mat / 302270

[12]. Nicola Scafetta, Sergio Picozzi and Bruce J. West: *Pareto's law: a model of human sharing and creativity*, 2002, cond-mat / 0209373

[13]. Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Kimmo Kaski: *Gibbs versus non-Gibbs distributions in money dynamics, 2003,* cond-mat / 0312167

[14]. Arnab Chattejee, Bikas K. Chakrabarti, and S.S. Manna: *Pareto law in a Kinetic Model of Market with Random Saving Propersity, 2004,* cond-mat / 0301289

[15]. Adrian A. Drăgulescu, Victor M. Yakovenko: *Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility, 2002,* cond-mat / 0203046

[16]. A. Christian Silva, Victor M. Yakovenko: *Comparison between the probability distribution of returns in the Heston model and empirical data for stock indices, 2002,* cond-mat / 0211050

[17]. Hideaki Aoyama, Yuichi Nagahara, Mitsuhiro P. Okazaki, Wataru Souma, Hideki Takayasu and Misako Takayasu: *Pareto's law for income of individuals and debt of bankrupt companies, 2000* cond-mat / 0006038

[18]. Adrian A. Drăgulescu: *Aplikacation of physics to economics and finance: money, income, wealth, and the stock market, 2003,* cond-mat / 0307341

[19]. Youngki Lee, Luís A. Nunes Amaral, David Canning, Martin Meyer a H. Eugene Stanley: *Universal features in the growth dynamics of complex organizations, 1998,* cond-mat / 9804100

[20]. Arnab Das and Sudhakar Yarlagadda: *A distribution function of wealth distribution, 2003,* cond-mat / 0310343

[21]. Luís A. Nunes Amaral, Sergey V. Buldyrev, Shlomo Havlin, Heiko Leschhorn, Phillip Maass, Michael A. Salinger, H. Eugene Stanley, And Michael H. R. Stanley: *Scaling behavior in economics: I. Empirical results for company growt, 1997,* cond-mat / 9702082

7. Zoznam príloh

1. Distribúcia miezd v Českej Republike, rok 2002
2. Zdrojové kódy simulácií pre software C++Builder 4

Príloha č. 1:

Distribúcia miezd v Českej Republike, rok 2002

Český štatistický úrad

Príjmový interval (tis. Kč)	Muži	Ženy	Spolu
0 – 6 000	0.16	0.74	0.41
6 001 – 7 000	0.76	2.70	1.61
7 001 – 8 000	1.25	4.60	2.72
8 001 – 9 000	1.92	6.94	4.12
9 001 – 10 000	2.93	7.39	4.88
10 001 – 11 000	3.89	7.53	5.48
11 001 – 12 000	5.05	7.51	6.13
12 001 –13 000	6.15	7.16	6.59
13 001 – 14 000	6.97	7.28	7.11
14 001 – 15 000	7.31	6.95	7.15
15 001 – 16 000	7.23	6.65	6.97
16 001 – 17 000	6.80	6.02	6.43
17 001 – 18 000	6.17	5.05	5.70
18 001 – 19 000	5.45	4.25	5.00
19 001 – 20 000	4.80	3.48	4.15
20 001 – 21 000	4.20	2.76	3.35
21 001 – 22 000	3.65	2.18	2.85
22 001 – 23 000	3.12	1.60	2.46
23 001 – 24 000	2.58	1.21	2.15
24 001 – 25 000	2.12	1.00	1.83
25 001 – 26 000	1.79	0.87	1.47
26 001 – 27 000	1.51	0.73	1.20
27 001 – 28 000	1.33	0.62	0.99
28 001 – 29 000	1.19	0.52	0.85
29 001 – 30 000	1.07	0.45	0.76
30 001 – 31 000	0.94	0.39	0.70
31 001 – 32 000	0.84	0.33	0.62
32 001 – 33 000	0.75	0.28	0.54
33 001 – 34 000	0.65	0.26	0.47
34 001 – 35 000	0.57	0.23	0.38
35 001 – 36 000	0.47	0.21	0.33
36 001 – 37 000	0.40	0.19	0.31
37 001 – 38 000	0.33	0.17	0.28
38 001 – 39 000	0.28	0.14	0.25
39 001 – 40 000	0.25	0.12	0.22
40 001 – viac	5.12	1.50	3.54
Spolu:	**100.00**	**100.00**	**100.00**

Príloha č.24:

