

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2004

Andrea Pišková

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika

MODELOVANIE PORTFÓLIA DLHOPISOV S UVAŽOVANÍM
RIZIKA DEFAULTU

Diplomová práca

Diplomant: Andrea Pišková

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2004

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu spracovala samostatne a použila som len literatúru uvedenú v zozname.

Touto cestou by som chcela poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za jeho odborné vedenie, cenné rady a za množstvo času, ktoré mi venoval pri vypracovávaní diplomovej práce. Tiež by som chcela poďakovať priateľovi Mariánovi Osúchovi za podporu a pomoc pri vyhľadávaní dát.

Obsah

Úvod	3
1 Základné pojmy	5
2 Pravdepodobnosť defaultu	10
2.1 Odhadnutie hodnoty a volatility aktív	11
2.2 Výpočet pravdepodobnosti defaultu	13
3 Riziko defaultu	16
3.1 Strata	16
3.2 Korelácia defaultov	17
3.3 Výnos	19
3.4 Diverzifikácia portfólia	19
4 Praktické riešenie	21
4.1 Výpočet EDF	21
4.2 Diverzifikácia	23
4.2.1 Strata	23
4.2.2 Korelácia defaultov	24
4.2.3 Výnos	25
4.2.4 Diverzifikácia portfólia	26
4.3 Simulácie trhových hodnôt aktív	28
4.3.1 Príklad 1	31
4.3.2 Príklad 2	31
Záver	33
Literatúra	34

Úvod

Podnikové dlhopisy prinášajú vyšší výnos v porovnaní s niektorými inými investíciami na finančnom trhu. Tento výnos však len kompenzuje vyššie riziko. Investor podstupuje nielen riziko spojené s možnými zmenami úrokovej miery, ale tiež riziko, že firma nebude schopná v čase splatnosti dlhopisu splatiť svoje záväzky. Kým zmeny v úrokovej miere môžu mať za následok zníženie hodnoty dlhopisu, výskyt defaultu môže spôsobiť investorovi značnú stratu, keďže skrachovaná firma zvyčajne vyplatí len malú časť pôvodnej hodnoty dlhopisu.

Podnikové dlhopisy patria k najrizikovejším dlhopisom, pretože spoločnosti - i keď veľké a stabilné - sú citlivejšie na ekonomické problémy, konkurenciu a chyby manažmentu ako vláda. Nevieme s istotou povedať, ktoré firmy skrachujú v nasledujúcom roku, vieme však vypočítať odhad pravdepodobnosti defaultu konkrétnej firmy.

Investori sa preto snažia využiť výhody diverzifikácie a minimalizovať riziko defaultu. Ešte donedávna neexistovali modely, ktoré by vedeli merať diverzifikáciu portfólia podnikových dlhopisov s rizikom defaultu. Pri portfóliu dlhopisov s rizikom defaultu je potrebné zistiť riziko defaultu jednotlivých aktív a takisto určiť vzťah rizík defaultu každej dvojice aktív v portfóliu. V našej práci sme prezentovali teóriu odhadu pravdepodobnosti defaultu firmy, ktorá je predstavená v práci [1] a vychádzajúc z práce [7] sme sformulovali úlohu diverzifikácie portfólia podnikových dlhopisov.

Naším cieľom bolo pre konkrétne hodnoty z reálneho sveta vypočítať pravdepodobnosti defaultu, ich korelácie defaultu a ďalej ukázať diverzifikáciu, teda nájsť optimálne váhy dlhopisov v portfóliu, ktoré minimalizujú stratu. A nakoniec pomocou simulácií ukázať výhody tejto diverzifikácie pre investora.

V prvej kapitole sú uvedené základné pojmy spojené s investovaním do podnikových dlhopisov.

V druhej uvádzame teóriu odhadu hodnoty aktív firmy založenú na oceňovaní vlastného kapitálu ako call opcie na aktíva firmy a postup pri výpočte pravdepodobnosti defaultu firmy.

Tretia kapitola je venovaná úlohe diverzifikácie portfólia, pre ktorú je kľúčové určenie korelácie defaultov jednotlivých firiem uvažovaných v portfóliu. Diverzifikácia znamená minimalizovanie neočakávanej straty investora spôsobenej defaultom pri požadovanom výnose.

Záverečná kapitola ukazuje, ako sa dá prezentovaná teória využiť v praxi. Použitím reálnych dát počítame všetky veličiny a riešime úlohu diverzifikácie portfólia. Uvádzame tu tiež príklady porovnania rôznych stratégií investora, aby sme ukázali význam diverzifikácie a jej výhody pre investora.

Kapitola 1

Základné pojmy

Podnikové dlhopisy emitujú najmä súkromné spoločnosti ako alternatívu úveru a majú rozličné formy. Môžu sa členiť podľa spôsobu zabezpečenia, alebo podľa účelu použitia.

Podľa spôsobu zabezpečenia delíme dlhopisy na:

- zabezpečené - dlhopis je krytý konkrétnym, alebo celým majetkom, s ktorým môže spoločnosť disponovať až do termínu splatnosti. V prípade platobnej neschopnosti je tento majetok rozpredaný a z jeho výnosov sa vyplácajú dlhopisy.
- nezabezpečené - nie sú kryté žiadnymi aktívami, úverový veriteľ sleduje schopnosť firmy vytvárať zisk. Hlavným zdrojom krytia je povest' firmy. V prípade likvidácie sa ich majitelia vyrovnajú až po vyrovnaní držiteľov zabezpečených dlhopisov, ale pred držiteľmi prioritných akcií.

Aktíva alebo majetok podniku je súhrn majetkových hodnôt, ktoré patria podniku a slúžia na podnikanie. Tvoria ho dve základné skupiny prostriedkov:

- investičný majetok, ktorý ďalej rozdeľujeme na hmotný (pozemky, nehnuteľnosti, stroje,...), nehmotný (patenty, práva, softvér,...) a finančné investície (dlhodobé cenné papiere, umelecké predmety,...),
- obežný majetok zahŕňa zásoby (materiál, tovar, výrobky,...), finančný majetok, pohľadávky a ostatný obežný majetok.

Pasíva tvoria kapitál podniku. Kapitálová štruktúra je štruktúra zdrojov, z ktorých vznikol majetok podniku. Potom teda kapitál rozdeľujeme na:

- vlastný kapitál, ktorý vložil do podniku sám zakladateľ,

- cudzí kapitál, ktorý vložil do podniku veriteľ.

Vlastný kapitál je nositeľom podnikateľského rizika a je ukazovateľom finančnej nezávislosti.

Vlastné zdroje nie sú zaťažené povinnosťou spätnej väzby. Čím väčší je podiel vlastných zdrojov, tým väčšia je finančná nezávislosť, podnik je odolnejší voči krízam a dáva istotu veriteľom. Vlastný kapitál spoločnosti tvorí:

- základný kapitál, ktorý tvoria peňažné a nepeňažné vklady,
- emisné ážio t.j. kladný rozdiel medzi skutočne dosiahnutou predajnou cenou akcií a ich nominálnou cenou,
- rezervný kapitálový fond,
- nerozdelený zisk, teda časť zisku po odvedení daní, ktorá sa nerozdelila medzi majiteľov.

Cudzí kapitál je vlastne dlh, ktorý musí podnik splatiť v určenej dobe. Podľa tejto doby ho rozdeľujeme na:

- krátkodobý cudzí kapitál - na dobu menej ako jeden rok. Patria sem krátkodobé bankové úvery, dodávateľské úvery, zálohy odberateľov, pôžičky, záväzky voči zamestnancom a voči štátnemu rozpočtu.
- dlhodobý cudzí kapitál - na dobu viac ako jeden rok. Tvorí ho dlhodobé úvery bánk, vydané podnikové obligácie, dlžné úpisy, dlhodobé zmenky, dlhodobé zálohy od odberateľov.

Nákladom za používanie cudzieho kapitálu je úrok a ostatné výdavky spojené s jeho získavaním. Napriek tomu, že za cudzí kapitál platí podnik úrok, možno povedať, že cudzí kapitál je lacnejší ako vlastný kapitál a zároveň krátkodobý kapitál je lacnejší ako kapitál dlhodobý. To je spôsobené daňovým efektom. Úroky z cudzieho kapitálu sú súčasťou nákladov podniku, teda znižujú daňový základ a tým aj výšku odvedenej dane.

Default , podľa definície Moody's, nastáva v týchto troch prípadoch:

1. ak nastane nevyplatenie, alebo omeškanie vyplatenia úroku alebo kapitálu,
2. na emitenta je vyhlásený konkurz, nútená správa alebo je v likvidácii,
3. v prípade nútenej výmeny, t.j.:

- (a) emitent ponúkne veriteľom nové cenné papiere, resp. emisie s cieľom znížiť svoje záväzky, (výmena za akcie alebo obligácie s nižším kupónom),
- (b) primárnym zámerom výmeny je pomôcť dlžníkovi vyhnúť sa defaultu.

Základným cieľom tejto definície je zachytiť všetky udalosti, ktoré menia vzťah medzi emitentom a držiteľom dlhopisu pôvodne obsiahnutým v zmluve a ktoré spôsobujú investorovi ekonomickú stratu. Strata, ktorú utrpí investor kvôli zmeneným podmienkam na trhu sa nepovažuje za default. Takisto sa za default nepovažuje strata spôsobená zmenou ceny v dôsledku zhoršenia ratingového hodnotenia emitenta.

Výnos sú všetky príjmy, ktoré plynú z investície od chvíle, keď do nej vložíme prostriedky až do doby posledného možného príjmu z tejto investície. Pri investovaní musí investor počítať s tým, že nie vždy bude mať zaručený výnos. Preto musí rozlišovať historický výnos, ktorý už bol dosiahnutý v minulosti a očakávaný výnos, ktorý sa očakáva do budúcnosti. Každý investor investuje v súčasnosti s tým, že do budúcnosti očakáva príjem. Tento príjem mu bude kompenzovať čas, počas ktorého má viazané prostriedky, ako aj riziko súvisiace s investovaním. Táto kompenzácia mu plyní v podobe rôznych peňažných tokov, v prípade dlhopisov sú to kupóny. Súhrnný ukazovateľ je teda úrok ako cena kapitálu.

