Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

RAMSEYHO MODEL EKONOMICKÉHO RASTU AKO ÚLOHA OPTIMÁLNEHO RIADENIA

2004

Pavol Jurča

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave

Ekonomická a finančná matematika, 5. ročník

RAMSEYHO MODEL EKONOMICKÉHO RASTU AKO ÚLOHA OPTIMÁLNEHO RIADENIA

Autor: Pavol Jurča
Školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2004

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 2. 4. 2004

Pavol Jurča

Ďakujem vedúcej mojej diplomovej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za cenné rady, pripomienky a odborné vedenie diplomovej práce.

Obsah

Úvod

Každá ekonomika stojí pred riešením požiadavky optimálnej alokácie vyprodukovaných statkov, ktoré možno buď využiť na súčasnú spotrebu, alebo investovať s cieľom zvýšiť spotrebu v budúcnosti. Treba teda určiť optimálne časové rozloženie spotreby so zreteľom na obmedzenosť ekonomických zdrojov. Týmto problémom sa zaoberal už v roku 1928 Frank P. Ramsey v článku [8]. Ramseyho model bol pôvodne formulovaný ako úloha variačného počtu a v polovici 60. rokov 20. storočia ako úloha optimálneho riadenia.

Ramseyho model sa stal východiskom mnohých ďalších modelov teórie ekonomického rastu. Práve to je dôvodom, prečo ho možno nájsť vo viac či menej rozpracovanej podobe v mnohých učebniciach makroekonómie založenej na skúmaní dynamických modelov. V tejto literatúre sa kladie prirodzene väčší dôraz na ekonomickú interpretáciu a jednoduchosť odvodenia základných výsledkov, a to na úkor presnosti matematických formulácií a formálnej korektnosti tohto odvodenia. Niektoré problémy sa však prehliadajú, resp. zostávajú nedoriešené aj v literatúre, ktorá uvádza Ramseyho model ako aplikáciu téorie optimálneho riadenia v ekonomickom modelovaní, a teda sa vo väčšej miere zaoberá aj matematickou stránkou jeho riešenia (pozri napr. [4], [5]).

Cieľom tejto práce je preto podať podrobnú a matematicky konzistentnú analýzu Ramseyho modelu a jeho optimálneho riešenia.

V prvej kapitole uvedieme predpoklady modelu, z ktorých budeme vychádzať pri jeho ďalšej analýze a sformulujeme Ramseyho model ako úlohu optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte s ohraničením. V tejto kapitole zároveň zhrnieme definície základných pojmov a tvrdenia teórie optimálneho riadenia pre takúto úlohu (predovšetkým nutné podmienky optimality Pontrjaginovho princípu maxima), s ktorými budeme pracovať v ďalšom texte.

V druhej, rozsahovo najväčšej kapitole budeme skúmať optimálne riešenie Rameyho modelu a jeho vlastnosti práve na základe spomenutých nutných podmienok optimality. Pritom sformulujeme a dokážeme niekoľko tvrdení, ktoré sa najmä v ekonomickej literatúre síce často využívajú, no ich samotné znenie sa uvádza len intuitívne a bez hlbšieho vysvetlenia. Odvodíme aj postačujúce podmienky optimality, pomocou ktorých dokážeme optimálnosť nájdeného riešenia. Napokon odvodíme niekoľko výsledkov týkajúcich sa riešenia problému, ako optimálne rozložiť spotrebu v čase pri veľkej začiatočnej hodnote kapitálu, ktoré sme nenašli v žiadnej nám dostupnej literatúre.

V tretej kapitole sa budeme zaoberať týmto modelom pri určitom zúžení jeho predpokladov, ktoré je však v literatúre veľmi bežné. Toto zúženie predpokladov nám umožní dokázať niektoré ďalšie vlastnosti optimálneho riadenia.

Poznamenajme, že všetky obrázky fázových portrétov odvodeného systému diferenciálnych rovníc získané po dosadení konkrétnych funkcií boli generované s využitím programu *Mathematica 4.0*.

Kapitola 1

Predpoklady a teoretické východiská

1.1 Predpoklady modelu

Ramseyho model charakterizuje ekonomický rast na makroekonomickej úrovni v agregovanej a uzavretej ekonomike. To znamená, že ekonomika produkuje jediný homogénny statok; produkciu tohto statku v čase t označme $Y(t)$. Celá táto produkcia sa minie na okamžitú spotrebu $C(t)$ a na hrubé investície $I(t)$. Teda

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{1.1}$$

Základným problémom Ramseyho modelu je potom nájsť optimálne časové rozloženie spotreby (t.j. funkciu $C(t)$), teda riešiť úlohu, koľko z vyprodukovaného statku spotrebovať hneď a koľko investovať s cieľom zvýšiť spotrebu v budúcnosti.

Nech ďalej $K(t)$ označuje úroveň fyzického kapitálu (pričom začiatočná úroveň kapitálu v čase t_0 je daná a označíme ju K_0) a $\delta \geq 0$ je (v čase konštantná) miera amortizácie kapitálu. Hrubé investície sú potom súčtom investícií určených na obnovu znehodnoteného kapitálu a čistých investícií, t.j.

$$I(t) = \dot{K}(t) + \delta K(t). \tag{1.2}$$

Veľkosť produkcie je determinovaná neoklasickou produkčnou funkciou, ktorej vstupmi sú kapitál a práca

$$Y(t) = F(K, L). \tag{1.3}$$

Produkčná funkcia nezávisí explicitne od času, teda predpokladáme nulový technologický rozvoj.

Predpoklady kladené na túto funkciu sú:

(P1) Pre funkciu $F : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ platí $F(0,0) = 0$ a je dvakrát diferencovateľná na množine $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. (Symbolom $\mathbb{R}^+$ označujeme množinu kladných reálnych čísel a symbolom $\mathbb{R}_0^+$ množinu nezáporných reálnych čísel.)

(P2) Funkcie $F(\cdot, L)$ a $F(K, \cdot)$, kde $L > 0$, $K > 0$, sú rastúce a rýdzokonkávne funkcie jednej premennej, teda marginálne produkty kapitálu aj práce sa zmenšujú. Pritom predpokladáme, že sú splnené tzv. Inadove podmienky, podľa ktorých platí

$$\forall L > 0 \lim_{K \to 0^+} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty \quad \text{a} \quad \forall L \geq 0 \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \tag{1.4}$$

$$\forall K > 0 \lim_{L \to 0^+} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \infty \quad \text{a} \quad \forall K \geq 0 \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0. \tag{1.5}$$

(P3) Predpokladáme konštantné výnosy z rozsahu, teda funkcia F je homogénna funkcia prvého stupňa

$$F(\xi K, \xi L) = \xi F(K,L) \qquad \text{pre každé } \xi \geq 0. \tag{1.6}$$

Lema 1.1. *Nech funkcia F spĺňa predpoklady (P1), (P2), (P3). Potom pre každé $K \geq 0$, $L \geq 0$ platí*

$$F(K,0) = F(0,L) = 0. \tag{1.7}$$

Dôkaz.[1] Pre ľubovoľné $\bar{K} \geq 0$ a $L \geq 0$ môžeme písať

$$F(\bar{K},0) = \bar{K}\ F(1,0) = \bar{K} \lim_{K \to \infty} F(1, L/K) = \bar{K} \lim_{K \to \infty} \frac{F(K,L)}{K},$$

pričom sme postupne využili homogenitu, spojitosť a opäť homogenitu funkcie F. Ak by bola funkcia $F(\cdot, L)$ ohraničená, posledný výraz je zrejme rovný 0 a tvrdenie je dokázané. Pokiaľ však platí

$$\lim_{K \to \infty} F(K,L) = \infty,$$

môžeme opäť použiť l'Hospitalovo pravidlo a z Inadových podmienok (1.4) dostaneme

$$\bar{K} \lim_{K \to \infty} \frac{F(K,L)}{K} = \bar{K} \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0,$$

čím je tvrdenie dokázané. Rovnosť $F(0,L) = 0$ sa ukáže analogicky. □

[1] Podľa knihy [1]

Dôsledok. Pre každé $L > 0$ je funkcia $F(\cdot, L)$ neohraničená a pre každé $K > 0$ je funkcia $F(K, \cdot)$ neohraničená.

Dôkaz. Dokážeme neohraničenosť funkcie F v premennej K, neohraničenosť v premennej L sa dokáže analogicky. Zvoľme ľubovoľné $L > 0$. Potom využitím homogenity funkcie F máme

$$\lim_{K\to\infty} F(K, L) = \lim_{K\to\infty} K\ F\Big(1, \frac{L}{K}\Big) = L \lim_{K\to\infty} \frac{F(1, \frac{L}{K})}{\frac{L}{K}}.$$

Podľa Lemy 1.1 konverguje čitateľ zlomku v poslednom výraze k 0, preto môžeme použiť l'Hospitalovo pravidlo a dostaneme

$$L \lim_{K\to\infty} \frac{F(1, \frac{L}{K})}{\frac{L}{K}} = L \lim_{K\to\infty} \frac{F_2(1, \frac{L}{K})(-\frac{L}{K^2})}{-\frac{L}{K^2}} = L \lim_{K\to\infty} F_2\Big(1, \frac{L}{K}\Big) = \infty,$$

kde F_2 označuje parciálnu deriváciu funkcie F podľa druhej premennej. Poslednú rovnosť sme dostali využitím Inadových podmienok (1.5). $\square$

Príkladom často používanej produkčnej funkcie, ktorá spĺňa uvedené predpoklady (P1) – (P3), je Cobb-Douglasova produkčná funkcia tvaru

$$F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{1.8}$$

Ďalším predpokladom modelu je, že miera rastu populácie $n > 0$ je konštantná a exogénne zadaná a veľkosť pracovnej sily je rovná veľkosti populácie (ponuka práce je dokonale neelastická), čo môžeme zapísať vzťahom

$$\frac{\dot{L}}{L} = n. \tag{1.9}$$

Predpokladajme ďalej, že všetci jednotlivci sú rovnakí a majú rovnaké preferencie, ktoré sú zároveň rovnako časovo rozložené. Mieru úžitku zo spotreby budeme charakterizovať funkciou užitočnosti U, pričom $U(c)$ predstavuje úžitok zo spotreby spolu za celú populáciu, ak spotreba pripadajúca na jedného jednotlivca je c, t.j. $c = C/L$.

Na funkciu U kladieme nasledujúce predpoklady:

(P4) Funkcia $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je rastúca, rýdzokonkávna a dvakrát spojito diferencovateľná na $\mathbb{R}^+$.

(P5) Sú splnené Inadove podmienky

$$\lim_{c\to 0^+} U'(c) = \infty, \quad \lim_{c\to\infty} U'(c) = 0. \tag{1.10}$$

Na funkciu U vo všeobecnosti nekladieme predpoklad, aby nadobúdala len nezáporné hodnoty, ani nepredpokladáme, že 0 je z definičného oboru tejto funkcie.

Podľa [2] je jedným z najčastejšie používaných príkladov funkcie užitočnosti funkcia

$$U_\theta(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \text{pre } \theta > 0,\ \theta \neq 1, \\ \ln c & \text{pre } \theta = 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Ide o funkciu s konštantnou relatívnou averziou k riziku definovanou výrazom $-U''(c)c/U'(c)$.

Všimnime si, že využitím l'Hôspitalovho pravidla dostaneme

$$\lim_{\theta\to 1} U_\theta(c) = \lim_{\theta\to 1} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} = \ln c.$$

1.2 Formulácia modelu

Ak všetky spomenuté veličiny vydelíme počtom ľudí L, dostaneme hodnoty pripadajúce na jedného jednotlivca, teda

$$k = \frac{K}{L}, \quad c = \frac{C}{L}, \quad i = \frac{I}{L} \quad \text{a} \quad y = \frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K,L) = F\Big(\frac{K}{L}, 1\Big) = F(k,1).$$

Definujme ďalej funkciu f vzťahom $f(k) = F(k,1)$, potom $y = f(k)$. Z predpokladov kladených na funkciu F vyplýva, že funkcia f má nasledujúce vlastnosti:

($\tilde{\mathbf{P}}$1) Funkcia $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ je dvakrát diferencovateľná na $\mathbb{R}^+$ a platí $f(0) = 0$.

($\tilde{\mathbf{P}}$2) Funkcia f je rastúca a rýdzokonkávna a platí

$$\lim_{k\to 0^+} f'(k) = \lim_{k\to 0^+} \frac{\partial F(k,1)}{\partial k} = \infty \quad \text{(obdobne } \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0\text{)}. \tag{1.12}$$

($\tilde{\mathbf{P}}$3) Funkcia f je neohraničená, t.j.

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty.$$

V ďalšom sa budeme zaoberať už len funkciou f, pričom budeme predpokladať, že spĺňa vlastnosti ($\tilde{\text{P}}$1) – ($\tilde{\text{P}}$3) (budú to teda predpoklady na funkciu f).

Poznamenajme, že v tomto prípade neohraničenosť funkcie f musíme explicitne predpokladať, pretože tentokrát nevyplýva z ostatných predpokladov, t.j. ($\tilde{\text{P}}$3) nevyplýva z ($\tilde{\mathrm{P}}1$) a ($\tilde{\mathrm{P}}2$). Pri dôkaze neohraničenosti funkcie F sme totiž využili predpoklad homogenity tejto funkcie, ktorý však pre funkciu f nie je splnený.

Z rovníc (1.1) a (1.2) potom máme

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{K}{L}\Big) = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = i - \delta k \ - kn = y - c - \delta k - kn,$$

teda

$$\dot{k} \ = f(k) - \lambda k - c, \tag{1.13}$$

kde $\lambda = \delta + n > 0$.

Teraz môžeme formulovať optimalizačnú úlohu tzv. centrálneho plánovača, ktorý výberom vhodného časového rozloženia spotreby maximalizuje celkovú diskontovanú hodnotu funkcie užitočnosti v nekonečne dlhom časovom horizonte, t.j.

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} U(c(t))\, dt, \tag{1.14}$$

kde $r > 0$ predstavuje mieru diskontovania úžitku z budúcej spotreby, pričom je splnená rovnosť (1.13), $k(t_0) = k_0 > 0$ a funkcie f a U spĺňajú predpoklady ($\tilde{\mathrm{P}}1$) až ($\tilde{\mathrm{P}}3$), (P4) a (P5).

Dostali sme teda autonómnu úlohu optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte s diskontným faktorom. Problémom však je, že funkcie f a U vstupujúce do zadania tejto úlohy nie sú definované na celej množine reálnych čísel. Konkrétne funkcia f je podľa predpokladu ($\tilde{\mathrm{P}}1$) definovaná len pre $k \geq 0$ a funkcia U je podľa predpokladu (P4) definovaná vo všeobecnosti len pre $c > 0$. Toto je matematicky neštandardná situácia, pretože teória optimálneho riadenia je budovaná pre úlohy, v ktorých sú všetky funkcie definované na celých priestoroch.

Ak by sme vedeli, že optimálne riadenia pre túto úlohu spolu so svojou odozvou zostávajú vo vnútri definičného oboru funkcií f a U, tak možným riešením uvedeného problému by bolo uvažovať úlohu len na otvorenej množine, v tomto prípade na kladnom kvadrante, kde $c > 0$ a zároveň $k > 0$. Toto však zvyčajne dopredu nevieme zaručiť, a preto sa k danej úlohe pridávajú ohraničenia (v súlade s predpokladmi tvrdení v teórii optimálneho riadenia v tvare neostrých nerovností), ktoré zabezpečia, že optimálne riešenia budú len z tejto otvorenej množiny. Takýmto ohraničením je napríklad podmienka tzv. ireverzibilných investicií, ktorú formulujeme v tvare

$$0 \leq c(t) \leq f(k(t)). \tag{1.15}$$

Z nerovnosti $c(t) \leq f(k(t))$ totiž vyplýva, že ak zvolíme $k_0 > 0$, potom pre každé $t \in \langle t_0, \infty)$ platí $k(t) > 0$. Naozaj, z diferenciálnej rovnice (1.13) využitím uvedenej nerovnosti dostaneme

$$\dot{k} \ = f(k) - \lambda k \ - c \geq -\lambda k,$$

preto hodnota $k(t)$ je pre každé $t \geq t_0$ väčšia (alebo rovná) hodnote riešenia diferenciálnej rovnice $\dot{k} = -\lambda k$ so začiatočnou podmienkou $k(t_0) = k_0 > 0$. Teda $k(t) \geq k_0 e^{-\lambda(t-t_0)} > 0$.