Zdrojové kódy simulácií pre software CBuilder 4

Model bez dlhu

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include "Druhy.h"
//---------------------------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
#include <stdlib.h>
float moneyinsystem=500000;
float initiallymoney;
int numberofagents=500;
int iteration=400000;
float moneyofagents[500];
float entropy[400000];
float fraction;
bool times[400000];
TForm1 *Form1;
//---------------------------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
        : TForm(Owner)
{
}
//---------------------------------------------------------------------------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{
 initiallymoney=moneyinsystem/numberofagents;
 entropy[0]=1;
 int i,p;
 for (i=0;i<numberofagents;i++){
      moneyofagents[i]=initiallymoney;
 }
 for (p=0;p<iteration;p++){
     int winner,loser;
     float averagemoney;
     winner=random(numberofagents);
     loser=random(numberofagents);
     while (winner==loser) {
        loser=random(numberofagents);
        }
     //averagemoney=100;                                         1. prípad
     //averagemoney=random(100)*(moneyofagents[winner]+moneyofagents[loser])
     ///2/100;                                                   2. prípad
     averagemoney=(random(100))*initiallymoney/100;              //3. prípad
     if (moneyofagents[loser]>=averagemoney) {
          moneyofagents[winner]=moneyofagents[winner]+averagemoney;
          moneyofagents[loser]=moneyofagents[loser]-averagemoney;
     }
```

```
    fraction=(moneyofagents[winner]/initiallymoney);
    if (p>0) {
    if (fraction>=entropy[p-1]) {
        entropy[p]=fraction;
        times[p]=true;
        }
    if (fraction<entropy[p-1]) {
        entropy[p]=entropy[p-1];
        times[p]=false;
        }
        }
    }
 int j;
 for (j=0;j<numberofagents;j++) {
 Form1->Memo1->Lines->Add(FloatToStr(moneyofagents[j]));
 }
 int k;
 for (k=0;k<iteration;k++) {
    if (times[k]==true) {
      Form1->Memo2->Lines->Add(IntToStr(k));
      Form1->Memo3->Lines->Add(FloatToStr(entropy[k]));
    }
 }
}
```

Model s dlhom

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include "Prvy.h"
//---------------------------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
#include <stdlib.h>
float moneyinsystem=500000;
int initiallymoney;
float numberofagents=500;
int iteration=400000;
float moneyofagents[500];
float debt=-500;
TForm1 *Form1;
//---------------------------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
        : TForm(Owner)
{
}
//---------------------------------------------------------------------------

void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{
 initiallymoney=moneyinsystem/numberofagents;
 int i,p;
```

```
 for (i=0;i<numberofagents;i++){
     moneyofagents[i]=initiallymoney;
 }
 for (p=0;p<iteration;p++){
    int winner,loser;
    float averagemoney;
    winner=random(numberofagents);
    loser=random(numberofagents);
    while (winner==loser) {
      loser=random(numberofagents);
      }
    //averagemoney=100;                                                  1. prípad
    //averagemoney=random(100)*(moneyofagents[winner]+moneyofagents[loser])
    ///2 /100;                                                            2. prípad
    averagemoney=(random(100))*initiallymoney/100;           //3. prípad
    if (moneyofagents[loser]>=averagemoney+debt) {
        moneyofagents[winner]=moneyofagents[winner]+averagemoney;
        moneyofagents[loser]=moneyofagents[loser]-averagemoney;
        }
    }
 int j;
 for (j=0;j<numberofagents;j++)
 Form1->Memo1->Lines->Add(FloatToStr(moneyofagents[j]));
}
```

Asymetrický model

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include "treti.h"
//---------------------------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
#include <stdlib.h>
float moneyinsystem=500000;
int initiallymoney;
float numberofagents=500;
int iteration=400000;
float moneyofagents[500];
float alfa=40;
TForm1 *Form1;
//---------------------------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
        : TForm(Owner)
{
}
//---------------------------------------------------------------------------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{
 initiallymoney=moneyinsystem/numberofagents;
 int i,p;
 for (i=0;i<numberofagents;i++){
     moneyofagents[i]=initiallymoney;
```

```
 }
 for (p=0;p<iteration;p++){
     int winner,loser;
     winner=random(numberofagents);
     loser=random(numberofagents);
     while (winner==loser) {
        loser=random(numberofagents);
        }
     if (moneyofagents[loser]>=0) {

moneyofagents[winner]=moneyofagents[winner]+alfa/100*moneyofagents[loser];
          moneyofagents[loser]=(100-alfa)/100*moneyofagents[loser];
     }
     }
 int j;
 for (j=0;j<numberofagents;j++)
 Form1->Memo1->Lines->Add(FloatToStr(moneyofagents[j]));
}
```