UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

D I P L O M O V Á P R Á C A

2004 PETER PAVLIS

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Odbor: Ekonomická a finančná matematika

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Vyhľadávacie modely v monetárnej ekonómii

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Ján Pekár, PhD.

Diplomant: Peter Pavlis

Bratislava 2004

VYHLÁSENIE:

Čestne vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, marec 2004 ....

Peter Pavlis

POĎAKOVANIE:

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD.
a všetkým, ktorí mi pomohli.

O B S A H

Ú V O D

V našej diplomovej práci sa zaoberáme vyhľadávacími modelmi v monetárnej ekonómii. Tieto modely sa zaoberajú rôznymi prístupmi k výmennému procesu – na rozdiel od Walrasiánskeho prístupu, kde bola úloha peňazí braná bez bližšej súvislosti s výmenným procesom. Tento proces nebol explicitne modelovaný. Agent teda začal s nejakým rozdelením A a zvolil si konečné rozdelenie B tak, aby maximalizoval svoju užitočnosť. Ako sa ale dostal z bodu A do bodu B nebolo vôbec popísané. Bola v ekonomike nejaká donášková služba, alebo agenti obchodovali priamo každý s každým? Obchodujú bilaterálne alebo multilaterálne? V reálnom čase, alebo predtým, ako začne produkčná a konzumačná aktivita? Používajú barter alebo obchodujú nepriamo s použitím nejakého prostriedku výmeny? Preto boli zostrojené modely s novým, iným prístupom, ktorý sa zaoberá práve týmito otázkami. Keďže sa tieto modely zaoberajú samotným procesom výmeny, boli nazvané vyhľadávacie.

Cieľom našej diplomovej práce je zostaviť stručný prehľad o problematike vyhľadávacích modelov, predstaviť základné modely, ich rozšírenia a iné príklady praktického použitia v ekonomike, ako aj rôzne iné náhľady na danú problematiku.

Keďže naším východiskovým a kľúčovým modelom bol model Kiyotakiho a Wrighta z roku 1993, práca je rozčlenená nasledovne: v prvej kapitole predstavíme tento základný model, zavedieme značenie, ktoré bude používané aj neskôr. V druhej kapitole sa budeme venovať modelom, ktoré boli zostrojené pred rokom 1993 (BKW: Before Kiyotaki – Wright), teda neboli a nemohli byť ovplyvnené základným modelom. V poslednej, tretej kapitole sa oboznámime s modelmi po roku 1993 (AKW: After Kiyotaki – Wright), teda mohli a väčšina z nich aj bola ovplyvnená modelom Kiyotakiho a Wrighta. Pre mnohé tieto modely bol základný model východiskový a autori upravovali niektoré predpoklady, aby tento model rozšírili a vylepšili. Jednotlivé podkapitoly sú zoradené podľa dátumu ich vzniku, ale s ohľadom na náväznosť jednotlivých modelov.

1 MODEL KIYOTAKIHO-WRIGHTA

1.1 Základný model a ekvilibriá

V tejto kapitole opíšeme základný východiskový model, model Kiyotakiho-Wrighta (Kiyotaki, Wright, 1993). Je to základný vyhľadávací monetárny model. Tento model s endogénnou špecializáciou a nedeliteľnými tovarmi opíšeme bližšie. Model ukazuje dôvod na prostriedok výmeny. Je to zjednodušená verzia z roku 1991. Okrem toho, že sú nedeliteľné tovary, sú nedeliteľné aj peniaze. Najskôr popíšeme základný model. Zároveň zavedieme aj značenie, ktoré budeme používať aj neskôr. V ekonomike je veľké množstvo nekonečne žijúcich agentov. Tiež je veľa spotrebných tovarov (nedeliteľných), ktoré budeme nazývať reálne komodity, na rozdiel od peňazí, ktoré nikto nekonzumuje. Rozhodujúcou črtou modelu je exogénny parameter x,

$$0<x<1$$

- je to časť komodít, ktorá môže byť skonzumovaná ktorýmkoľvek daným agentom, a tiež je to časť agentov, ktorí môžu konzumovať danú komoditu (počet agentov aj komodít je normalizovaný na 1). Ak agent môže konzumovať danú komoditu, je to jeho spotrebný tovar a konzumácia mu prinesie užitočnosť $u > 0$, zatiaľ čo konzumácia iných komodít (alebo peniaze) mu prináša nulovú užitočnosť.

Na začiatku časť M agentov dostane peniaze, kým časť 1-M reálnu komoditu, kde $0 \leq M < 1$. Peniaze môžu, ale nemusia mať hodnotu. Ak majú, agenti dostanú 1 jednotku peňazí - teda na kúpu komodity musia minúť všetku hotovosť. Toto sa dá zariadiť práve nedeliteľnosťou peňazí.

Peniaze nemôže nikto vyrobiť, na rozdiel od reálnych komodít, ktoré sú produkované podľa nasledujúcej technológie: jedna jednotka výstupu vyžaduje dva vstupy: spotrebný tovar a náhodné množstvo času. To znamená, že keď agent skonzumuje, vstupuje do produkčného procesu, ktorý prináša jednu reálnu komoditu, náhodne z množiny všetkých komodít podľa Poissonovho procesu s parametrom $\alpha > 0$. Teda α meria produktivitu v zmysle priemerného výstupu za jednotku času. Agenti, ktorí nekonzumovali, nemôžu produkovať (vo väčšine ďalších modelov je produkcia okamžitá, $\alpha \to \infty$). Ďalší predpoklad je, že agenti nemôžu konzumovať svoj vlastný výstup (pozri Peter A.Diamond, 1982, 1984; Kiyotaki and Wright, 1991). Tento predpoklad je zjednodušujúci, ale v podstate nie je nijako podstatný. Ak by agent konzumoval svoju vlastnú produkciu, vôbec by nevstupoval do výmenného procesu. Takže agent, ktorý produkoval, vstupuje do výmenného sektora, kde hľadá iných agentov s ktorými by mohol obchodovať. Agenti sa stretávajú párovo (teda bilaterálne), náhodne podľa Poissonovho procesu s parametrom $\beta > 0$. Potom sa výmena uskutoční iba ak si obidvaja touto výmenou polepšia. Je tu veľké množstvo anonymných agentov, preto nemôže byť IOU (I obe you – dlžobný úpis, dlh), žiadne pôžičky (pravdepodobnosť opätovného stretnutia tých istých agentov je nulová). Tiež predpokladáme transakčné náklady ε, kde

$$0 < \varepsilon < u,$$

ktoré musí zaplatiť príjemca vždy, keď je reálna komodita akceptovaná vo výmene. Tieto náklady sú preto, aby agent, ktorý je indiferentný medzi dvoma reálnymi komoditami, neobchodoval jednu za druhú. Transakčné náklady za akceptovanie peňazí sú nulové.

Agentov s reálnymi komoditami budeme nazývať *obchodníci s komoditami* alebo *držitelia tovarov* a agentov s peniazmi *držitelia peňazí*, *obchodníci s peniazmi*. Označíme μ časť obchodníkov, ktorý sú držitelia peňazí, teda náhodný obchodník má peniaze s pravdepodobnosťou μ a reálnu komoditu s pravdepodobnosťou 1- μ (toto je práve kvôli produkcii – časť agentov vyrába, táto výroba nie je okamžitá, preto vo všeobecnosti $M \neq \mu$).

Jednotlivci si volia stratégie – rozhodujú sa, kedy akceptovať komodity a peniaze s cieľom maximalizovať svoju očakávanú užitočnosť s ohľadom na stratégie iných. Hľadáme Nashovo ekvilibrium. Venujeme pozornosť symetrickým ekvilibriám v ustálenom stave (symetrickým – teda rovnakí agenti majú rovnaké stratégie).

Agent vždy akceptuje reálnu komoditu, ak je to jeho spotrebný tovar, ten hneď skonzumuje a vstupuje do produkčného sektoru. Obchodník s tovarom nebude nikdy akceptovať komoditu, ktorá nie je jeho spotrebným tovarom (pretože žiadna komodita nemá špeciálne vlastnosti, nič by touto výmenou nezískal – pravdepodobnosť, že komodita ktorú má bude akceptovaná ďalším agentom je nezávislá na konkrétnej komodite a keďže sú tu transakčné náklady ε, kým nebude môcť byť tovar spotrebovaný, nebude ho akceptovať). Teda x^2 je pravdepodobnosť, že dvaja držitelia tovaru spravia barter. Ďalšou vlastnosťou je, či jednotlivec akceptuje peniaze. Označme Π pravdepodobnosť, že náhodný držiteľ tovaru akceptuje peniaze a π najlepšiu odpoveď jednotlivca. Budeme riešiť problém najlepšej odpovede pomocou dynamického programovania. Označíme V_j hodnotovú funkciu jednotlivca v stave j, kde j = 0, 1 alebo m indikuje, že agent je producent, obchodník s tovarom, alebo držiteľ peňazí. Potom, ak $r > 0$ je miera časovej preferencie, máme Bellmanove rovnice:

(1) $rV_0 = \alpha(V_1 - V_0)$

(2) $rV_1 = \beta(1 - \mu)x^2(u - \varepsilon + V_0 - V_1) + \beta\mu x \max_\pi \pi(V_m - V_1)$

(3) $rV_m = \beta(1 - \mu)\Pi x(u - \varepsilon + V_0 - V_m)$

Toto sú štandardné rovnice vo vyhľadávacej teórii. Dali by sa interpretovať takto: podľa (1) návratnosť producenta rV_0 sa rovná miere α, s ktorou je produkovaný výstup, krát zisk z presunu od produkcie do výmeny. Návratnosť obchodníka s tovarom je súčtom dvoch častí – miery, s ktorou stretne ďalšieho držiteľa tovaru, $\beta(1 - \mu)$, krát pravdepodobnosť, že obaja chcú obchodovať, x^2, krát zisk z obchodovania, konzumovania a návratu k produkcii. Druhou časťou je miera, s ktorou stretne držiteľa peňazí, krát pravdepodobnosť, že ten chce obchodovať, krát zisk z akceptovania peňazí s pravdepodobnosťou π, ktoré je zvolené optimálne. Návratnosť obchodníka s peniazmi sa rovná miere, s ktorou stretne držiteľa tovaru, krát pravdepodobnosť, že obaja chcú obchodovať, krát zisk z obchodovania, konzumovania a návratu k produkcii.

Tento dynamický program nezávisí len na stratégiách iných, reprezentovaných Π, ale tiež na μ, časti obchodníkov, ktorí majú peniaze. Avšak μ sa dá vyjadriť ako funkcia Π a začiatočného rozdelenia peňazí, M.

S daným M, ak $\Pi < x$ potom z rovníc vyplýva $V_m < V_1$ a teda najlepšia odpoveď je $\pi = 0$. Intuitívne, ak sú peniaze akceptované s menšou pravdepodobnosťou ako barter, tak najlepšia odpoveď je nikdy nemeniť reálnu komoditu za peniaze. Ak $\Pi > x$, potom $V_m > V_1$, čo implikuje $\pi = 1$ a teda najlepšia odpoveď je meniť komoditu za peniaze vždy keď je to možné. Nakoniec, ak $\Pi = x$, potom hodnotové funkcie držiteľov peňazí aj tovarov sú rovnaké a π môže byť čokoľvek z intervalu [0,1]. Máme teda tri ekvilibriá. Ak $\Pi = 0$ – toto budeme nazývať *nemonetárne ekvilibrium*, peniaze nie sú nikdy akceptované, $\Pi = 1$ bude *čisto-monetárne ekvilibrium*, v ktorom sú peniaze akceptované vždy a všetkými a $\Pi = x$ budeme volať *zmiešané ekvilibrium*, kde peniaze sú čiastočne akceptované.

Prvé, čo urobíme, porovnáme užitočnosť v jednotlivých ekvilibriách pre dané hodnoty M. Budeme venovať pozornosť zjednodušenému prípadu kde $\alpha \to \infty$. V tomto prípade produkcia je okamžitá, a teda každý je buď držiteľ peňazí alebo obchodník s tovarom (nie sú žiadni producenti). Počet držiteľov peňazí je $N_m = M$, obchodníkov s tovarom $N_1 = 1\text{-}M$ a $\mu = M$. Označíme indexmi N, M a P nemonetárne, zmiešané a čisto-monetárne ekvilibrium. Po zredukovaní nášho dynamického programu dostaneme takéto výplaty:

(4) $rV_1 = \psi\{rx + \beta x\Pi[M\Pi + (1\text{-}M)x]\}$

(5) $rV_m = \psi\{r\Pi + \beta x\Pi[M\Pi + (1\text{-}M)x]\}$, kde

(6) $\psi = \dfrac{(u-\varepsilon)\beta(1-M)x}{(r+\beta x\Pi)}$

Dosadením Π=0, x a 1 porovnáme užitočnosť pre držiteľov peňazí a tovarov. Pre obchodníkov s tovarmi platí:

$$V_1^N = V_1^M < V_1^P$$

A pre držiteľov peňazí:

$$V_m^N < V_m^M < V_m^P$$

Teda všetci agenti sú na tom aspoň tak dobre alebo lepšie ak sú peniaze akceptované (aspoň čiastočne) a všetci sú na tom lepšie ak sú peniaze akceptované univerzálne ako iba čiastočne.

Teraz si budeme všímať, ako sa mení užitočnosť s M. Vrátime sa k všeobecnému prípadu, kde α nemusí byť ∞. V nemonetárnom aj zmiešanom ekvilibriu sú agenti na tom lepšie s klesajúcim M. Je to preto, lebo peniaze nie sú všeobecne akceptované, a preto je lepšie obdariť každého reálnym spotrebným tovarom ako menejcenným papierom (menejcenným – v nemonetárnom ho nikto nebude akceptovať, teda nemôže uskutočniť výmenu, v zmiešanom sa môže stať, že stretnem agenta, ktorý peniaze neakceptuje, preto je lepšie mať tovar). Zaujímavejší je prípad čisto-monetárneho ekvilibria. Ak spravíme ex-ante očakávanú užitočnosť, dostaneme: $W = N_0V_0 + N_1V_1 + N_mV_m$ (W je celkové bohatstvo), čo sa dá upraviť:

(7) $rW = \dfrac{(u-\varepsilon)\varphi\alpha}{(\alpha+\varphi)}$, kde $\varphi = \varphi(\mu,\Pi) = \beta(1\text{-}\mu)[\mu x\Pi + (1\text{-}\mu)x^2]$.

Maximalizujme W podľa M. W je rastúce s φ, nájdeme hodnotu μ^0, ktorá maximalizuje φ podľa μ a potom aj optimálnu hodnotu M^0 z podmienky:

(8) $M = \dfrac{\alpha\mu}{(\alpha+\varphi)}$.

Výsledky sú: ak $x \geq ½$ potom $\mu^0 = 0$ a teda $M^0 = 0$.

Ak x < ½ potom $\mu^0 = \frac{(1-2x)}{(2-2x)}$ a $M^0 > 0$.

Intuitívne, ak $x \geq 1/2$, každý agent akceptuje minimálne polovicu komodít vyprodukovaných v ekonomike a barter nie je veľmi zložitý. Úloha peňazí nie je veľká a dôležitá a je optimálne obdariť každého reálnym výstupom a nikoho peniazmi. Na druhej strane, ak $x<1/2$, barter sa stáva zložitejším a zavedenie peňazí zvyšuje bohatstvo. M^0 rastie s klesajúcim x a platí: $M^0 \rightarrow 1/2$ keď $x \rightarrow 0$ (teda ak je veľmi malá pravdepodobnosť, že sa bude dať uskutočniť barter, je optimálne polovicu agentov obdariť peniazmi).

1.2 Endogénna špecializácia

Teraz sa bližšie pozrieme na vplyv špecializácie. Smith predpokladal, že aj keď má špecializácia žiaduce dôsledky na produktivitu, robí barter zložitejším. Preto producenti, kedykoľvek môžu, snažia sa predať svoj výstup za všeobecne akceptovateľný prostriedok výmeny, ktorý potom použijú na kúpu svojho spotrebného tovaru. Teda špecializácia vedie k väčšej úlohe peňazí a peniaze dávajú väčšiu príležitosť pre špecializáciu zjednodušením procesu výmeny. Zavedieme vzťah medzi produktivitou a obchodovateľnosťou – parameter v produkčnom procese je funkciou počtu agentov, ktorí chcú konzumovať daný výstup –

$$(9)\ \alpha = \alpha(x), \text{ kde } \alpha' < 0.$$

Špecializácia sa stáva endogénnou. Hlavnou myšlienkou je, že pri zvyšovaní špecializácie producent môže zvýšiť výstup za jednotku času - α, ale iba na úkor zmenšenia časti konzumentov, ktorí budú jeho výstup akceptovať vo výmene, x. Pred vstupom do produkčného procesu si agenti zvolia x. Ak sú peniaze akceptované s pravdepodobnosťou Π a rozhodnutia iných producentov implikujú, že daný jednotlivec môže konzumovať časť X z ich výstupu, jeho výplata, ak zvolí x, je popísaná:

$$(10)\ rV_0 = \alpha(x)[V_1(x) - V_0]$$

$$(11)\ rV_1 = \beta(1-\mu)Xx[u - \varepsilon + V_0 - V_1(x)] + \beta\mu x\Pi[V_m - V_1(x)]$$

$$(12)\ rV_m = \beta(1-\mu)X\Pi(u - \varepsilon + V_0 - V_m).$$

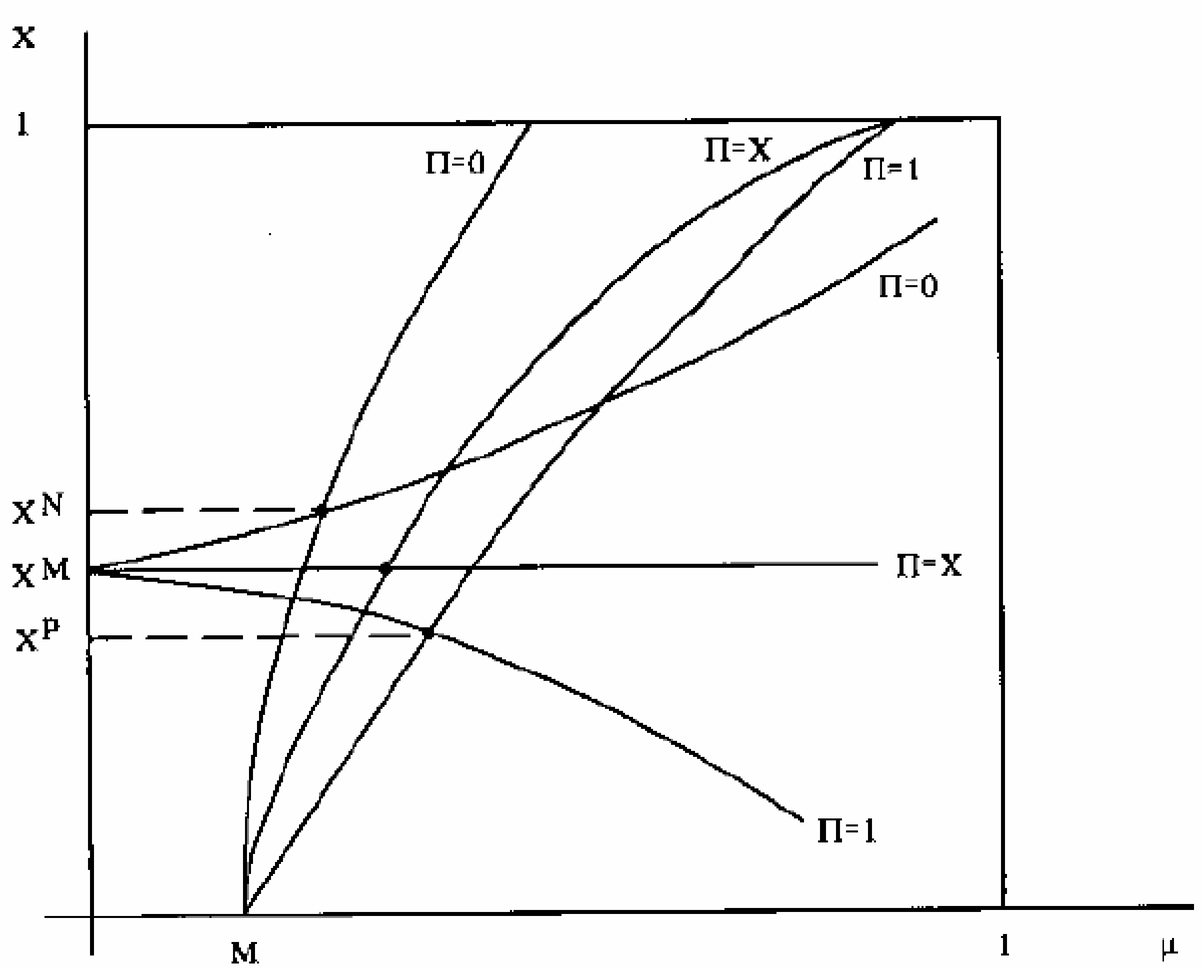
Voľbu x spraví producent a to tak, aby maximalizoval pravú stranu rovnice (10) a toto x je potom prenesené na celý výmenný sektor. Problém najlepšej odpovede závisí na

μ, ale μ bude determinované ako funkcia stratégií a M. Vyriešime predchádzajúce rovnice pre V_0, V_1 a V_m a maximalizáciou z podmienky prvého rádu získame:

$$-\frac{x\alpha'(x)}{\alpha(x)} = \frac{r+\alpha(x)}{r+\beta(1-\mu)Xx+\beta\mu x\Pi} \qquad (13)$$

-z podmienky druhého rádu musíme uvažovať $\alpha'' \leq 0$. Potom táto rovnica úplne charakterizuje individuálnu voľbu x s danými X, Π a μ, píšeme x = x(X, μ, Π). Pre symetrické ekvilibrium musíme mať X = x alebo X = x(X, μ, Π). Ďalšia podmienka je z rovnice ustáleného stavu (8). Pravá strana tejto rovnice závisí na X, μ a Π, píšeme M = M(X, μ, Π). S daným M, ekvilibrium je riešením X = x(X, μ, Π) s Π=0, X alebo 1 (pretože pre každé dané X má model nemonetárne, zmiešané a čisto-monetárne ekvilibrium rovnako ako v modeli bez endogénnej špecializácie.

Krivky M a X, ktorých priesečníky determinujú ekvilibriové hodnoty μ a X



Graf č.1

Na obrázku je priestor (μ, X) so všetkými splnenými podmienkami. Priesečník kriviek M a X determinuje ekvilibriové hodnoty μ a X v nemonetárnom, zmiešanom a čisto-monetárnom ekvilibriu pre $\Pi = 0$, X alebo 1. Ako môžeme vidieť, špecializácia je najväčšia v čisto monetárnom ekvilibriu, menšia v zmiešanom a najmenšia v nemonetárnom ekvilibriu: $X^P < X^M < X^N$. Je to preto, lebo keď obiehajú peniaze, je menej výhodné mať vysoké x, lebo nie je nevyhnutné dosiahnuť dvojitú zhodu na výmenu. Teraz sa pozrieme ako špecializácia závisí od M. Nárast M posúva krivky $M = M(X, \mu, \Pi)$ doprava ale nemá vplyv na krivky $X = x(X, \mu, \Pi)$. S rastúcim M rastie X v nemonetárnom ekvilibriu (klesá špecializácia), klesá v čisto-monetárnom (zväčšuje sa špecializácia) a nemení sa v zmiešanom ekvilibriu. Nárast M v čisto-monetárnom ekvilibriu povzbudzuje špecializáciu, pretože producenti môžu ľahšie obchodovať, keď je v obehu viac peňazí.