Riziko vždy vyjadruje určitý stupeň neistoty týkajúci sa očakávaných výnosov. Predstavuje nebezpečenstvo pre investora, že nedosiahne očakávaný výnos. Vzhľadom na to, že riziko je veličina, ktorú ovplyvňuje viacero faktorov, je veľmi ťažké ho kvantifikovať. Riziko v konečnom dôsledku výrazne ovplyvní výšku úroku a takisto aj správanie sa investora. Riziko sa nedá úplne odstrániť, dá sa však znížiť **diverzifikáciou**, čo znamená, že investor umiestni svoje investície do väčšieho počtu finančných aktív.

Riziko defaultu je neistota vyplývajúca zo schopnosti firmy splatiť svoje dlhy a obligácie. Neexistuje spôsob, ktorým by sme mohli rozdeliť firmy na tie, ktoré skrachujú a ktoré nie. Vieme urobiť odhady pravdepodobnosti defaultu.

Default znamená, že firma nie je schopná splatiť svoje záväzky voči veriteľom a vyhlási bankrot. Default je v podstate zriedkavý. Priemerná firma má pravdepodobnosť defaultu okolo 2% ročne. Pravdepodobnosti defaultu sa však môžu pri rôznych firmách značne líšiť. Pravdepodobnosť, že skrachuje firma, ktorá má rating Aaa je 0,02% za rok, kým firma s ratingom Caa, na spodu ratingovej škály, má pravdepodobnosť defaultu 4%, čo je dvestokrát viac.

Riziko defaultu je síce malé, ale v krátkom čase môže výrazne vzrásť bez predchádzajúceho varovania. Proti tomuto riziku sa nedá úplne zabezpečiť, môže byť len čiastočne zredukované pomocou diverzifikácie. Firmy preto zvyčajne vyplácajú úrok zvýšený o prémii rizika od bezrizikového, aby tým kompenzovali neistotu vyplývajúcu z nožnej straty.

Rating môže byť pridelený jednotlivým konkrétnym dlhopisom, ale môžeme hovoriť aj o ratingu emitenta daného dlhopisu. Rating dlhopisu predstavuje mieru dôveryhodnosti emitenta tohto dlhopisu, teda jeho schopnosť v stanovených termínoch vyplácať jednotlivé kupóny a nakoniec splatiť istinu.

Za predpokladu, že najspoľahlivejším dlžníkom v krajine je štát, reprezentovaný centrálnou bankou, potom základným ratingovým hodnotením je hodnotenie štátu ako emitenta štátnych dlhopisov. Od hodnotenia štátu sa potom odvíja aj ratingové hodnotenie ostatných emitentov v krajine, resp. ich dlhopisov. V praxi sa nemôže stať, že by niektorý subjekt mal vyšší rating ako štát, z ktorého pochádza.

Ratingové hodnotenie má veľký význam pre investora, ktorý nemusí strácať čas analýzou jednotlivých cenných papierov a takisto mu ukazuje mieru rizika, ktorú so sebou cenný papier prináša.

Rating realizujú hlavne renomované súkromné nezávislé agentúry podľa určitého štandardizovaného modelu. Najznámejšie ratingové agentúry sú Moody's Investor Service(USA) a Standard and Poor's(USA), JBIR(Japonsko) a IBCA Group(Veľká Británia). Hlavnou úlohou ratingu je hodnotenie emitentov a ich zaradenie podľa štandardizovaného systému do určitej skupiny. Rating nie je stabilné hodnotenie. Pozitívne zmeny vedú k vyššiemu hodnoteniu (tzv. upgrading), v opačnom prípade k nižšiemu hodnoteniu (downgrading). Bez ratingu je veľmi nákladné umiestniť obligácie na trhu, vyžaduje si to vyššie úrokové sadzby.

Pri tvorbe ratingu spoločností sa berú do úvahy predovšetkým vnútorné ukazovatele, predovšetkým finančné ukazovatele, ktoré majú na celkovom hodnotení podiel 50%. Spoločnosť sa hodnotí podľa veľkosti, relatívneho objemu zadĺženia, financovanie jej činnosti a podielu zisku určeného na financovanie dlhu. Okrem vnútorných finančných ukazovateľov sa hodnotia aj napr. odvetvové vplyvy, trhová pozícia podniku, kvalita manažmentu a pod.

Ratingové agentúry vypracovali jednotlivé stupne na zaradenie, pričom v rámci jednotlivých stupňov existujú ešte jemnejšie delenia v podobe znamienok +, -, (S&P) ale

bo 1, 2, 3, (Moody's). Ratingové hodnotenie rozlišuje dva stupne. Všetky obligácie od Aaa(AAA) po Baa(BBB) majú tzv. investičný stupeň, teda sú pre investorov veľmi zaujímavé a nesú so sebou iba malé riziko. Všetky ostatné sú obligácie neinvestičného stupňa a sú spojené s vyšším rizikom, ale aj vyšším výnosom.

Stručná charakteristika jednotlivých stupňov:

Aaa - obligácie najvyššej kvality, veľmi vysoká schopnosť emitenta splatiť záväzky.

Aa - vysoká kvalita, dobrá platobná schopnosť emitenta.

A - vyššia stredná kvalita, atribúty obligácií môžu byť ovplyvnené vonkajšími faktormi.

Baa - priemerná schopnosť uhradiť istinu a úroky.

Ba - špekulatívny charakter. Počíta s nestálosťou a nepriaznivými vplyvmi, ktoré by mohli viesť k neprimeranej schopnosti úhrady istiny a úrokov.

B - dlhopisy s náchylnosťou na nesplnenie, ale má schopnosť uhradiť istinu a úroky.

Caa - dlhopisy s náchylnosťou na nesplnenie záväzku.

Ca - vysoký stupeň špekulatívnosti s malou pravdepodobnosťou splnenia záväzkov.

C - obligácie s malou pravdepodobnosťou splnenia záväzkov.

D - obligácie v platobnej neschopnosti.

Standard&Poor's	Moody's
AAA	Aaa
AA	Aa
A	A
BBB	Baa
BB	Ba
B	B
CCC	Caa
CC	Ca
C	C
D - default	D

Tabuľka 1.1: Ratingová škála

Kapitola 2

Pravdepodobnosť defaultu

Pravdepodobnosť defaultu môžeme merať pomocou *EDF* (Expected default frequency). Sú tri hlavné elementy, ktoré určujú pravdepodobnosť defaultu firmy:

- Value of Assets - trhovú hodnotu aktív firmy.
- Asset Risk - neistota alebo riziko hodnoty aktív. Hodnota aktív firmy je odhadnutá a preto je neistá. Teda hodnotu aktív firmy musíme vždy uvažovať spolu s obchodným rizikom firmy.
- Leverage - zaťaženosť dlhmi. To je pomer medzi celkovým dlhom firmy a čistým vlastným kapitálom. Čím väčší je tento pomer, tým väčšie je riziko pre investora.

Riziko hodnoty aktív určuje volatilita aktív, čo je štandardná odchýlka ročnej percentuálnej zmeny v hodnote aktív. Volatilita aktív závisí od veľkosti firmy a odvetvia. Odvetvia s nízkou volatilitou aktív, ako napríklad bankovníctvo, majú zvyčajne veľkú zaťaženosť dlhmi v porovnaní s odvetviami s vysokou volatilitou aktív, napríklad počítačový priemysel.

Riziko defaultu firmy rastie, ak sa hodnota aktív firmy približuje k účtovnej hodnote pasív. Firma skrachuje, keď trhovú hodnotu aktív nie je schopná pokryť záväzky. V skutočnosti firmy neskrachujú hneď keď ich trhovú hodnotu aktív dosiahne účtovnú hodnotu pasív. Je to spôsobené tým, že niektoré ich záväzky majú dlhodobý charakter a to im umožňuje ďalej pokračovať v obchodovaní. Zistilo sa, že **bod defaultu** - hodnota aktív firmy, kedy firma skrachuje, sa nachádza niekde medzi celkovými pasívami a krátkodobými pasívami.

Proces určenia EDF spočíva v troch krokoch:

1. odhadnúť hodnotu aktív V_A a ich volatilitu σ_A - v tomto kroku sa hodnota aktív a ich volatilita odhadne z trhovej hodnoty a volatility vlastného kapitálu a z účtovnej hodnoty pasív,
2. vypočítať pravdepodobnosť defaultu EDF - pravdepodobnosť defaultu sa vypočíta z hodnoty aktív odhadnutej v prvom bode a bodu defaultu, čo je účtovná hodnota pasív.

2.1 Odhadnutie hodnoty a volatility aktív

Odhad hodnoty aktív firmy vychádza z myšlienky, že vlastný kapitál firmy je call opcia na aktíva firmy vlastnená akcionármi. To znamená, že akcionári majú právo, nie však povinnosť vyplatiť dlh veriteľom a zvyšok si rozdeliť. Teda veritelia sú vlastníkami firmy pokiaľ nie sú úplne vyplatení akcionármi. Hodnota vlastného kapitálu firmy je potom call opcia na aktíva firmy s expiračnou cenou zodpovedajúcou nominálnej hodnote dlhu. Ak poznáme trhovú cenu vlastného kapitálu, čo je hodnota akcií vlastnených akcionármi, tak trhovú cenu aktív a volatilitu aktív môžeme vypočítať použitím modelu oceňovania opcií, kde cenou opcie je trhovú cenu kapitálu.