Na druhej strane, dôkaz, že optimálne riadenia budú po zahrnutí ohraničenia (1.15) spĺňať podmienku $c(t) > 0$, je zložitejší a vyplynie až z ďalšej analýzy (pozri časť 2.2.2), kde ukážeme, že ak by optimálne riadenie bolo v nejakom čase nulové, nemôže byť optimálne. Pritom využijeme ohraničenie $c(t) \geq 0$ a podmienku (1.10). Ukáže sa však, že hodnota funkcie $U(c)$ pre $c = 0$ nie je dôležitá, kľúčovú úlohu zohráva iba spomenutá podmienka (1.10). Z uvedených dôvodov nie je podstatné, či funkcia $U(c)$ je alebo nie je definovaná v bode 0 a či uvažujeme ohraničenie $0 < c(t)$ alebo $0 \leq c(t)$. Riešenie problému, že funkcie f a U nie sú definované na celej množine reálnych čísel, zavedením ohraničenia v tvare (1.15) možno teda použiť aj v našom prípade, kedy nepredpokladáme, že funkcia U je v bode 0 definovaná.

Ramseyho model ekonomického rastu, ktorým sa budeme zaoberať v tejto práci, teda predstavuje úlohu optimálneho riadenia

$$\begin{aligned} &\max_{\{c(t)\}} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} U\big(c(t)\big)\, dt \\ &\dot{k} = f(k) - \lambda k - c, \quad k(t_0) = k_0 > 0 \text{ dané} \\ &0 \leq c(t) \leq f((k(t)). \end{aligned} \tag{RM}$$

Ide o diskontovanú úlohu na nekonečnom časovom horizonte so zmiešaným ohraničením na stavovú aj riadiacu premennú. Takúto formuláciu Ramseyho modelu možno nájsť napr. v [4] alebo [5].

Namiesto podmienky (1.15) sú v niektorých publikáciách použité aj iné podmienky, ktoré tiež zabezpečia, že optimálne riešenie bude ležať vnútri kladného kvadrantu. V knihe [1] je uvedená limitná podmienka v tvare nerovnosti na koncový stav

$$\lim_{t \to \infty} e^{-r(t-t_0)}\, k(t) \geq 0. \tag{1.16}$$

Ďalším spôsobom je zavedenie čistých (nezmiešaných) ohraničení na stavovú aj riadiacu premennú

$$k(t) \geq 0,\ c(t) \geq 0 \quad \text{pre každé } t > t_0. \tag{1.17}$$

Tento tvar možno nájsť napr. v [2], [9], [12].

Inou možnosťou by bolo uvažovať ako riadiacu premennú $s := 1-\frac{c}{f(k)}$. V tomto prípade ohraničenie (1.15) prejde do tvaru $s \in \langle 0, 1\rangle$ a úloha (RM) bude mať tvar

$$\begin{aligned}
&\max_{\{s(t)\}} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} U\big((1-s)f(k)\big)\,dt \\
&\dot{k} = sf(k) - \lambda k, \quad k(t_0) = k_0 > 0 \text{ dané} \\
&0 \le s(t) \le 1.
\end{aligned}$$

Takýto spôsob formulácie Ramseyho modelu možno nájsť napr. v [3].

V pôvodnej formulácii pochádzajúcej od Ramseya uvedenej v [8] je $r = 0$. Konvergencia integrálu (1.14) sa potom dosahuje predpokladom existencie maximálnej dosiahnuteľnej a udržateľnej úrovne úžitku, ktorú označíme B (*bliss*). Úloha (RM) je tu formulovaná v tvare

$$\begin{aligned}
&\min_{\{c(t)\}} \int_{t_0}^{\infty} \Big[B - U\big(c(t)\big)\Big]\,dt \\
&\dot{k} = f(k) - c, \quad k(t_0) = k_0 \text{ dané.}
\end{aligned} \tag{RMa}$$

1.3 Teória optimálneho riadenia

V predchádzajúcom texte sme ukázali, že Ramseyho problém optimálneho časového rozloženia spotreby vedie na úlohu optimálneho riadenia. Ide konkrétne o úlohu na nekonečnom horizonte s ohraničeniami na stavovú a riadiacu premennú. Preto teraz sformulujeme všeobecné tvrdenia, ktoré využijeme pri riešení tohto problému.

Predpokladajme, že máme danú úlohu v tvare

$$\max_{\{u(\cdot)\}} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} f^0(x(t), u(t))\,dt \tag{1.18}$$

$$\dot{x}(t) = f^1(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \text{ dané} \tag{1.19}$$

$$g^i(x(t), u(t)) \ge 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.20}$$

kde $f^0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f^1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $g^i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ sú spojito diferencovateľné reálne funkcie a diskontný faktor r je kladný.

Riadenie $\tilde{u}(t)$ pre $t \in \langle t_0, \infty)$ nazveme prípustným riadením pre úlohu (1.18) až (1.20), ak sú splnené nasledujúce podmienky:

(R1) Riadenie $\tilde{u}(t)$ je na $\langle t_0, \infty)$ po častiach spojité.

(R2) Odozva $\tilde{x}(t)$ na riadenie $\tilde{u}(t)$ (t.j. riešenie diferenciálnej rovnice (1.19) s daným $\tilde{u}(\cdot)$) existuje na celom intervale $\langle t_0, \infty)$ a spolu s $\tilde{u}(t)$ spĺňa (1.20).

(R3) Platí

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} f^0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))\, dt < \infty.$$

K podmienke (R1) poznamenajme, že konkrétne hodnoty riadenia v bodoch nespojitosti neovplyvňujú hodnotu účelovej funkcie, preto budeme riadeniam (v súlade s literatúrou) v každom bode nespojitosti prisudzovať ako hodnotu ich limitu sprava. Vďaka tomu možno zároveň považovať každé prípustné riadenie za spojité v bode t_0.

Skutočnosť, že ohraničenia $g^i(x(t), u(t)) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, sú naozaj zmiešané ohraničenia na stavovú aj riadiacu premennú, je možné overiť podmienkou regularity, ktorá podľa [4, s. 161] hovorí, že matica

$$\begin{pmatrix} \partial g_1/\partial u & g_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial g_n/\partial u & 0 & \ldots & g_n \end{pmatrix}$$

musí mať v bode $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ plnú hodnosť pre každé $t \geq t_0$, kde $\tilde{u}(t)$ je ľubovoľné prípustné riadenie a $\tilde{x}(t)$ je k nemu prislúchajúca odozva. Táto podmienka teda bude splnená vtedy, ak bude v každom bode $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ aktívne vždy najviac jedno ohraničenie a zároveň derivácia $\partial g_i/\partial u$ bude nenulová v každom bode, v ktorom je toto ohraničenie aktívne.

Aby sme mohli sformulovať pre uvedenú úlohu nutné podmienky Pontrjaginovho princípu maxima, definujeme Hamiltonovu funkciu H a Lagrangeovu funkciu L

$$H(x, u, \psi_0, \psi) = \psi_0 f^0(x, u) + \psi f^1(x, u),$$

$$L(x, u, \psi_0, \psi, \mu_1, \ldots, \mu_n) = H(x, u, \psi_0, \psi) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i g^i(x, u),$$

kde $\mu_i \geq 0$ pre každé $i = 1, \ldots, n$.

Nasledujúca veta vychádza z [4, Veta 7.4] a [6, s. 287].

Veta 1.1. *Nech $u^*(t)$ je optimálne riadenie úlohy (1.18) až (1.20) a $x^*(t)$ je k nemu prislúchajúca odozva. Potom existuje konštanta $\psi_0 \geq 0$, spojitá funkcia $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a po častiach spojité funkcie $\mu_i(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ spĺňajúce tieto podmienky:*

1. *pre každé* $t \in \langle t_0, \infty)$ *je vektor* $(\psi_0, \psi(t), \mu_1(t), \ldots, \mu_n(t))$ *nenulový,*

2. *pre každé* $t \in \langle t_0, \infty)$, *v ktorom je optimálne riadenie* $u^*(t)$ *spojité, platia podmienky maxima*

$$\frac{\partial L}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \psi_0, \psi(t), \mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)) = 0$$

a

$$\mu_i(t) \geq 0, \quad \mu_i(t) g^i(x^*(t), u^*(t)) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

a $\psi(t)$ *rieši adjungovanú rovnicu*

$$\begin{gathered}\dot{\psi}(t) = r\psi(t) - \psi_0 \frac{\partial f^0(x^*(t), u^*(t))}{\partial x} - \\ -\psi(t) \frac{\partial f^1(x^*(t), u^*(t))}{\partial x} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \frac{\partial g^i(x^*(t), u^*(t))}{\partial x}.\end{gathered}$$

Poznamenajme, že podľa [6, s. 212] sú funkcie $\mu_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ spojité pre každé $t \in \langle t_0, \infty)$, pre ktoré je $u^*(t)$ spojité. Funkcia $\psi(t)$ má po častiach spojité derivácie, ktoré vyhovujú adjungovanej rovnici.

Ďalej budeme využívať tvrdenie, ktoré je uvedené v článku [7]. V tomto článku je síce dokázané iba pre úlohy bez ohraničení (iný dôkaz tohto tvrdenia možno nájsť aj v práci [11]), podľa poznámky v článku (resp. podľa [4, Pozn. 7.5]) však platí aj pre úlohy s ohraničeniami zmiešaného typu (1.20), pokiaľ tieto úlohy neobsahujú aj čisté ohraničenia na stavové premenné v tvare $h(x(t)) \geq 0$.

Veta 1.2. *Nech* $u^*(t)$ *je optimálne riadenie úlohy (1.18) až (1.20) a* $x^*(t)$ *je k nemu prislúchajúca odozva. Potom existuje konštanta* $\psi_0 \geq 0$, *spojitá funkcia* $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a po častiach spojité funkcie* $\mu_i(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *ktoré spĺňajú podmienky 1. a 2. predchádzajúcej vety. Potom pre každé* $t \in \langle t_0, \infty)$, *v ktorom je funkcia* $u^*(t)$ *spojitá, platí*

$$e^{-r(t-t_0)} H(x^*(t), u^*(t), \psi_0, \psi(t)) = r\psi_0 \int_t^\infty e^{-r(s-t_0)} f^0(x^*(t), u^*(t))\, ds. \tag{1.21}$$

Dôsledok. Pre Hamiltonovu funkciu platí limitná podmienka v tvare

$$\lim_{t \to \infty} e^{-r(t-t_0)} H(x^*(t), u^*(t), \psi_0, \psi(t)) = 0.$$

Kapitola 2

Optimálne riešenie Ramseyho modelu

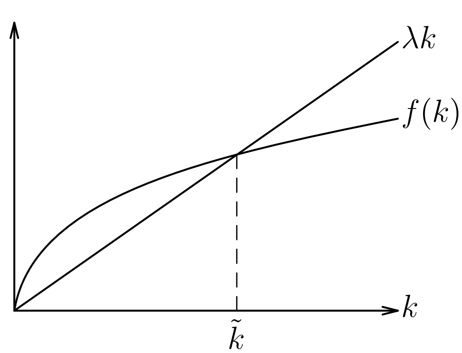
2.1 Konvergencia integrálu v účelovej funkcii

Najprv ukážeme, že ohraničenie (1.15) v úlohe (RM) zabezpečuje, že pokiaľ nejaké riadenie spĺňa podmienky (R1) a (R2) (pozri časť 1.3), potom spĺňa aj podmienku (R3), a teda je prípustné. Toto tvrdenie vyplýva z nasledujúcej vety:

Veta 2.1. *Pre každé po častiach spojité riadenie $c(t)$, ktoré spolu so svojou odozvou $k(t)$ spĺňa podmienku (1.15) pre každé $t \geq t_0$, platí*

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} U(c(t))\, dt < \infty.$$

Dôkaz. Z predpokladu $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0 < \lambda$ vyplýva, že pre dostatočne veľké hodnoty k platí $\lambda k > f(k)$. Na druhej strane, pre k blízke 0 platí $\lambda k < f(k)$,



Obr. 2.1: K dôkazu Vety 2.1

pretože podľa predpokladu ($\tilde{\text{P}}2$) platí $\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty > \lambda$, a zároveň $f(0) = 0$. Preto existuje jediné $\tilde{k} > 0$ také, že platí $f(\tilde{k}) - \lambda\tilde{k} = 0$ (jednoznačnosť vyplýva z konkávnosti funkcie f). Z rovnice (1.13) a s využitím ohraničenia (1.15) potom pre každé $k > \tilde{k}$ platí

$$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c < -c \leq 0.$$

To však znamená, že ak $k_0 \leq \tilde{k}$, tak $k(t)$ nemôže prekročiť hodnotu $\tilde{k}$. Ak by totiž v nejakom bode τ platilo $k(\tau) > \tilde{k}$, potom $\dot{k}(t) < 0$ na nejakom ľavom okolí bodu τ, čo je spor s tým, že k dosiahne hodnotu $k(\tau)$. V prípade $k_0 \leq \tilde{k}$ teda musí pre každé $t \in \langle t_0, \infty)$ platiť $k(t) \leq \tilde{k}$. Na druhej strane, v prípade $k_0 > \tilde{k}$ musí byť pre každé $t \in \langle t_0, \infty)$ splnená nerovnosť $k(t) \leq k_0$, keďže $\dot{k}(t_0) < 0$. Preto je pre ľubovoľné $k_0 > 0$ funkcia $k(t)$ zhora ohraničená hodnotou $K := \max(k_0, \tilde{k})$. Tu opäť využijeme podmienku (1.15), podľa ktorej platí $c(t) \leq f(K)$, teda aj riadenie $c(t)$ je zhora ohraničená funkcia. Zároveň pre každé t platí $U(c(t)) \leq U(f(K)) =: \bar{U}$. Preto

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} U(c(t))\, dt \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} \bar{U}\, dt = \frac{\bar{U}}{r} < \infty. \quad \square$$

2.2 Riešenie pomocou nutných podmienok optimality

2.2.1 Formulácia nutných podmienok optimality

S využitím Pontrjaginovho princípu maxima uvedeného v časti 1.3 sformulujeme nutné podmienky pre optimálne riešenie úlohy (RM).

Predtým však ešte overíme splnenie uvedenej podmienky regularity, ktorá v tomto prípade hovorí, že pre ľubovoľné prípustné riadenie $c(t)$ a k nemu prislúchajúcu odozvu $k(t)$ musí mať matica

$$\begin{pmatrix} 1 & c(t) & 0 \\ -1 & 0 & f(k(t)) - c(t) \end{pmatrix}$$

pre každé $t \geq t_0$ plnú hodnosť. To je ekvivalentné podmienke, že obe ohraničenia nemôžu byť súčasne aktívne. Táto situácia by však mohla nastať iba v bode $(0,0)$; v časti 1.2 sme však ukázali, že vďaka podmienke $k_0 > 0$ je odozva na ľubovoľné prípustné riadenie kladná pre každé $t \geq t_0$.

Pre úlohu (RM) má Hamiltonova funkcia tvar

$$H(k, c, \psi_0, \psi) = \psi_0 U(c) + \psi[f(k) - \lambda k \ - c] \tag{2.1}$$

a Lagrangeova funkcia má tvar

$$L(k, c, \psi_0, \psi, \mu_1, \mu_2) = H(k, c, \psi_0, \psi) + \mu_1 c + \mu_2 [f(k) - c], \tag{2.2}$$

kde $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$.