1.3 Režim s dvoma menami

Existuje možnosť, že v ekonomike sa naraz nachádza viac typov peňazí. Napríklad obieha domáca aj cudzia mena, pričom domáca je viac akceptovaná. Nazvime tieto dve meny červenou a modrou. Špecializácia bude pre jednoduchosť opäť exogénna. Potom agenti, ktorí doteraz mali peniaze, teraz majú buď červené alebo modré peniaze. Peniaze majú rozdielne vlastnosti, napríklad prinášajú dividendy y_R a y_B (ak $y_i<0$, sú to skladovacie náklady). Množstvá jednotlivých peňazí sú M_R a M_B, $M_R+M_B<1$, μ_R a μ_B sú časti agentov s červenými, respektíve modrými peniazmi. $\mu_C = 1-\mu_R-\mu_B$ je časť agentov s komoditami. Pravdepodobnosť náhodného obchodníka s komoditami, že akceptuje červené resp. modré peniaze je Π_R a Π_B. Zostavíme Bellmanove rovnice. Naším cieľom je skonštruovať ekvilibrium, v ktorom obe meny obiehajú, ale s rozdielnou akceptovateľnosťou: $1=\Pi_R>\Pi_B>0$ (takéto prípady môžeme nájsť v skutočnosti – napríklad blízko hraníc je akceptovaná domáca aj cudzia mena, vo vnútrozemí sa dá platiť iba domácou menou). Zistíme, že takéto ekvilibrium existuje, dokonca aj keď $y_R<y_B$. Teda môže sa stať, že peniaze s väčšími dividendami sú iba čiastočne akceptované, kým s menšími sú úplne akceptované – pretože sú likvidnejšie. Ak je ale rozdiel v dividendách príliš veľký, toto ekvilibrium už neexistuje. Problémom dvoch mien a dvoch krajín sa ešte budeme zaoberať v ďalších kapitolách.

2 MODELY BKW

V tejto kapitole sa budeme venovať niekoľkým modelom, ktoré boli zostavené pred základným a pre nás východiskovým modelom z predchádzajúcej kapitoly. Budú to modely s komoditnými peniazmi, najskôr pre tri typy tovarov a agentov, potom s rozšírením na viac typov a model s tovarmi s rôznou kvalitou – s dobrými a zlými tovarmi.

2.1 Modely s komoditnými peniazmi

2.1.1 Model Kiyotakiho-Wrighta/89

Tento model (Kiyotaki, Wright, 1989) je najstarším, ktorým sa budeme v našej práci detailnejšie zaoberať. Je vytvorený pre tri typy tovarov a teda aj agentov, preto je jednoduchý – vždy je len relatívne malý počet možností stretnutia. Tento model sa zaoberá *komoditnými* (tovarovými) *peniazmi*. Základnou myšlienkou je endogénne determinovať, ktorý z tovarov sa stane prostriedkom výmeny. Neskôr pribudne aj ďalší objekt – peniaze. Popíšeme si teda model. Čas je diskrétny a máme tri nedeliteľné komodity – 1, 2 a 3. Agent i má spotrebný tovar i a produkuje tovar $i^* \neq i$ (sú dva spôsoby kombinovania produkcie a konzumácie, oba si predstavíme ako model A a B). Tovary budeme značiť *arabskými* a agentov *rímskymi* znakmi. Tovary sú skladovateľné, každý môže skladovať iba 1 jednotku naraz. Náklady skladovania sú rôzne pre jednotlivé typy tovarov a agentov – c_{ij} budú náklady agenta i na skladovanie tovaru j. Predpokladajme teda $c_{i3} > c_{i2} > c_{i1} > 0$ pre všetky i (tovar 3 má najvyššie náklady skladovania, tovar 2 nižšie a tovar 1 najnižšie u všetkých typov agentov). U_i bude užitočnosť agenta i z konzumácie tovaru i a D_i produkčné náklady agenta i. $\beta \in (0, 1)$ je diskontný faktor spoločný pre všetky typy. Potom očakávaná diskontovaná celoživotná užitočnosť je

$$E\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t [I_i^U(t)u_i - I_{i^*}^D(t)D_i - I_{ij}^c(t)c_{ij}] \text{, kde}$$

$I^U{}_i(t)$ sa rovná jednej, ak agent konzumuje svoj spotrebný tovar, inak sa rovná nule; $I^D{}_{i*}(t)$ je 1, ak produkoval tovar i*, nula inak; a $I^c{}_{ij}(t)$ je 1, ak skladuje akýkoľvek tovar j, nula inak. Predpokladáme, že čistá užitočnosť z konzumácie a produkcie, $u^i = U_i - D_i$ je dosť veľká a agent neodíde preč z danej ekonomiky. Agenti sa stretávajú náhodne, bilaterálne. Nie je žiadne kreditovanie, pretože agenti sa znovu stretnú s nulovou pravdepodobnosťou. Každý agent sa snaží maximalizovať svoju očakávanú užitočnosť. Označíme $\tau_i(j,k)=1$ ak i chce obchodovať j za k, nula inak. Teda ak typ i s tovarom j stretne typ h s tovarom k, budú obchodovať iba ak $\tau_i(j,k).\tau_h(k,j) = 1$ (nastane dvojzhoda). Rozdelenie potenciálnych stretnutí charakterizuje $p(t)=[\ldots p_{ij}(t)\ldots]$, kde $p_{ij}(t)$ je časť agentov i majúcich v čase t tovar j. Každý si porovnáva svoju očakávanú užitočnosť a obchoduje, ak táto užitočnosť sa mu výmenou zväčší. Potom musí platiť (pre $j\neq k$) $\tau_i(j,k)=1$ práve vtedy ak $\tau_i(k,j)=0$ (ak sa mu zväčší užitočnosť výmenou j za k, nemôže sa mu zväčšiť aj výmenou k za j), preto v ekvilibriu agenti rovnakého typu neobchodujú. Rovnako samozrejme nemenia dva rovnaké tovary. Agenti vždy budú obchodovať výmenou za svoj spotrebný tovar. Zostáva nám ešte niekoľko možných stretnutí (napríklad agent I s tovarom 2 stretne agenta II s tovarom 3) a v nasledovných prípadoch uvedieme ekvilibriá pre oba typy produkcie tovarov.

2.1.1.1 Model A

Prvým prípadom (*model A*) je, že agent I produkuje tovar 2, II produkuje tovar 3 a III tovar 1. Pre niektoré parametre bude existovať jedno ekvilibrium, pre iné parametre iné ekvilibrium, pre ďalšie žiadne ekvilibrium a pre žiadne hodnoty parametrov nebude viac ekvilibrií existovať súčasne. Ekvilibrium, v ktorom agenti preferujú tovar s nižšími skladovacími nákladmi (teda 1 vždy a 2 pred 3) budeme volať *fundamentálne*. Špekulatívne ekvilibrium bude také, pri ktorom agenti niekedy obchodujú tovar s nižšími nákladmi skladovania za vyššie, lebo rozumne očakávajú, že ten ľahšie vymenia za svoj spotrebný tovar. Fundamentálne stratégie sú nasledovné (T znamená, že budú obchodovať, N nebudú):

Fundamentálne ekvilibrium (model A)

		II	
		3	1
I	2	N	T
	3	N	N

		III	
		1	2
II	3	T	T
	1	N	T

		I	
		2	3
III	1	N	T
	2	N	T

Tabuľka č.1

Uvažujme agenta I. Ak odíde zo stretnutia s tovarom 2, platí skladovacie náklady c_{12} a v ďalšej perióde stretne typ I, II alebo III, každého s pravdepodobnosťou 1/3. Ak stretne I, neobchoduje, necháva si tovar 2 a odchádza s užitočnosťou V_{12}. Ak stretne II, s pravdepodobnosťou p_{21} sa zhodnú a odchádza s užitočnosťou $(u_1 + V_{12})$ a s pravdepodobnosťou p_{23} má voľbu medzi užitočnosťou V_{12} a V_{13}. Ak stretne III, neobchoduje a odchádza s V_{12}.

(14) $V_{12} = -c_{12} + \beta/3[V_{12} + p_{21}(u_1 + V_{12}) + p_{23} \max(V_{12},V_{13}) + V_{12}]$

Rovnako postupujeme ak I odíde s tovarom 3 a dostaneme, že $V_{12}>V_{13}$ (aby to bola fundamentálna stratégia) vtedy a len vtedy, ak:

(15) $c_{13}-c_{12} > (p_{31}-p_{21})u_1\beta/3$,

čo determinuje parametre a hodnoty pre p_{ij}, pre ktoré fundamentálna hra I je najlepšou odpoveďou na fundamentálnu hru iných. Pre hráča II dostaneme, že $V_{21}>V_{23}$ pre všetky hodnoty p_{ij} a pre III platí $V_{31}>V_{32}$ tiež pre všetky p_{ij}. Nerovnosť $c_{13}-c_{12} > (p_{31}-p_{21})u_1\beta/3$ hovorí, že rozdiel v skladovacích nákladoch tovarov 3 a 2 prevyšuje diskontovanú užitočnosť vyjadrenú relatívnou trhovosťou tovaru 3 v porovnaní s 2. Rozdelenie p v rovnovážnom stave pre fundamentálne stratégie je dané $(p_{12,}p_{23},p_{31}) = (1,0.5,1)$ a preto tieto stratégie tvoria ekvilibrium práve vtedy, ak:

(16) $c_{13}-c_{12}>0.5u_1\beta/3$.

Teda v tomto fundamentálnom ekvilibriu agenti I a III vždy držia svoje produkčné tovary až kým ich priamo nevymenia za svoje spotrebné tovary, nikdy nepoužívajú nepriamy obchod. Agenti II obchodujú svoju produkciu 3 za 1 vždy keď je to možné, čo je presne s pravdepodobnosťou ½. Sú teda akýmsi prostredníkom prenášajúcim tovar 1 od III k typu I. Tovar 1 je jedinečným prostriedkom výmeny, komoditnými peniazmi. Ak ale neplatí nerovnosť (16) vyššie, fundamentálna hra agentov nevedie k ekvilibriu. Najlepšia odpoveď hráča I na fundamentálnu hru je špekulovať a vymeniť tovar 2 za 3, ktorý má vyššie skladovacie náklady ale je lepšie obchodovateľný. Dá sa ukázať, že fundamentálna hra je stále najlepšou odpoveďou agentov II a III – $V_{21}>V_{23}$ a $V_{31}>V_{32}$ pre každé p_{ij}.

Rozdelenie pri týchto stratégiách je $(p_{12},p_{23},p_{31}) = (0.5\sqrt{2},\ \sqrt{2} - 1,\ 1)$ a teda špekulatívne ekvilibrium bude, ak c_{13}-c_{12}<$(\sqrt{2} - 1)u_1\beta/3$. V tomto prípade aj I hrá rolu sprostredkovateľa – prenáša tovar 3 od II k III. Agenti II sú stále rovnakí sprostredkovatelia – používajú tovar 1 ako prostriedok výmeny, zatiaľ čo I používa tovar 3 ako prostriedok výmeny. Teda v tomto ekvilibriu máme dvoje komoditné peniaze – s najvyššími a najnižšími skladovacími nákladmi. Zostalo ešte šesť možných prípadov na ekvilibrium (lebo je osem možností ako zvoliť $\max(V_{12},V_{13})$, $\max(V_{21},V_{23})$, $\max(V_{31},V_{32})$). V žiadnom prípade už ale nebude ekvilibrium, teda v oblasti $(\sqrt{2} - 1)u_1\beta/3 < c_{13}-c_{12} < 0.5u_1\beta/3$ neexistuje ekvilibrium (teda neexistuje ekvilibrium v čistých stratégiách, môže a existuje zmiešané ekvilibrium alebo ekvilibrium, v ktorom agenti rovnakého typu používajú rôzne stratégie).

2.1.1.2 Model B

Teraz ešte spomenieme druhý prípad možnosti produkcie, *model B*, kde I produkuje 3, II produkuje 1 a III vyrába 2 (zmena nastane, keďže skladovacie náklady sú stále rovnaké). V tomto prípade získame opäť fundamentálne ekvilibrium - $(p_{13},p_{21},p_{32}) = (0.5\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2} - 1)$. Agenti II držia svoju produkciu, až kým ju nemôžu vymeniť za svoj spotrebný tovar, kým I a III obchodujú svoju produkciu za skladnejšie tovary vždy keď je to možné. Tovary 1 a 2 slúžia ako prostriedok výmeny. V špekulatívnom ekvilibriu $(\sqrt{2} - 1,\ 0.5\sqrt{2},\ 1)$ agenti III špekulujú neobchodovaním 2 za 1 (nechajú si radšej tovar s vyššími skladovacími nákladmi, lebo si myslia, že ten ľahšie vymenia pri ďalšom stretnutí za svoj spotrebný tovar). Vediac toto, typ II špekuluje požadovaním tovaru 3 od I aby uskutočnil následnú výmenu s III. Typ I kúpi tovar 2 od III. Teda tovary 2 a 3 slúžia ako komoditné peniaze, zatiaľ čo, paradoxne, najskladnejší tovar 1 nie. Treba ešte poznamenať, že v určitom parametrickom priestore existujú obidve ekvilibriá. To, ktoré tovary sa stanú komoditnými peniazmi potom záleží od nejakých iných, vonkajších faktorov. Toto sú jediné ekvilibriá.

Dajú sa získať aj ekvilibriá rôznych iných typov – napríklad dynamické ekvilibrium, kde nemajú rôzne stratégie iba rôzni agenti, ale tieto stratégie sa môžu meniť s časom. Dá sa uvažovať aj kombinácia – niektorí agenti používajú čisté stratégie a niektorí zmiešané. Ďalším typom sú cyklické ekvilibriá – existuje napríklad 2-cyklové ekvilibrium, v ktorom jeden typ agenta striedavo (pre t) používa komoditné peniaze. V týchto prípadoch ale neboli zavedené peniaze ako všeobecný prostriedok výmeny, preto sa im nebudeme venovať bližšie.

2.1.1.3 Model s peniazmi

Teraz skúsime do danej ekonomiky pridať peniaze (pre model A, model B by bol kvalitatívne podobný). Pridáme teda tovar 0 (množstvo M), z ktorého nikto nemá užitočnosť. Skladovacie náklady takéhoto tovaru budú nulové. Zaberajú ale miesto, a preto nikto nemôže mať súčasne peniaze aj reálnu komoditu. Hľadáme ekvilibrium, v ktorom by tovar 0 obiehal ako prostriedok výmeny. Určite existuje ekvilibrium, v ktorom peniaze neobiehajú. Ak agent i si myslí, že od neho nikto peniaze v budúcnosti nebude akceptovať, potom, ak ich prijme, zostanú mu navždy a prinesú mu nulovú užitočnosť. Teda ak v peniaze nikto neverí, nepodarí sa ich zaviesť (nemonetárne ekvilibrium). Všetko závisí od určitej viery. Predpokladajme teda, že každý verí, že iní budú akceptovať peniaze (teda vlastne určíme, že peniaze sú akceptované). V tom prípade každý najskôr preferuje svoj spotrebný tovar a hneď po ňom tovar 0. Ešte treba odlíšiť preferencie zvyšných dvoch tovarov. Z výsledkov vyplýva, že existuje fundamentálne ekvilibrium, ktorého parametre závisia od množstva peňazí v ekonomike. Ak časť agentov s peniazmi $M \in (0,1)$ (extrémne prípady M=0 a 1 znamenajú prípad s komoditnými peniazmi a prípad, v ktorom obieha iba tovar 0), v obehu sú peniaze aj komoditné peniaze. V takých prípadoch agenti III akceptujú peniaze od I za tovar 1, typ I od II za 2 a II od oboch – od I za tovar 1 a od III za 3. Zaujímavý je prípad, keď agent I si kúpi tovar 1 od II s použitím peňazí, a potom II si kúpi tovar 2 od I s použitím tých istých peňazí. Typ II tiež akceptuje tovar 1 od II kvôli budúcemu obchodu s I, teda tovar 1 slúži v niektorých obchodoch ako prostriedok výmeny, teda komoditné peniaze existujú spolu s normálnymi peniazmi. Avšak tovar 0 ako peniaze je jediným všeobecným prostriedkom výmeny.

Záverečným porovnaním bohatstva v jednotlivých ekvilibriách, ktoré existujú pre rovnaké parametre zistíme, že sú neporovnateľné – v modeli B typy II a III sú na tom lepšie vo fundamentálnom, zatiaľ čo I je lepšie v špekulatívnom ekvilibriu. Typ I získa, pretože jeho výstup 3 slúži ako komoditné peniaze. V modeli A dve ekvilibria nikdy nemôžu existovať súčasne, preto sa nedajú vôbec porovnať.

2.1.2 Rozšírenie pre k≥4

Ďalší autori (Aiyagari, Wallace, 1991) zovšeobecnili predchádzajúci model pre k typov agentov a tovarov. Okrem toho budeme uvažovať nielen o čistých, ale aj o zmiešaných stratégiách. V ekonomike je teda k nedeliteľných a skladovateľných tovarov plus peniaze. Agent typu i maximalizuje očakávanú užitočnosť s diskontným faktorom z intervalu (0,1) nezávislom od i. Užitočnosť v čase t z konzumácie tovaru i agenta i je u_i, užitočnosť zo skladovania tovaru j agentom i v čase t až t+1 je $-c_{ij}$ a užitočnosť nekonzumácie a žiadneho skladovania je 0. Agent i po konzumácii produkuje tovar i+1 (mod k), ktorý sa zjaví v čase t+1. Na rozdiel od predchádzajúceho modelu, teraz nie je žiadne kapacitné obmedzenie na skladovanie tovarov. Ale konzumácia je jedinou podmienkou na produkciu v čase t+1. Každý začína periódu s jednotkou nejakého objektu. Teda agenti sa nikdy nezbavia svojho tovaru ani ho nikomu nedajú zadarmo. Budeme uvažovať symetrické ekvilibriá – agenti rovnakého typu používajú rovnaké stratégie. Perióda prebieha nasledovne – každý agent má jednotku tovaru, stretne nejakého iného agenta, rozhodnú sa, či budú obchodovať, po rozhodnutí majú opäť nejaký jeden tovar, ak je to ich spotrebný tovar, konzumujú a produkujú produkčný tovar, v inom prípade ho skladujú, perióda končí, začína nová a každý má opäť jednotku tovaru. Časť M agentov má peniaze. Každý agent si volí svoju stratégiu obchodovania, ďalej sa rozhoduje o konzumácii alebo skladovaní a p_{ij} je časť agentov typu i, ktorá drží tovar j na začiatku periódy, teda p je vektor pre rozdelenie agentov. Na základe Bellmanových rovníc sa každý agent rozhodne. Autori ukázali, že existuje obmedzený nemonetárny rovnovážny stav – je zakázané obchodovať za peniaze a nikto sa nemôže zbaviť tovaru. Ďalej existuje neprázdna množina hodnôt parametrov, pre ktoré existuje nemonetárny rovnovážny stav s pozitívnou spotrebou, teda keď agenti chcú obchodovať a chcú konzumovať svoj spotrebný tovar. Vlastnosti tohto rovnovážneho stavu sú, že pre k>2 niektoré typy agentov obchodujú aj za iné tovary ako sú ich spotrebné. Ďalej, ak existuje tovar, ktorý má najmenšie skladovacie náklady pre všetkých agentov, bude tento tovar každý akceptovať. Teda stratégia každého typu agenta bude vymeniť akýkoľvek tovar (okrem vlastného spotrebného) za tovar s najnižšími skladovacími nákladmi. Teraz sa pozrieme na ekvilibriá s monetárnou výmenou – predpokladáme, že každý akceptuje peniaze. Opäť sa dá ukázať, že ak sú splnené všetky predpoklady a podmienky, vždy existuje monetárny rovnovážny stav s pozitívnou spotrebou, v ktorom všetci akceptujú peniaze.

2.2 Model s rôznou kvalitou tovarov

Teraz sa budeme zaoberať možnosťou rôznej kvality výrobkov (Williamson, Wright, 1991). Je to model s privátnou informáciou, kde privátna informácia je práve v oblasti kvality – spotrebiteľ pri veľkom množstve predajcov a tovarov nevie rozlíšiť ich kvalitu. V ekonomike sa pritom môžu nachádzať kvalitné aj nekvalitné výrobky. Ak ale výrobky s nižšou kvalitou majú aj nižšie náklady na výrobu a, naopak, prinášajú spotrebiteľovi nižší úžitok, nepokúsia sa producenti vyrábať iba takéto tovary? A aká bude úloha peňazí v takomto prípade? „Nie absencia dvojzhody, nie problém s vyhľadávaním predajcov a kupcov rôznych tovarov, ale absolútny nedostatok informácií o vlastnostiach tovaru určeného na výmenu dáva dôvod na používanie peňazí vo výmennom sektore“ (Alchian, 1977). Takýto model s privátnou informáciou predstavíme teraz bližšie. Čas je diskrétny, agenti homogénni, sú tri druhy tovarov – s dobrou kvalitou, so zlou kvalitou a peniaze. Dobrý tovar má náklady na produkciu $c>0$, kým ten so zlou kvalitou má náklady rovné nule. Peniaze nikto neprodukuje, sú rovnako ako tovary nedeliteľné s nulovými skladovacími nákladmi, každý skladuje najviac jednu jednotku. Konzumácia zlej komodity a peňazí prináša nulovú užitočnosť, konzumácia kvalitného tovaru užitočnosť $u>0$, ak ide o tovar vyrobený niekým iným a nula ak ide o vlastný tovar (to je namiesto predpokladu o nemožnosti konzumácie vlastnej produkcie – konzumovať ju môže, ale nemá z toho žiadny úžitok, opäť sa vráti k produkcii). Časť M agentov dostane peniaze, zvyšní budú obchodníci s tovarmi. Časť p z nich má dobrý tovar a $1-p$ zlý. Peniaze sú rozpoznateľné, ale ak agent stretne obchodníka s tovarom, s pravdepodobnosťou θ rozpozná kvalitu tovaru. Obchodníci nevedia, či ostatní rozpoznali ich tovar a nepoznajú ani históriu obchodovania. Pri stretnutí sa agenti rozhodnú, či budú obchodovať, po obchode sa rozídu, rozlíšia kvalitu ak ju predtým nepoznali a tovar skonzumujú, vymenia, alebo skladujú. Ak konzumujú, môžu produkovať – rozhodnú sa, či dobrý alebo zlý tovar. Každý chce maximalizovať svoju očakávanú diskontovanú užitočnosť ako v predchádzajúcich prípadoch. Pravdepodobnosť stretnutia obchodníka s peniazmi je μ, $\mu \leq M$, $\mu = M$ ak sa nikto nezbavil peňazí. Budeme uvažovať nedegenerované ekvilibrium (nazývané aktívne), v ktorom sa vyrábajú aspoň nejaké dobré tovary a užitočnosť je pozitívna.