Výplatná funkcia akcionárov v čase splatnosti dlhu je $E = \max(A - X, 0)$, kde A je hodnota aktív a X hodnota dlhu. Ak je v čase splatnosti hodnota aktív nižšia než je hodnota dlhu, akcionári opciu neuplatnia, hodnota opcie je nulová a teda aj hodnota vlastného kapitálu je nulová a nastáva likvidácia firmy. Výplatná funkcia veriteľov v čase splatnosti dlhu je $\max(A - E, 0) = \min(A, X)$. Ak je v čase splatnosti hodnota aktív nižšia než je hodnota dlhu, teda nastáva likvidácia firmy, majetok firmy sa predá a veriteľom je vyplatená hodnota aktív. V opačnom prípade im je vyplatená celá hodnota dlhu.

Na výpočet EDF môžeme použiť Black-Scholesov model oceňovania opcií. Vlastný kapitál je zostatková hodnota aktív po vyplatení všetkých záväzkov. Call opcia na aktíva má tú istú vlastnosť. Držiteľovi opcie je vyplatená hodnota aktív po vyplatení záväzkov firmy, čo je v tomto prípade expiračná cena opcie. Pokiaľ je hodnota aktív menšia ako účtovná hodnota pasív, firma nie je schopná splatiť svoje záväzky voči veriteľom. Akcionári, čo sú v tomto prípade držitelia opcie, svoju opciu neuplatnia a nechajú firmu veriteľom.

To, že sa vlastný kapitál správa ako opcia využijeme na odhad trhovej hodnoty aktív a ich volatility. Teda poznáme hodnotu vlastného kapitálu a jeho volatilitu, čo je hodnota opcie a chceme vypočítať trhovú hodnotu aktív a ich volatilitu, čo je v modeli oceňovania opcií cena akcie a jej volatilita.

V BS modeli predpokladáme, že trhová hodnota aktív sleduje stochastický proces:

$$dV_A = \mu_A V_A dt + \sigma_A V_A dW \quad (2.1)$$

kde V_A , dV_A sú hodnota aktív a jej zmena v čase μ_A, σ_A sú trend a volatilita aktív a dW je zmena Wienerovho procesu. Ďalej ak X je účtovná hodnota dlhu splatného v čase T , potom podľa BS modelu sú trhová hodnota vlastného kapitálu a trhová hodnota aktív firmy vo vzťahu:

$$V_E = V_A N(d_1) - e^{-rT} X N(d_2) \quad (2.2)$$

kde V_E je trhová hodnota vlastného kapitálu, r je bezriziková úroková miera a

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{V_A}{X}) + (r + \frac{\sigma_A^2}{2})T}{\sigma_A \sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \\ N(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

Ďalej nech vlastný kapitál V_E je funkciou aktív firmy a času, $V_E = V_E(V_A, t)$, použitím Itovej lemy a dosadením vzťahu (2.1) dostaneme:

$$\begin{aligned} dV_E &= \left(\frac{\partial V_E}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_E}{\partial V_A^2} \sigma_A^2 V_A^2 \right) dt + \frac{\partial V_E}{\partial V_A} dV_A \\ dV_E &= \left(\frac{\partial V_E}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_E}{\partial V_A^2} + \frac{\partial V_E}{\partial V_A} \mu_A V_A \right) dt + \frac{\partial V_E}{\partial V_A} \sigma_A V_A dW \end{aligned} \quad (2.3)$$

nech trhová hodnota vlastného kapitálu sleduje stochastický proces:

$$dV_E = \mu_E V_E dt + \sigma_E V_E dW \quad (2.4)$$

porovnaním zložiek pri dW v (2.3) a (2.4) dostaneme:

$$\sigma_E V_E = \frac{\partial V_E}{\partial V_A} V_A \sigma_A \quad (2.5)$$

Vieme, že $\frac{\partial V_E}{\partial V_A} = N(d_1)$. Teda máme vzťah pre volatilitu vlastného kapitálu a aktív:

$$\sigma_E = \frac{V_A}{V_E} N(d_1) \sigma_A \quad (2.6)$$

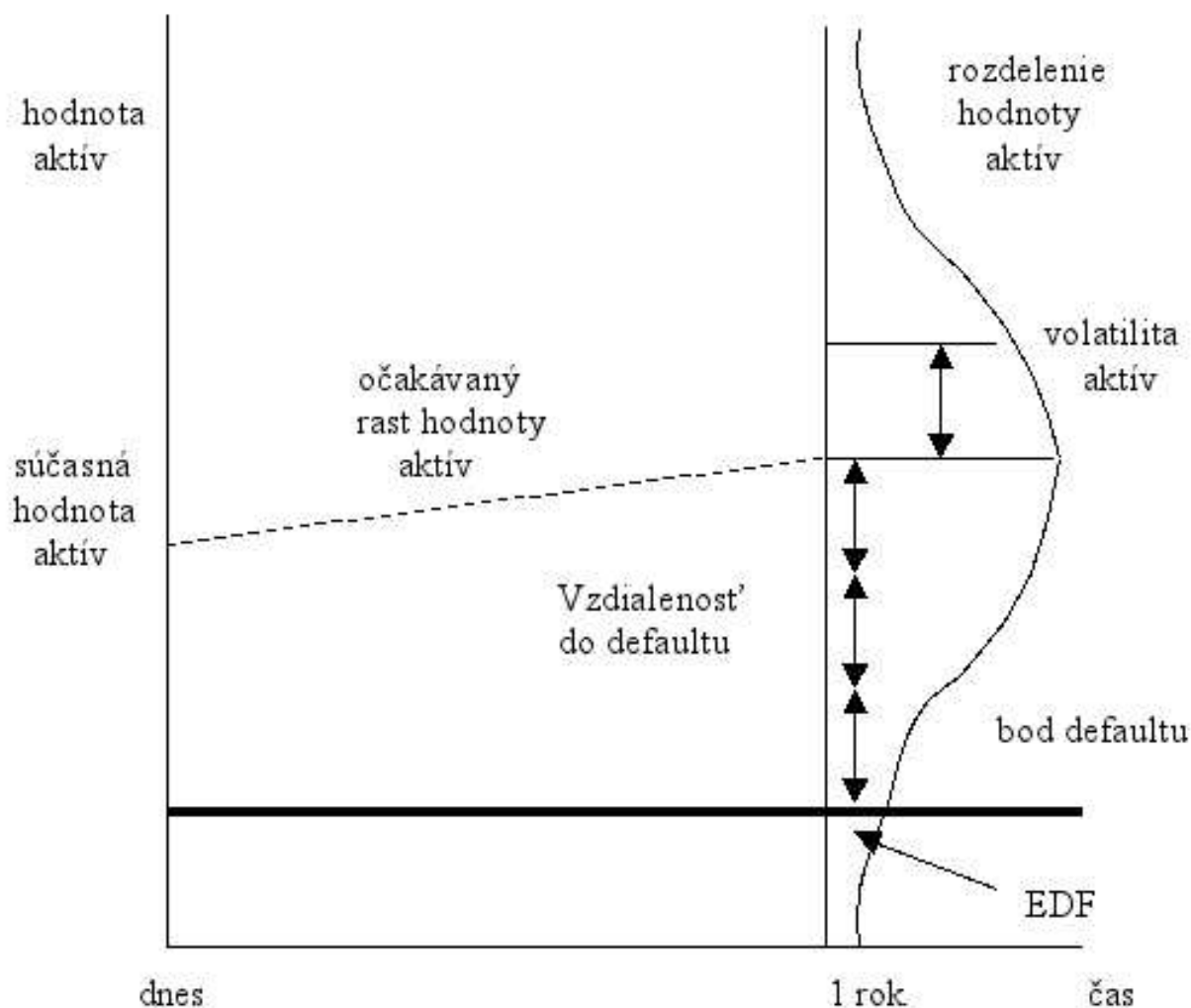
Riešením rovníc (2.2) a (2.6) o dvoch neznámych V_A , σ_A vypoitame trhovú hodnotu aktív firmy a ich volatilitu.

2.2 Výpočet pravdepodobnosti defaultu

Pravdepodobnosť defaultu firmy na nejakom časovom horizonte určuje súčasná hodnota aktív, budúce rozdelenie hodnoty aktív v danom časovom horizonte, volatilita budúcej hodnoty aktív, bod defaultu - účtovná hodnota pasív, očakávaný rast hodnoty aktív počas trvania časového horizontu a dĺžka časového horizontu.

Keď hodnota aktív padne pod bod defaultu, firma skrachuje. Preto je pravdepodobnosť defaultu pravdepodobnosť, že hodnota aktív bude nižšia ako bod defaultu, to je plocha nachádzajúca sa pod bodom defaultu.

Obrázok 2.1 grafické znázornenie budúceho rozdelenia hodnôt aktív a jednotlivých určujúcich faktorov



V praxi sa na odhad pravdepodobnosti defaultu využíva veličina vzdialenosť do defaultu DD , čo je pomer vzdialenosti hodnoty aktív od defaultu a veľkosti pohybu v hodnote aktív o jednu štandardnú odchýlku. Vzdialenosť do defaultu teda udáva o koľko štandardných odchýlok je firma vzdialená od defaultu.

$$DD = \frac{\text{trhová hodnota aktív} - \text{bod defaultu}}{\text{trhová hodnota aktív} \times \text{volatilita aktív}}$$

Ak by sme poznali budúce rozdelenie pravdepodobnosti hodnoty aktív, tak by sme pravdepodobnosť defaultu mohli vypočítať priamo z DD tak, že by sme vypočítali plochu pod funkciou hustoty, ktorej obsah priamo predstavuje pravdepodobnosť defaultu.