Z Pontrjaginovho princípu maxima sformulovaného vo Vete 1.1 dostávame, že ak $c^*(t)$ je optimálne riadenie pre úlohu (RM) a $k^*(t)$ je k nemu prislúchajúca odozva, potom existuje konštanta $\psi_0 \geq 0$, spojitá funkcia $\psi(t)$ a po častiach spojité funkcie $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, ktoré spolu s $(k^*(t), c^*(t))$ spĺňajú nasledujúce podmienky:

(i) pre každé $t \geq t_0$ je vektor $(\psi_0, \psi(t), \mu_1(t), \mu_2(t))$ nenulový,

(ii) platia podmienky maxima

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \psi_0 U'(c^*) - \psi + \mu_1 - \mu_2 = 0, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \geq 0, \quad & \mu_1 c^* = 0, \\ \mu_2 \geq 0, \quad & \mu_2 [f(k^*) - c^*] = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

(iii) a adjungovaná rovnica

$$\dot{\psi} = r\psi - \frac{\partial L}{\partial k} = r\psi - \psi[f'(k^*) - \lambda] - \mu_2 f'(k^*) = [r + \lambda - f'(k^*)]\psi - \mu_2 f'(k^*). \tag{2.5}$$

Hoci sme pri zápise podmienok (2.3) až (2.5) vynechávali časovú premennú, tieto podmienky musia byť splnené pre každé $t \geq t_0$, v ktorom je optimálne riadenie $c^*(t)$ spojité.

Keďže úloha neobsahuje čisté ohraničenia na stavovú premennú, platí zároveň aj dôsledok uvedený za Vetou 1.2 v tvare

$$\lim_{t \to \infty} e^{-r(t-t_0)} H(k^*(t), c^*(t), \psi_0, \psi(t)) = 0. \tag{2.6}$$

Práve túto podmienku využijeme pri dôkaze nasledujúcej vety:

Veta 2.2. *Každé optimálne riadenie $c^*(t)$ úlohy (RM) a k nemu prislúchajúca odozva $k^*(t)$ spĺňajú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima s $\psi_0 > 0$.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje spojitá funkcia $\psi(t)$ a po častiach spojité funkcie $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, ktoré spolu s $k^*(t)$, $c^*(t)$ spĺňajú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima (2.3) až (2.5) a podmienku (2.6) s $\psi_0 = 0$.

Ak by platilo $\psi(\tau) = 0$ pre nejaké $\tau \geq t_0$, potom kvôli podmienke (2.3) sa musia $\mu_1(\tau)$ a $\mu_2(\tau)$ rovnať nejakej spoločnej hodnote. Táto hodnota však musí byť nenulová, pretože inak by platilo $(\psi_0, \psi(\tau), \mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) = (0,0,0,0)$, čo je spor s podmienkou (i). Podľa podmienky (2.4) potom platí $c(\tau) = 0$ a zároveň $c(\tau) = f(k^*(\tau))$, teda z vlastností funkcie f aj $k(\tau) = 0$. To je však spor s tým, že pre ľubovoľné prípustné riadenie je jeho odozva kladná funkcia. Funkcia $\psi(t)$ teda musí nadobúdať nenulovú hodnotu pre každé $t \geq t_0$. Zo spojitosti funkcie $\psi(t)$ potom zároveň vyplýva, že táto funkcia nemôže meniť znamienko.

Z podmienok (2.3) a (2.4) potom dostaneme

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } \psi(t) > 0, \\ f(k(t)) & \text{pre } \psi(t) < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ak totiž napríklad platí $\psi(t) > 0$ pre každé $t \geq t_0$, potom využitím predpokladu $\psi_0 = 0$ zo vzťahu (2.3) máme $\mu_1(t) - \mu_2(t) = \psi(t) > 0$, odkiaľ podľa (2.4) dostaneme $\mu_1(t) > 0$, t.j. $c(t) = 0$ pre každé $t \geq t_0$. Platnosť vzťahu $c(t) = f(k(t))$ v prípade $\psi(t) < 0$ sa odvodí analogicky. Teraz ukážeme, že oba prípady vedú k sporu, čím bude dôkaz hotový.

Ak $\psi(t) < 0$, potom z podmienky (2.4) dostaneme $\mu_1 = 0$ (lebo $c = f(k) > 0$ pre $k > 0$), čo po dosadení do (2.3) dáva $\psi(t) = -\mu_2(t)$. Z adjungovanej rovnice (2.5) potom máme

$$\dot{\psi} = [r + \lambda - f'(k)]\psi + \psi f'(k) = (r + \lambda)\psi, \quad \psi(t_0) < 0.$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je v tvare

$$\psi(t) = Ae^{(r+\lambda)(t-t_0)}, \quad \text{kde} \quad A = \psi(t_0) < 0.$$

Z toho vyplýva, že $\psi(t)$ bude naozaj v tomto prípade záporné pre každé $t \geq t_0$. Po dosadení vzťahu $c = f(k)$ do rovnice (1.13) pre stavovú premennú dostaneme rovnicu

$$\dot{k} = -\lambda k, \quad k(t_0) = k_0 > 0,$$

ktorej riešením je $k(t) = k_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$. Overíme teraz, či uvažované riadenie v tvare $c = f(k)$ bude spĺňať limitnú podmienku (2.6). Platí

$$e^{-r(t-t_0)} H(k, c, \psi_0, \psi) = e^{-r(t-t_0)} \psi(t)[f(k) - \lambda k - c] =$$

$$= e^{-r(t-t_0)} A e^{(r+\lambda)(t-t_0)}(-\lambda k) = -\lambda k \; Ae^{\lambda(t-t_0)} = -\lambda A k_0.$$

Potom však

$$\lim_{t\to\infty} e^{-r(t-t_0)} H(k, c, \psi_0, \psi) = -\lambda A k_0 > 0,$$

teda podmienka (2.6) ako nutná podmienka optimality nie je v tomto prípade splnená.

V prípade $\psi(t) > 0$ je riadenie dané vzťahom $c(t) = 0$. Vieme už, že funkcia $\psi(t)$ nemôže meniť znamienko, v tomto prípade teda platí $c(t) \equiv 0$ pre každé $t \geq t_0$. Toto riadenie však nie je optimálne, lebo napr. pre riadenie $c(t) = f(k(t))$ pre každé $t \in \langle t_0, \infty)$ nadobúda účelová funkcia vzhľadom na rastúcosť funkcie U vyššiu hodnotu ako pre riadenie $c(t) = 0$. Pre každé $t \geq t_0$ totiž platí, že $f(k(t)) > 0$ vďaka $k(t) > 0$ pre $k_0 > 0$. Prípustnosť riadenia $c(t) = f(k(t))$ je pritom zrejmá. □

Dôsledkom tejto vety je, že hodnoty multiplikátorov $\psi(t)$, $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$ možno normovať tak, aby $\psi_0 = 1$ a pri ďalších úvahách sa stačí zaoberať touto jedinou hodnotou ψ_0.

2.2.2 Vlastnosti optimálneho riadenia vyplývajúce z nutných podmienok optimality

Pred samotným odvodením riešenia spĺňajúceho nutné podmienky optimality odvodíme najprv dve jeho vlastnosti, ktoré z týchto podmienok a z predpokladov modelu priamo vyplývajú.

V dôkaze Vety 2.2 sme vylúčili prípad, kedy bolo optimálne riadenie úlohy (RM) konštantne nulové. Možno však dokázať nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.3. *Pre optimálne riadenie $c^*(t)$ úlohy (RM) platí $c(t) > 0$ pre každé $t \geq t_0$.*

Dôkaz. Nezápornosť optimálneho riadenie je triviálna – vyplýva z podmienky (1.15), ktorá platí pre všetky prípustné riadenia. Prípad $c^*(\tau) = 0$ pre nejaké $\tau \geq t_0$ vylúčime teraz sporom. V tomto prípade by muselo platiť $\mu_2(\tau) = 0$. Ak totiž označíme odozvu optimálneho riadenia ako $k^*(t)$, potom vieme, že platí $k^*(t) > 0$ pre každé $t \geq t_0$, teda aj $k^*(\tau) > 0$. Keďže podľa predpokladu $c^*(\tau) = 0$, platí $c^*(\tau) \neq f(k^*(\tau))$, a teda podľa (2.4) máme $\mu_2(\tau) = 0$. Z podmienky (2.3) využitím nezápornosti funkcie μ_1 ďalej dostaneme

$$\psi(\tau) = U'(c^*(\tau)) + \mu_1(\tau) \geq U'(c^*(\tau)) = \infty,$$

čo je však spor s tým, že funkcia $\psi(t)$ musí nadobúdať konečnú hodnotu pre každé $t \geq t_0$. □

Tvrdenie tejto vety vlastne znamená, že predpoklad $\lim_{c\to 0} U'(c) = \infty$ zabezpečuje, aby pre optimálne riadenie $c^*(t)$ platilo $c^*(t) > 0$ pre každé $t \geq t_0$, a teda nie je dôležité, či je alebo nie je funkcia U v bode 0 definovaná. Ďalším dôsledkom tejto vety je, že $\mu_1(t) \equiv 0$ pre každé t, čo dostaneme využitím podmienky (2.4).

Ďalej sa budeme zaoberať problémom spojitosti optimálneho riadenia. Vo všeobecnosti hľadáme optimálne riadenie v triede po častiach spojitých funkcií. Z uvedených nutných podmienok optimality však vyplýva nasledujúce tvrdenie:

Veta 2.4. *Optimálne riadenie $c^*(t)$ úlohy (RM) je spojitá funkcia pre každé $t \geq t_0$.*

Dôkaz. V časti 1.3 sme povedali, že každé prípustné riadenie je v bode t_0 spojité. Zvoľme teda ľubovoľné $\tau \in (t_0, \infty)$. Môžu nastať štyri prípady, ktoré postupne vyšetríme:

- Nespojitosť optimálneho riadenia v prípade, že platí $0 < c^*(t) < f(k^*(t))$ na nejakom okolí bodu τ, vylúčime sporom. Predpokladajme, že by platilo napr.
$$\lim_{t\to\tau^-} c^*(t) < \lim_{t\to\tau^+} c^*(t).$$
Podľa podmienky (2.4) na uvažovanom okolí bodu τ platí $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$, a teda zo vzťahu (2.3) a z klesajúcosti funkcie U' máme
$$\lim_{t\to\tau^-} \psi(t) = \lim_{t\to\tau^-} U'(c^*(t)) > \lim_{t\to\tau^+} U'(c^*(t)) = \lim_{t\to\tau^+} \psi(t),$$
čo je spor so spojitosťou funkcie ψ. Prípad
$$\lim_{t\to\tau^-} c^*(t) > \lim_{t\to\tau^+} c^*(t)$$
možno vylúčiť analogicky.

- Ak na nejakom okolí bodu τ platí $c^*(t) = f(k^*(t))$, spojitosť optimálneho riadenia v bode τ triviálne vyplýva zo spojitosti funkcie f.

- Treťou možnosťou je, ak $c^*(t) < f(k^*(t))$ pre nejaké ľavé okolie bodu τ a $c^*(t) = f(k^*(t))$ pre nejaké pravé okolie bodu τ. Sporom ukážeme, že aj v tomto prípade musí byť funkcia c^* v bode τ spojitá. Opäť predpokladajme, že by platilo
$$\lim_{t\to\tau^-} c^*(t) < \lim_{t\to\tau^+} c^*(t).$$
Potom z podmienky (2.3) a využitím podmienky (2.4) dostaneme
$$\lim_{t\to\tau^-} \psi(t) = \lim_{t\to\tau^-} \big(U'(c^*(t)) - \mu_2(t)\big) = \lim_{t\to\tau^-} U'(c^*(t))$$
a
$$\lim_{t\to\tau^+} \psi(t) = \lim_{t\to\tau^+} \big(U'(c^*(t)) - \mu_2(t)\big) < \lim_{t\to\tau^-} U'(c^*(t)) - \lim_{t\to\tau^+} \mu_2(t),$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z klesajúcosti funkcie U'. Vieme však, že funkcia ψ je spojitá funkcia pre každé $t \geq t_0$, a preto porovnaním vyššie uvedených vzťahov máme

$$\lim_{t\to\tau^-} U'(c^*(t)) < \lim_{t\to\tau^-} U'(c^*(t)) - \lim_{t\to\tau^+} \mu_2(t), \quad \text{teda} \quad \lim_{t\to\tau^+} \mu_2(t) < 0,$$

čo je spor s (2.4).

- Poslednou možnosťou je $c^*(t) = f(k^*(t))$ pre nejaké ľavé okolie bodu τ a $c^*(t) < f(k^*(t))$ pre nejaké pravé okolie bodu τ. Nespojitosť optimálneho riadenia vylúčime analogicky ako v predchádzajúcom prípade. Predpokladajme teda, že v bode τ je funkcia $c^*(t)$ nespojitá, t.j.

$$\lim_{t\to\tau^+} c^*(t) < \lim_{t\to\tau^-} c^*(t).$$

Obdobne ako v predchádzajúcom prípade dostaneme

$$\lim_{t\to\tau^-} \psi(t) = \lim_{t\to\tau^-} \big(U'(c^*(t)) - \mu_2(t)\big) < \lim_{t\to\tau^+} U'(c^*(t)) - \lim_{t\to\tau^-} \mu_2(t)$$

a

$$\lim_{t\to\tau^+} \psi(t) = \lim_{t\to\tau^+} \big(U'(c^*(t)) - \mu_2(t)\big) = \lim_{t\to\tau^+} U'(c^*(t)),$$

a teda zo spojitosti funkcie ψ máme

$$\lim_{t\to\tau^+} U'(c^*(t)) < \lim_{t\to\tau^+} U'(c^*(t)) - \lim_{t\to\tau^-} \mu_2(t), \quad \text{preto} \quad \lim_{t\to\tau^-} \mu_2(t) < 0,$$

čo je opäť spor s (2.4). □

Dôsledkom tejto vety je, že funkcie $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$ sú tiež spojité funkcie (hoci o funkcii $\mu_1(t)$ to už vieme z dôsledku za Vetou 2.3). Toto tvrdenie vyplýva z poznámky uvedenej za Vetou 1.1.

2.2.3 Riešenie spĺňajúce nutné podmienky optimality

Teraz budeme hľadať riešenie, ktoré spĺňa podmienky (1.13), (1.15) a (2.3) až (2.5). Vieme už, že sa stačí zaoberať prípadom $\psi_0 = 1$, pričom môžeme predpokladať, že platí $\mu_1(t) \equiv 0$ pre každé $t \geq t_0$ a μ_2 je spojitá funkcia.