2.2.1 Model s úplnou informáciou

Najskôr spravíme model s úplnou informáciou, kde $\theta=1$. Agent teda pri stretnutí obchodníka s tovarom ihneď spozná, akej kvality je daný tovar. Hodnotová funkcia agenta, ktorý nič práve nemá a rozhoduje sa, čo bude produkovať, je $V_p=\max(V_g-c, V_b)$. Pre aktívne ekvilibrium musí platiť $V_g-c \geq V_b$ (lebo sa musia vyrábať nejaké dobré tovary). Ak teraz najskôr uvažujeme nemonetárne ekvilibrium, v ktorom nikto neakceptuje peniaze, každý sa ich zbaví už v prvej perióde a $\mu=0$. Niektoré veci sú potom zrejmé – ak stretne agent s dobrou komoditou iného agenta s dobrou komoditou, bude obchodovať, iba ak $u>c$. Ak stretne niekoho so zlou komoditou, nebude obchodovať. Teda agenti so zlou komoditou nemôžu obchodovať, a preto $p=1$. Teda ak existuje aktívne nemonetárne ekvilibrium, všetci vyrábajú dobré komodity, obchodujú a opäť produkujú dobré tovary. Na existenciu ekvilibria treba ukázať, že nikto sa nebude chcieť odchýliť od tejto stratégie. Z rovníc dynamického programovania vyplýva, že vyrábanie dobrých tovarov je najlepšou odpoveďou, a teda jediným aktívnym nemonetárnym ekvilibriom, vtedy a len vtedy, ak $u \geq (1+r)c$. Teraz uvažujme monetárne ekvilibrium, v ktorom aspoň v niektorých výmenách sú peniaze akceptované. Aby boli peniaze akceptované, musí platiť $V_m \geq V_g$, a teda $V_m > V_g-c$. Nikto sa potom nezbaví peňazí a $\mu=M$. Obchodníci rovnako neakceptujú zlé tovary, a preto opäť $p=1$. Z rovníc získame $V_m=V_g$ a teda peniaze sú rovnako hodnotné ako dobré tovary. Teda jednorázové porušenie stratégie nezlepší výplatu. Rovnako získame, že $V_g-c \geq V_b$ vtedy a len vtedy, ak $M \leq 1-\dfrac{rc}{(u-c)} \equiv M_1$. Pre $M \leq M_1$ sa teda neoplatí vyrobiť zlý tovar a pre $M \leq M_1$ sme teda získali (čisto) monetárne ekvilibrium, v ktorom akceptovanie peňazí a vyrábanie dobrých tovarov je najlepšou odpoveďou. Toto ekvilibrium existuje, ak $M>0$, teda $M_1>0$ a z toho $u>(1+r)c$. Teda je to rovnaký prípad ako pre nemonetárne ekvilibrium (zmenila sa iba akceptácia peňazí). Očakávaná užitočnosť je klesajúcou funkciou M, a ak $M=0$, dostaneme nemonetárne ekvilibrium a jeho užitočnosť. Teda bez privátnej informácie je optimálne nulové množstvo peňazí.

2.2.2 Model s privátnou informáciou

Teraz budeme už uvažovať aj o privátnej informácii, $\theta<1$, teda v niektorých prípadoch agenti nevedia rozoznať kvalitu ponúkaného tovaru. Opäť najskôr uvažujeme nemonetárne ekvilibrium, $\mu=0$. Vo všeobecnosti by si agenti želali vyrábať alebo skladovať zlý tovar, s predpokladom, že sa im ho podarí vymeniť s neinformovaným agentom. Teda $p<1$, ale nemôže byť nulové podľa definície aktívneho ekvilibria. Ak agent rozpozná dobrý tovar, bude vždy obchodovať, rovnako aj agenti so zlými tovarmi budú vždy obchodovať, pretože v najhoršom prípade opäť dostanú zlý tovar. Teda jedinou otázkou zostáva, či produkovať dobrý alebo zlý tovar, a či prijať alebo zamietnuť tovar nerozoznanej kvality. Označíme Σ pravdepodobnosť, že ostatní obchodníci akceptujú nerozpoznaný tovar. V aktívnom ekvilibriu je $\Sigma>0$ – ak by $\Sigma=0$, nikto neakceptuje nerozpoznané tovary, zlé tovary sa nebudú vôbec vyrábať – ale potom konzumenti si polepšia, ak budú akceptovať nerozoznané komodity, teda $\Sigma\neq0$, čo je spor. Zostavíme si rovnice – pre agenta držiaceho dobrý tovar sa jeho návratnosť rovná pravdepodobnosti, že stretne ďalšieho rovnakého agenta (rozozná agenta s dobrou komoditou), krát pravdepodobnosť, že aj on chce obchodovať a zisk z obchodu plus pravdepodobnosť, že stretne agenta, ktorého komoditu nerozozná, krát zisk z voľby akceptácie. Pre agenta so zlým tovarom sa návratnosť rovná pravdepodobnosti, že stretne agenta s dobrým tovarom, ktorý akceptuje niečo, čo nerozozná a zisk z tohto obchodu. Potom Nashove ekvilibriá sú:

-ak $V_g-c>V_b$ => $p=1$,

-ak $V_g-c<V_b$ => $p=0$ a

-ak $p\in(0,1)$ => $V_g-\gamma=V_b$.

Máme tri potenciálne ekvilibriá. Jedno ekvilibrium (typ a) je $p=1$ a $\Sigma=1$, vyrábajú sa iba dobré tovary a každý akceptuje tovar, ktorý nerozozná. Ekvilibrium typu b je $p\in(0,1)$ a $\Sigma=1$ – vyrábajú sa aj nejaké zlé tovary, ale všetci akceptujú nerozoznané komodity. Toto ekvilibrium existuje pre $\frac{(1+r)c}{u}<\theta\leq\frac{(1+r)u}{(2u-c)}$. Typ c je $p\in(0,1)$ a $\Sigma\in(0,1)$ – vyrábajú sa dobré aj zlé tovary a niektorí agenti prijímajú a niektorí zamietajú nerozpoznané tovary. Toto ekvilibrium existuje pre $0.5r+\frac{0.5}{u-c}\sqrt{r^2(u-c)^2+4rc(u-c)}<\theta<\frac{(1+r)u}{(2u-c)}$. Prvé ekvilibrium je podobné ako v prípade bez privátnej informácie, agenti sú disciplinovaní a neriskujú zamietnutie tovaru agentom, ktorý by rozpoznal ich zlý tovar. Toto ekvilibrium existuje pre $\theta \geq \frac{(1+r)c}{u}$. Podľa parametra θ a rôzne r môžu nastať prípady, kde existuje iba ekvilibrium c, existujú všetky tri ekvilibriá, existuje ekvilibrium a alebo existujú a a b. Porovnaním bohatstva v jednotlivých ekvilibriách zistíme, že je najväčšie v a, menšie v b a najmenšie v ekvilibriu typu c. Rovnako pri prvom ekvilibriu nie je možné zvýšiť bohatstvo zavedením peňazí. Preto pri hľadaní monetárneho ekvilibria sa sústredíme na prípad $p \in (0,1)$. Rovnako sa sústredíme na ekvilibriá, kde peniaze sú univerzálne akceptované, pretože pri ekvilibriách s čiastočnou akceptáciou existuje vždy aj nemonetárne ekvilibrium s vyšším bohatstvom. Ešte označíme Ω pravdepodobnosť, že držiteľ peňazí akceptuje nerozoznaný tovar. Potom zostavením rovníc aj pre držiteľa peňazí získame viac kandidátov na ekvilibrium podľa Σ a Ω. Vylúčením niektorých možností (kde vieme nájsť lepšie nemonetárne ekvilibrium alebo prípady, ktoré neexistujú), získame 5 kandidátov, ktorí by mohli dominovať nad nemonetárnymi ekvilibriami. Niektorí kandidáti sú zložití na výpočet, preto sa budeme venovať len niektorým prípadom, kde sa výsledky dajú aj interpretovať a dá sa porovnať bohatstvo. Prvým prípadom je $(\Sigma,\Omega) = (0,\Phi)$ ($\Phi \in (0,1)$, teda obchodníci s tovarmi neakceptujú nerozpoznaný tovar a držitelia peňazí nerozoznaný tovar niekedy akceptujú). Toto ekvilibrium existuje pre také hodnoty parametra θ, pre ktoré neexistuje iné monetárne ekvilibrium a existuje iba degenerované nemonetárne ekvilibrium. Toto ekvilibrium existuje pre určité hodnoty M a keďže v tomto priestore existuje iba degenerované nemonetárne ekvilibrium, v ktorom W=0 a v tomto ekvilibriu je výnos W>0, Pareto dominuje. Toto ekvilibrium existuje pre malé hodnoty θ, teda ak je veľká privátna informácia, čo láka produkovať nízkokvalitné výrobky. V tomto ekvilibriu ale vlastníci zlých komodít nikdy nemôžu priamo obchodovať za dobré tovary (Σ=0), musia meniť za peniaze, čo je možné, ale nie automatické ($\Omega \in (0,1)$). Peniaze sú teda prínosom. Ak teraz trochu zmenšíme privátnu informáciu – teda vzrastie θ, pre určité hodnoty M bude existovať všetkých 5 typov monetárnych ekvilibrií (kombinácie (Σ,Ω) – (0,Φ),(0,1),(Φ,0),(Φ,Φ),(Φ,1)) a ešte aj aktívne nemonetárne typu c. V tomto prípade je optimálnym monetárnym ekvilibriom to, ktoré sme popísali. Ešte treba poznamenať, že optimálne množstvo peňazí M je klesajúcou funkciou θ, pre dostatočne vysoké hodnoty θ je optimálne nemonetárne ekvilibrium typu a. V monetárnom ekvilibriu je menšia časť tovarov s vysokou kvalitou ako v nemonetárnom, teda zdalo by sa, že peniaze pomáhajú presadiť sa menej kvalitným výrobkom. Peniaze ale zväčšujú strategické možnosti agentov a to zvyšuje pravdepodobnosť agenta na získanie kvalitného tovaru. Zároveň platí, že bohatstvo je väčšie v nemonetárnom ekvilibriu s úplnou informáciou, ako v monetárnom s privátnou informáciou, je to akási daň z neznalosti. Ďalšou otázkou zostáva, či sa zlé tovary nemôžu stať prostriedkom výmeny – keďže majú podobné vlastnosti ako peniaze. Rozdiel je ale v tom, že sa dajú produkovať, čo by viedlo k tomu, že kvalitné výrobky by sa vôbec nevyrábali (dostali by sme sa do neaktívneho ekvilibria).

3 MODELY AKW

V tejto kapitole sa budeme zaoberať modelmi, ktoré boli skonštruované prípadne doplnené po roku 1993, teda po našom základnom a východiskovom modeli. Väčšina z nich bola výrazne ovplyvnená týmto modelom, respektíve sa od neho odvíjala – menili sa niektoré predpoklady, ale princíp modelu zostal zachovaný.

3.1 Problém zmiešaného ekvilibria

Prvým problémom, ktorým sa zaoberal Wright (Wright 1997), teda jeden z autorov samotného východiskového modelu, je obmedzenie sa v modeli Kiyotakiho a Wrighta iba na symetrické ekvilibriá. Pri zmiešanom ekvilibriu s čiastočnou akceptáciou peňazí (Π=x) vznikla v podstate požiadavka, že toto symetrické zmiešané ekvilibrium je ekvivalentné nesymetrickému ekvilibriu v čistých stratégiách, kde časť x agentov akceptuje peniaze s pravdepodobnosťou 1 a časť 1-x s pravdepodobnosťou 0. Teda bol tu predpoklad, že existuje nesymetrické ekvilibrium, v ktorom časť agentov akceptujúcich peniaze je rovnaká ako pravdepodobnosť akceptovania peňazí v symetrickom ekvilibriu v zmiešaných stratégiách. Tu ale ukážeme, že tento predpoklad bol nesprávny. Existuje síce nesymetrické ekvilibrium, ale časť N agentov, ktorý akceptujú peniaze je väčšia ako x. Ekonomika vyzerá rovnako ako v pôvodnom modeli Kiyotakiho a Wrighta. Nezaoberáme sa teraz produkciou, preto stačí uvažovať že po konzumácii agent dostane nový tovar (ktorý nie je jeho spotrebným tovarom). Skúsime teda zostrojiť ekvilibrium v čistých stratégiách, ktoré ale nemusí byť symetrické. Rozdelíme agentov na časť N, ktorá akceptuje peniaze s pravdepodobnosťou 1 a časť 1-N, ktorá ich akceptuje s pravdepodobnosťou 0. Označíme g_1 časť agentov z prvej podmnožiny, ktorá vlastní radšej tovar ako peniaze a g_0 z druhej podmnožiny (to môže byť menšie ako 1, lebo aj keď neakceptuje peniaze môže ich vlastniť ak nimi bol obdarovaný). Teda pravdepodobnosť, že má agent radšej tovar a akceptuje peniaze je Ng_1, kým pravdepodobnosť, že má radšej tovar a neakceptuje peniaze je $(1\text{-}N)g_0$. Potom v rovnovážnom stave dostaneme:

$$(17)\ g_0 = \begin{cases} 1 & \text{for } M \le N \\ \dfrac{1-M}{1-N} & \text{for } M>N \end{cases}$$

$$(18)\ g_1 = \begin{cases} \dfrac{N-M}{N} & \text{for } M \le N \\ 0 & \text{for } M>N \end{cases}$$

Poznamenajme, že ak M>N, tak nie je dosť agentov akceptujúcich peniaze a niektorí agenti, ktorí ich neakceptujú, ale boli nimi obdarovaní, zostanú s peniazmi. Označme V_{1m} a V_{1g} agentov, ktorí akceptujú peniaze a vlastnia peniaze resp. tovar a označíme V_{0m} a V_{0g} agentov neakceptujúcich peniaze analogicky. Potom, ak neuvažujeme transakčné ani žiadne iné náklady, Bellmanove rovnice majú tvar:

(19) $rV_{1m} = \beta xNg_1(u + V_{1g} - V_{1m})$

(20) $rV_{1g} = \beta x[Ng_1 + (1\text{-}N)g_0]xu + \beta x[1 - Ng_1 - (1\text{-}N)g_0](V_{1m} - V_{1g})$

(21) $rV_{0m} = \beta xNg_1(u + V_{0g} - V_{0m})$

(22) $rV_{0g} = \beta x[Ng_1 + (1\text{-}N)g_0]xu$

Pre jednoduchosť znormalizujeme čas, potom $\beta = 1/x$ a dosadením g_0 a g_1 získame riešenie. Ďalej vypočítame priemer bohatstva pre jednotlivé typy agentov: $W_j = g_jV_{jg} + (1\text{-}g_j)V_{jm}$, j=0, 1:

$$(23)\ W_1 = \begin{cases} \dfrac{(N-M)[M+(1-M)x]u}{rN} & \text{pre } M \le N \\ 0 & \text{pre } M>N \end{cases}$$

$$(24)\ W_0 = \begin{cases} \dfrac{(1-M)xu}{r} & \text{pre } M \le N \\ \dfrac{(1\text{-M})^2 xu}{(1-N)r} & \text{pre } M>N \end{cases}$$

Existuje ekvilibrium, kde N=1 a N=0, čo korešponduje s ekvilibriami nájdenými pôvodne. To, čo nás teraz zaujíma, je ekvilibrium s $N\in(0, 1)$, čo požaduje $V_m\text{-}V_g = 0$ (teda agenti sú indiferentní medzi prijatím a zamietnutím peňazí). V skutočnosti potrebujeme $N\in(M, 1)$, pretože inak $V_m\text{-}V_g = 0$ nie je splnené. Vyriešením získame $N^* = x + (1\text{-}x)M$. Platí $N^*>M$ a teda je viac agentov akceptujúcich peniaze ako samotných peňazí. Navyše $N^*>x$ pre všetky $x<1$. Chyba v pôvodnom modeli bola poznámka, že agent sa zaujíma o pravdepodobnosť, že ďalší agent, ktorého stretne bude akceptovať peniaze a nezaujímal sa, či táto pravdepodobnosť je rovnako náhodná pre všetkých agentov čo stretne, alebo či rôzni agenti používajú rôzne stratégie. Treba brať do úvahy iba pravdepodobnosť, že agent, ktorého stretneme akceptuje peniaze ak práve vlastní tovar (a nie peniaze). Ak niektorí agenti vždy a niektorí nikdy neakceptujú peniaze, potom pravdepodobnosť, že obchodník akceptuje peniaze podmienená vlastníctvom tovaru je iná ako nepodmienená pravdepodobnosť. Teda musíme zvoliť $N>x$ aby sme mali rovnakú pravdepodobnosť, že stretneme agenta s tovarom, ktorý akceptuje peniaze. Táto pravdepodobnosť je v obidvoch prípadoch (symetrické zmiešané aj nesymetrické ekvilibrium v čistých stratégiách) $(1 - M)x$ a teda majú aj rovnakú výplatu.

3.2 Hľadať alebo čakať?

V ďalšom článku sa autori (Burdett, Coles, Kiyotaki, Wright, 1995) zaoberali tým, ktorí agenti chcú investovať zdroje v procese aktívneho hľadania partnerov a ktorí uprednostňujú pasívne čakanie, kým partneri prídu za nimi. Teda ak máme skupinu predajcov s tovarmi a skupinu kupujúcich s peniazmi, je nejaký dôvod očakávať, že kupujúci budú hľadať predávajúcich skôr ako naopak? Jedným vplývajúcim faktorom sú relatívne náklady prenosu tovaru a peňazí, ale nás zaujíma, či je niečo v procese monetárnej výmeny endogénne, čo ovplyvňuje kupujúcich hľadať predávajúcich. Ekonomika vyzerá nasledovne – k typov agentov a k typov spotrebných tovarov, $k \geq 3$, typ i vyrába tovar i (zmena oproti predchádzajúcim modelom). Časť M má peniaze, ktoré nemôže nikto vyrábať. Agent môže vyrobiť aj svoj spotrebný tovar, v tom prípade ho spotrebuje a produkuje znovu. Obchodník s tovarom sa volá *predajca* a obchodník s peniazmi je *kupujúci*. Kupujúci chcú obchodovať za tovary, kým predávajúci buď za peniaze alebo výmenou priamo za tovar. Pri uskutočnení výmeny sú transakčné náklady ε, ktoré platí príjemca tovaru ale nie peňazí. Podstatou tohto modelu je, že vo výmene môže každý buď hľadať partnera, alebo čakať, kým niekto príde. Tí, čo aktívne hľadajú sa nazývajú *hľadači* a ostatní budú *čakatelia*. Hľadač má väčšiu šancu nájsť niekoho, pretože môže stretnúť aj hľadača aj čakateľa. Teda čakatelia stretnú potenciálneho partnera s mierou proporcionálnou k počtu hľadačov, kým hľadači s mierou nezávislou na počte hľadačov a čakateľov. Pravdepodobnosť stretnutia pre hľadačov je celkový počet agentov vydelený počtom miest (agent sa môže nachádzať iba na určitom známom počte miest) a pravdepodobnosť pre čakateľov je počet hľadačov /počet miest. Ak normalizujeme mieru stretnutí pre hľadačov na 1, potom miera pre čakateľov bude podiel hľadačov medzi agentmi. Nakoniec označíme $c_1 \geq 0$ a $c_m \geq 0$ zníženie užitočnosti za pohyb za jednotku času (pre tovar a peniaze) a r>0 je miera časovej preferencie. Agenti potom volia svoje stratégie. Po prvé, vždy akceptujú tovar, ktorý je ich spotrebný a po druhé neakceptujú komoditu, ktorú nespotrebujú, kvôli transakčným nákladom. Pravdepodobnosť, že náhodný predávajúci akceptuje daný tovar je $\frac{1}{k}$ a pravdepodobnosť, že ja akceptujem jeho tovar, ak on akceptuje môj, je $\frac{1}{(k-1)}$ (pretože musím požadovať jeden z k-1 tovarov iných ako požaduje on). Budeme uvažovať iba ekvilibriá, kde každý akceptuje peniaze s pravdepodobnosťou 1. Miera, s ktorou predávajúci uskutoční barter je $\frac{(1-M)}{k(k-1)}$, miera s ktorou požaduje peniaze je $\frac{M}{k}$ a miera kupujúcich požadujúcich tovary je $\frac{(1-M)}{k}$.

Označíme H_1 a H_m hodnotové funkcie predávajúcich a kupujúcich, ktorí sú hľadačmi a S_1 a S_m predávajúcich a kupujúcich, ktorí čakajú. Ďalej označíme n_1 časť predávajúcich, ktorí sú hľadači a n_m časť kupujúcich, ktorí sú hľadači, $n = (n_1, n_m)$. Hodnotové funkcie spĺňajú štandardné rovnice dynamického programovania z vyhľadávacej teórie:

$$(25)\ rH_1 = \frac{1-M}{k(k-1)}[U + \max(H_1, S_1) - H_1] + \frac{M}{k}[\max(H_m, S_m) - H_1] - c_1$$

$$(26)\ rS_1 = n_1\frac{1-M}{k(k-1)}[U + \max(H_1, S_1) - S_1] + n_m\frac{M}{k}[\max(H_m, S_m) - S_1]$$

$$(27)\ rH_m = \frac{1-M}{k}[U + \max(H_1, S_1) - H_m] - c_m$$

$$(28)\ rS_m = n_1\frac{1-M}{k}[U + \max(H_1, S_1) - S_m], \text{ kde}$$

$$(29)\ U \equiv \frac{uk}{(k-1)} - \varepsilon .$$

Tu si treba všimnúť, že miera, s akou čakateľ stretne obchodníka typu j, je n_j, krát miera, s ktorou ho stretne hľadač - pre čakateľa je teda menšia. Ekvilibrium je množina (n, H_1, S_1, H_m, S_m) spĺňajúca $\max(H_m, S_m) \geq \max(H_1, S_1)$ (čo garantuje, že peniaze sú akceptované) a nasledovnú podmienku: pre j=1 a j=M:

-$H_j > S_j$ implikuje $n_j = 1$;

-$H_j < S_j$ implikuje $n_j = 0$;

$-n_j \in (0, 1)$ implikuje $H_j = S_j$.

Okamžitý výsledok potom je, že n = (1, 1) nemôže byť ekvilibrium, pretože z rovníc by vyplývalo $H_j < S_j$ pre j=1 a M. Pretože ak každý hľadá, miery sú rovnaké pre hľadačov aj čakateľov a nikto nebude chcieť platiť prepravné náklady. Na zistenie ekvilibria normalizujeme U=1 a uvažujeme n_1 a n_m je z množiny $\{0,1\}$. Výsledkom sú tri ekvilibriá:

(a) n = (0, 0) je ekvilibrium <=> $c_1 \geq \frac{1-M}{k(k-1)}$ a $c_m \geq \frac{1-M}{k}$

(b) n = (0, 1) je ekvilibrium <=> $c_1 \geq \frac{1-M}{k(k-1)}$ a $c_m \leq \frac{1-M}{k}$

(c) n = (1, 0) je ekvilibrium <=> $c_1 \leq \bar{c}_1 \equiv \frac{M(1-M)(k-2)}{k(k-1)(rk+1-M)}$.