V skutočnosti však rozdelenie pravdepodobnosti aktív nepoznáme. Preto sa v praxi používa prístup výpočtu vzťahu vzdialenosti do defaultu a pravdepodobnosti defaultu z dát historických výskytov defaultov, čo si vyžaduje rozsiahlu databázu súčasných defaultov. Vzťah medzi DD a EDF sa určí tak, že sa zoberie veľký súbor firiem s rovnakým DD k rovnakému dátumu a sleduje sa, koľko z nich skrachovalo v nasledujúcom roku. To sa opakuje pre všetky možné časy a hodnoty DD . Ku každej hodnote DD sa priradí početnosť defaultov, ktorá určuje pravdepodobnosť defaultu pre danú hodnotu DD .

Rozdiely, ktoré môžu nastať vzhľadom na odvetvie, veľkosť firmy, čas a iné efekty sú už zachytené v DD , preto môžeme povedať, že vzťah medzi DD a početnosťou defaultu je konštantný vzhľadom na tieto faktory.

Keďže tieto databázy nie sú bežne dostupné rozhodli sme sa použiť nasledujúci predpoklad, že náhodná zložka budúceho vývoja aktív firmy v čase bude mať normálne rozdelenie.

Pravdepodobnosť defaultu v čase t môžeme vyjadriť ako:

$$p_t = P[V_A^t \leq X_t \mid V_A^0 = V_A] = P[\ln V_A^t \leq \ln X_t \mid V_A^0 = V_A] \quad (2.7)$$

kde V_A^t je trhová hodnota aktív firmy v čase t a X_t je účtovná hodnota pasív firmy v čase t , teda bod defaultu. Potom ak sa hodnota aktív správa podľa (2.1) a rozdelenie aktív je lognormálne, teda $Y_t = \ln(V_A^t)$, z Itôvej lemy dostaneme:

$$\begin{aligned} dY_t &= 0 + \frac{1}{V_A^t} dV_A^t - \frac{1}{2} \frac{1}{V_A^{t2}} \sigma_A^2 V_A^{t2} dt \\ &= \mu_A dt + \sigma_A dW - \frac{1}{2} \sigma_A^2 dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

potom máme:

$$dY_t = Y_0 + \mu_A t + \sigma_A W - \frac{1}{2} \sigma_A^2 t \quad (2.9)$$

$$\ln V_A^t = \ln V_A^0 + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A \sqrt{t} \epsilon \quad (2.10)$$

kde μ_A je očakávaný rast aktív firmy a ϵ je náhodna premenná s rozdelením $N(0,1)$. Dosadením (2.10) do (2.7) dostaneme:

$$p_t = P[\ln V_A^0 + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A \sqrt{t} \epsilon \leq \ln X_t] \quad (2.11)$$

čo upravíme na tvar:

$$p_t = P \left[-\frac{\ln \frac{V_A}{X_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} \geq \epsilon \right] \quad (2.12)$$

Vieme, že náhodná premenná je normálne rozdelená, $\epsilon \sim N(0,1)$. Potom pre pravdepodobnosť defaultu máme vzťah:

$$p_t = EDF = N \left[-\frac{\ln \frac{V_A}{X_t} + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right] \quad (2.13)$$

kde $N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Keďže vzdialenosť do defaultu udáva počet štandardných odchýlok, o ktoré je firma vzdialená od defaultu, tak podľa nášho prístupu, vychádzajúc z (2.13), dostaneme vzorec pre DD :

$$DD = \frac{\ln \frac{V_A}{X_t} + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t}{\sigma_A \sqrt{t}} \quad (2.14)$$

Kapitola 3

Riziko defaultu

3.1 Strata

Udalosť defaultu charakterizuje veľkosť straty. Strata spôsobená defaultom závisí od veľkosti náhrady. Uvažujeme, že náhradu poznáme a je očistená od ostatných výdavkov a takisto neuvažujeme o zmene hodnoty v čase, počas ktorého sa náhrada realizuje. Ak je náhrada vyjadrená percentuálnym podielom na celkovej hodnote pôžičky, potom stratu spôsobenú defaultom LGD môžeme vyjadriť ako $(1 - \textit{náhrada})$. Teda očakávaná strata EL z pôžičky je pravdepodobnosť defaultu krát strata spôsobená defaultom.

$$EL = EDF \times LGD \quad (3.1)$$

Neočakávaná strata UL závisí od rovnakých premenných a reprezentuje volatilitu očakávanej straty.

$$UL = LGD \sqrt{EDF(1 - EDF)} \quad (3.2)$$

Pre zjednodušenie predpokladajme, že doba splatnosti všetkých nástrojov v portfóliu je rovnaká. Meranie diverzifikácie portfólia znamená špecifikovať rozsah a pravdepodobnosť možných strát. Dobře diverzifikované portfólio má malú pravdepodobnosť rozsiahlych strát.

Očakávaná strata celého portfólia je vážený priemer očakávaných strát jednotlivých zložiek portfólia. Neočakávaná strata portfólia však nie je len jednoduchý vážený priemer, pretože strata závisí takisto na vzťahu (korelácií) jednotlivých možných defaultov.

$$EL_p = w_1 EL_1 + \dots + w_n EL_n$$
$$UL_p = \sqrt{w_1 w_1 UL_1 UL_1 \rho_{11} + w_1 w_2 UL_1 UL_2 \rho_{12} + \dots + w_n w_n UL_n UL_n \rho_{nn}}$$

3.2 Korelácia defaultov

Korelácia defaultov meria veľkosť závislosti defaultov dvoch rôznych dlžníkov. Ak neexistuje žiadna závislosť, defaulty sú nezávislé a korelácia je nulová. V tomto prípade pravdepodobnosť, že sa obaja dlžníci ocitnú naraz v defaulte je súčin ich jednotlivých pravdepodobností defaultu. Ak sú defaulty dvoch dlžníkov korelované, pravdepodobnosť ich spoločného defaultu bude vyššia.

Odhadnutie korelácie defaultu je kritické pri modelovaní portfólia s uvažovaním rizika defaultu. Neexistuje presná metóda, ktorou by sa tieto korelácie dali priamo odhadnúť. Na rozdiel od korelácie vlastného kapitálu, ktorá sa dá odhadnúť z historických dát vývoja na akciovom trhu, historické dáta defaultov sa dajú použiť len v prípade výskytu defaultu v minulosti a teda pre firmy, u ktorých sa default doposiaľ nevyskytol takéto dáta neexistujú.

Základný model hovorí, že firma zdefaultuje, ak hodnota jej aktív klesne pod bod defaultu, čo je účtovná hodnota pasív. To znamená, že združená pravdepodobnosť defaultu dvoch firiem je pravdepodobnosť, že trhová hodnota aktív oboch firiem klesne pod bod defaultu v rovnakom časovom úseku.

Združená pravdepodobnosť defaultu dvoch firiem JDF musí zahŕňať vzťah hodnoty aktív a príslušného bodu defaultu, ale takisto aj koreláciu medzi hodnotami aktív dvoch firiem, pretože nás zaujíma súčasné prekročenie bodu defaultu oboch firiem. Ak poznáme jednoduché pravdepodobnosti defaultu jednotlivých firiem a vieme koreláciu ich hodnôt aktív, vieme vypočítať pravdepodobnosť, že obe zdefaultujú súčasne. Časové rady hodnôt aktív firmy odhadneme z časových radov hodnôt vlastného kapitálu (pomocou prístupu, ktorý uvažuje o vlastnom kapitále ako o call opcií na aktíva firmy). Korelácia hodnôt aktív dvoch firiem sa potom určí z časových radov hodnôt ich aktív.

Združenú pravdepodobnosť defaultu znamená, že obe firmy skrachujú súčasne a teda ju môžeme vyjadriť vzťahom:

$$p_t = P[V_A^i \leq X_t^i \& V_A^j \leq X_t^j] \quad (3.3)$$

kde pre každú z hodnôt V_A platí vzťah (2.10) a ich dosadením do (3.3) a úpravou dostaneme:

$$JDF = P \left[-\frac{\ln \frac{V_A^i}{X_t^i} + \left(\mu_i - \frac{\sigma_{A_i}^2}{2} \right) t}{\sigma_{A_i} \sqrt{t}} \geq \epsilon_i, -\frac{\ln \frac{V_A^j}{X_t^j} + \left(\mu_j - \frac{\sigma_{A_j}^2}{2} \right) t}{\sigma_{A_j} \sqrt{t}} \geq \epsilon_j \right] \quad (3.4)$$

teda

$$JDF = P[-DD_i \geq \epsilon_i, -DD_j \geq \epsilon_j] \quad (3.5)$$

Keďže podľa BS modelu predpokladáme normálne rozdelenie $\epsilon_i \sim N(0, 1)$, $\epsilon_j \sim N(0, 1)$ tak pre združenú pravdepodobnosť defaultu máme vzťah:

$$JDF_{ij} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{ij}^2}} \int_{-\infty}^{-DD_i} \int_{-\infty}^{-DD_j} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{ij}^2)}(x^2 - 2\rho_{ij}xy + y^2)\right] dx dy \quad (3.6)$$

kde ρ_{ij} je korelácia hodnôt aktív firiem i a j . Ak potom označíme $N_2(\cdot)$ distribučnú funkciu binormálneho rozdelenia, tak funkcia združenej pravdepodobnosti defaultu dvoch firiem bude

$$JDF_{ij} = N_2(-DD_i, -DD_j, \rho_{ij})$$

Koreláciu defaultu dvoch firiem vypočítame nasledovne. Nech X je náhodná premenná výskytu defaultu firmy i , ktorá nadobúda hodnotu 1, ak firma skrachuje a 0 ak nie. Teda:

$$\begin{aligned} X = 1 & \quad \text{s pravdepodobnosťou } EDF_i \\ X = 0 & \quad \text{s pravdepodobnosťou } 1 - EDF_i \end{aligned}$$

Potom stredná hodnota náhodnej premennej X bude: $E(X) = EDF_i$. A jej disperzia bude: $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = EDF_i(1 - EDF_i)$.