Označme $\mathcal{D} := \{(k,c)\,|\,0 < c < f(k)\}$. Najprv sa budeme zaoberať riešením vo vnútri oblasti $\mathcal{D}$, kde sú obe ohraničenia splnené v tvare ostrých nerovností, t.j. z (2.4) vieme, že aj $\mu_2(t) \equiv 0$. Z (2.3) dostávame

$$\psi = U'(c), \quad \text{teda} \quad \dot{\psi} = U''(c)\,\dot{c}, \tag{2.8}$$

čo po dosadení do adjungovanej rovnice (2.5) dáva

$$\dot{c} = \frac{U'(c)}{U''(c)}[r + \lambda - f'(k)]. \tag{2.9}$$

Každé optimálne riešenie $(k^*(t), c^*(t))$ ležiace vo vnútri oblasti $\mathcal{D}$ musí teda spĺňať systém nelineárnych diferenciálnych rovníc (1.13) a (2.9) v tvare

$$\begin{aligned} \dot{k}^* &= f(k^*) - \lambda k^* - c^*, \\ \dot{c}^* &= \frac{U'(c^*)}{U''(c^*)}[r + \lambda - f'(k^*)]. \end{aligned} \tag{SDR}$$

Izoklíny tohto systému diferenciálnych rovníc sú krivky vyhovujúce rovniciam

$$\begin{aligned} f(k) - \lambda k - c &= 0, \\ \frac{U'(c)}{U''(c)}[r + \lambda - f'(k)] &= 0. \end{aligned}$$

Z klesajúcosti funkcie f' a z predpokladu ($\tilde{\mathrm{P}}2$) vieme, že existuje jediné $\hat{k}$, pre ktoré platí $f'(\hat{k}) = r + \lambda$. Preto krivky

$$\begin{aligned} k &= \hat{k}, \quad \text{kde } f'(\hat{k}) = r + \lambda, \\ c &= f(k) - \lambda k \end{aligned}$$

sú izoklíny systému (SDR). Otázkou však je, či existuje také $\hat{c}$, že $\frac{U'(\hat{c})}{U''(\hat{c})} = 0$. Je zrejmé, že táto rovnosť nemôže platiť pre žiadne $\hat{c} > 0$ (kvôli predpokladom na funkciu U) a pre $\hat{c} < 0$ nemá význam, pretože funkcia U nemusí byť pre záporné hodnoty vôbec definovaná. Ukážeme však, že pre každú funkciu U, ktorá vyhovuje stanoveným podmienkam, platí

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{U'(c)}{U''(c)} = 0. \tag{2.10}$$

Pre každé $c > 0$ totiž platí

$$\int_0^c \frac{U''(c)}{U'(c)}\, dc = \ln U'(c) - \lim_{c \to 0^+} \ln U'(c) = -\infty,$$

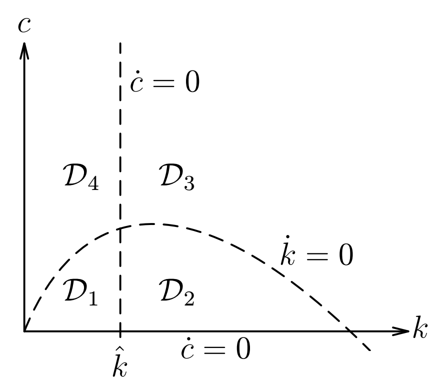
preto pre ľubovoľné c existuje také $\bar{c} \in \langle 0, c \rangle$, že $\frac{U''(\bar{c})}{U'(\bar{c})} = -\infty$. Odtiaľ

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{U''(c)}{U'(c)} = -\infty,$$

z čoho už vyplýva rovnosť (2.10). Odvodili sme teda, že aj priamka $c = 0$ je izoklínou uvažovaného systému.

Izoklíny systému diferenciálnych rovníc (SDR) delia kladný kvadrant na štyri oblasti:

- $\mathcal{D}_1 := \{(k, c) \mid f'(k) > r + \lambda,\ 0 < c < f(k) - \lambda k\}$, v ktorej platí $\dot{k} > 0$, $\dot{c} > 0$;
- $\mathcal{D}_2 := \{(k, c) \mid f'(k) < r + \lambda,\ 0 < c < f(k) - \lambda k\}$, v ktorej platí $\dot{k} > 0$, $\dot{c} < 0$;
- $\mathcal{D}_3 := \{(k, c) \mid f'(k) < r + \lambda,\ c > f(k) - \lambda k\}$, v ktorej platí $\dot{k} < 0$, $\dot{c} < 0$ a
- $\mathcal{D}_4 := \{(k, c) \mid f'(k) > r + \lambda,\ c > f(k) - \lambda k\}$, v ktorej platí $\dot{k} < 0$, $\dot{c} > 0$.



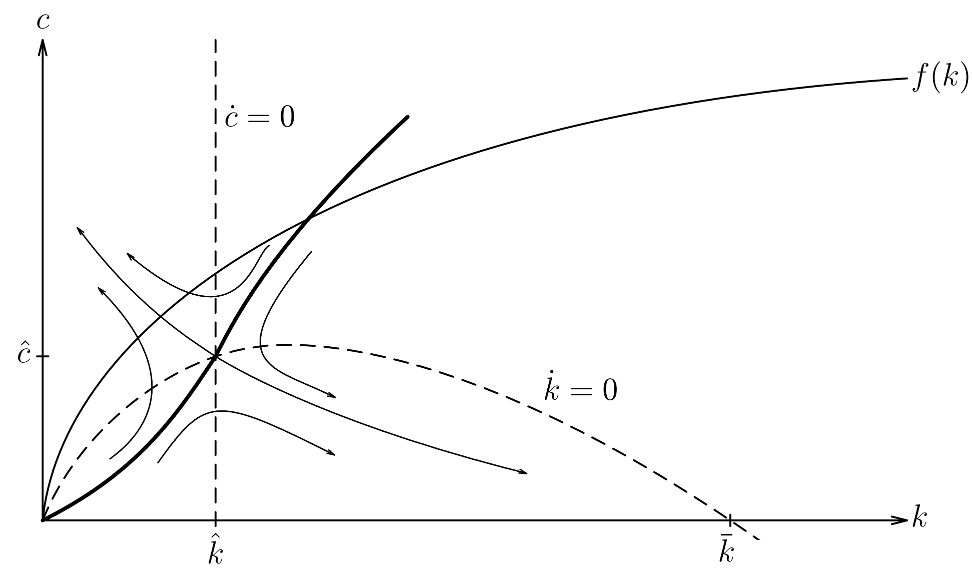
Obr. 2.2: Izoklíny systému (SDR)

Na obrázku 2.3 je fázový portrét graficky znázorňujúci trajektórie riešení tohto systému rovníc.

Priesečníky izoklín vytvárajú tri stacionárne body: $(\hat{k}, \hat{c})$, $(0, 0)$ a $(\bar{k}, 0)$, pričom $f'(\hat{k}) = r + \lambda$, $\hat{c} = f(\hat{k}) - \lambda\hat{k}$ a $f(\bar{k}) - \lambda\bar{k} = 0$, kde $\bar{k} > 0$. Postupne vyšetríme stabilitu týchto stacionárnych bodov.

(a) Najprv sa budeme zaoberať stabilitou prvého z uvedených stacionárnych bodov, t.j. $(\hat{k}, \hat{c})$. (Tento stacionárny bod budeme takto označovať v celej práci.) Všimnime si, že tento bod vďaka podmienkam (1.12) leží vždy vo vnútri oblasti $\mathcal{D}$. Keďže je totiž funkcia f konkávna, platí $f(\bar{k}) - f(0) > f'(\bar{k})(\bar{k} - 0)$. S využitím vzťahu $f(\bar{k}) = \lambda\bar{k}$ dostaneme $\lambda\bar{k} > f'(\bar{k})\bar{k}$, a teda

$$f'(\bar{k}) < \lambda. \tag{2.11}$$



Obr. 2.3: Fázový portrét pre systém (SDR)

Vďaka $r > 0$ potom máme zároveň $f'(\bar{k}) < r + \lambda$, a teda z klesajúcosti funkcie f' dostaneme $\hat{k} < \bar{k}$. Jaccobiho matica pravých strán systému (SDR) v tomto bode je tvaru

$$\begin{pmatrix} f'(\hat{k}) - \lambda & -1 \\ -\dfrac{U'}{U''}f'' & 0 \end{pmatrix}$$

a jej vlastné hodnoty sú

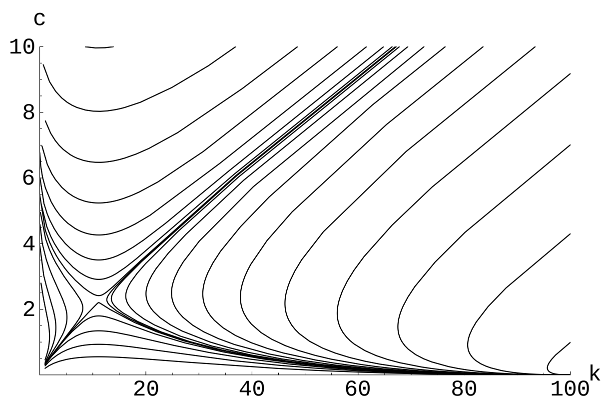
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(f'(\hat{k}) - \lambda \pm \sqrt{\left(\lambda - f'(\hat{k})\right)^2 + 4\,\frac{U'}{U''}f''} \right).$$

Keďže pre $\hat{k}$ platí $f'(\hat{k}) = r+\lambda$, tak vďaka predpokladu $r > 0$ je $f'(\hat{k})-\lambda > 0$. Z podmienok kladených na funkcie U a f ďalej máme $\frac{U'}{U''}f'' > 0$, preto obe vlastné hodnoty sú reálne a majú navzájom opačné znamienka. Stacionárny bod $(\hat{k}, \hat{c})$ je teda sedlom a existuje stabilná sedlová cesta $(k^*(t), c^*(t))$, pre ktorú platí

$$\lim_{t\to\infty} k^*(t) = \hat{k} \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty} c^*(t) = \hat{c}. \tag{2.12}$$

(b) Stacionárny bod $(0, 0)$ je zrejme nestabilný, pretože v oboch oblastiach $\mathcal{D}_1$ aj $\mathcal{D}_4$ platí $\dot{c} > 0$.

(c) Pri vyšetrovaní tretieho stacionárneho bodu $(\bar{k}, 0)$ využijeme, že priamka $c = 0$ je izoklína systému (SDR), pozdĺž ktorej platí $\dot{c} = 0$, preto žiadna trajektória tohto systému nemôže pretínať túto priamku. Z fázového portrétu zároveň vidíme, že trajektórie môžu prechádzať z oblasti $\mathcal{D}_4$ do oblasti $\mathcal{D}_2$, nie však naopak. Preto všetky trajektórie prechádzajúce cez oblasť $\mathcal{D}_2$ ležiace pod stabilnou sedlovou cestou musia konvergovať do stacionárneho bodu $(\bar{k}, 0)$; tento stacionárny bod je teda stabilný uzol. Situácia je znázornená na obrázku 2.2.3.



Obr. 2.4: Stabilita stacionárneho bodu $(\bar{k}, 0)$
pre funkciu U tvaru (1.11) $(\bar{k} = 100)$

Z uvedenej analýzy vyplýva, že optimálnym riadením môže byť iba také riadenie, ktoré spĺňa systém diferenciálnych rovníc (SDR) a konverguje buď do sedlového stacionárneho bodu $(\hat{k}, \hat{c})$, alebo do stacionárneho bodu $(\bar{k}, 0)$. Všetky ostatné trajektórie riešení systému (SDR) opúšťajú kladný kvadrant, a teda sú neprípustné (všetky trajektórie prechádzajúce cez oblasť $\mathcal{D}_4$ totiž v konečnom čase dosiahnu hodnotu $k = 0$).

Všimnime si, akú úlohu v tejto analýze zohrával predpoklad $\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty$: Tento predpoklad bol kľúčový iba pri dôkaze Vety 2.3, ktorá hovorí o nenulovosti optimálneho riadenia a následne Lemy 2.1, v ktorej dôkaze sme túto vetu použili. Odhliadnuc teda od týchto dvoch tvrdení zostanú všetky uvedené výsledky v platnosti aj vtedy, ak tento predpoklad nebude splnený. Keďže však v prípade $\lim_{c \to 0} U'(c) < \infty$ nevieme vylúčiť, že optimálne riadenie nadobudne v konečnom čase nulovú hodnotu, musí byť funkcia užitočnosti definovaná na $\mathbb{R}_0^+$. Príkladom takejto funkcie užitočnosti je tzv. funkcia s konštantnou absolútnou averziou k riziku v tvare

$$U(c) = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta c}, \quad \theta > 0. \tag{2.13}$$

2.3 Postačujúce podmienky optimality

Až doteraz sme sa zaoberali iba nutnými podmienkami, ktoré musí spĺňať optimálne riadenie úlohy (RM). Pomocou týchto nutných podmienok sme odvodili niekoľko vlastností optimálneho riadenia (spojitosť, kladnosť). Ich riešením sme zistili, že tá časť trajektórie optimálneho riešenia úlohy (RM), ktorá od určitého t počnúc leží v oblasti $\mathcal{D}$, musí konvergovať do sedlového stacionárneho bodu $(\hat{k}, \hat{c})$ systému diferenciálnych rovníc (SDR) alebo do stacionárneho bodu $(\bar{k}, 0)$, a to po jednej z trajektórií riešení tohto systému. V tejto časti odvodením postačujúcich podmienok ukážeme, že riešenie podmienok Pontrjaginovho princípu maxima konvergujúce do sedlového bodu $(\hat{k}, \hat{c})$ je skutočne jediným optimálnym riešením úlohy (RM). Platí totiž nasledujúca veta:

Veta 2.5. *Nech $c^*(t)$ je prípustné riadenie a $k^*(t)$ príslušná odozva pre úlohu (RM), ktoré spolu so spojitými funkciami $\psi(t)$ a $\mu_2(t)$, s $\psi_0 = 1$ a s $\mu_1(t) \equiv 0$ pre každé $t \geq t_0$ spĺňa nutné podmienky Pontrjaginovho princípu maxima (2.3) až (2.6) a nech $(k^*(t), c^*(t))$ konverguje k sedlovému bodu $(\hat{k}, \hat{c})$, ktorý je stacionárnym riešením systému diferenciálnych rovníc (SDR). Potom je $c^*(t)$ jediným optimálnym riadením pre úlohu (RM).*

Pri dôkaze tejto vety vychádzame z knihy [4, s. 36 a 43], kde je však dokázaná postačujúcosť podmienok iba všeobecne pre úlohu na konečnom a nekonečnom časovom horizonte bez ohraničení.

Dôkaz. Ak označíme

$$J(c) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} U(c(t))\, dt,$$

potom musíme ukázať, že pre ľubovoľné prípustné riadenie $\tilde{c}(t)$, ktoré je rôzne od riadenia $c^*(t)$ aspoň na nejakom netriviálnom intervale, platí $J(\tilde{c}) - J(c^*) < 0$. Odozvu prislúchajúcu k tomuto riadeniu označme $\tilde{k}(t)$. Využitím definície Hamiltonovej funkcie máme

$$J(\tilde{c}) - J(c^*) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} \big(U(\tilde{c}) - U(c^*)\big)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} \Big\{ \big[H(\tilde{k}, \tilde{c}, \psi) - H(k^*, c^*, \psi)\big] - \psi[(f(\tilde{k}) - \lambda\tilde{k} - \tilde{c}) - (f(k^*) - \lambda k^* - c^*)] \Big\}\, dt.$$

Keďže $\tilde{c}(t)$ je podľa predpokladu prípustné riadenie, pre každé $t \geq t_0$ je splnená nerovnosť $0 \leq \tilde{c}(t) \leq f(\tilde{k}(t))$, a teda platí

$$H(\tilde{k}, \tilde{c}, \psi) - H(k^*, c^*, \psi) \leq \max_{0 \leq c \leq f(\tilde{k})} H(\tilde{k}, c, \psi) - H(k^*, c^*, \psi). \tag{2.14}$$

Podľa predpokladu vety spĺňajú funkcie ψ a μ_2 spolu s k^* a c^* nutné podmienky optimality, preto podľa (2.4)

$$H(k^*, c^*, \psi) = H(k^*, c^*, \psi) + \mu_2[f(k^*) - c^*] = L(k^*, c^*, \psi, \mu_2). \tag{2.15}$$

Vďaka nezápornosti funkcie μ_2 pre každé c spĺňajúce nerovnosť $0 \leq c \leq f(\tilde{k})$ zároveň platí

$$H(\tilde{k}, c, \psi) \leq H(\tilde{k}, c, \psi) + \mu_2[f(\tilde{k}) - c] = L(\tilde{k}, c, \psi, \mu_2),$$

a teda

$$\max_{0 \leq c \leq f(\tilde{k})} H(\tilde{k}, c, \psi) \leq \max_{0 \leq c \leq f(\tilde{k})} L(\tilde{k}, c, \psi, \mu_2) \leq \max_{c} L(\tilde{k}, c, \psi, \mu_2), \tag{2.16}$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z toho, že viazanú maximalizáciu sme zamenili za voľnú. Funkcia L je separovaná v premenných k a c (t.j. možno ju zapísať v tvare $L_1(k, \psi, \mu_2) + L_2(c, \psi, \mu_2)$), preto platí

$$\max_{c} L(\tilde{k}, c, \psi, \mu_2) = L(\tilde{k}, c^*, \psi, \mu_2). \tag{2.17}$$

Dosadením (2.16), (2.15) a (2.17) do (2.14) dostaneme

$$H(\tilde{k}, \tilde{c}, \psi) - H(k^*, c^*, \psi) \leq L(\tilde{k}, c^*, \psi, \mu_2) - L(k^*, c^*, \psi, \mu_2). \tag{2.18}$$