Napríklad v prípade (b) treba ukázať, že predávajúci čakajú ($S_1 \geq H_1$) a kupujúci hľadajú ($H_m \geq S_m$) a peniaze sú akceptované ($H_m \geq S_1$). Po dosadení do rovníc dynamického programovania danej stratégie zistíme ohraničenia pre náklady. Rovnako postupujeme aj v ostatných prípadoch.

Uvažujeme teraz $n_j \in \langle 0, 1\rangle$ a špeciálny prípad $c_1 = c_m = c > 0$. Potom existujú ekvilibriá v čistých stratégiách popísané vyššie a ďalšie tri:

(d) n = (Φ, 1) je ekvilibrium <=> $c < \frac{1-M}{k(k-1)}$, kde $\Phi \in (0, 1)$

(e) n = (Φ, Φ) je ekvilibrium <=> $c \leq \bar{c}_2$

(f) n = (Φ, 0) je ekvilibrium <=> $\bar{c}_1 < c \leq \bar{c}_2$, kde $\bar{c}_1$ je ako predtým a

$$\bar{c}_2 \equiv \frac{M(1-M)[\frac{rk+M+(1-M)}{(k-1)}]}{k(rk+1)(r+M)}$$

Z výsledkov vidieť, že priestor parametrov podporujúcich ekvilibrium n=(0,1) je väčší ako pri ostatných pre veľké k, teda ak je veľa typov tovaru, tak je najprijateľnejšie ekvilibrium, v ktorom predávajúci čakajú, a teda nie je barter. Kupujúci – teda agenti s peniazmi hľadajú, pretože ich peniaze sú univerzálne akceptované – vedia, že ak nájdu predávajúceho s ich spotrebným tovarom, obchod sa uskutoční, pre nich je teda hľadanie jednoduchšie (pre veľké k). Tým je prediskutovaný ďalší problém – a to problém samotného vyhľadávania.

3.3 Poklesne falšovanie po zavedení nových bankoviek?

Po zavedení peňazí do obehu ale môžu nastať rôzne problémy – napríklad ich falšovanie. Tomu sa samozrejme vláda a centrálna banka snažia zabrániť a to konfiškovaním nájdených falošných bankoviek. V nasledujúcom modeli (Green, Weber, 1996) ukážeme, aký vplyv bude mať zavedenie novej bankovky (konkrétne sa počítalo so zavedením \$100 bankovky) do obehu. Táto bankovka je samozrejme zložitejšia na falšovanie. Avšak nahrádzanie je pomalé, v platnosti musí zostať aj stará bankovka (toto platí obzvlášť pre USA, pretože doláre sa nachádzajú na celom svete). Ak sa dostane do centrálnej banky, je vymenená za novú. Získame tri ekvilibriá – jedno, v ktorom je úroveň falšovania rovnaká ako pred zavedením novej bankovky, a ďalšie dve, v ktorých sa počet falošných bankoviek znižuje (okamžite alebo postupne). Máme dva typy agentov – *súkromní*, alebo obchodníci, ktorí môžu produkovať a skladovať jednu komoditu, ale konzumujú inú komoditu. Máme k typov obchodníkov, agent i konzumuje tovar i a produkuje i+1 (mod k). Druhý typ agentov sú *vládni agenti*, ktorí nekonzumujú a nesnažia sa maximalizovať svoju vlastnú užitočnosť. Títo agenti uplatňujú pravidlo – nahrádzajú staré bankovky novými a konfiškujú falošné peniaze. Podiel týchto agentov v ekonomike je S. Akceptácia peňazí je samozrejmá (všetci ich akceptujú), barter je vylúčený, pretože nie je možná dvojzhoda. Obchodník môže skladovať iba peniaze (okrem svojej produkcie). Peniaze aj tovary sú nedeliteľné. V modeli teda máme tri typy peňazí – nefalšované bankovky starého typu, G, falošné, zlé staré bankovky, B a nové bankovky N (tie sú všetky dobré – nie je možné ich falšovať). Vládni agenti vedia tieto typy rozlíšiť s istotou. Obchodníci síce odlíšia nové bankovky, ale nemajú šancu rozoznať starú pravú a falošnú bankovku. Ak akceptujú falošnú bankovku, sú schopní to zistiť až po hlbšom pozorovaní. Obchodníci majú z konzumácie úžitok u, snažia sa maximalizovať svoju očakávanú užitočnosť. Diskontný faktor je $1/(1+\rho)$, kde ρ je reálna úroková miera. Keď obchodník stretne vládneho agenta, ak má akúkoľvek starú bankovku, túto mu zoberie. Ak bola pravá, dostane naspäť novú bankovku, ak bola falošná, nedostane nič. Potom sa takýto agent rozhoduje, či falošnú bankovku nahradí, alebo nie (nahradiť ju môže opäť falošnou starou bankovkou). Nahradenie bankovky stojí obchodníka náklady c, ktoré vzniknú v čase konfiškácie. Ak sa rozhodne nenahradiť falošnú bankovku ďalšou, nemôže už obchodovať, pretože nemá ani peniaze ani tovar. Čo určuje jeho rozhodnutie? V každom čase sa obchodník môže nachádzať v niektorom zo stavov – O, keď vlastní svoj vyprodukovaný tovar, alebo G, B, N, podľa typu bankovky, ktorú vlastní. Tiež nemusí vlastniť nič. Obchodníkova výmenná stratégia je, pre každý objekt, ktorý môže vlastniť, určiť, za ktorý ho chce vymeniť. Táto stratégia tiež určuje, ktorý typ peňazí chce obchodník vymeniť za produkčný tovar (peniaze sú pre neho staré a nové, iné nerozlišuje). Označíme $\lambda_{ij}=1$, ak obchodník chce prejsť zo stavu i do stavu j, 0 inak. Okrem výmennej stratégie musí mať obchodník aj falšovateľskú stratégiu, ktorou sa rozhoduje, či vyrobí ďalšiu falošnú bankovku, ak nič nemá. Označíme $\theta=1$ ak je jeho stratégia produkovať falošnú bankovku, 0 inak. Celková stratégia obchodníka je výmenná stratégia spolu s falšovateľskou. Nashovo ekvilibrium je celková stratégia, ktorú si osvojí každý obchodník, ak si je istý, že si ju osvojili aj ostatní. Ekvilibrium v ustálenom stave je také, v ktorom obchodníci nemenia stratégie s časom. Ďalej pod pojmom ekvilibrium myslím iba Nashovo ekvilibrium v ustálenom stave. Najskôr zostavíme model, v ktorom je iba jeden druh bankovky (starý typ). Vládni agenti teda nerobia nič, ak stretnú obchodníka s pravou bankovkou. Keďže chceme tento zjednodušený model použiť na zistenie vplyvu zavedenia nového typu bankoviek, budeme uvažovať iba ekonomiku, v ktorej sú splnené tieto dve podmienky: (1.) existuje ekvilibrium so striktne pozitívnym počtom pravých aj falošných bankoviek, v ktorom predávajúci akceptujú peniaze vo výmene, (2.) V tomto ekvilibriu sa obchodník s falošnou bankovkou vždy rozhodne ju nahradiť, ak mu je skonfiškovaná. Tieto podmienky sú kvôli tomu, aby sa v rovnovážnom stave nachádzali aj nejaké falošné peniaze (pretože v skutočnosti sa nachádzajú – čo má byť dôvodom na zavedenie novej bankovky). Hodnotová funkcia obchodníka s falošnou bankovkou je:

$$(30)\ V_B = \frac{(\rho+g+b)(\rho+t)tu - [(\rho+b)(\rho+t)+\rho g]Sc}{\rho(\rho+g+b+t)(\rho+t)} > 0$$

kde g,b a t sú podiely obchodníkov daného typu (držia pravé peniaze, falošné, tovar). Potom platí tvrdenie: Ak $V_B > c$, potom Nashovo ekvilibrium v ustálenom stave existuje s peniazmi ponúkanými a akceptovanými v obchode a falošnými peniazmi nahradzovanými. Teraz sa vrátime k pôvodnému modelu, zavedieme nové bankovky. Tu poukážeme na dva možné výsledky – žiadnu zmenu oproti predchádzajúcemu prípadu a zníženie počtu falošných bankoviek. V prípade, keď zavedenie nových peňazí nevedie k odstráneniu falošných, platí nasledovné tvrdenie: nech n je podiel agentov držiacich nové peniaze. Keďže v rovnovážnom stave sú staré pravé bankovky nahradené novými, platí n=g. Za predpokladu (2.) a ak $\frac{(\rho+t)tu}{(\rho+n+t)S} > c$ (3.), potom ekvilibrium existuje s novými aj starými bankovkami akceptovanými v obchode a s nahrádzaním falošných bankoviek, hoci nemusí byť jediné. V tomto ekvilibriu musia predávajúci akceptovať falošné peniaze, hoci v rovnovážnom stave vedia, že prijímajú falzifikát (pretože všetky staré pravé bankovky by časom mali byť nahradené novými). Toto garantuje podmienka (3.). Prečo to robia? Obchodníci získajú užitočnosť iba tak, že vymenia tovar za peniaze a za tie kúpia svoj spotrebný tovar. Čakanie na konzumáciu je nákladné. Ak je v ekonomike málo pravých peňazí, obchodník by čakal príliš dlho, kým stretne agenta, ktorý ich má. V takom prípade radšej akceptuje aj falošnú bankovku s rizikom, že mu bude skonfiškovaná. Zároveň, čím menšie n, tým skôr je podmienka (3.) splnená. Teraz budeme uvažovať o prípadoch, v ktorých zavedenie nových peňazí vedie k eliminácii falošných bankoviek. Jedným prípadom je, keď obchodníci vedome neakceptujú falzifikát – to je v prípade, ak parametre nesplĺňajú podmienku (3.). Keby teraz boli skonfiškované bankovky nahradené, časom by obchodníci vedeli, že stará bankovka musí byť falošná. Staré peniaze nebudú akceptované, čo ich znehodnocuje. Teda falšovatelia nebudú platiť náklady c na nahradenie bankovky. Z podmienky (3.) sa dá zistiť, že čím väčší je podiel pravých starých bankoviek pri zavedení nových, tým pravdepodobnejší je tento výstup (n=g). Avšak zavedenie nových peňazí môže viesť k eliminácii falošných aj keď obchodníci vedome akceptujú falzifikáty: ak (4.) $V_B < c$ a (5.) $\rho(\rho+t) > nS$, potom existuje ekvilibrium so starými aj novými bankovkami akceptovanými v obchode, ale bez nahrádzania skonfiškovaných falzifikátov. Z prvej podmienky vidieť, že nahrádzanie sa nevyplatí. Podmienka (5.) hovorí, že predajca akceptuje staré peniaze, aj keď vie, že sú falošné.

Ak sa ekonomika posunie do stavu bez falošných peňazí, bude tento presun okamžitý, alebo po nejakom čase? Toto sa nedá dobre zistiť analyticky, ale vypočítané ekvilibriá pre niektoré hodnoty parametrov hovoria, že:

- pravdepodobnosť, že obchodníci vymenia tovar za staré peniaze je 1 (vždy), ak zvolíme parametre spĺňajúce (5.).
- pravdepodobnosť, že obchodník nahradí bankovku je 1 až do kritického času 426, potom je 0.
- do kritického času zostáva počet falošných bankoviek konštantný, potom ale rapídne klesá, keďže skonfiškované bankovky nie sú nahradené.
- hodnotové funkcie V_B, ale aj držania iných bankoviek po kritickom čase výrazne klesajú. Klesajú aj pred týmto časom, ale pokles je minimálny.

Vidíme teda, že je treba splniť určité podmienky, aby parametre nadobúdali také hodnoty, aby zavedenie nových bankoviek malo vplyv na pokles falšovania peňazí.

3.4 Možnosť pôžičiek

Jedným z predpokladov v základnom aj ďalších vyhľadávacích modeloch bola nemožnosť úverovania, teda možnosti dať niekomu tovar a dostať zaplatené, alebo iný tovar až v budúcnosti. V nasledujúcej časti tento predpoklad vynecháme. Bude to model so súťažou medzi peniazmi a úverom s deliteľnými tovarmi (Shi, 1996). Ukážeme, že táto súťaž zvyšuje efektívnosť. V základnom modeli od Kiyotakiho a Wrighta bol predpoklad nedeliteľnosti tovarov a peňazí. To ale znamenalo, že ak by bol povolený kredit (pôžička, úver), jednotka tovaru požičaného dnes by bola preplatená jednotkou tovaru v budúcnosti. Úroková miera by bola nulová a teda úverovanie by nedominovalo. V tomto prípade ale ekonomika vyzerá nasledovne:

Máme k rôznych produkčných príležitostí. Tovary podliehajú skaze. Rovnako je k typov agentov, s rovnako veľkou populáciou. Agent i konzumuje tovar i+1 a vyrába tovar i. Užitočnosť z konzumácie množstva q svojho spotrebného tovaru je u(q), kde u je dvakrát spojito diferencovateľná, u(0)=0, u'>0, u''<0, u'(0)=∞ a u'(∞)=0. Miera časovej preferencie je r. Je treba uvažovať $k \geq 3$, ale pre zavedenie kreditu je lepší silnejší predpoklad $k \geq 4$. Produkcia je okamžitá, ale agent potrebuje najskôr konzumovať. Je možné, že agent bude konzumovať dvakrát po sebe, a teda bude môcť aj dvakrát produkovať (Raz získa tovar bežným spôsobom a raz na úver). Agent produkuje nezáporné množstvo tovaru. Náklady na jednotku produkcie sú konštantné a normalizované na 1. Každý agent má tiež svoj *nástroj na spotrebu*, bez ktorého nemôže konzumovať. Tento nástroj je pre každého špecifický, musí teda použiť svoj vlastný. Na začiatku časť M agentov má peniaze, ktoré sú nedeliteľné. V ekonomike sú štyri druhy agentov – *držitelia peňazí, producenti, veritelia* a *dlžníci*. Dlžník je agent, ktorý ešte nesplatil svoj dlh, ale môže produkovať (pretože získal tovar na dlh, mohol konzumovať), veriteľ nemôže konzumovať a musí zostať mimo výmenného procesu. Označíme mieru držiteľov peňazí, producentov a dlžníkov M, N_p a N_d. Vo výmene sa teda nachádza $M+N_p+N_d=1-N_d$ (pretože počet dlžníkov a veriteľov je rovnaký). Označíme $n = \dfrac{M}{(1-N_d)}$ časť držiteľov peňazí vo výmene a $d = \dfrac{N_d}{(1-N_d)}$ časť dlžníkov vo výmennom sektore. Keďže nie je možná dvojzhoda (k≥4), možné výmeny sú *peňažná* a *úverová*. Sú dva typy peňažnej výmeny: medzi držiteľom peňazí a producentom a medzi držiteľom peňazí a dlžníkom. Výmena sa uskutoční, ak vlastník tovaru má spotrebný tovar držiteľa peňazí. Po výmene držiteľ peňazí konzumuje a stáva sa producentom. Ak je vo výmene producent, produkuje množstvo q_m jednotiek tovaru za peniaze a stáva sa hladným držiteľom peňazí. Ak je vo výmene dlžník, vymení množstvo q_d tovaru za peniaze, preplatí svoj dlh peniazmi a stáva sa producentom. Úverový obchod sa uskutoční medzi dvoma producentmi ak je zhoda iba na jednej strane – ak sa napríklad stretnú agenti i a i+1, agent i môže vydať dlžobný úpis (IOU) agentovi i+1 za q_c jednotiek tovaru i+1. Agent i vydá agentovi i+1 svoj spotrebný nástroj a sľúbi preplatenie dlhu hneď ako to bude možné. Ak sa dohodnú, agent i+1 produkuje, agent i konzumuje a odovzdá svoj spotrebný nástroj. Agent i sa stáva dlžníkom a agent i+1 veriteľom. Agent i sa bude snažiť vrátiť dlh aby získal späť svoj spotrebný nástroj (odovzdanie spotrebného nástroja je základný predpoklad možnosti úverovania). Aby mohol byť dlh splatený, musí ale dlžník nájsť svojho veriteľa. Preto sú veritelia mimo výmenného sektora (teda na určitom mieste akoby čaká na splatenie dlhu). Ďalej, pre ostatných agentov je ťažké oceniť zábezpeku (spotrebný nástroj) pri úvere, za akceptáciu IOU vydaného v inom obchode platí agent $\varepsilon>0$. Teda dlžník nebude akceptovať iný úpis, ale nájde svojho vlastného veriteľa. Tieto náklady majú podobnú úlohu ako náklady v základnom modeli. Bez nich by zábezpeka fungovala ako komoditné peniaze (Agent by posunul IOU inému agentovi, od neho by si potom dlžník túto záruku odkúpil). Každý agent môže v jednom čase vydať iba jeden dlžobný úpis. Toto vylučuje možnosť obchodovania dvoch dlžníkov (pretože aspoň jeden z nich by musel vydať druhý IOU). Tiež to vylučuje preplácanie tovarmi pri predpoklade $k\geq4$. Ak napríklad zoberieme už popísaný prípad agentov i a i+1, aby agent i preplatil agentovi i+1 svoj dlh tovarom, musel by stretnúť agenta i+2. Keďže s ním by nemohol opäť uzavrieť druhý úver, musel by vlastniť tovar i+3 (mod k), čo je pre $k\geq4$ nemožné.

Ako už bolo spomenuté, dlžník môže konzumovať dvakrát po sebe, môže teda aj dvakrát produkovať – raz za jednotku peňazí (teda uskutoční peňažnú výmenu) kvôli preplateniu dlhu a potom ešte raz. Preto sa dlžník stáva po preplatení producentom. Veriteľ dostáva peniaze a stáva sa hladným držiteľom peňazí. Okrem toho je v modeli priama súťaž medzi úverom a peniazmi. Úverový obchod je možný medzi držiteľom peňazí a producentom vždy, keď je možná monetárna výmena. Držiteľ peňazí si môže vybrať, či vydá IOU alebo použije peniaze. Agenti sa pri stretnutí snažia maximalizovať svoju užitočnosť. Označíme V_p hodnotovú funkciu producenta, V_m držiteľa peňazí, V_c veriteľa a V_d dlžníka. Uvažujme napríklad monetárny obchod medzi producentom a držiteľom peňazí. Podmienkou obchodu je množstvo q_m tovaru, ktoré vymieňajú producenti za peniaze. Surplus je V_m-V_p-q_m pre producenta a $u(q_m)$+V_p-V_m pre držiteľa peňazí. Potom Nashov vyjednávací problém má takúto formu:

$$(31)\quad \begin{aligned} &\max_{q_m} (V_m - V_p - q_m)^a (u(q_m) + V_p - V_m)^{1-a}; \\ &kde\ (V_m - V_p - q_m) \geq 0; (u(q_m) + V_p - V_m) \geq 0; V_m \text{ a } V_p \text{ dané.} \end{aligned}$$

Parameter $a \in [0,1]$ je vyjednávacia váha producenta. Na zjednodušenie predpokladajme, že v bilaterálnom obchode agent, ktorý vymieňa tovar za peniaze alebo za kredit má vyjednávaciu váhu a=0. Teda producent má nulový surplus pri monetárnom obchode, q_m=V_m-V_p. Potom, aby celkový prírastok užitočnosti bol kladný, musí byť surplus držiteľa peňazí kladný, z čoho dostaneme $u(q_m)$-q_m>0. Podobne postupujeme aj pri úverovom obchode a dostaneme, že takýto obchod má pozitívny surplus ak $u(q_c)$+V_d-V_p>0. Tretím typom je monetárny obchod medzi držiteľom peňazí a dlžníkom. Obchodujú množstvo q_d tovaru. Surplus je V_p-V_d-q_d pre dlžníka a $u(q_d)$+V_p-V_m pre držiteľa peňazí. Prírastok dlžníka je síce vo všeobecnosti iný ako u producenta v monetárnom obchode, ale predpokladáme ďalej q_d=q_m. Tento predpoklad je kvôli zjednodušeniu a aj východiskom pre všeobecný prípad, kde sa dá ukázať, že tieto dve hodnoty sú blízke a existuje ekvilibrium, ktoré je rovnaké svojim typom tomu, ktoré získame my. Ďalším dôvodom tohto predpokladu je, že držiteľ peňazí nemusí vedieť odlíšiť dlžníka od producenta, keďže obaja môžu produkovať. Na základe tohto predpokladu sa dá povedať: IOU je akceptovaný a očakáva sa jeho preplatenie vtedy a len vtedy, ak platia nerovnosti $u(q_m)$-q_m>0, V_p-V_d-q_m ≥0, V_m≥V_c. Z toho V_d<V_p, čo zaručuje, že agenti bez akejkoľvek zhody nebudú robiť úverový obchod (surplus dlžníka by bol záporný). Držiteľ peňazí má voľbu medzi monetárnym obchodom a úverom, peňažnú výmenu volí, ak V_p-V_m+$u(q_m)$ > V_d-V_m+$u(q_c)$. Teraz budem hľadať ekvilibriá. Najskôr to bude ekvilibrium bez úverovania, všeobecný prípad. Úver teda nie je možný, niektorá z nerovností potrebných na akceptáciu IOU bola porušená. Dá sa ukázať, že monetárne ekvilibrium existuje pre každé $M \in (0,1)$ a je vždy jediné. Pri ekvilibriu s peniazmi aj úverovaním najskôr získame podmienku pre n a d. Zistíme, že $n \in [M, 2M/1+M]$ je rastúcou funkciou M a d je klesajúce s M. Monetárne ekvilibrium s úverom je vektor V=(V_m, V_p, V_d, V_c), rozdelenie agentov (N_p, N_d, n, d) a množstvá obchodu (q_m, q_c), obe kladné, ktoré spĺňajú všetky uvedené podmienky a podmienky maximalizácie užitočnosti. Na nájdenie tohto ekvilibria definujeme $R \equiv \frac{r}{\beta x}$ ako efektívnu mieru časovej preferencie. Po dosadení a nejakej algebre, pričom sa snažíme získať funkcie pre q_m a q_c zistíme, že tieto musia spĺňať:

$$(32)\ q_c = \frac{1+R}{R+n} q_m - \frac{1-n}{R+n} u(q_m);$$

$$(33)\ u(q_c) + (1 + \frac{R+n}{1-n-d}) q_c = n(\frac{1}{1-n-d} + \frac{2}{R+n}) q_m.$$

Potom platí nasledovná lemma:

Lemma 1: Existuje nepárny počet pozitívnych (q_m,q_c), ktoré spĺňajú tieto funkčné vzťahy a zároveň spĺňajú nasledovný vzťah: $q_c < \frac{n}{n+R} q_m$.

Z toho dostaneme tvrdenie:

Tvrdenie 1: Pre dostatočne malé R existuje $M_0 \in (0,1)$ také, že monetárne ekvilibrium s úverovaním existuje pre $M \geq M_0$.