Podobne definujeme náhodnú premennú Y , ako premennú výskytu defaultu firmy j . Teda:

$$\begin{aligned} Y = 1 & \quad \text{s pravdepodobnosťou } EDF_j \\ Y = 0 & \quad \text{s pravdepodobnosťou } 1 - EDF_j \end{aligned}$$

a takisto jej stredná hodnota a disperzia bude: $E(Y) = EDF_j$, $D(Y) = EDF_j(1 - EDF_j)$. Potom náhodná premenná XY nadobúda hodnotu 1, ak obe firmy skrachujú súčasne a hodnotu 0 ak nie. Máme:

$$\begin{aligned} XY = 1 & \quad \text{s pravdepodobnosťou } JDF_{ij} \\ XY = 0 & \quad \text{s pravdepodobnosťou } 1 - JDF_{ij} \end{aligned}$$

a stredná hodnota tejto náhodnej premennej je $E(XY) = JDF_{ij}$.

Potom pre koreláciu náhodných premenných X, Y máme:

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

odkiaľ dosadením dostaneme vzťah pre koreláciu defaultov dvoch firiem:

$$\rho_{ij}^D = \frac{JDF_{ij} - EDF_i EDF_j}{\sqrt{EDF_i(1 - EDF_i) EDF_j(1 - EDF_j)}} \quad (3.7)$$

3.3 Výnos

Trhová hodnota pôžičky je cena, za ktorú sa dá pôžička kúpiť alebo predať. Hoci existuje trh pôžičiek, veľa z nich sa neobchoduje, a preto pre ne ani neexistujú trhové ceny. Hodnotu pôžičky dostaneme diskontovaním peňažných tokov pôžičky príslušným diskontným faktorom.

Pri absencii rizika defaultu by sme diskontné miery určili jednoducho podľa časovej štruktúry úrokových mier. Pri uvažovaní rizika defaultu však diskontné miery musia obsahovať dve ďalšie zložky: prírastok diskontnej miery odrážajúci pravdepodobnosť straty a prémiiu rizika ako kompenzáciu neodstrániteľného rizika straty.

Nech Y je výnos z pôžičky a R_f je bezriziková úroková miera, potom

$$Y = R_f + \text{prémia očakávanej straty} + \text{prémia rizika}$$

Uvažujeme dve situácie. Ak firma zdefaultuje, stratíme percento z celkovej ceny pôžičky rovné LGD . Ak nie, tak budeme mať výnos Y . Teda očakávaný výnos pôžičky bude

$$E(R) = EDF(R_f - LGD) + (1 - EDF)Y \quad (3.8)$$

Predpokladajme, že prémia očakávanej straty je $(LGD \times EDF)/(1 - EDF)$. Ak by bol výnos Y rovný len bezrizikovej úrokovej miere zvýšenej o túto prémiiu očakávanej straty, potom výnos bude v priemere len bezriziková miera.

$$E(R) = EDF(R_f - LGD) + (1 - EDF)\left(R_f + \frac{(LGD \times EDF)}{(1 - EDF)}\right)$$

$$E(R) = R_f$$

V rokoch, kedy sa default nevyskytne, bude výnos vyšší ako R_f , ale pri výskyte defaultu to bude podstatne menej. Pre investora bude teda výhodnejšie investovať do bezrizikového aktíva, kde má zaručený výnos R_f . Rizikovosť teda musí byť kompenzovaná zvýšeným výnosom a ten nám zabezpečí prémiiu rizika. Keďže riziko defaultu sa nedá úplne odstrániť diverzifikáciou, prémiiu rizika trh vyvažuje znášanie rizika nožnej straty.

3.4 Diverzifikácia portfólia

Diverzifikácia znamená, že riziko celého portfólia je menšie, ako keby každé aktívum stálo samostatne. Nejaká časť rizika aktíva je teda diverzifikovaná v portfóliu. Potom môžeme riziko aktíva rozdeliť na dve časti: riziko, ktoré je odstrániteľné diverzifikáciou, to je nesystematické riziko a ďalej riziko, ktoré sa diverzifikáciou nedá odstrániť, systematické riziko.

Maximálna diverzifikácia pri danom množstve očakávaného výnosu $E(R)$ dáva najmenšiu možnú mieru neočakávanej straty UL . Pre každý možný výnos a pre danú množinu aktív existuje jediná množina váh w_i , ktorá minimalizuje neočakávanú stratu portfólia.

Diverzifikáciu portfólia potom môžeme sformulovať ako úlohu kvadratického programovania.

$$\begin{aligned} \min UL_p^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j V_{ij} \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n w_i E(R)_i &= E(R)_p \end{aligned} \quad (3.9)$$

kde w_i sú váhy jednotlivých aktív v portfóliu, $E(R)_p$ je celkový výnos portfólia a prvky matice V sú: $[V]_{ij} = UL_i UL_j \rho_{ij}^D$

Úloha má riešenie, ak je matica V regulárna, pozitívne definitná.

Vieme, že kovariančná matica je pozitívne definitná a teda chceme ukázať, že V je kovariančná matica. Pre maticu V platí:

$$[V]_{ij} = UL_i UL_j \rho_{ij}^D \quad (3.10)$$

dosadením za UL_i , UL_j a ρ_{ij}^D máme:

$$\begin{aligned} [V]_{ij} &= LGD \sqrt{EDF_i(1-EDF_i)} LGD \sqrt{EDF_j(1-EDF_j)} \\ &* \frac{JDF_{ij} - EDF_i EDF_j}{\sqrt{EDF_i(1-EDF_i) EDF_j(1-EDF_j)}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

a úpravou dostaneme:

$$[V]_{ij} = LGD^2 [JDF_{ij} - EDF_i EDF_j] \quad (3.12)$$

a to je podľa (3.7):

$$[V]_{ij} = LGD^2 [cov(XY)] \quad (3.13)$$

kde LGD je nejaká konštanta. Teda V je pozitívne definitná matica.

Kapitola 4

Praktické riešenie

4.1 Výpočet EDF

Na modelovanie portfólia firemných dlhopisov sme vybrali dvadsať amerických firiem: Boeing, Microsoft, General Electrics, Pfizer, Exxon Mobile, Chevron Texaco, Merrill Lynch, JPMorgan, IBM, General Motors, McDonalds, AIG, Walmart, Fannie Mae, Coca Cola, Nike, Oracle, Intel, Ford a Pepsi. Akcie každej z nich sa obchodujú na NYSE (New York Stock Exchange). Na výpočet pravdepodobnosti defaultu každej firmy v roku 2003 sme použili dáta z roku 2002, a to účtovné uzávierky z roku 2002 (dostupné na každej www stránke firmy) a ďalej vývoj cien akcií na trhu, pre každý obchodovací deň v roku 2002 (www.nyse.com).

Na odhad pravdepodobnosti defaultu je potrebné vypočítať trhovú hodnotu aktív a ich volatilitu. V účtovnej uzávierke je síce uvedená hodnota aktív, nie je to však ich trhovú hodnotu, ktorá sa mení každý deň podobne ako hodnota vlastného kapitálu.

Vlastný kapitál V_E je počet akcií emitovaných firmou krát ich trhovú cenu. Z časového radu prírastkov cien akcií sme potom dostali volatilitu vlastného kapitálu σ_E . Aplikovaním teórie, ktorá uvažuje o vlastnom kapitáli ako o call opcií na aktíva firmy sme použitím vzťahov:

$$V_E = V_A N(d_1) - e^{-rT} X N(d_2) \quad (4.1)$$

$$\sigma_E = \frac{V_A}{V_E} N(d_1) \sigma_A \quad (4.2)$$

vypočítali trhovú hodnotu aktív firmy V_A a ich volatilitu σ_A , kde X je účtovnú hodnotu pasív uvedenú v uzávierke, časový horizont T je jeden rok a $r = 0.01267$ je úroková miera pre jednorôčné americké vládne dlhopisy.

Potom pravdepodobnosť defaultu EDF a vzdialenosť do defaultu DD pre každú firmu vypočítame podľa vzťahov (2.13) a (2.14).

číslo	firma	EDF	DD
1	Boeing	0.192%	2.89
2	Microsoft	0.001%	4.24
3	General Electrics	2.785%	1.91
4	Pfizer	0.057%	3.25
5	Exxon Mobile	0.0027%	4.03
6	Chevron Texaco	0.0096%	3.72
7	Merril Lynch	7.88e-4%	4.31
8	JPMorgan	5.92e-4%	4.38
9	IBM	4.54e-4%	4.43
10	General Motors	1.49e-11%	7.29
11	McDonald´s	0.55%	3.26
12	AIG	7.6%	1.43
13	Walmart	0.056%	3.25
14	Fannie Mae	1.29%	2.22
15	Coca Cola	0.0021%	4.08
16	Nike	9.67e-4%	4.27
17	Oracle	1.53%	2.16
18	Intel	0.173%	2.92
19	Ford	0.432%	2.62
20	Pepsi	0.812%	2.40

Tabuľka 4.1: hodnoty EDF a DD pre jednotlivé firmy

Napríklad, zoberme firmu Boeing, ktorej hodnota vlastného kapitálu je $V_E = 7.969mil.\$$ a účtovná hodnota pasív $X = 44.646mil.\$$, obe tieto hodnoty vieme nájsť v účtovnej uzávierke. Volatilita vlastného kapitálu σ_E je potom vypočítaná z časového radu cien akcií S_i ako $\sigma_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{n}$, kde $n = 252$ je počet obchodovacích dní roku 2002 a $X_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$ sú prírastky v cene akcie. V našom prípade $\sigma_E = 0,391$, čo je volatilita 39,1%.

Vypočítaním dvoch rovníc o dvoch neznámých (2.2) a (2.6) dostaneme $V_A = 52.05mil.\$$

a $\sigma_A = 0.06$.