Ďalej využijeme, že Lagrangeova funkcia (2.2) je diferencovateľná a rýdzokonkávna v premennej k pre ľubovoľné prípustné c a pre ψ a μ_2, ktoré spolu s (k^*, c^*) spĺňajú podmienky (2.3) až (2.6). Dosadením vzťahu (2.3) do (2.2) totiž dostaneme

$$L(k, c, \psi, \mu_2) = U(c) + \big(U'(c) - \mu_2\big)\big[f(k) - \lambda k - c\big] + \mu_2\big[f(k) - c\big],$$

a teda

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 k}(k, c, \psi, \mu_2) = U'(c) f''(k) < 0.$$

Z vlastností rýdzokonkávnych funkcií potom máme

$$L(\tilde{k}, c^*, \psi, \mu_2) - L(k^*, c^*, \psi, \mu_2) < \frac{\partial L}{\partial k}(k^*, c^*, \psi, \mu_2)\,(\tilde{k} - k^*).$$

Keďže $\tilde{k}(t)$ je spojitá funkcia, potom ak $\tilde{k} \neq k^*$, tak $\tilde{k}$ a k^* sa odlišujú aj na nejakom intervale nenulovej dĺžky. Využitím tejto skutočnosti a adjungovanej rovnice (2.5) dostávame

$$J(\tilde{c}) - J(c^*) < \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} \Big[\frac{\partial L}{\partial k}(k^*, c^*, \psi, \mu_2)\,(\tilde{k} - k^*) - \psi(\dot{\tilde{k}} - \dot{k}^*)\Big]\, dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{\infty} e^{-r(t-t_0)} \Big[(r\psi - \dot{\psi})\,(\tilde{k} - k^*) - \psi(\dot{\tilde{k}} - \dot{k}^*) \Big]\, dt = \\
&= -\int_{t_0}^{\infty} \frac{d}{dt} \Big[e^{-r(t-t_0)} \psi(\tilde{k} - k^*) \Big]\, dt = \\
&= -\lim_{t\to\infty} e^{-r(t-t_0)} \psi(t)(\tilde{k}(t) - k^*(t)), \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

pretože pre ľubovoľné $\tilde{k}$ platí $\tilde{k}(t_0) = k_0$. Naším cieľom je teda ukázať, že pre každé $\tilde{k}(t)$ prislúchajúce k nejakému prípustnému riadeniu $\tilde{c}(t)$ platí

$$
\lim_{t\to\infty} e^{-r(t-t_0)} \psi(t)(\tilde{k}(t) - k^*(t)) \geq 0. \qquad (2.20)
$$

Nech teda $\tilde{k}(t)$ je odozva na ľubovoľné prípustné riadenie. Keďže riadenie $c^*(t)$ podľa predpokladu vety konverguje k hodnote $\hat{c} < f(\hat{k})$, od istého τ počnúc platí $\mu_2(t) = 0$. Zo vzťahu (2.3) potom vyplýva $\psi(t) = U'(c^*(t))$ pre každé $t \geq \tau$. Využitím tejto rovnosti dostaneme

$$
\lim_{t\to\infty} e^{-r(t-t_0)} \psi(t)(\tilde{k}(t) - k^*(t)) = \lim_{t\to\infty} e^{-r(t-t_0)} U'(c^*(t))(\tilde{k}(t) - k^*(t)). \qquad (2.21)
$$

Pretože $\lim_{t\to\infty} e^{-r(t-t_0)} = 0$, stačí dokázať, že výraz $U'(c^*(t))(\tilde{k}(t) - k^*(t))$ je od nejakého τ počnúc zdola ohraničený. Keďže podľa predpokladu $c^*(t)$ konverguje ku kladnej hodnote $\hat{c}$, funkcia $U'(c^*(t))$ je od istej hodnoty τ ohraničená. Zároveň vieme, že pre každé $t \geq t_0$ je $\tilde{k}(t)$ kladná, a teda výraz $\tilde{k}(t) - k^*(t)$ je pre odozvu $\tilde{k}(t)$ pre ľubovoľné prípustné riadenie zdola ohraničený (vďaka ohraničenosti funkcie $k^*(t)$ zhora, ktorá vyplýva z konvergencie funkcie $k^*(t)$ do bodu $\hat{k}$). Pravá strana rovnosti (2.21) je preto nezáporná, čo sme chceli dokázať.

Jednoznačnosť optimálneho riadenia $c^*(t)$ vyplýva z ostrej nerovnosti vo vzťahu (2.19), ktorú sme dostali vďaka rýdzokonkávnosti Lagrangeovej funkcie L v premennej k. □

Poznamenajme, že nerovnosť (2.20) nemožno dokázať v prípade, ak by sme za c^* zobrali riadenie konvergujúce do stacionárneho bodu $(\bar{k}, 0)$, kde $f(\bar{k}) - \lambda\bar{k} = 0$, $\bar{k} > 0$. Okrem toho, že sme dokázali, že riadenie konvergujúce do sedlového bodu $(\hat{k}, \hat{c})$ je jediné optimálne, v tomto prípade sa zároveň dá ukázať, že výraz $U'(c^*(t))(\tilde{k}(t) - k^*(t))$ nie je pre $t \to \infty$ ohraničený. Pri tomto dôkaze sa využíva, že ak za $\tilde{k}(t)$ zoberieme práve odozvu riadenia konvergujúceho do bodu $(\hat{k}, \hat{c})$, bude výraz $\lim\limits_{t\to\infty}(\tilde{k}(t) - k^*(t))$ záporný, zatiaľ čo $\lim\limits_{t\to\infty} U'(c^*(t)) = \lim\limits_{c\to 0} U'(c) = \infty$.

2.4 Vlastnosti stabilnej sedlovej cesty

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že úloha (RM) má jediné optimálne riešenie, ktoré spĺňa nutné podmienky optimality a minimálne od nejakého τ počnúc konverguje po stabilnej sedlovej ceste do bodu $(\hat{k}, \hat{c})$. Preto sa teraz budeme venovať niektorým vlastnostiam stabilnej sedlovej cesty.

Stabilná sedlová cesta má dve vetvy: jedna z nich leží v oblasti $\mathcal{D}_1$, druhá v oblasti $\mathcal{D}_3$. Pre vetvu ležiacu v oblasti $\mathcal{D}_1$ platí $\dot{c}(t) > 0$, $\dot{k}(t) > 0$, preto zároveň $\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{\dot{c}}{\dot{k}} > 0$. Táto časť stabilnej sedlovej cesty teda monotónne konverguje do sedlového bodu a budeme ju nazývať rastúca vetva. Analogicky vetvu ležiacu v oblasti $\mathcal{D}_3$ budeme nazývať klesajúca vetva, pretože pre ňu platí $\dot{c} < 0$, $\dot{k} < 0$. Aj v tomto prípade však platí $\frac{\partial c}{\partial k} > 0$. Stabilná sedlová cesta teda predstavuje v rovine (k, c) spojitú monotónnu krivku, na ktorú sa možno pozerať aj ako na funkciu $\bar{c}(k)$; táto funkcia je zrejme rastúca. Inak povedané, ku každej hodnote $k > 0$ existuje najviac jeden bod $(k, \bar{c}(k))$ ležiaci na tejto stabilnej sedlovej ceste.

Už vieme, že bod $(0, 0)$ je tiež stacionárnym bodom uvažovaného systému diferenciálnych rovníc, preto neleží na stabilnej sedlovej ceste. Dokážeme však nasledujúcu lemu:

Lema 2.1. *Bod* $(0, 0)$ *je hromadným bodom rastúcej vetvy stabilnej sedlovej cesty.*

Dôkaz. Na hranici oblasti $\mathcal{D}_1$ musí zrejme existovať nejaký hromadný bod tejto rastúcej vetvy rôzny od bodu $(\hat{k}, \hat{c})$. V opačnom prípade by musela začínať niekde vnútri oblasti $\mathcal{D}_1$. Tento bod by potom musel byť stacionárnym bodom uvažovaného systému, čo je spor s tým, že v celej oblasti $\mathcal{D}_1$ platí $\dot{c} > 0, \dot{k} > 0$. Tento hromadný bod zrejme nemôže ležať na spoločnej hranici oblastí $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ ani oblastí $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_4$ (s výnimkou bodu $(0, 0)$). Kvôli nenulovosti jednej z derivácií $\dot{k}$, $\dot{c}$ totiž cez všetky takéto body prechádza trajektória nejakého riešenia systému (SDR) vchádzajúca do oblasti $\mathcal{D}_2$, resp. $\mathcal{D}_4$. Týmto hromadným bodom teda musí byť bod $(\tilde{k}, 0)$, pričom $\tilde{k} \geq 0$ a $f'(\tilde{k}) > r + \lambda$. Predpokladajme najprv, že $\tilde{k} > 0$. Pre optimálne riadenie úlohy (RM) so začiatočnou podmienkou $k_0 = \tilde{k}$ potom podľa odvodených nutných podmienok musí platiť $c^*(t_0) = 0$, čo je spor s tvrdením Lemy 2.3. Preto $\tilde{k} = 0$ a bod $(0, 0)$ musí byť hromadným bodom rastúcej vetvy sedlovej cesty. □

Všimnime si ďalej, že v celej oblasti $\mathcal{D}_3$ platí $\dot{k} > 0$ a $\dot{c} > 0$. Preto ak parametrizujeme klesajúcu vetvu stabilnej cesty parametrom t a označíme ju ako $(\bar{k}(t), \bar{c}(t))$, musí platiť

$$\lim_{t \to -\infty} \bar{k}(t) = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{t \to -\infty} \bar{c}(t) = +\infty. \tag{2.22}$$

Z tohto tvrdenia a z Lemy 2.1 vyplýva, že ku každej hodnote $k > 0$ existuje *práve* jeden bod ležiaci na tejto stabilnej sedlovej ceste.

2.5 Optimálne riešenie pre veľkú začiatočnú hodnotu k_0

V tejto časti ukážeme, že vždy existuje jediné prípustné riadenie, ktoré spĺňa nutné podmienky optimality a konverguje do stacionárneho sedlového bodu $(\hat{k}, \hat{c})$. Podľa Vety 2.5 je to potom jediné optimálne riadenie úlohy (RM) a táto veta zároveň umožňuje jeho kvalitatívne popísanie.

Pokiaľ $k_0 \leq \hat{k}$, situácia je jednoduchá. Rastúca časť stabilnej sedlovej cesty totiž leží vždy celá v oblasti $\mathcal{D}$. Z už uvedených vlastností sedlovej cesty vieme, že v tomto prípade možno k danému k_0 jednoznačne zvoliť príslušné $c(t_0)$ ležiace na stabilnej sedlovej ceste. Riadenie konvergujúce pozdĺž tejto cesty do bodu $(\hat{k}, \hat{c})$ zároveň zrejme spĺňa nutné podmienky optimality, je to teda jediné optimálne riadenie úlohy (RM).

Ďalej sa teda budeme zaoberať prípadom $k_0 > \hat{k}$. Keďže stacionárny bod $(\hat{k}, \hat{c})$ leží vo vnútri oblasti $\mathcal{D}$, znamená to, že optimálne riadenie spolu so svojou odozvou leží minimálne od istého t počnúc na stabilnej sedlovej ceste. Pokiaľ je táto stabilná sedlová cesta celá v oblasti $\mathcal{D}$ (prípadne na jej hranici), situácia je obdobná ako v predchádzajúcom prípade a riadenie pozdĺž sedlovej cesty je jediné optimálne. Príklad funkcií f a U, pre ktoré nastáva takáto situácia, dáva Veta 3.2 v kapitole 3. Otázkou však zostáva, čo v prípade, ak existuje bod k_p, v ktorom stabilná sedlová cesta pretína ohraničenie $(k, f(k))$ (kvôli jednoduchosti predpokladajme, že k_p označuje najmenšiu takúto hodnotu k). Spomenutá Veta 3.2 totiž ukazuje, že môže nastať aj takáto možnosť. Pokiaľ $k_0 \leq k_p$, situácia je stále jednoduchá a riešenie je analogické ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch. Ak však $k_0 > k_p$, nemôže celé optimálne riadenie ležať na sedlovej ceste. Ukazuje sa, že v tomto prípade je situácia komplikovanejšia a bude predmetom analýzy v tejto časti.

V ďalšom teda budeme predpokladať, že je splnený nasledujúci predpoklad:

(P) Existuje taký bod $(k_p, f(k_p))$, ktorý je priesečníkom klesajúcej vetvy stabilnej sedlovej cesty a ohraničenia $(k, f(k))$, pričom pre každé $k < k_p$ leží táto cesta vo vnútri oblasti $\mathcal{D}$.

Zároveň budeme analyzovať prípad, keď $k_0 > k_p$ a čas, v ktorom odozva $k^*(t)$ na optimálne riadenie $c^*(t)$ s počiatočnou podmienkou $k(t_0) = k_0$ dosiahne bod k_p, označíme kvôli určitosti t_p (zrejme $t_p > t_0$). Je známe (pozri [4, s. 208]), že platí nasledujúce tvrdenie:

Lema 2.2. *Nech je daná úloha (RM) s počiatočnou podmienkou $k(t_0) = k_0 > k_p$, pričom k_p spĺňa predpoklad (P). Potom ľubovoľné riešenie $(k^*(t), c^*(t))$, ležiace na stabilnej sedlovej ceste pre $k \leq k_p$ a na krivke $(k, f(k))$ na nejakom pravom okolí k_p, spĺňa nutné podmienky optimality (2.3) až (2.5) aj na pravom okolí bodu k_p.*

Dôkaz.[1] Nech τ je také, že $k^*(\tau) = k_p$. Z predpokladu, že stabilná sedlová cesta pretína v bode k_p ohraničenie $(k, f(k))$, máme

$$\left.\frac{dc^*}{dk}\right|_{k_p^-} = \left.\frac{\dot{c}^*}{\dot{k}^*}\right|_{\tau^+} > f'(k_p).$$

Odtiaľ využitím vzťahov (1.13) a (2.9) dostaneme

$$\frac{\frac{U'(f(k_p))}{U''(f(k_p))}(r + \lambda - f'(k_p))}{-\lambda k_p} > f'(k_p),$$

čo po úprave dáva

$$U'(f(k_p))(r + \lambda - f'(k_p)) + \lambda k_p f'(k_p) U''(f(k_p)) > 0. \tag{2.23}$$

Zvoľme funkcie $\psi(t)$ a $\mu_2(t)$ tak, adjungovaná rovnica (2.4) platila aj na nejakom ľavom okolí bodu τ a aby na tomto ľavom okolí bodu τ platil vzťah

$$\mu_2(t) = U'(c^*(t)) - \psi(t). \tag{2.24}$$

Derivovaním tohto vzťahu s využitím platnosti adjungovanej rovnice a vzťahu $c^*(t) = f(k^*(t))$ na uvažovanom ľavom okolí bodu τ dostaneme

$$\lim_{t\to\tau^-} \dot{\mu}_2(t) = U''(c^*(\tau)) \lim_{t\to\tau^-} \dot{c}^*(t) - \dot{\psi}(\tau) =$$

$$= U''(c^*(\tau)) f'(k^*(\tau)) \lim_{t\to\tau^-} \dot{k}^*(t) - (r + \lambda - f'(k^*(\tau)))\psi + \mu_2 f'(k^*(\tau)).$$

Opäť využijeme vzťah (2.3), tentokrát v tvare $\psi(t) = U'(c^*(t)) - \mu_2(t)$ a vzťah $\lim_{t\to\tau^-} \dot{k}^*(t) = -\lambda k_p$, čím dostaneme

$$\lim_{t\to\tau^-} \dot{\mu}_2(t) = -\lambda k_p f'(k_p) U''(c^*(\tau)) - (r+\lambda-f'(k_p))(U'(c^*(\tau)) - \mu_2(\tau)) + \mu_2(\tau) f'(k_p).$$

Zo spojitosti funkcie μ_2 vyplýva, že $\mu_2(\tau) = 0$. Dosadením tejto rovnosti a vzťahu (2.23) do predchádzajúcej rovnosti máme

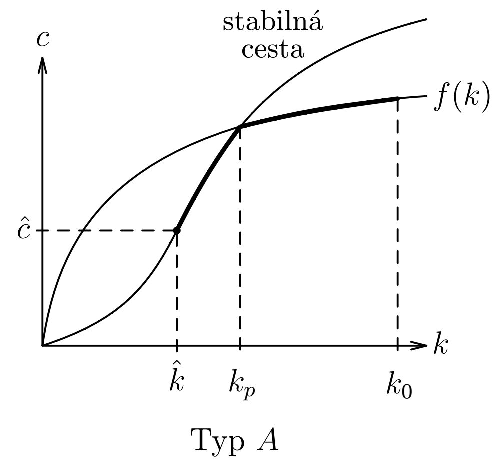
$$\lim_{t\to\tau^-} \dot{\mu}_2(t) < 0,$$

preto na uvažovanom ľavom okolí τ platí $\mu_2(t) > 0$. Platnosť druhej časti podmienky (2.5) je pritom zrejmá, nutné podmienky optimality sú teda splnené. □

[1] Dôkaz tohto tvrdenia, ktorý rovnako možno nájsť v [4, s. 208–209], uvádzame, pretože je východiskom pre ďalšie úvahy.