Tieto podmienky sa dajú dostať aj intuitívne. Dĺžka času na preplatenie IOU závisí na počte držiteľov peňazí v ekonomike. Ak ich je príliš málo, splatenie zaberá veľa času, pretože pre dlžníka je ťažké nájsť vhodného agenta. M musí byť dostatočne veľké, aby mohlo byť úverovanie. Z rovnakého dôvodu aj parameter β a šanca na zhodu, x, musia byť veľké, aby urýchlili preplatenie dlhu. Rovnako je lepšia malá miera časovej preferencie r, ktorá redukuje časové náklady do splatenia. Tieto fakty sú zosumarizované nízkou hodnotou R. Teraz sa ešte pozrieme na úrokové miery úveru a peňazí. Keďže IOU stojí q_c jednotiek tovaru a tovary môžu byť predané za nominálnu cenu $1/q_m$, a keďže $q_m>q_c$, úroková miera na úver je pozitívna. Na druhej strane, čistá úroková miera na peniaze je nulová, peniaze stoja q_m jednotiek tovaru a môžu byť použité na výmenu za q_m jednotiek tovaru po akomkoľvek čase. Preto úver dominuje nad peniazmi v úrokovej miere. Táto dominancia je potrebná na ekvilibrium s úverovaním. Porovnajme teraz bohatstvo v ekvilibriu bez a s úvermi. Vždy, keď existuje ekvilibrium s úverovaním, existuje aj monetárne ekvilibrium bez úverov. Môžem teda tieto ekvilibriá porovnať. Pre producenta je lepšie ekvilibrium s úverom, pretože mu prináša kladnú užitočnosť, kým bez úverov je jeho užitočnosť nulová (toto platí ex ante – pred stretnutím, ak $M>M_0$, je na tom lepšie aj ex post). Pre držiteľa peňazí je vyššia užitočnosť v ekvilibriu s úvermi za predpokladu, že efektívna miera časovej preferencie, R, je malá. Teda celkovo platí, že pre dostatočne malé R monetárne ekvilibrium s úvermi Pareto dominuje nad monetárnym ekvilibriom bez úverov.

V ďalšej časti pridáme do modelu možnosť barteru, pretože vo vyhľadávacích modeloch je pravdepodobnosť x^2, že nastane dvojzhoda. Barter dáva možnosť preplatiť IOU buď tovarom alebo peniazmi. Pri preplatení peniazmi budeme hovoriť o *nominálnom* *preplácaní* a pri preplácaní tovarom o *reálnom preplácaní*. Je teda možný barter medzi dvoma producentmi a ak je akceptované reálne preplácanie, je možný barter aj medzi dlžníkom a producentom a medzi dvoma dlžníkmi. Pre niektoré hodnoty parametrov existuje ekvilibrium iba s nominálnym preplácaním úveru. Toto ekvilibrium je rozšírením už získaného ekvilibria bez barteru. Barter je možný medzi dvoma producentmi, a keďže títo sú úplne symetrickí, množstvo tovaru bude q_b. Pri hľadaní ekvilibria postupujeme rovnako ako bez bartera, nájdeme funkcie pre q_m a q_c, potom platí nasledovné tvrdenie:

Tvrdenie 2: Pre dostatočne malé x a R existuje $M_1 \in (0,1)$ také, že pre $M \geq M_1$ existuje monetárne ekvilibrium len s nominálnym preplácaním.

Teraz budeme rovnako postupovať pri hľadaní ekvilibria iba s možnosťou reálneho preplácania. Získame funkcie pre množstvá q. Zistíme, že sú buď dve prípustné riešenia (q_m,q_c) alebo nie je riešenie. Tieto dve riešenia sa odlišujú iba v q_m, označíme tieto dve hodnoty q_m ako q_H a q_L, prvá väčšia ako druhá. Platí toto tvrdenie:

Tvrdenie 3: Pre dané x a 1-M, ktoré sú väčšie ako nula, existuje R_0 také, že dve riešenia q_H a q_L existujú pre $R<R_0$. (q_L,q_c) je monetárne ekvilibrium iba s reálnym preplácaním. Pre dostatočne malé x je takýmto ekvilibriom aj druhý pár (q_H,q_c).

Nakoniec povolíme nominálne aj reálne preplácanie IOU. Záleží od dlžníka, či skôr získa na splatenie tovar, alebo peniaze. V tomto prípade je ale zložité analyticky nájsť hodnoty parametrov. Dá sa ale numericky ukázať, že takéto ekvilibrium existuje pre nie príliš veľké M a malé, ale nie príliš malé x. Pre určité hodnoty parametrov existujú ekvilibriá s nominálnym, reálnym a oboma spôsobmi preplácania súčasne. Ak napríklad M=0.85, existujú ekvilibrium s nominálnym a oboma preplácaniami. Druhé Pareto dominuje nad prvým. Ekvilibriá buď s nominálnym alebo reálnym preplácaním existujú súčasne pre $M \in [0.47,0.78]$. V troch uskutočnených numerických príkladoch v rámci ekvilibrií s reálnym preplácaním Pareto dominovalo to s q_H nad to s q_L. Okrem toho, ekvilibrium s nominálnym preplácaním dominuje ex ante (V_p a V_m sú väčšie). Pre veľké M toto ekvilibrium dominuje aj ex post. Toto sú teda numerické výsledky, kvôli lepšiemu vyhodnoteniu všeobecne získaných ekvilibrií.

3.5 Model s deliteľnými peniazmi

Tento model (Green, Zhou, 1996) je jedným z prvých, kde vynechávame predpoklad o nedeliteľnosti peňazí, a teda nie je obmedzenie držby buď jednotky alebo žiadnych peňazí. Máme $k \geq 3$ typov agentov, čas je spojitý. Tovary zostávajú nedeliteľné, podliehajúce skaze. Celková nominálna hodnota peňazí je M. Agent i produkuje jednotku tovaru i+1 okamžite, bez nákladov. Spotrebný tovar má i, s užitočnosťou u. Agenti maximalizujú svoju diskontovanú očakávanú užitočnosť s diskontnou mierou γ. Agenti sa stretávajú podľa Poissonovho procesu s parametrom β. Partner, ktorého stretneme, má dve charakteristiky – jeho typ a množstvo peňazí, ktoré drží. Typ sa dá vidieť, je známy, ale nie držba peňazí. Spotrebné tovary nemôžu slúžiť ako komoditné peniaze, pretože podliehajú skaze. Obchod sa uskutoční tak, že predávajúci pošle kupujúcemu ponuku a ten ju buď prijme alebo zamietne. Budeme hľadať symetrické ekvilibrium. Ekvilibrium bude charakterizované agentovou ponukovou stratégiou, držbou peňazí, rozdelením ponúk a hodnotovou funkciou držby peňazí. Agentova obchodovacia stratégia je párom reálnych hodnotových funkcií $\omega(\eta)$, ktorá špecifikuje ponuku, ktorú spraví ako predajca, keď drží η peňazí a stretne agenta i+1 a $\rho(\eta)$, ktorá špecifikuje maximálne množstvo peňazí, ktoré je kupujúci ochotný zaplatiť, ak drží množstvo η a stretne agenta i-1 (funkcia rezervačnej ceny). Optimálne rozhodnutie bude na hraničnej úrovni, pod ktorou budú ponuky prijímané a nad ňou zamietnuté. Túto hranicu pre kupujúceho špecifikuje $\rho(\eta)$. Musí platiť $\rho(\eta) \leq \eta$ (pretože viac peňazí nemá). Rozdelenie držby peňazí je dané mierou H. Stabilné rozdelenie cenových ponúk je:

(34) $\Omega(x) = H\{\eta \mid \omega(\eta) \leq x\}$

a stabilné rozdelenie prijímania cien je:

(35) $R(x) = H\{\eta \mid \rho(\eta) < x\}$, kde R je spojitá zľava.

Hodnotová funkcia $\upsilon: R_+ \rightarrow R_+$ držby peňazí udáva očakávanú diskontovanú užitočnosť agenta s daným množstvom peňazí, ak si osvojí optimálnu obchodovaciu stratégiu. Hodnotová funkcia je daná:

(36) $\upsilon(\eta) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} E[U + \upsilon(\eta') \mid \eta] \frac{2\beta}{k} e^{-(2\beta/k)t} dt$, kde η' je držba peňazí agenta okamžite po jeho ďalšom stretnutí s potenciálnym obchodným partnerom (i+1, i-1) a U=0 ak sa transakcia neuskutoční a U=u ak spravia obchod. Zostavíme si Bellmanovu rovnicu,

keďže agentov i+1 aj i-1 je rovnaký počet, agent i bude predajca aj kupujúci s pravdepodobnosťou ½, r bude suma, ktorú akceptuje ako kupujúci a o bude ponuka v prípade, že je predávajúci. Stacionárne ekvilibrium sa skladá z časovo invariantného profilu <H,R,Ω,ω,ρ,υ>, ktorý spĺňa:

(I) H je stabilné podľa obchodovacích stratégií ω a ρ, a potom R a Ω sú odvodené od H, ω a ρ podľa definície vyššie.

(II) S daným rozdelením H, R a Ω, ρ spĺňa podmienku $\rho(\eta) \leq \eta$ a podmienku dokonalosti:

(37) $\forall o\ [\rho(\eta) \geq o \Leftrightarrow u + V(\eta - o) \geq V(\eta)]$ a obchodovacie stratégie (ω,ρ) a hodnotová funkcia υ riešia Bellmanovu rovnicu.

Teraz sa pokúsime charakterizovať podmienky pre existenciu ekvilibria s jednotnými cenami. Budeme predpokladať, že všetci obchodníci prídu s jednotnou cenou p a držba peňazí budú iba celočíselné násobky p. Agenti (predávajúci) vždy ponúknu cenu p a každý kupujúci bude ochotný zaplatiť práve p. Budeme najskôr charakterizovať stacionárnu mieru držby peňazí. Definujme mieru množiny agentov, ktorí držia np jednotiek peňazí ako h(n)=H({np}). Odteraz môžeme pracovať namiesto s H s ekvivalentnou mierou h na množine prirodzených čísel. Obchodník bude v stave n, ak drží np peňazí. Časť agentov držiacich pozitívne množstvo peňazí je $m \equiv \sum_{n=1}^{\infty} h(n)$, teda h(0)=1-m. Agent sa dostane do stavu n buď zo stavu n-1 alebo n+1 (buď zaplatí predajcovi p alebo dostane zaplatené). Stacionarita vyžaduje, aby sa časové miery prítokov do stavu n rovnali časovej miere odtokov zo stavu n. Zistíme teda, že jedinými kandidátmi na stacionárne miery majú tvar $h(n)=m^n(1-m)$ pre všetky n a nejaké $m \in (0,1)$. Množstvá p, m a M sú previazané rovnicou: $M = p\sum_{n=1}^{\infty} nh(n) = \frac{m}{1-m}p$. Teraz vyriešime hodnotovú funkciu na nájdenie ekvilibria. Definujeme V(n)=υ(np). V je rastúca a spĺňa podmienku konkávnosti, teda pre všetky j>0 platí V(n+j) – V(n) je klesajúca funkcia n. Hodnotová funkcia je kroková funkcia. υ(η)=V([η/p]). Teraz sa pozrieme na ekvilibriovú stratégiu. Povedzme, že agent i s peniazmi η stretne agenta i-1 s množstvom peňazí η’. Zistia svoje typy, ale nie držbu peňazí. Agent i si sám zvolí cenu r, ktorú je ochotný zaplatiť a partner pošle svoju ponuku o. Ak r≥o, potom partner dodá jednotku tovaru i agentovi i za čiastku o, v inom prípade sa obchod neuskutoční. Agent i volí optimálnu cenu r, ktorá rieši maximalizačný problém (Bellmanovu rovnicu) s ohľadom na r. Riešenie nemusí byť jediné. Riešenie, ktoré spĺňa podmienku dokonalosti (37) sa dá napísať: $\rho(\eta)=\max\{r\in[0,\eta]\,|\,u+\upsilon(\eta-r)\geq\upsilon(\eta)\}$. Táto funkcia rezervačnej ceny ρ spĺňa podmienku ρ(p)=p a pre každý pozitívny celočíselný násobok p (np) aj ρ(np) je celočíselný násobok p. Tiež spĺňa podmienku, že ρ(η)/p je neklesajúca funkcia η. Z toho máme dôsledok, že pre agenta, ktorý drží najmenej p peňazí, je optimálne akceptovať ponuku p, ak všetci predávajúci majú skoro určite ponuky p. Ak všetci agenti majú rezervačnú cenu (cena, za ktorú sú ochotní kúpiť) celočíselný násobok p, potom optimálna ponuka ω(η) je pre všetky η celočíselný násobok p. Ak časť agentov s pozitívnou držbou peňazí so stacionárnou mierou ako bola uvedená vyššie je m≤1/2, a ak všetci takýto agenti majú rezervačnú cenu najmenej p, potom je pre agenta optimálne vždy ponúkať cenu p. Teraz už môžeme prejsť k ekvilibriám.

V každej ekonomike podľa popísaného stavu, pre každú cenu p≥M existuje stabilné ekvilibrium, v ktorom sa všetky transakcie uskutočnia pri cene p a všetci obchodníci držia celočíselné násobky p peňazí. Časť agentov držiacich peniaze je rastúcou funkciou M/p, teda existuje kontinuum rozdielnych ekvilibriových rozdelení. Toto je postačujúca podmienka pre ekvilibrium. Existuje ale také m*<1, že pre každé m>m* takéto ekvilibrium neexistuje. Zároveň ale platí, že bohatstvo v tejto ekonomike je rastúcou funkciou m (pretože čím menej agentov má peniaze, tým menšia šanca uskutočnenia obchodu). Teda bohatstvo maximalizujeme, ak zvolíme maximálnu možnú úroveň m tak, aby ekvilibrium existovalo.

3.5.1 Peniaze s dividendami

Teraz predstavíme model s deliteľnými peniazmi a možnosťou akýchsi komoditných peňazí (Zhou, 2002), čo by mohlo eliminovať určitú neurčitosť v predchádzajúcom ekvilibriu (získali sme kontinuum ekvilibrií). Prejdeme ale k diskrétnemu času. Ekonomika je rovnaká ako v predchádzajúcom modeli, ale namiesto peňazí teraz máme objekt, ktorý vynáša dividendy vo forme užitočnosti ε>0 na začiatku každého obdobia. Celková čiastka tohto objektu je M. Na začiatku periódy najskôr agent dostane dividendy a potom je spárovaný s iným agentom. Tento objekt prinášajúci dividendy budeme nazývať *komoditné peniaze* (ich držanie nám prináša užitočnosť, nie sú sami osebe bezcenné ako peniaze). Opäť budeme uvažovať iba symetrické ekvilibriá v ustálenom stave. Hodnotová funkcia agenta na začiatku periódy bude V – očakávaná diskontovaná užitočnosť, ktorú agent dostane, ak si osvojí optimálnu obchodovaciu stratégiu. Ak drží peniaze, najskôr získa dividendy $\eta\varepsilon$. Potom môžu nastať tri možnosti:

(1) s pravdepodobnosťou 1/k stretne producenta svojho spotrebného tovaru. V tom prípade môže ale nemusí byť schopný obchodovať, podľa jeho akceptácie ponuky.

(2) S pravdepodobnosťou 1/k stretne konzumenta jeho produkčného tovaru, opäť sa môže ale nemusí obchodovať, podľa toho, či jeho ponuka bude akceptovaná.

(3) S pravdepodobnosťou 1-2/k stretne niekoho iného, s kým nemôže obchodovať a výplata bude $\beta V(\eta)$.

Agent nikdy nebude meniť komoditné peniaze za iné, pretože sú všetky peniaze rovnaké. Bellmanova rovnica, ktorá zahŕňa všetky možné prípady potom vyzerá:

$$\begin{aligned} V(\eta) = \eta\varepsilon + \frac{1}{k}\max_{\rho\in[0,\eta]}\{\int_0^\rho (u+\beta V(\eta-x))d\Omega(x) + (1-\Omega(\rho))\beta V(\eta)\} \\ + \frac{1}{k}\max_{\omega\in R_+}\{R(\omega)\beta V(\eta) + (1-R(\omega))\beta V(\eta+\omega)\} + (1-\frac{2}{k})\beta V(\eta). \end{aligned} \tag{38}$$

Ekvilibrium v ustálenom stave sa skladá z časovo invariantného profilu $\langle H,\Omega,R,\omega,\rho,V\rangle$, ktorý spĺňa: ak každý agent hrá stratégiu (ω,ρ), rozdelenie držby peňazí H, rozdelenie ponúk Ω a rozdelenie rezervačných cien R sú stabilné. S danými stabilnými rozdeleniami H, Ω a R je pre agenta optimálne hrať stratégiu (ω,ρ). Teda obchodovacia stratégia (ω, ρ) a hodnotová funkcia V riešia Bellmanovu rovnicu. Podľa tejto definície je ale veľa ekvilibrií. Extrémnym prípadom je, ak komoditné peniaze nie sú nikdy použité ako prostriedok výmeny, agenti ich držia kvôli dividendám a dávajú si navzájom produkčné tovary zadarmo. Toto ekvilibrium ale zmizne, ak by sme pridali do modelu nejaké (aj keď veľmi malé) produkčné náklady. Zameriame sa teda na ekvilibrium s jednotnou cenou. Uvažujme opäť ekvilibrium s cenou $p>0$. Potom všetci agenti budú ponúkať predaj za cenu p a pre kupujúceho nie je optimálne prijímať iba nižšiu cenu, lebo by nič nekúpil. Teda všetci agenti, ktorú majú aspoň p peňazí, budú mať rezervačnú cenu nie menšiu ako p. Tí, čo majú menej peňazí, neovplyvnia svojou cenou ekvilibrium. Bez ujmy na všeobecnosti teda môžeme predpokladať, že ich rezervačná cena bude celá ich hotovosť. Opäť predpokladáme (kvôli zjednodušeniu), že držba peňazí u každého je násobkom p. Všetko sa správa ako v predchádzajúcom modeli, jediným rozdielom sú dividendy. Pre všetky $n\geq 0$ definujme $\psi_n=V(np+p)-V(np)$. Je to suma hodnoty dividend. Podmienka na existenciu ekvilibria, aby si agent nenechal peniaze kvôli dividendám sa dá napísať ako:

(39) $\frac{u}{\varepsilon M} > \frac{1-m}{m}(\frac{\beta}{1-\beta} - m)$.

Ak je splnená táto podmienka, potom hodnotová funkcia V je striktne rastúca: pre každé n≥0 a ξ, ξ'∈(0,p) také, že ξ<ξ' platí V(np)<V(np+ξ)<V(np+ξ')<V(np+p) a naviac V je striktne konkávna na celočíselných násobkoch p: pre všetky n ≥ 0, V(np+p)-V(np)>V(np+2p)-V(np+p). Ak všetci predajcovia takmer vždy ponúkajú predaj za cenu p a ak u+βV(0)≥βV(p), potom je optimálne pre každého agenta s aspoň p peniazmi mať rezervačnú cenu aspoň p. Ak platí podmienka, aby si agent nenechával peniaze kvôli dividendám, ak časť agentov s pozitívnou držbou peňazí je m≤1/2 a ak všetci agenti, ktorí majú aspoň p peňazí majú rezervačnú cenu aspoň p, potom je pre agenta optimálne ponúkať predajnú cenu p. Intuícia je takáto – ponuka 0 by nepriniesla žiadny zisk. Ponuka viac ako nula ale menej ako p by mala rovnakú šancu na úspech, ale priniesla by menej peňazí. Ponuka na predaj vyššia ako p, povedzme 2p by znížila pravdepodobnosť úspešného obchodu najmenej o polovicu, keďže agenti držiaci p nemôžu prijať ponuku 2p. Avšak hodnota z platby 2p v porovnaní s p je menšia ako dvojnásobok, keďže hodnotová funkcia je konkávna. Platí, že v každej takejto ekonomike s parametrami k, β, u a M, pre každú časť agentov s pozitívnou držbou peňazí m'≤1/2, existuje ε' také, že u+βV(0)=βV(p), pre každé ε≤ε' existuje kontinuum jednoznačných ekvilibrií. V takých ekvilibriách sú všetky transakcie uskutočnené pri cene p a držby peňazí sú násobkom p. Opäť platí, že bohatstvo je rastúce s počtom agentov držiacich peniaze, m. Zavedenie komoditných peňazí namiesto normálnych neodstránilo určitú neistotu v ekvilibriách. Je táto neistota všeobecne v modeloch náhodného stretávania, alebo je to určitými špecifikami tohto modelu? Ukázalo sa, že ani ak by sme mali produkčné náklady, tak táto neistota nezmizne. Rovnako sa ukazuje aj pri iných podobných modeloch s deliteľnými peniazmi.

3.6 Ekonomika zložená z domácností

Teraz predstavíme model s deliteľnými peniazmi aj tovarmi (Shi, 1997), v ktorom budú vystupovať domácnosti s rôznymi členmi. Čas je diskrétny, tovary sú identifikované ako body na kružnici s obvodom 2. V základnom modeli, ktorý zostavíme ako prvý, nie je žiadny kapitál a tovary podliehajú skaze. Ďalej sú tu skladovateľné peniaze, ktoré sami osebe nemajú hodnotu. Domácnosti sú normalizované na 1. Každá domácnosť sa skladá rovnakým spôsobom z členov normalizovaných na jedna, všetci členovia majú rovnakú spotrebu. Exogénne fixná časť N členov domácnosti sú držitelia peňazí, ostatní sú producenti. Držitelia peňazí nemôžu produkovať. Označíme pre domácnosť i množinu držiteľov peňazí A_i a množinu producentov A^c_i. Domácnosť i má užitočnosť z oblúku vzdialeného od tovaru i dĺžku x. Tieto tovary sú spotrebnými tovarmi danej domácnosti, označíme ich $D_i=\{j: \widehat{ji} \leq x\}$, kde $x \in [0,1]$ je konštanta. Každý z tovarov v D_i je domácnosťou rovnako preferovaný. Užitočnosť z konzumácie množstva q z týchto tovarov je $u(q)=aq$, kde $a>0$ je konštanta. Produkcia v domácnosti je v každej perióde náhodná, v čase t produkuje tovar i^*_t z kružnice. Toto je produkčný tovar domácnosti i. Produkcia je okamžitá, ale sú náklady produkcie c(q) pre množstvo q, rastúce, konvexné náklady. Agenti nikdy nekonzumujú svoj produkčný tovar. Tento predpoklad je kvôli tomu, aby výmena bola jediným spôsobom, ako získať spotrebný tovar. Na začiatku periódy sa náhodne rozhodne o produkčnom tovare, potom sú peniaze rovnomerne rozdelené medzi držiteľov peňazí. Následne je každý člen domácnosti náhodne spojený s nejakým členom inej domácnosti. Na základe typu agenta sa rozhodnú, či budú obchodovať. Sú možné dva typy obchodu: *barter* a *peňažný obchod*. Po výmene sa každý člen vráti späť do domácnosti. Domácnosť zhromaždí tovary a rovnomerne ich rozdelí na spotrebu. Po konzumácii domácnosť dostane paušálne peňažný transfer τ. Tieto peniaze udržujú ponuku peňazí domácnosti, označenú $\widehat{M}$, rastúcu, s mierou γ. Teda $\tau_{t+1}=(\gamma-1)\widehat{M_t}$, $\gamma>0$. Perióda je ukončená a čas sa posunie ďalej. Keďže tovar aj peniaze sú deliteľné, držiteľ peňazí môže pri obchodovaní použiť akúkoľvek časť svojej hotovosti. Parameter x nám určuje zhodu pri obchode. Ak máme dvoch producentov z domácností i a –i, potom pravdepodobnosť zhody pre každého je x, teda dvojzhoda nastáva s pravdepodobnosťou x^2. Ako sa jednotlivé domácnosti rozhodujú? Označme j typického člena domácnosti i a –j člena domácnosti –i, s ktorým je agent j spojený. Sú potom tri možnosti obchodovania (dve monetárne a barter). Agenti z domácnosti i, ktorí obchodujú, môžu byť potom klasifikované do troch množín, I_b, I_p a I_m. Prvá množina obsahuje producentov, ktorí uskutočnili barter, druhá producentov, ktorý vymenili tovar za peniaze a tretia množina sú držitelia peňazí, ktorí za peniaze získali tovar:

(40) $I_b = \{j \in A^c_i: -j \in A^c_{-i};\ i^* \in D_{-i},\ (-i)^* \in D_i\}$,

(41) $I_p = \{j \in A^c_i: -j \in A_{-i};\ i^* \in D_{-i}\}$,

(42) $I_m = \{j \in A_i: -j \in A^c_{-i};\ (-i)^* \in D_i\}$.