Trend vývoja aktív $\mu_A = 0.022$ sme vypočítali ako trend priamky lineárnej regresie preloženej časovým radom prírastkov cien akcií. Uvažovali sme len hodnoty počnúc dňom 30.10.2002, ktorý sa javil ako zlomový vo vývoji cien akcií.

Dosadením do vzťahov pre EDF a DD sme dostali, že pravdepodobnosť defaultu firmy Boeing v nasledujúcom roku je 0,192% a vzdialenosť do defaultu je 2,89 štandardných odchýlok.

Rovnako sme postupovali pri výpočte EDF a DD pre všetky ostatné firmy.

Firmu General Motors (číslo 10) sme z ďalšieho počítania vylúčili, pretože jej hodnoty sa výrazne líšia od ostatných firiem. Pri nasledujúcej diverzifikácii portfólia budeme teda uvažovať 19 podnikových dlhopisov.

4.2 Diverzifikácia

4.2.1 Strata

Dôležitou premennou, ktorú je potrebné odhadnúť, je náhrada. Náhrada je percentuálny podiel z ceny pôžičky, ktorá je nám ako veriteľom vyplatená pri výskyte defaultu. Existuje tzv. recovery rate, ktorá je vypočítaná na základe historického výskytu defaultov a veľkosti straty spôsobenej týmito defaultami. Moody's meria recovery rate pre zdefaultované dlhopisy podľa ich ceny na sekundárnom trhu jeden mesiac od výskytu defaultu [4].

	Európa	USA
bankový úver	71.8%	66.8%
nadradený zabezpečený dlhopis	55.0%	56.9%
nadradený nezabezpečený dlhopis	20.8%	50.1%
podradený zabezpečený dlhopis	24.0%	32.9%
podradený nezabezpečený dlhopis	13.0%	31.3%
všetky dlhopisy	22.0%	42.8%

Tabuľka 4.2: recovery rate zdefaultovaných dlhopisov pre Európu a USA, 1985 - 2001

Pretože firemné dlhopisy, ktoré sme uvažovali, predstavujú nadradený nezabezpečený dlh, ako náhradu sme v ďalšom zobrali hodnotu 50,1%. Potom veľkosť straty $LGD =$

$1 - \text{náhrada} = 0.499$. Dosadením do vzorcov (3.1) a (3.2) máme očakávanú a neočakávanú stratu. Keď pokračujeme v predchádzajúcom príklade firmy Boeing, tak dostaneme jej očakávanú a neočakávanú stratu $EL = 0.00958$ a $UL = 0.0218$.

4.2.2 Korelácia defaultov

Aby sme mohli vypočítať neočakávanú stratu celého portfólia, potrebujeme odhadnúť korelácie defaultov medzi jednotlivými zložkami portfólia. Korelácie defaultov vieme vypočítať zo vzorca (3.7), ak poznáme jednotlivé združené pravdepodobnosti defaultov. Kľúčovou premennou, ktorú potrebujeme pre výpočet združených pravdepodobností je korelácia hodnôt aktív firmy. K tomu potrebujeme časové rady trhových hodnôt aktív. Tie opäť vypočítame prístupom, ktorý považuje vlastný kapitál za call opciu na aktíva firmy.

Vieme, že vlastný kapitál = počet akcií x cena akcie, teda $V_E^i = m * S_i$. Potom pre $i = 1, \dots, 252$ dostaneme: $S_i \rightarrow V_E^i \rightarrow$ dosadením do (2.2) a (2.6) $\rightarrow V_A^i$.

Takto vypočítame časové rady hodnôt aktív pre všetky firmy a z nich ľahko dostaneme maticu korelácií hodnôt aktív ρ . Postupným dosadzovaním do vzorca (3.6) máme maticu združených pravdepodobností defaultov JDF .

Príklad matice JDF (9x9) - vzájomné združené pravdepodobnosti defaultu prvých deviatich firiem:

$$\begin{pmatrix} 0.0019 & 1.37e^{-6} & 4.84e^{-4} & 1.81e^{-4} & 2.49e^{-5} & 8.47e^{-5} & 4.14e^{-6} & 5.58e^{-6} & 1.24e^{-6} \\ 1.37e^{-6} & 1.12e^{-5} & 1.11e^{-5} & 6.79e^{-6} & 7.27e^{-7} & 1.76e^{-7} & 1.52e^{-6} & 7.01e^{-8} & 1.53e^{-6} \\ 4.84e^{-4} & 1.11e^{-5} & 0.0278 & 5.06e^{-4} & 2.3e^{-5} & 3.29e^{-5} & 7.88e^{-6} & 3.81e^{-6} & 4.54e^{-6} \\ 1.81e^{-4} & 6.79e^{-6} & 5.06e^{-4} & 5.66e^{-4} & 2.26e^{-5} & 3.68e6-5 & 6.55e^{-6} & 3.33e^{-6} & 3.57e^{-6} \\ 2.49e^{-5} & 7.27e^{-7} & 2.3e^{-5} & 2.26e^{-5} & 2.74e^{-5} & 1.62e^{-5} & 2.38e^{-6} & 2.61e^{-6} & 5.38e^{-7} \\ 8.47e^{-5} & 1.76e^{-7} & 3.29e^{-5} & 3.68e6-5 & 1.62e^{-5} & 9.65e^{-5} & 8.09e^{-7} & 3.84e^{-6} & 1.18e^{-7} \\ 4.14e^{-6} & 1.52e^{-6} & 7.88e^{-6} & 6.55e^{-6} & 2.38e^{-6} & 8.09e^{-7} & 7.94e^{-6} & 3.69e^{-7} & 1.78e^{-6} \\ 5.58e^{-6} & 7.01e^{-8} & 3.81e^{-6} & 3.33e^{-6} & 2.61e^{-6} & 3.84e^{-6} & 3.69e^{-7} & 6.15e^{-6} & 7.29e^{-8} \\ 1.24e^{-6} & 1.53e^{-6} & 4.54e^{-6} & 3.57e^{-6} & 5.38e^{-7} & 1.18e^{-7} & 1.78e^{-6} & 7.29e^{-8} & 4.54e^{-6} \end{pmatrix}$$

Prvky na diagonále sú jednoduché pravdepodobnosti defaultu jednotlivých firiem EDF_i . Ak napríklad zoberieme prvé dve firmy, ktorých pravdepodobnosti defaultov sú: $EDF_1 = 0.192\%$ a $EDF_2 = 0.001\%$ ich združená pravdepodobnosť defaultu, teda pravdepodobnosť, že zdefaultujú naraz, bude: $JDF_{12} = 1.368e^{-4}\%$

Maticu korelácií defaultov ρ^D potom vypočítame dosadením do vzťahu (3.7).

4.2.3 Výnos

Na trhu existujú rôzne úrokové sadzby, ktoré musia subjekty zaplatiť. Výška úrokovej sadzby závisí predovšetkým od rozdielnej miery rizika. Podnikové dlhopisy sú rizikovejšie ako dlhopisy štátne, preto je zrejmé, že toto riziko musí byť kompenzované vyšším výnosom.

Ďalší faktor, ktorý ovplyvňuje úrokové sadzby je dĺžka časového horizontu príslušného aktíva. Rovnaké obligácie s rozdielnou dobou splatnosti by mohli mať všetky rovnakú úrokovú mieru len vtedy, ak by počas celého trvania časového horizontu nedošlo k zmene úrokových sadzieb na trhu a neexistovala by žiadna inflácia. Keďže takýto stav nedosahujú ani najvyspelejšie ekonomiky, úrokové miery sú rozdielne, pre rozdielne doby splatnosti, a to v závislosti od toho, aké budúce správanie sa úrokových mier očakávame.

	bezrizikový	Aaa	Aa	A
3 mesiace	0,82%			
6 mesiacov	0,96%			
1 rok	1,267%	1,87%	2,203%	1,853%
2 roky	1,9%	2,25%	2,5%	2,33%
5 rokov	3,25%	3,34%	3,39%	3,76%
10 rokov	4,24%	4,64%	4,74%	4,74%
20 rokov	4,92%	5,48%	5,88%	6,3%

Tabuľka 4.3: časová štruktúra úrokových mier

Výnosy dlhopisov, ktoré uvažujeme v našom príklade sme určili na základe výnosových kriviek rozdelných podľa ratingov (www.bonds.yahoo.com).

Každá z firiem má agentúrou pridelený rating. My sme sledovali rating, ktorý pridela agentúra Moody's a na základe ktorého sme ich podnikové dlhopisy zadelili do troch kategórií.

5 firiem → Aaa

5 firiem → Aa

9 firiem → A

Dosadením výnosu za Y do vzorca (3.8) máme priemerné výnosy jednotlivých dlhopisov.

firma	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	1.85%	2.2%	1.87%	1.87%	1.87%	2.2%	2.2%	1.85%	1.85%
E(R)	1.75%	2.2%	0.46%	1.84%	1.86%	2.19%	2.2%	1.85%	1.85%

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.85%	1.87%	2.2%	1.87%	2.2%	1.85%	1.85%	1.85%	1.85%	1.85%
1.82%	1.06%	2.17%	1.21%	2.2%	1.85%	1.07%	1.76%	1.63%	1.44%

Kým sa priemerný výnos u niektorých dlhopisov líši len nepatrne od výnosu Y , vyskytli sa aj také (firmy číslo 3, 12 a 17), ktorých priemerný výnos je menší ako bezrizikový úrok $r = 1.267\%$. Investor bude preto radšej investovať do bezrizikových štátnych dlhopisov, ako by si mal kúpiť podnikové dlhopisy týchto troch firiem, ktoré sú rizikovejšie a ich priemerný výnos je nižší.

4.2.4 Diverzifikácia portfólia

Diverzifikáciou sa snažíme minimalizovať riziko, ktoré v našom prípade predstavuje neočakávaná strata UL . Hľadáme váhy jednotlivých aktív v portfóliu také, že pre daný výnos celého portfólia $E(R)_p$ minimalizujú neočakávanú stratu portfólia UL_p .