Podľa Vety 2.5 však vieme, že takéto riešenie konvergujúce do sedlového bodu $(\hat{k}, \hat{c})$ a spĺňajúce nutné podmienky optimality je jediné optimálne riešenie úlohy (RM). Preto dôsledkom Lemy 2.2 je, že ak je splnený predpoklad (P) a $k_0 > k_p$, potom optimálne riešenie musí na nejakom pravom okolí bodu k_p ležať na krivke $(k, f(k))$.

Otázkou teda zostáva, či celá trajektória optimálneho riešenia do bodu k_p leží na tejto krivke (takýto typ optimálneho riadenia budeme v ďalšom označovať ako typ A) alebo nejaká jej časť môže ležať aj vo vnútri oblasti $\mathcal{D}$ (tento typ budeme označovať ako typ B). Oba typy trajektórií sú zobrazené na obr. 2.5. Analýza toho,



Obr. 2.5: Typy riadení

ktorý z týchto typov riadení nastane, je však komplikovaná – využitím nasledujúcej lemy ukážeme, že to závisí od konkrétneho tvaru funkcií f a U.

Lema 2.3. *Nech $c^*(t)$ je optimálne riadenie a $k^*(t)$ je k nemu prislúchajúca odozva pre úlohu (RM) s počiatočnou podmienkou $k(t_0) = k_0 > k_p$. Nech existuje taký netriviálny interval $\langle t_1, t_2 \rangle$, že $t_1 > t_0$, pre každé $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ platí $c^*(t) = f(k^*(t))$ a zároveň na nejakom ľavom okolí bodu t_1 platí $c^*(t) < f(k^*(t))$. Potom pre $\mu_2(t)$ platí*

$$\mu_2(t) = \int_{t_1}^{t} e^{(r+\lambda)(t-s)} h(k^*(s))\, ds, \qquad t \in \langle t_1, t_2 \rangle, \tag{2.25}$$

kde $h(k^*)$ je dané vzťahom

$$h(k^*) = -\big(r + \lambda - f'(k^*)\big) U'(f(k^*)) - \lambda k^* U''(f(k^*)) f'(k^*). \tag{2.26}$$

Dôkaz. Pri dôkaze budeme postupovať analogicky ako pri dôkaze Lemy 2.2. Namiesto ľavého okolia bodu τ však budeme uvažovať celý interval $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Z nutných podmienok optimality dostaneme, že pre každé $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ musí byť splnená rovnosť (2.3) v tvare

$$\mu_2(t) = U'(c^*(t)) - \psi(t). \tag{2.27}$$

Opäť možno derivovaním tohto vzťahu využitím adjungovanej rovnice (2.5), vzťahu $c^*(t) = f(k^*(t))$ (ktorý platí teraz pre každé $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$) a vzťahu (2.3) odvodiť

$$\dot{\mu}_2 = U''(c^*)f'(k^*)\dot{k}^* - (r + \lambda - f'(k^*))(U'(c^*(t)) - \mu_2(t)) + \mu_2 f'(k^*).$$

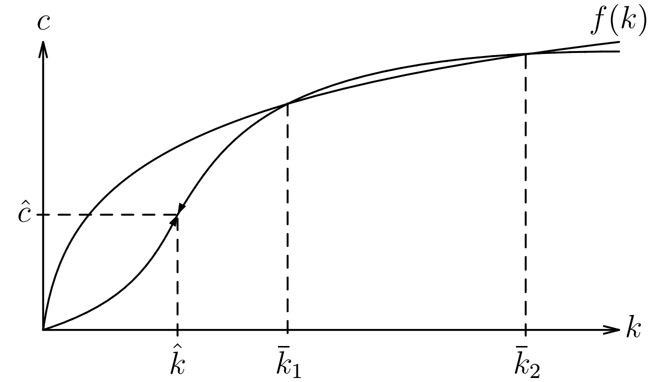
Keďže pre každé $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ platí $c^*(t) = f(k^*(t))$, z (1.13) máme $\dot{k}^*(t) = -\lambda k^*(t)$, čo po dosadení do predchádzajúcej rovnosti a úprave dáva, že $\mu_2(t)$ spĺňa na intervale $\langle t_1, t_2 \rangle$ lineárnu nehomogénnu diferenciálnu rovnicu

$$\dot{\mu}_2(t) = (r + \lambda)\mu_2(t) + h(k^*(t)), \tag{2.28}$$

kde $h(k^*)$ je definované vzťahom (2.26). Keďže podľa predpokladu existuje ľavé okolie bodu t_1, na ktorom platí $c^*(t) < f(k^*(t))$, t.j. podľa (2.4) $\mu_2(t) = 0$, zo spojitosti $\mu_2(t)$ musí platiť $\mu_2(t_1) = 0$. Pomocou vzorca variácie konštánt odvodíme riešenie tejto diferenciálnej rovnice v tvare (2.25). $\square$

Vzťah (2.25) uvedený v Leme 2.3 určuje, či sa v konkrétnom prípade jedná o riadenie typu A alebo riadenie typu B. Zo spojitosti funkcie μ_2 totiž vyplýva, že platí $\mu_2(t_p) = 0$, a teda s využitím vzťahu (2.25) možno zistiť, či existuje taký bod τ, že $t_p > \tau > t_0$, $\mu_2(\tau) = 0$ a $\mu_2(t) > 0$ pre každé $t \in \langle \tau, t_p \rangle$. Ak takýto bod existuje a funkcia $h(k^*(t))$ je záporná na nejakom ľavom okolí bodu τ, optimálne riadenie je typu B. V opačnom prípade je optimálne riadenie typu A. Z uvedeného vyplýva nasledujúci záver: Ak $\mu_2(t)$ vypočítané podľa vzťahu (2.25) dosahuje na intervale $\langle t_0, t_p \rangle$ svoju najmenšiu hodnotu, ktorá je nezáporná, v bode t_p, potom optimálne riadenie je typu A, inak je optimálne riadenie typu B. Analýza toho, či je splnená táto podmienka, je však veľmi komplikovaná, pretože je potrebné vyšetrovať konkrétny priebeh funkcie $h(k^*(t))$, ktorý závisí od priebehu funkcií f a U. Týmto problémom sa preto budeme zaoberať podrobnejšie v tretej kapitole, kde uvedieme príklad funkcií f a U, ktoré umožňujú takúto analýzu a možno pre ne ukázať, že optimálne riadenie je typu A.

Vo všeobecnosti teda nevieme, či existujú úlohy, v ktorých sú optimálne riadenia typu B. Teoreticky však môže nastať prípad, že stabilná sedlová cesta leží na nejakom ohraničenom úseku $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ mimo oblasti $\mathcal{D}$ a inde v $\mathcal{D}$. (Takýchto úsekov by mohlo byť dokonca viac.) Situáciu ilustruje obrázok 2.5. V tomto prípade vzniká prirodzená otázka, či sa pre $k^*(t) > \bar{k}_2$ optimálne riadenie pohybuje po stabilnej sedlovej ceste, alebo po inej trajektórii systému diferenciálnych rovníc (1.13) a (2.9). Nasledujúca veta dáva odpoveď na túto otázku a zároveň ukazuje, že takáto situácia je postačujúcou podmienkou existencie riadenia typu B.



Obr. 2.6: Sedlová cesta nachádzajúca sa na úseku $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ mimo oblasti $\mathcal{D}$.

Veta 2.6. *Nech $c^*(t)$ je optimálne riadenie a $k^*(t)$ k nemu prislúchajúca odozva pre úlohu (RM) s počiatočnou podmienkou $k(t_0) = k_0 > k_p$. Potom $(c^*(t), k^*(t))$ leží pre každé $t \in \langle t_0, t_p)$ pod stabilnou sedlovou cestou.*

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné $\tau_0 \in \langle t_0, t_p)$. Klesajúcu vetvu stabilnej sedlovej cesty budeme chápať ako krivku parametrizovanú parametrom t (a označovať $(\bar{k}(t), \bar{c}(t))$), pričom parametrizáciu zvolíme tak, aby $\bar{k}(\tau_0) = k^*(\tau_0)$. Zvoľme teraz ľubovoľné α tak, aby

$$\alpha > \max_{\tau_0 \leq t \leq \tau_p} \frac{\bar{c}(t)}{f(\bar{k}(t))},$$

kde τ_p je také, že $\bar{k}(\tau_p) = k_p$. Takéto α určite existuje, lebo na pravej strane maximalizujeme spojitú funkciu na ohraničenom intervale. Potom platí $\bar{c}(t) < \alpha f(\bar{k}(t))$ pre každé $t \in \langle \tau_0, t_p)$. Potom zrejme $\bar{c}(t)$ bude optimálne riadenie a $\bar{k}(t)$ príslušná odozva pre úlohu

$$\begin{aligned}
&\max_{\{c(t)\}} \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-r(t-\tau_0)} U\big(c(t)\big)\, dt \\
&\dot{k} = f(k) - \lambda k - c, \quad k(\tau_0) = k^*(\tau_0), \\
&0 \leq c(t) \leq \alpha f((k(t)).
\end{aligned} \tag{RM$_\alpha$}$$

Preto existuje konštanta $\bar{\psi}_0$ a funkcie $\bar{\psi}(t)$, $\bar{\mu}_1(t)$ a $\bar{\mu}_2(t)$ vyhovujúce podmienkam Pontrjaginovho princípu maxima uvedeným vo Vete 1.1 pre úlohu (RM$_\alpha$).

Ohraničenie nebude vďaka vhodnej voľbe α aktívne pre žiadne $t \geq \tau_0$, preto $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$. Na druhej strane, podľa predpokladu je $c^*(t)$ optimálne riadenie a $k^*(t)$ je odozva pre úlohu (RM). Podľa Vety 1.1 opäť existuje príslušná konštanta ψ_0 a funkcie $\psi(t)$, $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$. Úloha (RM) sa od úlohy (RM$_\alpha$) líši iba "prísnejším" ohraničením; to je v tomto prípade vďaka predpokladu existencie priesečníka $(k_p, f(k_p))$ aktívne na nenulovom intervale. Preto musia byť aj riadenia $\bar{c}(t)$ a $c^*(t)$ rôzne aspoň na nejakom nenulovom intervale. Keďže však podľa Vety 2.5 je riadenie $\bar{c}(t)$ jediným optimálnym riešením úlohy (RM$_\alpha$), pre hodnoty účelových funkcií musí platiť vzťah

$$\int_{\tau_0}^{\infty} e^{-r(t-\tau_0)} U\big(\bar{c}(t)\big)\, dt > \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-r(t-\tau_0)} U\big(c^*(t)\big)\, dt. \tag{2.29}$$

Vieme, že v oboch úlohách (RM) aj (RM$_\alpha$) spĺňajú optimálne riešenia nutné podmienky optimality s $\psi_0 = 1$, resp. $\bar{\psi}_0 = 1$. Využitím (2.3), dôsledku za Vetou 1.2 a vzťahu $k^*(\tau_0) = \bar{k}(\tau_0) := \bar{k}_0$ dostaneme

$$\int_{\tau_0}^{\infty} e^{-r(t-\tau_0)} U\big(c^*(t)\big)\, dt =$$

$$= \frac{1}{r} e^{-r(\tau_0-\tau_0)} \big\{ U(c^*(\tau_0)) + \psi(\tau_0) \left[f(k^*(\tau_0)) - \lambda k^*(\tau_0) - c^*(\tau_0) \right] \big\} =$$

$$= \frac{1}{r} \big\{ U(c^*(\tau_0)) + (U'(c^*(\tau_0)) - \mu_2(\tau_0)) \big[f(\bar{k}_0) - \lambda \bar{k}_0 - c^*(\tau_0) \big] \big\}$$

a analogicky

$$\int_{\tau_0}^{\infty} e^{-r(t-\tau_0)} U\big(\bar{c}(t)\big)\, dt =$$

$$= \frac{1}{r} e^{-r(\tau_0-\tau_0)} \big\{ U(\bar{c}(\tau_0)) + \bar{\psi}(\tau_0) \big[f(\bar{k}(\tau_0)) - \lambda \bar{k}(\tau_0) - \bar{c}(\tau_0) \big] \big\} =$$

$$= \frac{1}{r} \big\{ (U(\bar{c}(\tau_0)) + U'(\bar{c}(\tau_0)) \big[f(\bar{k}_0) - \lambda \bar{k}_0 - \bar{c}(\tau_0) \big] \big\}.$$

Ak teraz označíme

$$G(c_0) := U(c_0) + U'(c_0) \left(f(\bar{k}_0) - \lambda \bar{k}_0 - c_0 \right),$$

potom nerovnosť (2.29) môžeme za pomoci odvodených vzťahov prepísať do tvaru

$$G(\bar{c}(\tau_0)) > G(c^*(\tau_0)) - \mu_2(\tau_0) \left(f(\bar{k}_0) - \lambda \bar{k}_0 - c^*(\tau_0) \right). \tag{2.30}$$

Podľa (2.4) však platí

$$\mu_2(\tau_0) \left(f(\bar{k}_0) - c^*(\tau_0) \right) = 0,$$

a teda (2.30) prejde do tvaru

$$G(\bar{c}(\tau_0)) > G(c^*(\tau_0)) + \mu_2(\tau_0) \lambda \bar{k}_0 \geq G(c^*(\tau_0)), \tag{2.31}$$

pričom v poslednej nerovnosti sme využili nezápornosť $\mu_2(t)$, ktorá opäť vyplýva z (2.4). Preto určite platí $\bar{c}(\tau_0) \neq c^*(\tau_0)$.

Predpokladajme, že by platilo $\bar{c}(\tau_0) < c^*(\tau_0)$. Vieme však, že

$$G'(\bar{c}(\tau_0)) = U'(\bar{c}(\tau_0)) + U''(\bar{c}(\tau_0)) \big(f(\bar{k}_0) - \lambda\bar{k}_0 - \bar{c}(\tau_0)\big) - U'(\bar{c}(\tau_0)) =$$
$$= U''(\bar{c}(\tau_0)) \big(f(\bar{k}_0) - \lambda\bar{k}_0 - \bar{c}(\tau_0)\big) = U''(\bar{c}(\tau_0))\dot{\bar{k}}(\tau_0).$$

Bod $(\bar{k}(\tau_0), \bar{c}(\tau_0))$ leží v oblasti $\mathcal{D}_3$, preto $\dot{\bar{k}}(\tau_0) < 0$. Z predpokladov na funkciu U máme $U''(\bar{c}(\tau_0)) < 0$, preto

$$G'(\bar{c}(\tau_0)) > 0.$$

Pre ľubovoľné $c_0 > \bar{c}(\tau_0)$ dostaneme

$$G'(c_0) = U''(c_0) \big(f(\bar{k}_0) - \lambda\bar{k}_0 - c_0\big) =$$
$$= U''(c_0) \big(f(\bar{k}_0) - \lambda\bar{k}_0 - \bar{c}(\tau_0)\big) - U''(c_0)(c_0 - \bar{c}(\tau_0)) =$$
$$= U''(c_0)\dot{\bar{k}}(\tau_0) - U''(c_0)(c_0 - \bar{c}(\tau_0)) > 0.$$

Funkcia G je preto rastúca na intervale $\langle \bar{c}(\tau_0), c^*(\tau_0)\rangle$, teda $G(\bar{c}(\tau_0)) < G(c^*(\tau_0))$, čo je však spor s (2.31). Tým sme dokázali, že musí platiť $\bar{c}(\tau_0) > c^*(\tau_0)$. $\square$

Dôsledkom tejto vety je, že ak na nejakom ohraničenom netriviálnom intervale $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ leží stabilná sedlová cesta mimo oblasti $\mathcal{D}$ a na nejakom pravom okolí bodu $\bar{k}_2$ leží vnútri tejto oblasti, potom na tomto pravom okolí bodu $\bar{k}_2$ leží optimálne riešenie úlohy (RM) pod stabilnou sedlovou cestou, teda pod ohraničením $(k, f(k))$. V tomto prípade sa teda jedná o riadenie typu B.