Mieru agentov v množine I označíme $\mathfrak{M}(I)$. Teda platí: $\mathfrak{M}(I_b) = x^2(1-N)^2$; $\mathfrak{M}(I_p)=xN(1-N)=\mathfrak{M}(I_m)$. V každej perióde t si domácnosť i volí svoju spotrebu C_{it} a budúci peňažný zostatok M_{it+1} podľa daných podmienok ekonomiky – čo je dané (q'^m, q'^b, L'). V monetárnej výmene držiteľ peňazí vymení L' jednotiek peňazí za q'^m jednotiek tovaru, v barteri je vymenených q'^b jednotiek tovaru na každej strane. Domácnosť sa rozhoduje tak, aby maximalizovala svoju očakávanú užitočnosť a berie samozrejme do úvahy aj náklady produkcie. V symetrickom ekvilibriu všetky domácnosti držia rovnaké množstvo peňazí. Keď je agent spojený s iným, chce sa dojednávať a dohodnúť na množstve obchodovania. Keď sa jedná, berie ako dané premenné ekonomiky domácnosti. Barter je ex post efektívny v zmysle, že hraničné náklady produkcie sa rovnajú hraničnej užitočnosti z konzumácie (stretnú sa dvaja producenti, každý chce maximalizovať svoju užitočnosť). Pri stretnutí držiteľa peňazí a producenta je obchodovaných menej tovarov ako v barteri. Je to kvôli asymetrickosti týchto agentov. V monetárnom stretnutí je producentova hraničná hodnota peňazí nižšia ako hraničné náklady peňazí pre držiteľa peňazí. Monetárny rovnovážny stav označíme q* - existuje vtedy a len vtedy, ak $\gamma>\beta$. Toto množstvo je nepriamo úmerné miere rastu peňazí γ – producenti ponúkajú menej tovaru za peniaze, pretože rast množstva peňazí znižuje ich hodnotu. Tento efekt hovorí o super ne-neutralite. Zmenšením zostatku sa redukuje spotreba a výstup v rovnovážnom stave. Pre $\gamma=\beta$ maximalizujeme rovnovážnu užitočnosť – to potvrdzuje platnosť tzv. Friedmanovho pravidla.

Teraz rozšírime model – endogenizujeme N, teda časť domácnosti, ktorá je držiteľom peňazí. Domácnosť si túto časť volí sama, označíme teda n_i časť držiteľov peňazí v domácnosti i. V ostatných domácnostiach zostáva táto časť N. V symetrickom ekvilibriu samozrejme n_i=N. Zostavíme rovnaký maximalizačný problém, ale s n_i ako ďalšou premennou. Aj v tomto ekvilibriu platí negatívny efekt rastu peňazí. Okrem toho, rast množstva peňazí môže zvýšiť pomer držiteľov peňazí na trhu. Keďže sa znižuje hodnota peňazí, zvyšuje sa chuť domácností zobchodovať rýchlo peniaze zvolením veľkej časti členov za držiteľov peňazí. To je samozrejme nákladné, pretože sa tým znižuje počet producentov a tým aj množstvo spotrebných tovarov získaných barterom. Teda počet držiteľov peňazí sa bude zvyšovať iba ak zisk z tohto rastu prevýši tieto náklady. To je vtedy, ak je nepravdepodobná dvojzhoda a miera rastu peňazí je nízka. Rovnovážny výstup a užitočnosť stúpajú s mierou rastu peňazí, keď γ je blízko β a klesajú keď γ je blízko hornej hranice γ'. Existuje $\gamma_0 \in (\beta,\gamma')$, ktoré maximalizuje užitočnosť. Na druhej strane, ak vyjednávacia váha pre držiteľov peňazí, $\theta>1/2$ a x je blízko θ, výstup a užitočnosť monotónne rastú pre všetky $\gamma \in [\beta, \gamma']$. V tomto prípade je optimálna miera rastu peňazí horná hranica γ', čo implikuje N=0. Tým sa dostaneme k tomu, že žiadny člen domácnosti nemá peniaze – nemonetárne ekvilibrium.

3.7 Dve krajiny s dvoma rôznymi menami

Ako vyzerá obchodovanie medzi dvoma krajinami s dvomi menami? Tým sa budeme zaoberať v nasledujúcej časti (Zhou, 1997). Bežne je zaužívané, že keď chce cudzinec niečo kúpiť na domácom trhu, vymení svoju menu za národnú a za ňu si kúpi tovar. Ďalšou možnosťou by bolo jednoducho kúpiť tovar za jeho menu (s prepočítaným pomerom) a tým by sa predišlo častému zamieňaniu peňazí. Používanie cudzej meny ale môže byť na domácich trhoch zakázané. Týka sa to hlavne rozvíjajúcich sa krajín, vo vyspelých ekonomikách – napríklad v Spojených štátoch – nie je zákon, že obchody môžu používať iba americký dolár (to umožňuje v praxi – hlavne pri hraniciach používať aj inú menu). Ďalším vysvetlením používania prevažne domácej meny je príliš veľká rizikovosť z fluktuácií výmenného kurzu. Napriek tomu sa dá stretnúť s prípadmi viacerých mien (napríklad pred zavedením eura nebol problém platiť v Holandsku nemeckými markami). Zostavíme teda model – čas je spojitý, vo svetovej ekonomike sú dve komunity, domáca krajina a cudzia, obývané agentmi normalizovanými na 1, kde $n \in (0,1)$ je veľkosť domácej populácie. V každej krajine je k typov rovnako rozdelených agentov, $k \geq 3$. Množina typov agentov je $I=\{1,......,k,1^*,.......k^*\}$, kde i je domáci agent a i* cudzí. Rovnako je k typov komodít, ktoré sú nedeliteľné a rozdielne (rozlíšiteľné) v oboch krajinách. Agent i vyrába tovar i+1 (mod k) a typ i* vyrába tovar (i+1)*. Agent typu i môže konzumovať dve komodity: domácu i alebo cudziu náhradu i*. Preferencia medzi nimi je náhodná. Môžeme tieto tovary chápať ako pár tovarov s rôznymi črtami a vlastnosťami, ktoré agent rôzne preferuje v rôznom čase. Označíme l stav, keď agent i preferuje tovar typu i a n stav preferencie cudzieho tovaru i*. Chute agenta sa správajú podľa Markovovho procesu s pravdepodobnosťami prechodu $\{q_{ln}, q_{nl}\}$ (pravdepodobnosti, že agent za malú zmenu času zmení chuť z l na n a naopak). Potom čas prechodu preferencií je exponenciálne rozdelený s parametrom $q_{ss'}$, $s \neq s'$ a $s,s' \in \{l,n\}$. Tento proces je náhodný a nezávislý na obchodovacom procese. Agent má užitočnosť z konzumácie svojho spotrebného tovaru u>0, táto užitočnosť je rovnaká pre všetkých agentov bez ohľadu na typ a národnosť. Okrem toho sú v ekonómii nedeliteľné peniaze – v domácej krajine 0 a v cudzej 0* - m jednotiek domácej meny (u domácich agentov) a m* cudzej meny. Agenti sa stretávajú náhodne, párovo, je to Poissonov proces s parametrom β. Hľadanie partnera vyžaduje čas a znevýhodňuje agenta. Inak nie sú žiadne náklady. Príležitosť obchodovať pre agenta, ktorý má tovar o a chce tovar α, závisí iba na počte agentov držiacich α a akceptujúcich o, označíme $\Phi_{\alpha o}$. Potenciálny partner príde podľa Poissonovho procesu s parametrom $\upsilon_{o\alpha} = \beta\Phi_{\alpha o}$. Teda čas čakania pred transakciou je exponenciálne rozdelený s parametrom $\upsilon_{o\alpha}$. Ďalej normalizujeme β na 1. Budeme sa venovať stabilným ekvilibriám. Agenti sú anonymní, známy je len ich typ a to, čo momentálne držia. Teda stratégia agenta závisí iba na jeho vlastnom stave, hľadáme symetrické ekvilibriá. Svetová ekonomika je popísaná typom agentov, ich tovarmi a chuťami. Označíme π^i_{os} časť agentov typu i držiacich objekt o s chuťou s. Potom vektor π^i je distribúcia pre agentov typu i. Obchodovacia stratégia je množina akceptovateľných objektov ako funkcia agentovho stavu. Stratégia agenta i nech je σ^i. Objekt α je akceptovateľný, ak si agent želá obchodovať o za α. Šanca, že agent i obchoduje je charakterizovaná časom čakania $\tau_{o\alpha}$ – kým stretne agenta držiaceho α a akceptujúceho o. Tento čas je exponenciálne rozdelený s parametrom $\upsilon_{o\alpha}$. Zostrojíme si hodnotové funkcie agenta i držiaceho o s chuťou s:

(43) $V^i_{os} = \max\limits_{\sigma^i_{os} \subseteq O} \left\{ \dfrac{\sum\limits_{\alpha\in\sigma^i_{os}} \upsilon_{o\alpha} U^i_{\alpha s} + q_{ss'} V^i_{os'}}{\delta + q_{ss'} + \sum\limits_{\alpha\in\sigma^i_{os}} \upsilon_{o\alpha}} \right\}$, δ je diskontná miera a

$$
(44)\ \mathrm{U}^i_{\alpha s} = \begin{array}{ll} u + V^i_{(i+1)s} & \text{ak } (\alpha,s)=(i,l) \text{ alebo } (\alpha,s)=(i^*,n) \\ V^i_{\alpha s} & \text{ak } \alpha \in \{i+1,0,0^*\} \\ 0 & \text{inak} \end{array}
$$

Teraz môžeme definovať stabilné ekvilibrium: Stabilné ekvilibrium sa skladá z časovo invariantného profilu $<\{\pi^i\},\{\sigma^i\},\{V^i\}>_{i\in I}$, ktorý spĺňa:

(i) optimalizáciu: s daným rozdelením $\{\pi^i\}$ a stratégiami iných $\{\sigma^j\}_{j\neq i}$, σ^i a V^i riešia rovnicu maximalizácie pre každé $i\in I$.

(ii) racionálne očakávania: množina optimálnych stratégií $\{\sigma^i\}$ je konzistentná so stabilným rozdelením $\{\pi^i\}$.

Teraz túto všeobecnú definíciu aplikujeme a budeme študovať špecifické ekvilibrium, kde lokálna mena prevažuje a kde je aktívna menová výmena. Budeme toto ekvilibrium nazývať ekvilibrium s menovou výmenou. V jednoduchom prípade, keď máme dve rovnako veľké krajiny, n=0.5 a rovnaké množstvá peňazí, m=m*, agenti všetkých typov jednej národnosti zvolia rovnaké stratégie. Máme teda vlastne iba dva typy agentov – *domáci* a *cudzí*. Zároveň títo agenti sú zrkadlovo rovnakí – držanie domácej meny a preferovanie lokálneho spotrebného tovaru pre domáceho agenta (stav (h,l)) je ekvivalentný držaniu cudzej meny a preferovaniu svojho spotrebného tovaru (z pohľadu agenta domáceho) pre cudzieho agenta (stav (f,l)). Potom aj ekvilibriové výstupy budú v týchto ekvivalentných stavoch rovnaké. Stačí teda sledovať správanie iba jedného typu agentov, povedzme domácich. Hlavnou črtou ekvilibria s menovou výmenou je, že väčšina agentov danej krajiny akceptuje iba vlastnú menu. Táto črta spolu s faktom, že väčšina ľudí konzumuje tovary svojej krajiny vytvára predpoklad: $q_{nl}>q_{ln}$. Teda domáca chuť je stabilnejšia ako cudzia (vo všeobecnosti). V našom uvažovanom ekvilibriu agenti budú vždy akceptovať preferovaný spotrebný tovar namiesto toho, čo vlastnia. Keďže väčšina agentov uprednostňuje domáci výrobok, budeme uvažovať prípad, kde vlastníci tovaru s domácou chuťou 1 akceptujú iba domácu menu (agenti s chuťou 1 radšej držia svoju produkciu ako akceptujú cudziu menu). Ako dôsledok - agent, ktorý má cudziu menu a má chuť 1 bude akceptovať vlastný produkčný tovar od iného agenta rovnakého typu. Ekvilibriové obmedzenia pre agenta majúceho domácu chuť 1 sú: $u+V_{gl}>V_{hl}>V_{gl}>V_{fl}$. Pre agentov s chuťou n existujú štyri možnosti ohodnotenia hodnotových funkcií, ktoré môžu potenciálne generovať ekvilibrium s menovou výmenou:

1. $u+V_{gn}>V_{fn}>V_{hn}>V_{gn,}$
2. $u+V_{gn}>V_{hn}>V_{fn}>V_{gn,}$
3. $u+V_{gn}>V_{fn}>V_{gn}>V_{hn,}$
4. $u+V_{gn}>V_{gn}>V_{fn}>V_{hn.}$

V prípadoch 1 a 2 vlastník tovaru s chuťou n akceptuje obe meny. V prípade 3 akceptuje iba menu súvisiacu s jeho chuťou a v prípade 4 neakceptuje žiadnu menu. Ani jeden z posledných dvoch prípadov netvorí ekvilibrium. Teda v symetrickom svete nutná podmienka pre existenciu stabilného ekvilibria s menovou výmenou v čistých stratégiách je, že vlastníci tovarov akceptujú domácu menu bez ohľadu na svoje chute. V skúške treba iba vylúčiť možnosti 3 a 4 (detaily v prílohe Zhou , 1997).

Teraz sa pozrieme na dve ekvilibriá s menovou výmenou – označíme ich ekvilibrium 1 a 2. V ekvilibriu 1 existuje medzinárodný obchod – ak je príležitosť, ľudia, ktorí chcú kúpiť cudzí tovar, predajú svoju výrobu za menu tej cudzej krajiny a za tieto peniaze si kúpia žiadaný tovar. Ak je šanca na také obchodovanie malá, ale je ľahká výmena meny, najskôr akceptujú domácu menu, potom ju vymenia za cudziu menu a za ňu si kúpia tovar.

Ľudia podieľajúci sa na tomto obchode sú domáci agenti s chuťou n, ktorí nemôžu priamo získať cudziu menu, domáci agenti, ktorí majú cudziu menu, ale ich chute sa zmenili na domáci tovar a korešpondujúci cudzí agenti. Ekvilibrium 1 existuje, ak veľkosť populácie s peniazmi nie je príliš malá (m je ≈ 0.3 a viac). Ak je príliš málo peňazí v obehu, nikto nebude mať šancu získať nejakú menu. Agenti s chuťou l budú akceptovať obe meny – je veľa krajanov, ktorí chcú kúpiť cudzí tovar. Toto je spôsobené relatívne malým rozdielom medzi q_{ln} a q_{nl}. Ak cudzia mena obieha na veľkej časti domáceho trhu, stratí sa výhoda z neakceptácie cudzej meny. Na druhej strane, ak príliš málo ľudí chce cudzie tovary, alebo cudzie chute sú nestále, menová výmena sa stane zložitou. Ako sa znižujú očakávania o získaní cudzieho tovaru, najlepšou odpoveďou na dočasnú zmenu chute je nekonzumovať, kým sa chute nevrátia späť. Domáci agenti uprednostňujú domácu menu, vrátane tých, čo majú radi cudzie tovary. Ekvilibrium 2 sa dá ukázať podobne. Rozdielom je, že agenti s chuťou n teraz budú uprednostňovať domácu menu. Získame iné parametrické priestory existencie tohto ekvilibria. Agenti teda preferujú domácu menu bez ohľadu na chute. Dôsledkom je, že agenti preferujúci cudzí tovar a držiaci danú menu budú obchodovať cudziu menu za domácu, hoci mena ktorú majú má lepší prístup k žiadanému tovaru. Hlavným dôvodom existencie tohto ekvilibria je relatívne malá pravdepodobnosť získania cudzieho tovaru pred zmenou chutí, čo môže byť spôsobené veľkým rozdielom $q_{nl} - q_{ln}$, alebo všeobecne ťažkým získaním tovaru (veľké m). Ak by svet nebol symetrický (rozdielne veľkosti krajín, množstvo peňazí), ekvilibriá by boli zachované. Okrem týchto ekvilibrií existujú aj ďalšie symetrické ekvilibriá – ekvilibrium so *zjednotenou menou* a *autarkistické* (sebestačné) ekvilibrium. V prvom prípade sú obe meny akceptované v oboch krajinách, slúžia ako jednotný prostriedok výmeny. Toto ekvilibrium existuje vždy v symetrickom prípade. V autarkistickom ekvilibriu dve krajiny medzi sebou neobchodujú, domáca mena obieha iba doma. Tí, čo uprednostňujú cudzí tovar nebudú obchodovať a musia si počkať na zmenu chute. Toto ekvilibrium existuje iba pre niektoré hodnoty parametrov. Všetky štyri ekvilibriá sa v určitom priestore prekrývajú. Dá sa teda porovnať bohatstvo v jednotlivých troch typoch ekvilibrií (prvé dve sú rovnakého typu). Najlepšie z toho vychádza ekvilibrium so zjednotenými menami, čo je zrejmé, keďže bez ohľadu na chuť agenti akceptujú obe meny. Porovnanie zvyšných ekvilibrií už nie je také jednoduché. Ukazuje sa, že pre malé m je lepšie ekvilibrium s menovou výmenou a naopak.

3.7.1 Dve krajiny – výhody jednej meny

Teraz sa pozrieme na model s nedeliteľnými peniazmi, opäť budeme sledovať ekonomiku s dvoma menami a zisťujeme, aká výhoda vyplýva z jednej meny (Ravikumar, Wallace, 2001). Zisk z jednej meny bude ten, že eliminuje niektoré menej kvalitné ekvilibriá. To sú také, v ktorých každá mena má inú úlohu a výstup je menší ako optimálny. V ekonomike teda máme dve krajiny, $k>3$ tovarov podliehajúcich skaze a k typov agentov. Agent i konzumuje i a produkuje i+1(mod k). Diskontný parameter maximalizujúci očakávanú užitočnosť je β. Užitočnosť počas periódy je $u(x)-y$, kde x je konzumácia relevantného tovaru a y je produkcia. Funkcia u je ohraničená, striktne konkávna, rastúca, $u(0)=0$, $u'(0)=\infty$. Agent stretne niekoho zo svojej krajiny s pravdepodobnosťou θ. Máme dvoje rôzne peniaze, každých je m pre každý typ a krajinu. Vlastník peňazí nemôže produkovať. Aj keď sa agent môže voľne zbaviť peňazí, takéto zbavenie mu nepomôže k produkcii. Budeme sa venovať symetrickým ekvilibriám – teda takému rozdeleniu, ktoré je rovnaké pre krajiny aj typy agentov. Každý agent začne periódu jedným z troch možných spôsobov (stavov) – nevlastní peniaze (stav 0), vlastní cudzie peniaze (stav 1) alebo vlastní domáce peniaze (stav2). Označíme p_t pravdepodobnostné rozdelenie stavov na začiatku periódy t, kde p_{it} je časť každého typu v stave i a čase t a p_0 je začiatočná podmienka. Môže nastať stretnutie, v ktorom dochádza k produkcii – nazveme ho produkčné stretnutie (stretne sa producent s agentom s peniazmi). Neprodukčným stretnutím je také, v ktorom sa stretnú cudzí agenti s rôznymi menami. Pre takéto stretnutia označíme s_{jt} pravdepodobnosť, že sa peniaze vymenia, ak sú obaja agenti v stave 1 alebo 2, $s_t=(s_{1t},s_{2t})$. Pri produkčných stretnutiach musíme odlíšiť stretnutia medzi agentmi jednej krajiny a cudzími agentmi. Označíme pre prvý prípad (rovnakí agenti) $y_{jt}\in R_+$ a $\tau_{jt}\in[0,1]$ výstup a pravdepodobnosť že peniaze sú vyplatené v čase t, keď konzument je v stave j=1,2. Pre prípad rôznych agentov použijeme označenie y'_{jt} a τ'_{jt}. Potom označíme $A_t = (p_t,s_t,y_t,\tau_t,y'_t,\tau'_t)$. Rozdelenie je postupnosť $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$. Ešte označíme v_{it} očakávanú diskontovanú užitočnosť na začiatku periódy pre niekoho v stave i. Potom platí nasledovná definícia:

Definícia 1: S danou počiatočnou podmienkou p_0, rozdelenie $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$ je ekvilibrium, ak sú splnené podmienky pre p_{t+1} a existuje ohraničená postupnosť $\{v_t\}$ taká, že komponenty obchodovania A_t sú individuálne racionálne a párovo efektívne pre dané v_{t+1}.

Teraz definujme rozdelenie s jednotnou menou (pretože cieľom je ukázať výhodnosť jednej meny) – je to také rozdelenie, ktoré spĺňa: $y_t=y'_t$, $\tau_t=\tau'_t$, $y_{1t}=y_{2t}$ a $\tau_{1t}=\tau_{2t}$. Teda rozdelenie s jednotnou menou je rozdelenie s jednou menou, jednou krajinou, ktoré robí obchody medzi dvoma menami a rozdelenie medzi dvomi peniazmi v každej krajine irelevantné.

Popíšeme optimum v dvoch rôznych regiónoch parametrov – budeme ich nazývať región s nízkym a vysokým β. Pre nízke β optimum existuje a každé optimum je rozdelenie s jednotnou menou. Pre vysoké β je optimum (aspoň jedno) rozdelenie s jednotnou menou.

Tvrdenie 1: Nech $\gamma = \frac{\beta(1-m)}{k(1-\beta)}$ a nech $\hat{x}(\gamma)$ je jediné pozitívne riešenie pre x, $x=\gamma g(x)$ ($g(x)=u(x)-x$). Ak $\hat{x}(\gamma) \le y^*$ (nízke β), potom optimum existuje a každé optimum spĺňa $y_{jt}=y'_{jt}=\hat{x}(\gamma)$ a $\tau_{jt}=\tau'_{jt}=1$, a preto je to rozdelenie s jednotnou menou. Ak $\hat{x}(\gamma)>y^*$ (vysoké β), potom existuje optimum, ktoré je rozdelením s jednotnou menou.