Riešime úlohu (3.9), z ktorej pre všetky dané $E(R)_p$ dostaneme váhy w_i a teda aj minimálne UL . V tejto úlohe sú povolené aj záporné váhy. V praxi však vlastnime kladný počet dlhopisov (záporný počet znamená, že sme tieto dlhopisy predali), preto pre porovnanie riešime aj úlohu s ohraničeniami na w_i :

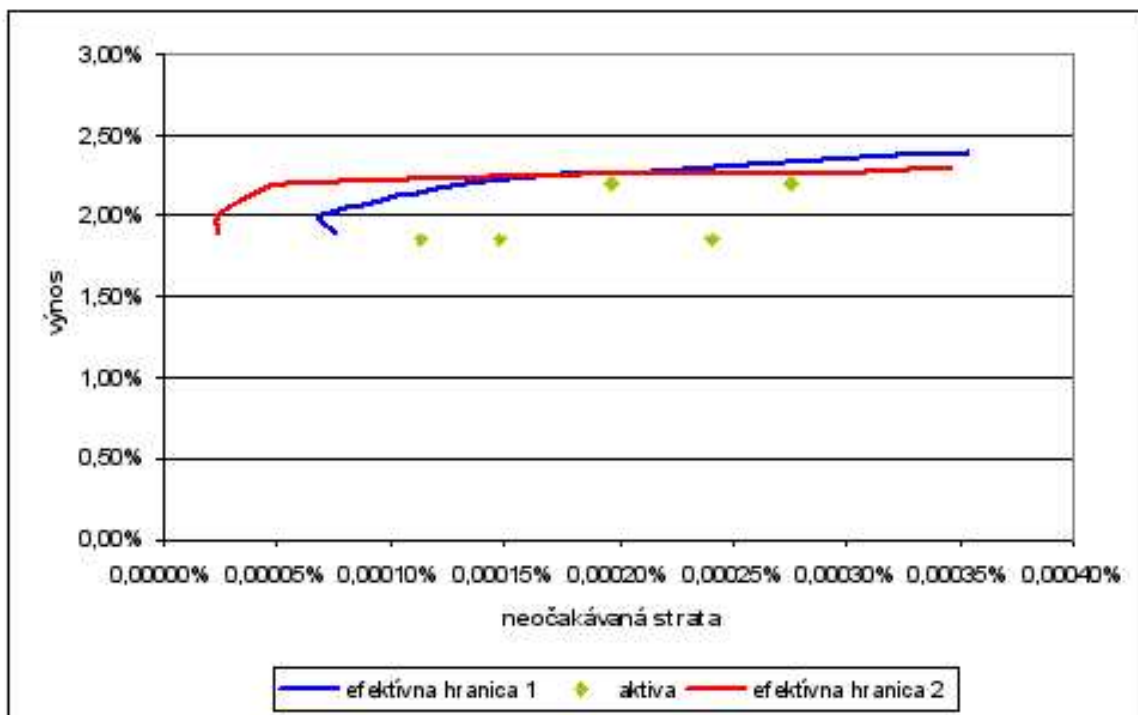
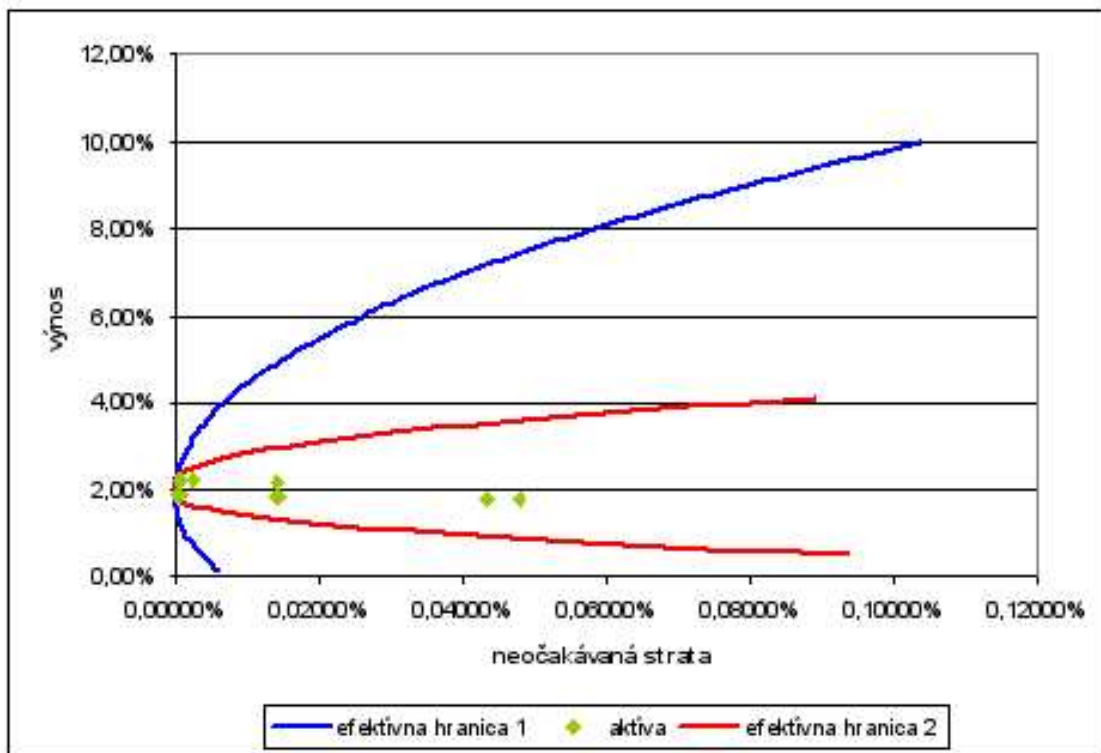
$$\begin{aligned}
 \min UL_p^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j V_{ij} \\
 \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\
 \sum_{i=1}^n w_i E(R)_i &= E(R)_p \\
 w_i &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

kde prvky matice V sú: $[V]_{ij} = UL_i UL_j \rho_{ij}^D$.

Graf dvojíc $E(R)_p$ a UL tvorí efektívnu hranicu. Na tejto hranici ležia optimálne portfóliá, ktoré majú minimálne množstvo neočakávanej straty pri danom výnose. Všetky aktíva stojace samostatne ležia za touto hranicou a teda majú menší pomer výnosu k riziku ako portfólio na hranici.

Obrázok 4.1 1. efektívna hranica 1 pre pôvodnú úlohu, efektívna hranica 2 pre úlohu s ohraničeniami $w_i \geq 0$ a jednotlivé dlhopisy

2. detail



4.3 Simulácie trhových hodnôt aktív

V tejto časti si simulovaním správania sa trhovej hodnoty akcií ukážeme aká situácia môže nastať po uplynutí jedného roka a porovnáme rôzne stratégie investora.

Na to aby sme zistili, ktorá stratégia je pre investora výhodná potrebujeme poznať, ktoré z firiem v priebehu jedného roka, počas ktorého investor vlastní dlhopisy, zdefaultovali.

Vieme, že default nastáva, keď trhovú hodnotu aktív padne pod účtovnú hodnotu pasív. Trhovú hodnotu aktív sleduje náhodný proces (2.10), kde ϵ je náhodná premenná s rozdelením $N(0,1)$. Trhové hodnoty aktív preto modelujeme ako náhodný vektor multinormálneho rozdelenia s vektorom strednej hodnoty μ_A a kovariančnou maticou cov_A .

Vektor strednej hodnoty μ_A je vektor, ktorého jednotlivé zložky sú trhové hodnoty aktív firmy na konci roku 2002, ktoré sme vypočítali v 4.1. Kovariančnú maticu aktív cov_A dostaneme z časových radov prírastkov hodnôt aktív vypočítaných v 4.2.2.

Riešením úlohy diverzifikácie portfólia (4.3) sme dostali váhy jednotlivých dlhopisov v portfóliu. Diverzifikácia vyberie do optimálneho portfólia len niektoré dlhopisy (ostatné majú váhu $w_i = 0$), preto aby boli simulácie efektívnejšie, simulovali sme náhodný vektor hodnôt aktív len vybraných firiem.

Takto získaný náhodný vektor hodnôt aktív sme potom porovnali s vektorom účtovných hodnôt pasív a zistili sme, ktoré firmy v priebehu jedného roka zdefaultovali.

V ďalšom budeme brať do úvahy efektívnu hranicu, ktorá pripúšťa len nezáporné váhy aktív v portfóliu. Teraz porovnáme jednotlivé priemerné výnosy na efektívnej hranici. Uvažujeme len časť efektívnej hranice medzi výnosmi 1.95% a 2.202%. Výnosy menšie ako 1.95% majú vyšší pomer rizika k výnosu pretože bod $E(R) = 1.95\%$ je bodom minima a z hľadiska investovania sú nezaujímavé. Priemerné výnosy vyššie ako 2.202% zasa nie je možné vytvoriť použitím len kladných váh, pretože $E(R) = 2.202\%$ je najvyšší možný priemerný výnos samostatne stojaceho dlhopisu.

Zoberieme si body na efektívnej hranici prislúchajúce priemerným výnosom 1.95%, 2.00%, 2.05%, 2.10%, 2.15%, 2.20% a 2.202%. Pre každý z týchto výnosov riešime úlohu (4.3) a dostaneme váhy jednotlivých dlhopisov v portfóliu. V tabuľke sú v riadkoch uvedené váhy dlhopisov v portfóliu prislúchajúce konkrétne zvolenému bodu $E(R)$ z efektívnej hranice, v stĺpcoch sú firmy, ktoré boli vybraté do portfólia s kladnými váhami.