Kapitola 3

Špeciálne prípady

3.1 Lineárna stabilná sedlová cesta

Už sme spomenuli, že optimálne riešenie Ramseyho problému leží vo vnútri oblasti $\mathcal{D}$ na klesajúcej alebo rastúcej vetve stabilnej cesty konvergujúcej do stacionárneho sedlového bodu sústavy dvoch nelineárnych diferenciálnych rovníc (SDR). Túto sústavu však vo všeobecnosti nevieme explicitne riešiť, a teda k danému k_0 nevieme ani explicitne nájsť vhodnú hodnotu c_0 tak, aby bod (k_0, c_0) ležal na stabilnej sedlovej ceste. Teraz ukážeme, že existuje špeciálny tvar produkčnej funkcie a funkcie užitočnosti, pre ktorý toto explicitné vyjadrenie sedlovej cesty je možné. Konkrétne sformulujeme postačujúce podmienky pre tieto funkcie, ktorých splnenie implikuje, že stabilná sedlová cesta je časťou priamky, a teda aj riešenie Ramseyho modelu (resp. iba jeho časť ležiaca na stabilnej sedlovej ceste) bude časťou priamky.[1]

Parametrizujme teda stabilnú sedlovú cestu parametrom t a označme ju ako $(\bar{k}(t), \bar{c}(t))$. Označme ďalej $z(t) = \bar{c}(t)/\bar{k}(t)$. Chceme nájsť podmienky pre funkcie U a f tak, aby $z \equiv$ konšt, teda $\dot{z} = 0$. Derivovaním dostaneme

$$\frac{\dot{z}}{z} = \frac{\bar{k}}{\bar{c}} \cdot \frac{\dot{\bar{c}}\bar{k} - \bar{c}\dot{\bar{k}}}{(\bar{k})^2} = \frac{\dot{\bar{c}}}{\bar{c}} - \frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}}.$$

S využitím diferenciálnych rovníc (1.13) a (2.9) pre $\bar{k}$ a $\bar{c}$ môžeme tento výraz ďalej upraviť

$$\frac{\dot{z}}{z} = \frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})\,\bar{c}}\big(\lambda + r - f'(\bar{k})\big) - \frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} + \lambda + z.$$

[1]Náčrt dôkazu, že pre funkcie f a U v tvare (1.8) a (1.11) je stabilná sedlová cesta lineárna, možno nájsť v [1, s. 90–91].

Keďže $\dot{z} = 0$, bude z konštantné práve vtedy, keď

$$\frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})\,\bar{c}}\big(\lambda + r - f'(\bar{k})\big) - \frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} \equiv \text{konšt.}$$

Postačujúcimi podmienkami, aby platila táto rovnosť, je

$$\frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})\,\bar{c}} = \alpha \quad \text{a} \quad -\alpha f'(\bar{k}) - \frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} = \beta, \tag{3.1}$$

pričom z vlastností funkcie U je $\alpha < 0$ a z druhej rovnosti pre funkciu f máme

$$f'(k) = -\frac{1}{\alpha}\frac{f(k)}{k} - \frac{\beta}{\alpha} \to -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{pre } k \to \infty,$$

preto $\beta = 0$ kvôli (1.12). Riešením diferenciálnych rovníc (3.1) metódou separácie premenných dostaneme

$$U'(\bar{c}) = A\bar{c}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{teda} \quad U(\bar{c}) = A\frac{\bar{c}^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\frac{1+\alpha}{\alpha}} + B, \quad A > 0,\ B \in \mathbb{R}$$

a

$$f(\bar{k}) = C\bar{k}^{-\frac{1}{\alpha}},$$

kde $C > 0$ kvôli nezápornosti funkcie f.

Ak označíme $\theta := -\frac{1}{\alpha}$, potom $\theta \in (0,1)$ a funkcie f a U budú tvaru

$$U(c) = A\frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} + B \quad \text{a} \quad f(k) = Ck^{\theta}, \quad A > 0,\, B \in \mathbb{R},\, C > 0, \tag{3.2}$$

čo je všeobecný tvar funkcií (1.11) a (1.8) pre spoločnú hodnotu parametrov θ a α.

Teda pre tieto funkcie $U(c)$ a $f(k)$ bude stabilná sedlová cesta časťou priamky. Podľa Lemy 2.1 prechádza táto priamka bodom $(0,0)$. Pre stacionárny bod $(\hat{k},\hat{c})$, do ktorého stabilná sedlová cesta konverguje, z rovnice (2.9) dostaneme

$$\hat{k} = \left(\frac{r+\lambda}{C\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}$$

a z rovnice (1.13) máme $\hat{c} = C\hat{k}^{\theta} - \lambda\hat{k}$. Smernica priamky, na ktorej bude ležať stabilná sedlová cesta, má potom tvar

$$\frac{\hat{c}}{\hat{k}} = C\hat{k}^{\theta-1} - \lambda = \frac{r+\lambda}{\theta} - \lambda.$$

Môžeme teda sformulovať nasledujúcu vetu:

Veta 3.1. *Ak je produkčná funkcia a funkcia užitočnosti tvaru (3.2), potom pre ľubovoľné* $0 \leq k_0 \leq k_p$ *má optimálne riadenie pre úlohu (RM) tvar*

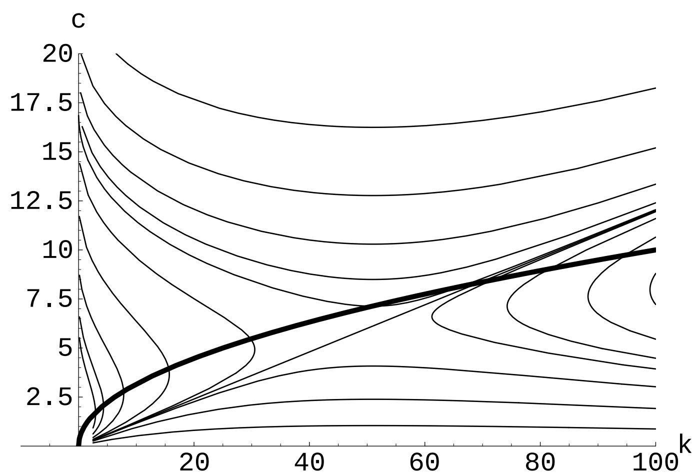
$$c^*(t) = \Big(\frac{r+\lambda}{\theta} - \lambda\Big)k^*(t), \tag{3.3}$$

pričom k^* *vyhovuje diferenciálnej rovnici (1.13) a* $(k_p, f(k_p))$ *je priesečník stabilnej sedlovej cesty a ohraničenia* $(k, f(k))$.

Napr. pre funkcie tvaru

$$f(k) = k^{0.5} \quad \text{a} \quad U(c) = \frac{c^{0.5}-1}{0.5},$$

ktoré zrejme spĺňajú predpoklad predchádzajúcej vety, a hodnoty $r = 0.05$, $\lambda = 0.1$ a $\delta = 0.1$ dostávame fázový portrét riešení (SDR) zobrazený na obr. 3.1; vidíme, že stabilná sedlová cesta je skutočne časťou priamky.



Obr. 3.1: Lineárna stabilná sedlová cesta

3.2 Podmienky existencie priesečníka

V zostávajúcej časti tejto kapitoly sa budeme venovať analýze typu optimálneho riadenia pre veľkú hodnotu k_0 (pozri aj časť 2.5) za splnenia predpokladu (P), ktorý hovorí o existencii priesečníka stabilnej sedlovej cesty a ohraničenia $(k, f(k))$. Vieme, že napríklad v prípade, keď sú funkcie f a U tvaru (3.2), priesečník $(k_p, f(k_p))$ určite existuje (vyplýva to z predpokladov na funkciu f). Vzniká teda otázka: Ak sú funkcie f a U tvaru (1.8) a (1.11), existuje tento priesečník vždy? A ak nie, aká je podmienka existencie tohto priesečníka?

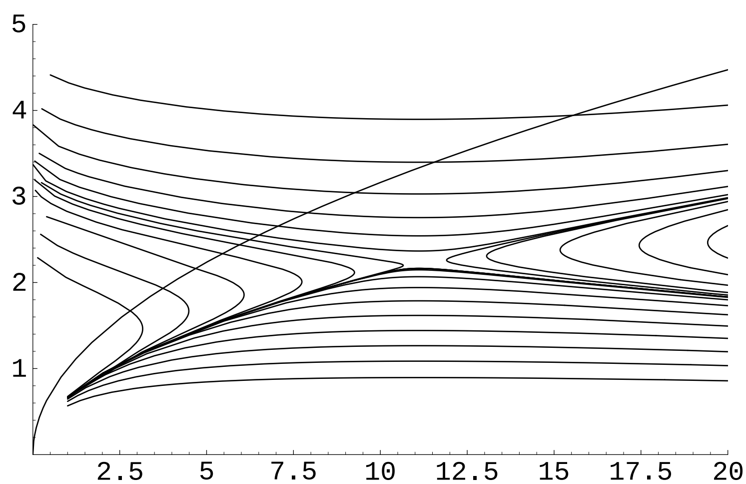
Nasledujúca veta dáva odpoveď na obe tieto otázky v podobe nutnej a postačujúcej podmienky existencie priesečníka klesajúcej vetvy stabilnej sedlovej cesty s ohraničením $(k, f(k))$.

Veta 3.2. *Nech funkcia f je tvaru (1.8) a funkcia U je tvaru (1.11). Potom priesečník stabilnej sedlovej cesty a ohraničenia $(k, f(k))$ existuje práve vtedy, keď platí*

$$\frac{1}{\theta} > \frac{\alpha\lambda}{r+\lambda}. \tag{3.4}$$

Ak tento priesečník existuje, tak je jediný.

Obrázok 3.2 ilustruje situáciu, kedy vo vzťahu (3.4) nastáva rovnosť.



Obr. 3.2: Príklad neexistencie priesečníka

Dôkaz. Klesajúcu vetvu stabilnej sedlovej cesty parametrizujme parametrom t a označme $(\bar{k}(t), \bar{c}(t))$. Dôkaz bude založený na analýze podielu $w(t) = \bar{c}(t)/f(\bar{k}(t))$ pozdĺž klesajúcej vetvy stabilnej sedlovej cesty. Existencia spoločného bodu stabilnej sedlovej cesty a ohraničenia $(k, f(k))$ je totiž ekvivalentná tomu, že tento podiel nadobúda hodnotu 1.

Najprv sa budeme zaoberať hodnotou tohto podielu v sedlovom bode $(\hat{k}, \hat{c})$, ktorú označíme $\hat{w}$. Z diferenciálnych rovníc (1.13) a (2.9) pre tento bod dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{c} &= f(\hat{k}) - \lambda\hat{k}, \\ f'(\hat{k}) &= r + \lambda. \end{aligned}$$

O funkcii f predpokladáme, že je tvaru (1.8), preto môžeme písať

$$f(\hat{k}) = \frac{f'(\hat{k})\hat{k}}{\alpha} = \frac{r+\lambda}{\alpha}\hat{k},$$

a teda

$$\hat{w} = \frac{\hat{c}}{f(\hat{k})} = \frac{f(\hat{k}) - \lambda\hat{k}}{f(\hat{k})} = 1 - \frac{\lambda\hat{k}}{f(\hat{k})} = 1 - \frac{\lambda\alpha}{r+\lambda}. \tag{3.5}$$

Táto hodnota je menšia ako 1, čo je ekvivalentné známemu faktu, že bod $(\hat{k}, \hat{c})$ leží vnútri oblasti $\mathcal{D}$.

Pri vyšetrovaní dynamiky w budeme postupovať podobne, ako sme to urobili v časti 3.1, t.j. budeme sa zaoberať podielom $\dot{w}(t)/w(t)$. Platí

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{f(\bar{k})}{\bar{c}} \cdot \frac{\dot{\bar{c}}f(\bar{k})) - \bar{c}f'(\bar{k})\dot{\bar{k}}}{(f(\bar{k}))^2} = \frac{\dot{\bar{c}}}{\bar{c}} - \alpha\frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}},$$

pričom sme opäť využili vzťah $f(k)/k = f'(k)/\alpha$, ktorý vyplýva zo špeciálneho tvaru funkcie f. Dosadením vzťahov (1.13) a (2.9) dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{w}}{w} &= -\frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})\bar{c}}(r+\lambda - f'(\bar{k})) - \alpha\left(\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} - \lambda - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\right) = \\
&= -\frac{1}{\theta}(r+\lambda - f'(\bar{k})) - f'(\bar{k}) + \alpha\lambda + \bar{c}\frac{f'(\bar{k})}{f(\bar{k})} = \\
&= f'(\bar{k})\left(\frac{1}{\theta} - 1 + \frac{\bar{c}}{f(\bar{k})}\right) + \alpha\lambda - \frac{r+\lambda}{\theta} = \\
&= f'(\bar{k})\left(w - \frac{\theta-1}{\theta}\right) - (r+\lambda)\left(\hat{w} - \frac{\theta-1}{\theta}\right),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

pričom v poslednej rovnosti sme využili vzťah (3.5).

Najprv ukážeme, že ak $\hat{w} = \frac{\theta-1}{\theta}$, potom $w(t) \equiv \frac{\theta-1}{\theta}$ pre každé t. Ak by totiž existovalo také τ, že $w(\tau) > \frac{\theta-1}{\theta}$, potom $\frac{\dot{w}(\tau)}{w(\tau)} > 0$, a teda vďaka nezápornosti w (ktorá vyplýva z nezápornosti optimálneho riadenia $\bar{c}$ a funkcie f) máme $\dot{w}(\tau) > 0$. Podľa vzťahu (3.6) je potom funkcia w rastúca pre každé $t \geq \tau$, čo je spor s podmienkou $\lim_{t\to\infty} w(t) = \hat{w}$. Prípad $w(\tau) < \frac{\theta-1}{\theta}$ možno vylúčiť analogicky. Zároveň možno obdobným spôsobom ukázať, že pre každé t platí

$$w(t) < \frac{\theta-1}{\theta}, \text{ ak } \hat{w} < \frac{\theta-1}{\theta}, \tag{3.7}$$

$$w(t) > \frac{\theta-1}{\theta}, \text{ ak } \hat{w} > \frac{\theta-1}{\theta}. \tag{3.8}$$

Derivovaním rovnice (3.6) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{w}}{w}\right) = f''(\bar{k}(t))\dot{\bar{k}}(t)\left(w(t) - \frac{\theta-1}{\theta}\right) + f'(\bar{k}(t))\dot{w}(t). \tag{3.9}$$

Budeme sa podrobnejšie zaoberať prípadom $\hat{w} < \frac{\theta-1}{\theta}$. Vieme, že v tomto prípade podľa (3.7) platí $w(t) < \frac{\theta-1}{\theta}$ pre každé t. Ak by existovalo τ, pre ktoré by platilo $\dot{w}(\tau) \leq 0$, potom vďaka $f''(\cdot) < 0$, $f'(\cdot) > 0$ a $\dot{\bar{k}} < 0$ pre klesajúcu sedlovú vetvu dostaneme zo vzťahu (3.9) nerovnosť

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{w}}{w}\right)\right|_{t=\tau} < 0. \tag{3.10}$$

Ak je však $\dot{w}(\tau) \leq 0$, potom aj $\frac{\dot{w}(\tau)}{w(\tau)} \leq 0$ a vďaka vzťahu (3.10) dostaneme, že musí platiť $\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} < 0$, t.j. $\dot{w}(t) < 0$ pre každé $t > \tau$. To je opäť spor s podmienkou $\lim_{t\to\infty} w(t) = \frac{\theta-1}{\theta}$. Preto v tomto prípade musí platiť $\dot{w}(t) > 0$ pre každé t. Analogicky možno ukázať, že pre $\hat{w} > \frac{\theta-1}{\theta}$ platí $\dot{w}(t) < 0$ pre každé t.