Teraz ukážeme, že v prípade nízkeho β existuje aj ekvilibrium, v ktorom peniaze majú rôznu úlohu – ak príde k obchodu, ceny sú vyššie v cudzej mene ako v domácej. Označme pre zjednodušenie zápisu $\Delta_i=v_i-v_0$ pre i=1,2. Potom, ak konzument môže urobiť producentovi ponuku v producentovej domácej mene, ak spraví ponuku vezmi alebo odíď a ak $0<\Delta_1 \le \Delta_2 \le \frac{y^*}{\beta}$, potom $y_2=y'_1=\beta\Delta_2$ a $\tau_2=\tau'_1=1$. Ak konzument môže urobiť producentovi ponuku v producentovej cudzej mene, ak spraví ponuku vezmi alebo odíď a ak $0<\Delta_1\le\Delta_2\le\frac{y^*}{\beta}$, potom $y_1=u^{-1}(\beta\Delta_1)$, $\tau_1=1$, $y'_2=\min\{\eta(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}), u^{-1}(\beta\Delta_2)\}$ a $\tau'_2=\frac{u(y'_2)}{\beta\Delta_2}>0$, kde $\eta(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}) \equiv \arg\max_y [\frac{\Delta_1}{\Delta_2}u(y)-y]$ (62). Z toho dostaneme tvrdenie:

Tvrdenie 2: Ak $\theta>1/2$ a $\hat{x}(\gamma) \le y^*$, potom pre každé p_0 existuje ekvilibrium s $v_{0t}<v_{1t}<v_{2t}$, $s_t=(s_{1t},s_{2t})=(1,0)$ a $p_{1,t+1}\in(0,m)$.

Dôsledkom je, že ceny v cudzej mene prevýšia ceny v domácej mene. Toto ekvilibrium ale má nejaký obchod s cudzou menou – ten sa oplatí, kým je vyššia hodnota držania cudzej meny ako produkovania.

Výhodou jednotnej meny je, že sa tým vyhneme ekvilibriám, v ktorých hrajú rôzne meny rôzne úlohy – ktoré sú nepotrebné ale nie sú neškodné – nepotrebné, pretože optimum je medzi rozdeleniami, v ktorých nemajú peniaze rôznu úlohu. Nie sú neškodné, pretože existujú medzi nimi rozdelenia horšej kvality.

3.8 Cigaretové peniaze

Teraz sa budeme zaoberať prípadom cigaretových peňazí, teda určitý spotrebný tovar je povýšený a stáva sa menou, ako tomu bolo vo väzenských táboroch počas vojny (Burdett, Trejos, Wright, 2000). Rozdiel oproti predchádzajúcim modelom s komoditnými peniazmi bude v tom, že doteraz, ak aj niektorý tovar slúžil ako prostriedok výmeny a získal ho agent, pre ktorého to bol spotrebný tovar, ten ho hneď skonzumoval. V tomto prípade však agenti určitý tovar čiastočne alebo úplne vylúčia zo spotreby a začnú s ním obchodovať ako s peniazmi. Ďalším rozdielom je možnosť všeobecného tovaru, ktorý konzumujú všetci agenti. Ďalšou vlastnosťou je, že ponuka peňazí (teda napríklad množstvo cigariet) je endogénna. V tomto modeli je čas opäť spojitý, tovary nedeliteľné. Jeden z nich je *všeobecný* tovar a ostatné sú *špeciálne*. Všetci agenti majú z konzumácie všeobecného tovaru užitočnosť u_g a každý agent má užitočnosť u_s z konzumácie svojho špeciálneho tovaru. Platí $u_s>u_g$. Všeobecný tovar má pre zjednodušenie tendenciu znehodnocovať sa, pokazí sa, je to Poissonov proces s parametrom d. Produkcia prebieha tak, že po konzumácii všeobecného tovaru, alebo po jeho znehodnotení agent produkuje špeciálny tovar, ktorý nie je jeho spotrebným. Po konzumácii špeciálneho tovaru agent vyrobí s pravdepodobnosťou σ špeciálny tovar a s pravdepodobnosťou $1-\sigma$ všeobecný tovar. Agenti sa stretávajú bilaterálne s mierou β. Ak stretneme niekoho so špeciálnym tovarom, x je pravdepodobnosť, že ho chcem. Potom y je podmienená pravdepodobnosť, že aj on chce môj špeciálny tovar, ak ja chcem jeho. Pre agenta je vždy rozumné, nech má čokoľvek, vymeniť to za špeciálny tovar, ktorý požaduje a hneď ho skonzumovať. Pre symetrické ekvilibriá, ktoré budeme uvažovať, agenti nikdy nebudú akceptovať špeciálny tovar, ktorý nechcú konzumovať. Ďalej je rozumné obchodovať špeciálny tovar za všeobecný, pretože ho môžem skonzumovať a vyprodukovať ďalší špeciálny tovar. Otázkou zostáva, či mám všeobecný tovar konzumovať keď ho dostanem, alebo si ho ponechať na výmenu za môj špeciálny tovar. Potom časť θ ho vždy skonzumuje a časť $1-\theta$ ho neskonzumuje nikdy. Označíme si G a S časť populácie vlastniacu všeobecný a špeciálny tovar. V_s a V_g budú hodnotové funkcie. Môžu byť dva typy agentov so špeciálnym tovarom: tí, čo vždy konzumujú všeobecný tovar, ak sa k nemu dostanú, a tí, čo ho skladujú. Bellmanove rovnice vyzerajú nasledovne:

(45) $rV_s = \beta Gx[\theta u_g + (1-\theta)(V_g - V_s)] + \beta Sxy[u_s + (1-\sigma)\theta u_g + (1-\sigma)(1-\theta)(V_g - V_s)]$

(46) $rV_g = \beta Sx[u_s + \sigma(V_s - V_g)] + d(V_s - V_g)$

Čistý zisk z konzumácie všeobecného tovaru a skladovania špeciálneho vyprodukovaného tovaru, namiesto skladovania všeobecného tovaru je $\Delta \equiv u_g + V_s - V_g$. Potom optimalizácia jednotlivca s ohľadom na θ nám dáva podmienku najlepšej odpovede:

$\Delta > 0 \Rightarrow \theta = 1$;

$\Delta < 0 \Rightarrow \theta = 0$;

$\Delta = 0 \Rightarrow \theta \in [0,1]$.

Ak $\theta < 1$, všeobecný tovar obieha ako komoditné peniaze (je to univerzálne akceptovaný tovar, ale niekto ho akceptuje kvôli ďalšej výmene a niekto na spotrebu). Ekvilibrium tvorí dvojica (S,θ). Platí nasledovná veta:

Veta 1: Existujú $y_1 < 1$ a $y_2 < y_1$ také, že:

(i) ak $y \geq y_1$ potom $\theta = 1$ a $S = 1$;

(ii) ak $y \in (y_2, y_1)$ potom $\theta \in (0,1)$ a $S \in (S', 1)$;

(iii) ak $y \leq y_2$ potom $\theta = 0$ a $S = S'$, kde S' rieši $Q(S') = 0$ a

(65) $Q(S) = -(1-\sigma)(1-y)S^2 + (1 - \sigma + \frac{d}{\beta x})S - \frac{d}{\beta x}$.

Toto sú jediné ekvilibriá.

Teda všeobecný tovar sa používa ako peniaze ak y je malé, to znamená, ak je zložitý barter, alebo ak y_1 je veľké – to je vtedy, keď všeobecný tovar nie je príliš žiaduci v porovnaní so špeciálnym, ľudia sú trpezliví (r je malé), všeobecný tovar sa neznehodnocuje príliš rýchlo, špeciálne tovary sa produkujú zriedka. Teraz skúsime upustiť od predpokladu o nedeliteľnosti – a to pri špeciálnych tovaroch – tie budú odteraz deliteľné, zatiaľ čo všeobecný tovar zostáva nedeliteľný. Agenti, ktorí obdržia v obchode q jednotiek špeciálneho tovaru majú užitočnosť $u_s = U_s(q)$, kým agenti produkujúci q jednotiek majú náklady c(q). Funkcia $U_s(q)$ je rastúca, konkávna, $U_s(0) = 0$ a existuje také $q' \in [0,1]$, že $U_s(q') = q'$. Bez ujmy na všeobecnosti normalizujeme $c(q) = q$. Teraz σ je pravdepodobnosť, že agent má príležitosť ďalej produkovať špeciálny tovar, teda neprodukuje až do obchodu, aby nemal zbytočné náklady. Označíme Ω očakávanú čistú užitočnosť z výmeny jedného špeciálneho tovaru za iný a q množstvo špeciálneho tovaru, ktoré agent dostane za všeobecný tovar (tým máme určenú cenovú úroveň – dôsledok deliteľnosti špeciálneho tovaru). Upravíme Bellmanove rovnice a v ekvilibriu hľadáme kombináciu (S,θ,q). Opäť máme vetu:

Veta 2: Existujú y_1' a y_2'<y_1' také, že:

(i) ak $y \geq y_1$' potom ekvilibrium je $\theta = 1$ a $q = u_g$;

(ii) ak $y \in (y_2', y_1')$ potom ekvilibrium je $\theta \in (0,1)$ a $q = u_g$;

(iii) ak $y < y_2$' potom ekvilibrium je $\theta = 0$ a $q > u_g$ (za jednotku všeobecného tovaru dostanú viac špeciálneho, ako by mali užitočnosť z konzumácie toho všeobecného tovaru).

Navyše existuje také z>0, že :

- ak $u_g > z$ potom sú to jediné ekvilibriá;
- ak $u_g < z$ potom $y_2' > 0$ a existuje $y_3' > y_2'$ také, že keď $y \in (y_2', y_3')$, tak existujú ďalšie dve ekvilibriá, obe s $\theta = 0$, ale s rozdielnymi hodnotami $q > u_g$.

Toto sú všetky ekvilibriá.

Teraz do modelu zavedieme normálne peniaze, ktoré nemôže nikto produkovať ani konzumovať, časť M ich dostane. Všeobecný tovar a peniaze sú nedeliteľné, cenová hladina je daná deliteľnosťou špeciálnych tovarov. Venujeme sa špeciálnemu prípadu, kde všeobecný tovar sa neznehodnocuje (d=0). To implikuje, že nemôže byť ekvilibrium $\theta=0$, a teda bez peňazí by bolo jediné ekvilibrium spĺňajúce $q=u_g$. Vždy bude existovať ekvilibrium, v ktorom hodnota peňazí bude $V_m=0$ – tým sa dostaneme k predchádzajúcemu prípadu a preto sa teraz sústredíme na prípady $V_m>0$. Rovnovážne časti populácie vlastniace špeciálny tovar, všeobecný tovar a peniaze značíme S, G a M. Teraz S sa pohybuje medzi 0 a 1-M s meniacim sa θ. Označíme q_g a q_m množstvo špeciálneho tovaru, ktorú agent dostane za jednotku všeobecného tovaru alebo peňazí. Potom Bellmanove rovnice majú tvar ($\rho=r/\beta x$):

$$(47)\ \rho V_s = Sy[\Omega+(1-\sigma)\theta u_g+(1-\sigma)(1-\theta)(V_g-V_s)]+G[-q_g+\theta u_g+(1-\theta)(V_g-V_s)]+M[-q_m+V_m-V_s]$$

$$(48)\ \rho V_g = S[U_s(q_g)+\sigma(V_s-V_g)]$$

$$(49)\ \rho V_m = S[U_s(q_m)+\sigma(V_s-V_m)+(1-\sigma)\theta(u_g+V_s)+(1-\sigma)(1-\theta)V_g-V_m]$$

S predpokladom, že agenti so všeobecným tovarom a s peniazmi robia ponuky zober alebo nechaj, z obchodovania vyplýva:

(50) $q_g = \theta u_g + (1-\theta)(V_g - V_s)$

(51) $q_m = V_m - V_s$.

Z toho druhý a tretí výraz v Bellmanovej rovnici pre V_s zaniká. V ekvilibriu hľadáme kombináciu (S, θ, q_g, q_m) spĺňajúcu dané podmienky. Ukáže sa, že kým M nie je príliš veľké, peniaze vytláčajú komoditné peniaze a $q_m=q_g=u_g$. Zavedenie malého množstva peňazí nemá žiadny efekt, pre dostatočné M všeobecný tovar sa dostáva preč z obehu, ekonomika s peniazmi môže mať viac ekvilibrií. Platí nasledovná veta:

Veta 3: Existuje $y''_1<1$ také, že:

(i) ak $y \geq y''_1$ potom $\theta=1$;

(ii) ak $y<y''_1$ potom $\theta \in (0,1)$.

V každom ekvilibriu $q_g=u_g$, kým q_m závisí na hodnotách parametra. Na jednej strane, ak $y<y_1$, existuje hodnota $y''_A<1$ taká, že keď $y<y''_A$ jediné ekvilibrium má $q_m=u_g$ a keď $y>y''_A$ sú dve ekvilibriové hodnoty q_m, jedna $=u_g$ a druhá menšia. Na druhej strane, ak $y>y_1$, existuje hodnota $y''_B \in (y''_A,1)$ taká, že: keď $y<y''_A$ existuje jediné ekvilibrium $q_m<u_g$, keď $y \in (y''_A,y''_B)$ existujú dve ekvilibriové hodnoty q_m, obe menšie ako u_g a keď $y>y''_B$, neexistuje žiadne ekvilibrium s $q_m>0$. Toto sú všetky ekvilibriá s peniazmi.

3.9 Všeobecný model s držiteľmi peňazí, ktorí môžu produkovať

Ďalším všeobecným vyhľadávacím modelom (Rupert, Schindler, Shevchenko, Wright, 2000), kde ale spotrebné tovary nemôžu slúžiť ako prostriedok výmeny (tovary nemôžu byť skladované, musia byť spotrebované bezprostredne po produkcii) je nasledovný model. Ekonomika vyzerá takto: náklady na produkciu sú $c \geq 0$, nikto nespotrebuje svoju vlastnú produkciu, pravdepodobnosť toho, že i chce to, čo vyrobí j je x a pravdepodobnosť, že j chce i za predpokladu, že i chce j je y. Užitočnosť zo spotreby spotrebného tovaru je $u>c$. Okrem toho je v ekonomike exogénne dané fixné množstvo peňazí, ktoré sú skladovateľné. Držanie peňazí prináša užitočnosť γ: ak $\gamma>0$ sú to dividendy, ak $\gamma<0$ sú to skladovacie náklady. Kvôli všeobecnosti uvažujeme $\gamma \neq 0$. Ďalej predpokladáme (zatiaľ – neskôr zostavíme a porovnáme s modelom, kde držiteľ peňazí môže produkovať), že agent s peniazmi nemôže produkovať (najskôr musí konzumovať). Obchod je bilaterálny, náhodný s parametrom β. História obchodovania nie je verejne známa. Označíme π_0 pravdepodobnosť, že daný agent obchoduje tovar za peniaze a π_1 peniaze za tovar. Peniaze sa teda dostanú do obehu práve vtedy, ak $\pi=\pi_1\pi_0>0$. V_0 a V_1 sú hodnotové funkcie agentov bez peňazí a s peniazmi. Uvažujeme stacionárne a symetrické ekvilibriá, teda tieto funkcie nezávisia na čase a na konkrétnom agentovi. Čas je diskrétny s periódou τ. Potom pre mňa ako agenta s peniazmi platí – ak stretnem niekoho, kto môže vyrábať (je bez peňazí – teda s pravdepodobnosťou 1-M) a chcem to, čo vyrobí (pravdepodobnosť x) a obaja chceme obchodovať (π v ekvilibriu), obchodujeme, konzumujem a pokračujem bez peňazí s výplatou $u+V_0$. V iných prípadoch pokračujem s peniazmi s výplatou V_1 a vo všetkých prípadoch ešte dostávam $\gamma\tau$ za skladovanie peňazí. Analogicky pre agenta bez peňazí – jeho rovnica sa skladá zo zisku z bartera a zisku z obchodovania tovaru za peniaze. Označíme zisk z obchodovania tovaru za peniaze $\Delta_0 = V_1-V_0-c$ a peňazí za tovar $\Delta_1 = u+V_0-V_1$, normalizujeme $\beta x=1$. Potom po úpravách ekvilibriové podmienky pre π_0 a π_1 sú:

$$\pi_j \quad \begin{matrix} =1 \\ \in[0,1] \\ =0 \end{matrix} \quad \text{ak } \Delta_j \quad \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix}$$

Δ_j závisí na π, teda na zistenie ekvilibria stačí kandidátov π_0 a π_1 dosadiť a skontrolovať. Pre prípad $\gamma=0$ získame model Kiyotakiho a Wrighta (1993), v ktorom ešte navyše bolo c=0. V tomto prípade monetárne ekvilibrium existuje, ak $c < \frac{(1-M)(1-y)u}{r+(1-M)(1-y)}$, teda ak náklady na produkciu nie sú príliš veľké. Ak $\gamma\neq 0$, musíme π_1 determinovať endogénne, napríklad, ak γ je veľké, agenti si peniaze radšej nechajú. Existuje päť typov ekvilibrií pre rôzne hodnoty parametrov:

1. $\pi_0 = 1$ a $\pi_1 = 0$ je ekvilibrium <=> $r \leq r_2$
2. $\pi_0 = 0$ a $\pi_1 = 1$ je ekvilibrium <=> $r \geq r_3$
3. $\pi_0 = 1$ a $\pi_1 \in (0,1)$ je ekvilibrium <=> $r_1 < r < r_2$
4. $\pi_0 \in (0,1)$ a $\pi_1 = 1$ je ekvilibrium <=> $r_3 < r < r_4$
5. $\pi_0 = 1$ a $\pi_1 = 1$ je ekvilibrium <=> $r_1 \leq r \leq r_4$, kde

$$r_1 = \frac{\gamma-[M+(1-M)y](u-c)}{u}$$

$$r_2 = \frac{\gamma-(1-M)y(u-c)}{u}$$

$$r_3 = \frac{\gamma-(1-M)y(u-c)}{c}$$

$$r_4 = \frac{\gamma+(1-M)(1-y)(u-c)}{c}$$

a $r_1<r_2<r_3<r_4$.

Teraz zmeníme model tak, že agenti s peniazmi môžu produkovať. Prvou zmenou potom je, čo sa stane, ak nastane dvojzhoda, jeden agent má peniaze a druhý nie – bude prvý meniť za tovar alebo platiť peniazmi? Označíme α pravdepodobnosť, že agent s peniazmi si zvolí ako obchodovať a 1-α že bude voliť agent bez peňazí. Stratégia agenta s j jednotkami peňazí (0 alebo 1) je ψ_j, čo sa rovná pravdepodobnosti, že ponúka barter (1-ψ_j ponúka cash). Potom jediným ekvilibriom v čistých stratégiách je $\psi_0=\psi_1=1$. Máme teda vyriešenú jedinú novú situáciu, zostavíme Bellmanove rovnice a získame znova päť typov ekvilibria, avšak pre iné hodnoty parametrov:

$$r'_1 = \frac{\gamma - M(1-y)(u-c)}{u}$$

$$r'_2 = \frac{\gamma}{u}$$

$$r'_3 = \frac{\gamma}{c}$$

$$r'_4 = \frac{\gamma + (1-M)(1-y)(u-c)}{c}$$

Modely sa odlišujú v tom, že je ťažšie dostať peniaze do obehu, ak držitelia peňazí môžu produkovať. Je to preto, lebo oblasť, v ktorej $\pi>0$ je väčšia v modeli, v ktorom držitelia peňazí nemôžu produkovať. Je to preto, lebo ak nemôžu produkovať, tak sa viac snažia peniaze minúť, aby vstúpili do produkčného sektoru. Ak $\gamma=c=0$, rozdiel je ešte väčší – ak nemôžu produkovať, máme tri ekvilibriá – $\pi=0$, $\pi\in(0,y)$ a $\pi=1$, ak agenti môžu produkovať, sú len dve ekvilibriá – $\pi=0$ a $\pi=1$. Je to preto, lebo v druhom prípade, ak nie sú žiadne náklady s peniazmi a je nejaká kladná pravdepodobnosť, že peniaze budú akceptované, každý ich bude vždy akceptovať(lebo produkovať môžem aj s peniazmi, nič ich držbou nestratím). Porovnaním blahobytu oboch prípadov zistíme, že W rastie s π a platí, že s daným π je porovnanie funkcií blahobytu (sú to funkcie závislé od M) nasledovné: $W^s \geq W^k$, kde S značí model, kde agenti s peniazmi môžu produkovať a K model, kde nemôžu. Toto platí pre y a M>0. Ak sa zameriame na ekvilibrium s úplnou akceptáciou peňazí, potom zistíme, že maximálne W dosiahneme pre M=1/2 (pre model, kde držitelia peňazí môžu produkovať). V prípade, keď držitelia peňazí nemôžu produkovať, sú optimálne hodnoty M nižšie, pre $y\geq 1/2$ dokonca optimálne M=0 (to je presne prípad Kiyotakiho-Wrighta).

3.10 Model so sprostredkovateľmi

V tejto podkapitole sa budeme snažiť zaviesť *sprostredkovateľov* - obchodníkov, ktorí za províziu sprostredkujú nejaký tovar ku kupcovi. Budeme sa teda snažiť zjednodušiť výmenný proces pridaním nového typu agentov (Bose, Sengupta, 2001). Každý agent má prístup k produkčnej technológii na výrobu jednotky homogénneho, deliteľného tovaru (bez nákladov). Nikto nemôže konzumovať svoj produkčný tovar – konzumácii musí predchádzať výmena. Agent nemôže produkovať, ak drží výstup z predchádzajúcej periódy. Pravdepodobnosť stretnutia iného agenta počas periódy je $\lambda\in(0,1)$. Keď sa agenti stretnú, vymenia si svoje tovary, konzumujú a môžu produkovať. Je teda rozdielny predpoklad oproti predchádzajúcim modelom – keďže tovary sú homogénne, neexistuje žiadna bližšia špecifikácia spotrebného tovaru (agent iba nesmie konzumovať svoj výstup). Jediným cieľom tejto časti je ukázať výhodnosť špeciálnych agentov - sprostredkovateľov. Ak $\delta\in(0,1)$ je spoločný diskontný faktor agentov, súčasná hodnota očakávanej výplaty agenta je $v=\lambda+\delta v$, teda $v = \frac{\lambda}{1-\delta}$. Je za takýchto podmienok priestor pre agentov - sprostredkovateľov, ktorí sprostredkujú výmenu za poplatok? Uvažujme teda, že agent sa môže špecializovať ako obchodník-sprostredkovateľ, alebo zostať producentom. Bývalý producent, ktorý sa rozhodne stať obchodníkom si vytvorí obchodné miesto a ponúka na tomto mieste producentom výmenu za nejaký poplatok. Toto obchodné miesto môže byť chápané aj ako miesto, kde môžu producenti obchodovať navzájom a platia trhovníkovi odmenu. Producent môže byť informovaný – ak pozná obchodné miesto, alebo neinformovaný, ak ho nepozná. Producent sa to učí tak, že miesto v jednej perióde objaví a v ďalšej perióde je už informovaný. Ak je informovaný, môže ísť priamo na obchodné miesto, zaplatiť poplatok a uskutočniť obchod. Predpokladáme, že na ceste do obchodného miesta nemôže nikto stretnúť iného producenta hľadajúceho obchod (ide priamo na obchodné miesto, bez zastávok). Neinformovaný producent hľadá partnera. Môže to dopadnúť tromi spôsobmi – nestretne partnera, stretne ďalšieho producenta, ktorý tiež hľadal, alebo nájde obchodné miesto. V posledných dvoch prípadoch uzavrie obchod a vráti sa k produkcii. Ak nájde obchodné miesto, stáva sa informovaným. Označíme m_t časť agentov špecializovaných ako obchodníci a u_t časť neinformovaných producentov (zvyšok agentov sú teda informovaní producenti). Neinformovaný producent má teda šancu nájsť niekoho z časti ($m_t + u_t$). Ďalej označíme $\lambda_u(m_t,u_t)$ pravdepodobnosť, že daný neinformovaný agent stretne iného rovnakého typu a $\lambda_m(m_t,u_t)$ že nájde obchodné miesto. Súčet je pravdepodobnosť, že môže obchodovať ($\in(0,1)$). Obchodníci môžu stretnúť a obslúžiť viac klientov za periódu. Prídu k nim informovaní producenti a neinformovaní, ktorí ich nájdu. Obchodník nemôže stretnúť iného obchodníka (keďže títo sa nachádzajú vždy na svojom obchodnom mieste). Obchodníci majú jednotnú mieru poplatkov v každej periòde $r_t\in(0,1)$ a obslúžia K_t klientov. Okrem toho predpokladáme, že malá časť $\gamma\in(0,1)$ informovaných producentov stratí kontakt s obchodníkom a stane sa neinformovaným. Ekvilibrium je dané stabilným počtom obchodníkov, m a mierou poplatkov r, takých, že:

- producent nemá chuť stať sa obchodníkom
- obchodník sa nechce zmeniť na producenta
- ak sú nejakí obchodníci, informovaný producent nechce hľadať partnera a ide priamo za obchodníkom.