	2	5	6	7	8	9	14	15
1.95%	0.0949	0.0013	0	0.101	0.2758	0.3178	0.0823	0.1267
2.00%	0.13875	0	0	0.1778	0.2448	0.2313	0.1046	0.1026
2.05%	0.18141	0	0.0055	0.2522	0.2112	0.1479	0.125	0.0764
2.10%	0.22405	0	0.0112	0.3266	0.1776	0.0647	0.1454	0.0503
2.15%	0.26572	0	0.0178	0.4004	0.1326	0	0.1664	0.017
2.20%	0.30518	0	0.0275	0.4693	0.0065	0	0.1914	0
2.202%	0.30678	0	0.0278	0.472	0.0008	0	0.1924	0

Pre 500 000 simulácií sme dostali početnosť defaultov jednotlivých firiem a teda aj s akou pravdepodobnosťou dosiahneme predpokladaný výnos.

Napríklad : z 500 000 simulácií nastal prípad súčasného defaultu dvojice firiem s číslami 8 a 14 štyrikrát. To je pravdepodobnosť 0.0008%. Teraz si zoberieme bod 1.95% na efektívnej hranici a k nemu prislúchajúce váhy dlhopisov v portfóliu.

V tabuľke sú uvedené vypočítané váhy (firmy, ktoré nie sú uvedené majú váhu 0) a výnosy jednotlivých dlhopisov prislúchajúce situácií defaultu dvojice firiem 8, 14.

firma	2	5	7	8	9	14	15
váhy	0.0949	0.0013	0.101	0.275	0.3178	0.0823	0.1267
výnosy	2.203%	1.87%	2.203%	-49.9%	1.853%	-49.9%	1.853%

Vynásobením váh s výnosmi a následným sčítaním dostaneme, že s pravdepodobnosťou 0.0008% bude mať portfólio stratu -16.157%.

Pre vybrané priemerné výnosy teda týmto spôsobom dostaneme:

- $E(R) = 1.95\%$

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	1.9504%	99.8678%
default	-2.231%	0.1236%
default	-11.974%	0.0078%
default	-16.157%	0.0008%

- $E(R) = 2.00\%$

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	2.0004%	99.8678%
default	-3.321%	0.1236%
default	-10.358%	0.0078%
default	-15.68%	0.0008%

- $E(R) = 2.05\%$

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	2.0505%	99.8678%
default	-4.307%	0.1236%
default	-8.613%	0.0078%
default	-14.971%	0.0008%

- $E(R) = 2.10\%$

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	2.1059%	99.8678%
default	-5.287%	0.1236%
default	-6.861%	0.0078%
default	-14.254%	0.0008%

- $E(R) = 2.15\%$

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	2.1559%	99.8678%
default	-6.31%	0.1236%
default	-4.545%	0.0078%
default	-13.006%	0.0008%

- $E(R) = 2.20\%$

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	2.2007%	99.8678%
default	-7.53%	0.1236%
default	1.87%	0.0078%
default	-7.86%	0.0008%

- $E(R) = 2.202\%$

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	2.2027%	99.8678%
default	-7.58%	0.1236%
default	2.161%	0.078%
default	-7.622%	0.0008%

Vidíme, že v každom prípade je najväčšia možná strata podstatne menšia ako strata 49.9%, ktorú utrpí investor v prípade ak má dlhopisy len jednej firmy a táto zdefaultuje. Tiež si môžeme všimnúť, že najvyššia možná strata sa znižuje spolu s rastom priemerného výnosu, ale zároveň sa zvyšuje pravdepodobnosť straty. To je spôsobené tým, že spolu s rastom priemerného výnosu na efektívnej hranici sa zvyšuje aj neočakávaná strata celého portfólia.

4.3.1 Príklad 1

Porovnáme diverzifikáciu portfólia s držaním dlhopisov iba jednej vybranej firmy.

- Povedzme, že investor sa rozhodne investovať do dlhopisov firmy číslo 7. Táto firma má rating Aa, a teda podľa časovej štruktúry úrokových mier 4.2.3, bude mať výnos 2,203%. Ak však firma zdefaultuje, utrpí stratu -49,9%. Použitie simulácií nám dá pravdepodobnosť nastatia týchto dvoch javov.

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	2.203%	99.99%
default	-49.9%	0.01%

stredná hodnota výnosu je v tomto prípade $E(R) = 2,1978\%$. To je ročný výnos, ktorý investor očakáva od držania dlhopisov firmy číslo 7.

- Teraz sa investor rozhodne využiť diverzifikáciu. Na efektívnej hranici si vyberie bod, ktorý predstavuje priemerný výnos 2,1978%, teda taký istý, ako keby investoval do predchádzajúcej stratégie. Riešením úlohy 4.3 pre zadaný výnos dostaneme váhy, ktorými sú zastúpené jednotlivé dlhopisy v portfóliu. Znova využitím simulácií dostaneme:

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	2.1985%	99.8678%
default	-7.475%	0.1236%
default	1.55%	0.0078%
default	-8.123%	0.0008%

Priemerný výnos z týchto dvoch stratégií je totožný. Keď sa však pozrieme na situáciu z pohľadu straty, ktorú investor môže utpieť pri výskyte defaultu zistíme, že v prvom prípade je to strata -49,9%, kým najväčšia možná strata v druhom prípade je len -8,123%. Diverzifikácia preto umožňuje investorovi do značnej miery vyhnúť sa prípadnej strate.

4.3.2 Príklad 2

V nasledujúcom porovnáme diverzifikáciu portfólia podnikových dlhopisov s investíciou do štátnych ročných dlhopisov.

- Môžeme povedať, že investícia do štátnych dlhopisov je bezriziková a teda investor dostane s istotou očakávaný výnos. Podľa časovej štruktúry úrokových mier 4.2.3 má jednoročný štátny dlhopis výnos 1.267%.

výnos	pravdepodobnosť
1.267%	100%

- Teraz sa investor rozhodne investovať do podnikových dlhopisov. Na efektívnej hranici si vyberie vrchol paraboly, ktorý predstavuje minimálnu možnú neočakávanú stratu. V tomto bode je priemerný výnos 1.95%. Riešením úlohy 4.3 pre zadaný výnos dostaneme váhy, ktorými sú zastúpené jednotlivé dlhopisy v portfóliu. A znova využitím simulácií dostaneme:

	výnos	pravdepodobnosť
bez defaultu	1.9504%	99.8678%
default	-2.233%	0.1236%
default	-11.974%	0.0078%
default	-16.157%	0.0008%

Vidíme, že rozdiel vo výnosoch je značný. Záleží na investorovi a jeho averzii voči riziku, či sa rozhodne pre bezrizikovú investíciu do štátnych dlhopisov s nízkym výnosom, alebo za cenu vyššieho výnosu podstúpi riziko defaultu prinášajúce so sebou možnú stratu.

Záver

V tejto práci sme sa venovali úlohe diverzifikácie portfólia podnikových dlhopisov s tým, že sme uvažovali o vplyve rizika defaultu.

V praxi súkromné firmy, ktoré sa zaoberajú odhadom pravdepodobnosti defaultu využívajú rozsiahlu databázu dát historických výskytov defaultov, pomocou ktorej určia vzťah medzi vzdialenosťou do defaultu a pravdepodobnosťou defaultu. Tieto údaje však nie sú verejne dostupné. Vychádzajúc z toho, že náhodný člen v stochastickej rovnici vývoja aktív je z normálneho rozdelenia, rozhodli sme sa použiť predpoklad normálneho rozdelenia budúcej hodnoty aktív.

Najdôležitejším bodom celého postupu zostavovania úlohy diverzifikácie portfólia bolo využitie teórie oceňovania vlastného kapitálu ako call opcie na aktíva firmy. To sme využili nielen pri odhade hodnoty a volatility aktív, ale aj neskôr pri určení korelácií defaultov.

Riziko defaultu firmy je riziko, ktoré sa nedá celé odstrániť. Vieme ho len zmierniť diverzifikáciou. Pomocou výpočtov sme ukázali, že keď investor použije na portfólio podnikových dlhopisov nami prezentovanú úlohu diverzifikácie portfólia, jeho možná strata bude zredukovaná na minimum a pritom si zachová požadovaný výnos. Riziko, i keď minimálne tu však ostáva a záleží na investorovi a jeho averzii voči riziku, či uprednostní vyšší výnos z držania podnikových dlhopisov pred istým ale nižším výnosom štátnych dlhopisov.

Literatúra

- [1] Crosbie, P. J., Bohn, J. R., *Modeling Default Risk*, KMV LCC, 2001.
- [2] Čulík, M., *Aplikace metodologie oceňování opcí při odhadu hodnoty vlastního kapitálu zadlužené firmy jako reálné call opce*, MŠMT 181-2002.
- [3] Gupton, G., Stein, R., *Moody's Model for Predicting Loss Given Default*, Moody's Investors Service, 2002.
- [4] Hamilton, D. T., Cantor, R., West, M., Kerryn, F., *Default and Recovery rates of European Corporate Bonds Issuers, 1985 - 2001*, Moody's Investors Service, 2002.
- [5] Harper, D., *Corporate bonds: An Introduction to Credit Risk*, Investopedia, 2003.
- [6] Chovancová, B., Jaukovská, A., Kotlebová, J., Šturc, B., *Finančný trh: Nástroje, transakcie, operácie*, EUROUNION, 2002.
- [7] Kealhofer, S., Bohn, J. R., *Portfolio Management of Default Risk*, KMV LCC, 2001.
- [8] Kupkovič, M., a kol., *Podnikové hospodárstvo*, Sprint vfra, 2001.
- [9] McQuown, J. A., *A Comment on Market vs. Accounting-Based Measures of Default Risk*, KMV LCC, 1993.
- [10] Vasicek, O. A., *EDF Credit Measure and Corporate Bond Pricing*, KMV LCC, 2001.