Zhrnutím predchádzajúcich úvah dostaneme, že môžu nastať tieto tri možnosti:

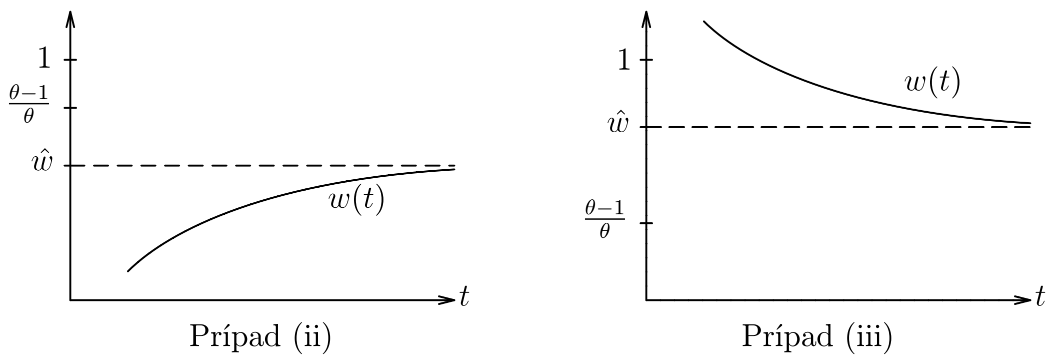
(i) Ak $\hat{w} = \dfrac{\theta-1}{\theta}$, potom $w(t) = \dfrac{\theta-1}{\theta}$ pre každé t;

(ii) Ak $\hat{w} < \dfrac{\theta-1}{\theta}$, potom $w(t) < \dfrac{\theta-1}{\theta}$ a $\dot{w}(t) > 0$ pre každé t;

(iii) Ak $\hat{w} > \dfrac{\theta-1}{\theta}$, potom $w(t) > \dfrac{\theta-1}{\theta}$ a $\dot{w}(t) < 0$ pre každé t.[2]

Funkciu w sme definovali ako podiel $\frac{\bar{c}}{f(\bar{k})}$ pozdĺž klesajúcej vetvy stabilnej sedlovej cesty. Pokúsime sa zistiť, kedy bude hodnota tejto funkcie rovná 1. Keďže pre ľubovoľné $\theta > 0$ platí nerovnosť $\frac{\theta-1}{\theta} < 1$, v prípadoch (i) a (ii) funkcia $w(t)$ zrejme nemôže mať hodnotu 1 pre žiadne t. Ak ale existuje priesečník stabilnej sedlovej cesty a ohraničenia $(k, f(k))$, potom funkcia w musí nadobudnúť hodnotu 1, a teda musí nastať prípad (iii). Naopak, ukážeme, že v prípade (iii) vždy existuje nejaké t, pre ktoré nadobúda funkcia w hodnotu 1 a zaroveň je funkcia w v tomto prípade klesajúca. Tým bude dôkaz vety hotový, pretože podľa vzťahu (3.5) nastáva prípad (iii) práve vtedy, keď je splnená nerovnosť (3.4) z tvrdenia vety. To, že sa jedná skutočne o priesečník, a že tento priesečník je jediný, vyplynie z klesajúcosti funkcie w. Poznamenajme, že z tejto analýzy zároveň vyplýva, že pre funkcie f a

[2] Po toto miesto je dôkaz robený podľa [1, s. 89–90], kde je táto úvaha uvedená kvôli odvodeniu dynamiky funkcie $s(t) = 1 - w(t)$, pričom sa tiež predpokladá, že funkcie f a U sú tvaru (1.8) a (1.11).



Obr. 3.3: K dôkazu Vety 3.2

U tvaru (1.8) a (1.11) nemôže nastať situácia, že by sa sedlová cesta ohraničenia iba dotýkala.

Predpokladajme teda, že nastáva prípad (iii) a zároveň pre každé t platí $w(t) < 1$. Vzťah (3.6) potom možno upraviť do tvaru

$$\frac{\dot{w}}{w} < f'(\bar{k}) \left(1 - \frac{\theta - 1}{\theta}\right) - (r + \lambda) \left(\hat{w} - \frac{\theta - 1}{\theta}\right). \tag{3.11}$$

Využitím vzťahu (2.22) a predpokladu ($\tilde{\mathrm{P}}2$) máme $\lim_{t \to -\infty} f'(\bar{k}(t)) = 0$. Prechodom k limite vo vzťahu (3.11) potom dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -\infty} \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} &\leq \lim_{t \to -\infty} f'(\bar{k}(t)) \left(1 - \frac{\theta - 1}{\theta}\right) - (r + \lambda) \left(\hat{w} - \frac{\theta - 1}{\theta}\right) = \\ &= -(r + \lambda) \left(\hat{w} - \frac{\theta - 1}{\theta}\right) < 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Z predpokladu $w(t) < 1$ však vyplýva, že $\lim_{t \to -\infty} \dot{w}(t) \geq 0$, čo je vďaka podmienke $w(t) > \hat{w} > 0$ spor s (3.12). □

3.3 Príklady riadenia typu A a typu B

V tejto časti pomocou už dokázaných tvrdení ukážeme, že existujú príklady funkcií f a U na oba typy optimálneho riadenia. Najprv pomocou Lemy 2.3 dokážeme, že riadenie typu A dostaneme práve pre funkcie f a U tvaru (1.8) a (1.11), pokiaľ je splnená nutná a postačujúca podmienka existencie priesečníka stabilnej sedlovej cesty a ohraničenia $(k, f(k))$, ktorá je sformulovaná a dokázaná vo Vete 3.2. O tomto výsledku hovorí nasledujúca veta:

Veta 3.3. *Nech funkcie f a U v úlohe (RM) sú dané vzťahmi (1.8) a (1.11) a nech je splnená nerovnosť (3.4). Potom optimálne riadenie tejto úlohy je typu A.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme teda, že existuje $k_p < k_0$ a optimálne riadenie $c^*(t)$ úlohy (RM), ktoré nie je typu A. Vieme, že existuje taký bod t_1, že $t_0 < t_1 < t_p$, $c^*(t) = f(\bar{k}(t))$ pre každé $t \in \langle t_1, t_p \rangle$ a $c^*(t) < f(k^*(t))$ pre každé t ležiace v nejakom ľavom okolí bodu t_1. Kvôli spojitosti funkcie μ_2 potom musí platiť $\mu_2(t_1) = \mu_2(t_p) = 0$. Dosaďme teraz do (2.26) funkcie f a U v tvare (1.8) a (1.11). Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} h(k) &= -\big(r + \lambda - \alpha k^{\alpha-1}\big)k^{-\alpha\theta} - \lambda k\ (-\theta(k^{\alpha})^{-\theta-1})\alpha k^{\alpha-1} = \\ &= k^{-\alpha\theta}\big(-r - \lambda + \lambda\theta\alpha + f'(k)\big). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Keďže podľa (2.4) nadobúda μ_2 len nezáporné hodnoty, musí v ľubovoľne malom pravom okolí bodu t_1 existovať τ také, že $h(k^*(\tau)) \geq 0$, pričom môžeme predpokladať, že $\tau < t_p$. Preto

$$-r - \lambda + \lambda\theta\alpha + f'(k^*(\tau)) \geq 0, \quad \text{odtiaľ} \quad f'(k^*(\tau)) \geq r + \lambda - \lambda\theta\alpha.$$

Z klesajúcosti funkcie $k^*(t)$ ($\dot{k}^*(t) = -\lambda k < 0$) na intervale $\langle \tau, t_p \rangle$ zároveň dostaneme $k^*(t) < k^*(\tau)$ pre každé $t \in \langle \tau, t_p \rangle$. Funkcia f' je však tiež klesajúca, preto $f'(k^*(t)) > f'(k^*(\tau))$, t.j.

$$f'(k^*(t)) > r + \lambda - \lambda\theta\alpha \quad \text{pre každé} \quad t \in \langle \tau, t_p \rangle.$$

Využitím tohto vzťahu a rovnosti (3.13) dostávame, že $h(k^*(t)) > 0$ pre každé $t \in \langle \tau, t_p \rangle$, a teda podľa Lemy 2.3 máme

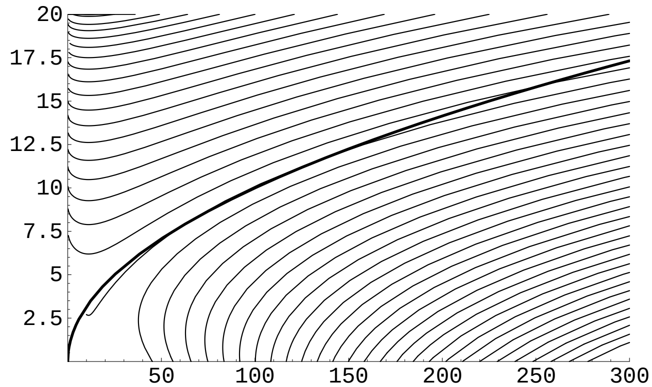
$$\mu_2(t_p) = \mu_2(\tau) + \int_{\tau}^{t_p} e^{(r+\lambda)(t_p - s)} h(k^*(s))\, ds > 0,$$

čo je spor s podmienkou $\mu_2(t_p) = 0$. □

Ukázať existenciu riadenia typu B sa však javí komplikovanejšie. Môžeme sa totiž oprieť iba o Vetu 2.6, ktorá dáva postačujúcu podmienku existencie riadenia tohto typu. Podľa tejto vety totiž dostaneme riadenie typu B pre také funkcie f a U, pre ktoré stabilná sedlová cesta leží mimo oblasti $\mathcal{D}$ na nejakom ohraničenom intervale $(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$, zatiaľ čo existuje nejaké pravé okolie bodu $\bar{k}_1$ a ľavé okolie bodu $\bar{k}_2$, na ktorých stabilná sedlová leží v tejto oblasti (pozri obr. 2.5).

Keďže systém (SDR) je nelineárny, overenie tejto podmienky pre konkrétne funkcie f a U je náročné. Numericky, s využitím programu *Mathematica 4.0* sa však podarilo ukázať (pozri obr. 3.3), že táto podmienka je splnená pre funkcie f a U napr. v tvare

$$f(k) = k^{0.5} \quad \text{a} \quad U(c) = 1 - e^{-0.2c}.$$



Obr. 3.4: Fázový portrét riešení (SDR) pre funkcie $f(k) = k^{0.5}$ a $U(c) = 1 - e^{-0.2c}$

Treba poznamenať, že funkcia U v tomto prípade nespĺňa predpoklad (P4), pretože

$$\lim_{c \to 0^+} U'(c) = \lim_{c \to 0^+} 0.2e^{-0.2c} = 0.2 \neq \infty.$$

Spĺňa však zoslabené predpoklady na funkciu U, ktoré sme uviedli v časti 2.2.3 (ide o funkciu tvaru (2.13)). Príklad funkcií f a U, ktoré by spĺňali všetky predpoklady ($\tilde{\mathrm{P}}1$) – ($\tilde{\mathrm{P}}3$) a (P4), (P5), ako aj uvedenú nutnú podmienku existencie riadenia typu B, sa nám nepodarilo nájsť. Uvedený príklad však naznačuje, že takéto riadenie vo všeobecnosti môže existovať.

Záver

Cieľom tejto práce bolo za pomoci Pontrjaginovho princípu maxima analyzovať Ramseyho model ekonomického rastu. Vychádzali sme z variantu Ramseyho modelu bežne používaného v ekonomickej literatúre, ktorý vedie na úlohu optimálneho riadenia s ohraničením zmiešaného typu.

Práve toto ohraničenie pomáha riešiť problémy spôsobené tým, že produkčná funkcia a funkcia užitočnosti sú definované len pre nezáporné, resp. len pre kladné hodnoty. Na druhej strane vnáša do modelu ťažkosti spojené s riešením otázky, ako bude optimálne riešenie vyzerať pre veľkú začiatočnú hodnotu kapitálu, ktoré sa však v literatúre často prehliadajú. V predkladanej práci sme sa týmto problémom zaoberali podrobnejšie a podarilo sa nám sformulovať a dokázať niekoľko tvrdení týkajúcich sa jeho riešenia. Konkrétne sme ukázali, že pre veľké hodnoty kapitálu sa môžu optimálne riadenia správať v princípe trojako: Prvou možnosťou je, že celé optimálne riešenie bude ležať na stabilnej sedlovej ceste. Ďalšou možnosťou je, že leží na stabilnej sedlovej ceste len od istého okamihu, zatiaľ čo vo svojej prvej fáze leží na krivke reprezentujúcej uvažované ohraničenie. Napokon treťou možnosťou je obdobný prípad, keď ale optimálne riadenie neleží na krivke ohraničenia počas celej tejto prvej fázy. Existenciu prvého a druhého typu sme potvrdili nájdením príkladu príslušných funkcií (produkčnej funkcie a funkcie užitočnosti), pre tretí typ sa nám podarilo odvodiť iba postačujúcu podmienku jeho existencie. Z tejto podmienky vyplýva prekvapujúce tvrdenie, že pokiaľ stabilná sedlová cesta leží mimo uvažovanej oblasti $\mathcal{D}$ iba na nejakom ohraničenom intervale, potom vpravo od tohto intervalu leží optimálne riešenie Ramseyho problému pod touto stabilnou sedlovou cestou. Konkrétny príklad funkcií, ktoré vedú na takéto riadenie a pritom spĺňajú všetky predpoklady, sme však nenašli; táto úloha zostáva ako problém pre prípadnú ďalšiu analýzu v budúcnosti.

V práci sme ďalej dokázali niekoľko ďalších vlastností optimálneho riadenia, ktoré sa najmä v ekonomickej literatúre považujú za samozrejmé. Konkrétne sme ukázali, že optimálne riadenie musí byť pri daných predpokladoch kladné a spojité. Zároveň sme podrobne rozanalyzovali nutné podmienky Pontrjaginovho princípu maxima v prípade $\psi_0 = 0$ a ukázali sme, že tento prípad skutočne nedáva kandidáta na optimálne riešenie. Dôkaz žiadneho z týchto tvrdení sme nenašli v nám dostupnej literatúre.

Literatúra

[1] Barro, R., Sala-I-Martin, X.: *Economic Growth*, McGraw-Hill, Inc., New-York, 1995

[2] Blanchard, O., Fischer, S.: *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge MA, 1989

[3] Brunovský, P.: *Matematická teória optimálneho riadenia*, ALFA, Bratislava, 1980

[4] Feichtinger, G., Hartl, R.: *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*, W. Gruyter, Berlin – New York, 1986

[5] Intriligator, M. D.: *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971

[6] Leonard, D., Long, N. V.: *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992

[7] Michel, P.: On the transversality condition in infinite horizon optimal problems, *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, 975–984, 1982

[8] Ramsey, F. P.: A mathematical Theory of Saving, *Economic Journal* 38, s. 543–559, 1928

[9] Ruschinski, M.: *Neuere Entwicklungen in der Wachstumstheorie*, Deutscher Universitäts Verlag, Wiesbaden, 1996

[10] Shell, K.: *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, MIT Press, Cambridge–London, 1967

[11] Štorová, J.: *Úlohy optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte*, diplomová práca FMFI UK, školiteľ Halická M., Bratislava, 2001

[12] Wan, H. Y.: *Economic growth*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York, 1971