Ako to vyzerá s výplatami agentov? Ak obchodníci nie sú aktívni (m=0), potom výplata každého agenta je v (definované vyššie). Ak m>0, označíme V_i, V_u a V_m súčasné hodnoty očakávaných výplat informovaného a neinformovaného producenta a obchodníka. Z rovníc pre výplaty vidieť, že m a u sú previazané – pre každú hodnotu m máme korešpondujúcu rovnovážnu hodnotu u. Avšak producent ašpirujúci na obchodníka má nižšiu výplatu – pretože nemá klientov, musí ich ešte len získať. Preto výplata začínajúceho obchodníka je $V_y = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t r K_t$, $V_m>V_y$. Na zachovanie ekvilibria – aby zostali obchodníci – musí platiť, že informovaný producent je na tom aspoň tak dobre ako neinformovaný – $V_i \geq V_u$ (pretože ak by neinformovaný producent mal vyššiu výplatu, bolo by pre neho lepšie tváriť sa, že žiadne obchodné miesto nepozná a hľadať si náhodne partnera). Ak $r^{iu}(m)$ je miera poplatkov, pri ktorých platí rovnosť ($V_i=V_u$), dostaneme $V_i(r^{iu}(m)) = V_u(r^{iu}(m)) = \frac{1-r^{iu}(m)}{1-\delta}$. Táto miera je maximálnou hranicou pre poplatok. Ďalšou požiadavkou je, aby obchodník nechcel prejsť na producenta, $V_m \geq V_u$. Označíme $r^{mu}(m)$ takú hodnotu poplatku, pri ktorom platí rovnosť. Toto je najnižšia miera poplatku z pohľadu obchodníka. Nakoniec musí platiť, že žiadny producent sa už nechce stať obchodníkom, z čoho získame $r^{uy}(m)$ – ďalšia horná hranica pre poplatok. Aby ekvilibrium s obchodníkmi existovalo, musí platiť, že dolná hranica poplatku je ≤ ako minimum horných hraníc. Ak teraz zafixujeme nejakú hodnotu $m\in(0,1)$ obchodníkov, ekvilibrium s príslušnou mierou r existuje vtedy a len vtedy, ak $V_m(r^{iu}(m)) \geq V_u(r^{iu}(m))$. Pre špeciálne funkcie λ_u a λ_m - $\begin{matrix} \lambda_u(m,u) = \dfrac{\lambda_0 u}{m+u} \\ \lambda_m(m,u) = \dfrac{\lambda_0 m}{m+u} \end{matrix}$, kde $\lambda_0 \in (0,1)$platí, že existuje jediná hodnota $m^* \in [0,1]$, ktorá maximalizuje celkové bohatstvo. Navyše, $m^* \in (0,1)$ (teda sú nejakí obchodníci a zároveň existujú aj producenti) vtedy a len vtedy, ak $\gamma < \dfrac{1-\lambda_0}{2-\lambda_0}$.

3.11 Model s heterogénnymi agentmi

Teraz sa budeme opäť zaoberať čiastočnou akceptáciou peňazí a heterogénnymi agentmi (Shevchenko, Wright, 2002). Opäť chceme ukázať na neserióznosť zmiešaného ekvilibria. Toto ekvilibrium vzniklo kvôli faktu, že ak sú dve ekvilibriá v čistých stratégiách, tak je medzi nimi ekvilibrium v zmiešaných stratégiách, ale v modeli dáva malý ekonomický zmysel. Po prvé je nestabilné a po druhé vzniklo s predpokladom, že tovary a peniaze sú nedeliteľné. Ak tovary alebo peniaze sú deliteľné, toto ekvilibrium neexistuje. Napriek tomu takéto ekvilibrium v niektorých prípadoch môže dávať zmysel – napríklad blízko hraníc obchody akceptujú cudziu menu, kým vnútri krajiny nie, táto mena je teda čiastočne akceptovaná. Ukážeme, že čiastočná akceptácia vzniká prirodzene, pretože agenti s rôznymi charakteristikami sa odlišujú v nákladoch a ziskoch z použitia peňazí. Môžu sa odlišovať v podmienkach užitočnosti z produkcie, skladovacích nákladoch a miery časovej preferencie. Ekonomika vyzerá nasledovne: čas je spojitý a agenti žijú nekonečne dlho. Tovary sú nedeliteľné, agent i produkuje tovar i, ktorý nie je jeho spotrebným tovarom. Agenti sa stretávajú náhodne s mierou β a pravdepodobnosť, že akceptujem tovar je x. Konzumácia prináša agentovi užitočnosť u a produkcia náklady c. Okrem toho, agent má parameter r_i a skladovacie náklady γ_i na peniaze (tým je daná heterogenita agentov), ktoré sú nedeliteľné a každý môže skladovať $m \in \{0, 1\}$ jednotiek. Agenti s peniazmi (M) sú opäť kupujúci a s tovarmi predávajúci (1-M). Označíme V^i_m hodnotovú funkciu agenta i s m jednotkami peňazí, m_i bude pravdepodobnosť, že agent i má v rovnovážnom stave peniaze a π_i pravdepodobnosť, že i akceptuje peniaze, ak sú mu vo výmene ponúknuté. Získame rovnice dynamického programovania (spojité):

$$(52)\ r_i V_0^i = \int_A \beta x m_j \pi_i (-c_i + V_1^i - V_0^i) dj + \int_A \beta x^2 (1-m_j)(u_i - c_i) dj$$

$$(53)\ r_i V_1^i = \int_A \beta x (1-m_j) \pi_j (u_i + V_0^i - V_1^i) dj - \gamma_i$$, kde A je množina agentov s mierou 1.

Prvá rovnica je miera, s ktorou agent i, keď je predajca, stretne j, ktorý chce tovar i a má peniaze, krát zisk z akceptovania peňazí s pravdepodobnosťou π_i, integrované cez množinu agentov, plus miera, s ktorou stretne agenta j bez peňazí a majú dvojzhodu, krát zisk barter-a, tiež integrované. Druhá rovnica je miera stretnutia kupujúceho i s peniazmi agenta j, ktorý má jeho spotrebný tovar, krát pravdepodobnosť akceptovania peňazí, krát zisk z obchodovania, integrované, mínus náklady skladovania peňazí. Poznamenajme, že to, či agent i chce obchodovať s j, závisí iba na type i a nie j. Teda definujme množinu agentov, ktorí akceptujú peniaze (zo všetkých, čo ich majú): - = {i∈A| π_i=1}. Potom najlepšia odpoveď pre π_i je:

$$\pi_i = \begin{cases} 1 & \text{ak } \Delta_i>0 \\ [0, 1] & \text{ak } \Delta_i=0 \\ 0 & \text{ak } \Delta_i<0 \end{cases}$$

kde $\Delta_i = -c_i + V^i_1 - V^i_0$.

Teda i∈- ak $\Delta_i>0$. Zaujíma nás stacionárne ekvilibrium, kde V^i_m a m_i nezávisia na čase. Upravením rovnovážnych podmienok získame: $m_i = \frac{\int m_j d_j \forall i}{\int d_j} = \frac{M}{\mu} \forall i \in -$, kde M je celková ponuka peňazí a μ=μ(-)=∫dj je miera populácie, ktorá akceptuje peniaze (alebo μ=Eπ_i). Špeciálnym prípadom je model s homogénnymi agentmi. V tejto verzii π je (v zmiešaných stratégiách) pravdepodobnosť, že agent (reprezentatívny) akceptuje peniaze. Dá sa ukázať, že existuje nejaké π^* také, že ak $\pi<\pi^*$, potom najlepšia odpoveď je π=0; ak $\pi=\pi^*$ najlepšia odpoveď je π=[0,1] a ak $\pi>\pi^*$ potom π=1. Ak $\pi^*\in(0, 1)$, máme tri Nashove ekvilibriá: π=0, $\pi=\pi^*$ a π=1. Zmiešané ekvilibrium ukazuje čiastočnú akceptovanosť. Ale toto ekvilibrium nie je robustné v prirodzenom zmysle – ak nejaký agent z nejakého dôvodu urobí chybu a akceptuje peniaze s pravdepodobnosťou $\pi^*+\varepsilon$, pre každé ε>0, najlepšia odpoveď skočí na π=1. Preto budeme pokračovať s heterogénnymi agentmi. Potom v ekvilibriu μ=F(μ), a preto každé ekvilibrium je bod μ∈[0,1] z F. Ak F(0)=0 potom μ=0 je ekvilibrium. Ak F(0)>0 potom sú dva prípady: F(1)=1, čo implikuje μ=1 ekvilibrium a F(1)<1, čo implikuje, že musí existovať ekvilibrium μ∈(0,1), hoci F nemusí byť spojitá. Dôvodom je Tarsky-ho veta o pevnom bode. My ale chceme ukázať viac, napríklad existenciu monetárneho ekvilibria, kde $\mu>0$. Jedným zo spôsobov je nájsť podmienku, ktorá vylúči nemonetárne ekvilibrium, teda aby $F(0)>0$, čo nie je možné pre $\gamma_i \geq 0$. Avšak môžeme zvoliť $\gamma_i<0$ – negatívne náklady skladovania peňazí môžu byť vlastne dividendy. Potom pre každého agenta $\pi_i=1$ je dominantná stratégia. V modeli teda môžeme mať rôzne ekvilibriá – ekvilibrium môže byť jediné – nemonetárne, čisto monetárne, alebo čiastočne peňažné, ale môže byť model so všetkými troma. Môže tiež byť viac čiastočne peňažných ekvilibrií s rôznymi stupňami akceptácie – čo v prípade s homogénnymi agentmi nebolo možné. V tomto modeli s heterogénnymi agentmi sme vlastne riešili problém nájdenia pevného bodu na [0,1]. Napriek tomu, že získanie ekvilibria týmto spôsobom bolo relatívne jednoduché, dosiahli sme ním to, čo sme chceli – akceptácia peňazí je endogénna a závisí od parametrov ekonomicky zaujímavých a môže existovať viac ekvilibrií s rôznymi stupňami monetizácie. Tento typ modelu by do budúcnosti mohol nahradiť štandardný model s homogénnymi agentmi.

3.12 Model s endogénnym stretávaním

Teraz sa budeme zaoberať stretávaním agentov. Budeme uvažovať nie o exogénnom, náhodnom stretávaní, ale endogénnom (Corbae, Temzelides, Wright, 2002). Teda agenti sú spojení tak, aby spĺňali podmienku stability, preferujú spojenie s agentom, ktorý je na ich ceste k ekvilibriu. Cieľom je ukázať, že endogénne stretávanie je dobrou alternatívou náhodnému. Bude to zaujímavé pre tých, ktorí si myslia, že náhodné stretávanie je nerealistické a extrémne zjednodušenie. Ekonomika vyzerá nasledovne: čas je diskrétny, neohraničený, je k nedeliteľných a neskladovateľných tovarov. Množina agentov A=[0, 1] je rovnako rozdelená na k typov, typ i produkuje výrobok i a konzumuje i+1 (mod k). Náklady na produkciu sú c, užitočnosť z konzumácie je U, diskontný faktor β. Okrem typu sú agenti označení držaním peňazí, $m\in\{0, 1\}$. Množstvo peňazí a aj celkový počet agentov s peniazmi je $M\in(0, 1)$. V každom tu uvažovanom ekvilibriu bude mať peniaze v každom čase časť M agentov každého typu. Typ agenta a držba peňazí sú verejne známe, ale nie je známa história obchodovania, agenti sú anonymní. Agregátny stav ekonomiky je reprezentovaný rozdelením držby peňazí γ_t a náhodnou premennou s_t značiacou vonkajšiu neistotu (sunspot). V každom čase robia agenti dva typy rozhodnutí: po prvé, rozhodujú sa, s kým sa stretnú (ak s nikým, hovoríme, že sa agent stretol sám so sebou). Po druhé, ak sa stretnú, musia sa rozhodnúť, či obchodovať. Tovary sú nedeliteľné, nie je priamy barter ($k>2$), obchod sa uskutoční, ak agent i s peniazmi stretne typ i+1 bez peňazí, potom prvý dá peniaze druhému za svoj spotrebný tovar. Na ukázanie ekvilibria je dobré postupovať viac všeobecne. Pre každú množinu A s nejakými vlastnosťami, stretnutie v t môže byť popísané rozdelením A na θ_t podmnožiny veľkosti 1 alebo 2, volané *koalície*. Potom pravidlo stretávania je funkcia $\theta_t(\gamma_t, s_t)$, ktorá rozdeľuje agentov do koalícií podľa stavu ekonomiky. Pravidlo obchodovania je $\tau_t(\theta_t, \gamma_t, s_t)$ – sú to obchodovacie rozhodnutia každého agenta pri danom rozdelení a stave. Okamžitá užitočnosť agenta i je $w^i_t(\theta_t, \tau_t)$. Potom sa dá rekurzívne zapísať celoživotná užitočnosť. Ekvilibrium sa skladá zo stretávacích a obchodovacích pravidiel takých, že pre každé t a (γ_t, s_t) platí: žiadna koalícia si nemôže polepšiť stretnutím iným ako je v ekvilibriu; pri danom stretnutí, koalícia si nemôže polepšiť iným obchodovaním ako je v ekvilibriu. Ešte treba popísať, aké odchýlky sa môžu vyskytnúť. Po prvé, pre nejakého agenta môže byť vhodné byť radšej nespárovaný v nejakom t ako nasledovať ekvilibrium. Po druhé, dvaja agenti sa môžu stretnúť v t, a ak v ekvilibriu mali iných partnerov, týchto nestretnú. Ak sa niektorí agenti odchýlia, pokračujú s tým, že ostatní agenti sa stretávajú a obchodujú podľa ekvilibria (okrem tých opustených). Vždy existuje nemonetárne ekvilibrium (žiadny obchod). My ale uvažujme monetárne. Teraz ignorujme sunspot s. Uvažujeme, že existuje ekvilibrium, kde: pre všetky t, každý agent na kratšej strane (ten s peniazmi, ak $M<1/2$ a bez peňazí, ak $M>1/2$) nájde niekoho, s kým môže obchodovať peniaze za tovar alebo naopak. Požadujeme, že vždy, keď agent i s peniazmi stretne agenta i+1 bez peňazí, tak striktne nepreferujú byť s niekým iným ani byť radšej nespárovaný alebo neobchodovať. Samozrejme, niektorí agenti na dlhšej strane zostanú nespárovaní, čo sa im nepáči, ale podľa ekvilibria nikto nepreferuje byť s nimi. Agenti na kratšej strane vyzdvihnú partnera náhodne. Potom pravdepodobnosti obchodovania pre agentov s a bez peňazí sú:

(54) $a^e_1 = \min\{1, \dfrac{1-M}{M}\}$

(55) $a^e_0 = \min\{1, \dfrac{M}{1-M}\}$

(e znamená endogénne stretávanie).

Zostavíme Bellmanove rovnice pre V_0 a V_1. Dá sa ukázať, že modely s náhodným stretávaním a endogénnym stretávaním sú kvalitatívne rovnaké, ale podmienka neodchýlenia sa od ekvilibria je silnejšia vo verzii náhodného stretávania, lebo $a^e_1>a^r_1$ (r je náhodné stretávanie). Intuitívne, je ľahšie minúť peniaze s endogénnym stretávaním a to robí peniaze viac žiaducimi. Navyše, ak M=1/2, v tomto modeli výmena dosiahne efektívny výstup: každý agent konzumuje každú druhú periódu. To je rovnako dobré, ako by sme mali nejaký záznam všetkých stretnutí a výmena by bola kooperovaná.

Z Á V E R

Cieľom diplomovej práce bolo zostaviť stručný prehľad problematiky týkajúcej sa vyhľadávacieho prístupu v monetárnej ekonómii. Ukázali sme základný model Kiyotakiho-Wrighta z roku 1993, tri ekvilibriá – čisto-monetárne, zmiešané a nemonetárne, spravili sme rozšírenie pre endogénnu špecializáciu a ukázali sme možnosť dvoch mien súčasne.

Ďalej sme predstavili niektoré staršie modely – hlavne modely s komoditnými peniazmi, kde niektoré druhy tovarov slúžili v niektorých prípadoch ako prostriedok výmeny, neskôr sme zaviedli do obehu aj peniaze ako všeobecný prostriedok výmeny. Zaoberali sme sa možnosťou rôznej kvality tovarov, a to s predpokladom úplnej informácie aj privátnej informácie, kde agenti nevedia rozoznať kvalitu tovarov.

Po základnom modeli sa touto problematikou zaoberalo niekoľko autorov, ktorí sa pokúšali o rôzne rozšírenia a menili niektoré východiskové predpoklady, prípadne použili svoj vlastný postup na získanie ekvilibrií, stále ale používali vyhľadávací prístup. Ukázali sme najskôr problém týkajúci sa zmiešaného ekvilibria, zaoberali sme sa spôsobom stretávania – či je lepšie aktívne hľadanie si partnera alebo čakanie, kým niekto nájde mňa. Neskôr do ekonomiky môžu vstúpiť aj noví členovia – sprostredkovatelia, ktorí nám zabezpečia výmenu, ak ich navštívime v ich obchodnom mieste. Zaoberali sme sa aj praktickou časťou – a to prípadmi falšovania peňazí. Neskôr pribudla možnosť pôžičiek, ktorá nebola predtým podľa predpokladov prípustná, prišlo k možnosti deliteľnosti peňazí a tovarov, vyplácanie dividend, prípadne náklady skladovania peňazí. Uviedli sme model takzvaných cigaretových peňazí, podrobnejšie sa nimi zaoberal Martin Hundža vo svojej diplomovej práci (Hundža, Martin, 2004).

Myslíme si, že cieľ diplomovej práce – zostaviť prehľad existujúcich a zaujímavých modelov s vyhľadávacím prístupom, bol splnený.

LITERATÚRA

1. AIYAGARI, S. Rao a WALLACE, Neil, “Existence of Steady States with Positive Consumption in the Kiyotaki-Wright Model,” Review of Economic Studies, vol.58, no.5 (Október 1991), pp.901-916.

2. AIYAGARI, S. Rao a WILLIAMSON, Stephen D., “Credit in a Random Matching Model With Private Information” Working Paper (Február 1997).

3. ALCHIAN, A., “Why Money?” Journal of Money, Credit, and Banking, vol.9 (1977), pp.133-140.

4. BOSE, Gautam a SENGUPTA, Abhijit, “Endogenous Intermediation in a Model of Search,” Working Paper (2002).

5. BURDETT, Kenneth, COLES, Melvyn, KIYOTAKI, Nobuhiro a WRIGHT, Randall, “Buyers and Sellers: Should I Stay or Should I Go?” American Economic Review, vol.85, no.2 (Máj 1995), pp.281-286.

6. BURDETT, Kenneth, TREJOS, Alberto a WRIGHT, Randall, “Cigarette Money,” Journal of Economic Theory (Február 2000).

7. CORBAE, Dean, TEMZELIDES, Ted a WRIGHT, Randall, “Matching and Money,” Working Paper (2002).

8. GREEN, Edward J. a WEBER, Warren E., “Will the New $100 Bill Decrease Counterfeiting?” Federal Reserve Bank of Minneapolis, Quarterly Review, vol.20, no.3 (leto 1996), pp.3-10.

9. GREEN, Edward J. a ZHOU, Ruilin, “A Rudimentary Random-Matching Model with Divisible Money and Prices,” Working Paper (Október 1996).

10. HUNDŽA, Martin, “Model ekonomiky s nepeňažnou menou,” Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, diplomová práca (2004).

11. KIYOTAKI, Nobuhiro a WRIGHT, Randall, “On Money as a Medium of Exchange,” Journal of Political Economy, vol.97, no.4 (August 1989), pp.927-954.

12. KIYOTAKI, Nobuhiro a WRIGHT, Randall, “A Search-Theoretic Approach to Monetary Economics,” American Economic Review, vol.83, no.3 (Marec 1993), pp.63-77.

13. RAVIKUMAR, B. a WALLACE, Neil, “A Benefit of Uniform Currency,” The Pennsylvania State University Working Paper, (Júl 2001).

14. RUPERT, Peter, SCHINDLER, Martin, SHEVCHENKO, Andrei a WRIGHT, Randall, “The Search-Theoretic Approach to Monetary Economics: A Primer,” Economic Review, vol.36, no.4 (2000), pp.10-28.

15. SHEVCHENKO, Andrei a WRIGHT, Randall, “A Simple Search Model of Money with Heterogeneous Agents and Partial Acceptability,” Working Paper (September 2002).

16. SHI, Shouyong, “Credit and Money in a Search Model with Divisible Commodities,” Review of Economic Studies, vol.63, no.4 (Október 1996), pp.627-652.

17. SHI, Shouyong, “A Divisible Search Model of Fiat Money,” Econometrica, vol.65, no.1 (Január 1997), pp.75-102.

18. WILLIAMSON, Stephen D. a WRIGHT, Randall, “Barter and Monetary Exchange under Private Information,” Federal Reserve Bank of Minneapolis Staff Report 141, (Jún 1991).

19. WRIGHT, Randall, “A Note on Purifying Mixed Strategy Equilibria in the Search Model of Money,” Federal Reserve Bank of Cleveland Working Paper 9709, (September 1997).

20. ZHOU, Ruilin, “Currency Exchange in a Random Search Model,” Review of Economic Studies, vol.64, no.2 (Apríl 1997), pp.289-310.

21. ZHOU, Ruilin, “Does Commodity Money Eliminate the Indeterminacy of Equilibria?” Federal Reserve Bank of Chicago Working Paper 1999-15, (Január 2002).