FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2004 Michal Polák

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

KATEDRA EKONOMICKÝCH A FINANČNÝCH MODELOV

VYHĽADÁVANIE ARBITRÁŽNYCH PRÍLEŽITOSTÍ PRI SIMULOVANOM VÝVOJI PORTFÓLIA DLHOPISOV

Diplomant:	**Michal Polák**
Vedúci diplomovej práce:	**Mgr. Igor Melicherčík, Ph.D.**
	Bratislava, 2004

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne a použil som len literatúru uvedenú v zozname.

Touto cestou by som chcel taktiež poďakovať svojmu školiteľovi Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, Ph.D., za cenné pripomienky a rady, ktoré prispeli k skvalitneniu obsahu tejto práce.

Obsah

Úvod

Finančné trhy s dlhopismi predstavujú jednu z možností, kde môžu rôzne spoločnosti investovať svoje peniaze. Cieľom inštitúcii ako penzijné fondy, poisťovne a investičné fondy s dlhodobým horizontom, je poskytovať svojim klientom finančné zabepečenie v dlhšej budúcnosti. Konzervatívne uvažujúci investor vstupujúci do takejto spoločnosti chce zhodnotiť svoje imanie na dlhú dobu, je ochotný podstúpiť riziko, avšak s nie príliš dlhodobými fluktuáciami. Preto sa v portfóliu dôchodkových investičných fondoch, poisťovniach a iných používajú dlhopisy. Vzhľadom na to, že nemožno presne poznať vývoj budúcich cien dlhopisov, musí finančná spoločnosť pripraviť rôzne scenáre vývoja časovej štruktúry úrokových mier tak, aby bolo možno uvažovať nad viacerými eventualitami. Taktiež, bolo by finančne neúnosné pre spoločnosť, aby vygenerované scenáre obsahovali možnosti bezrizikového zisku. V praxi na trhu takáto príležitosť neexistuje dostatočne dlho, v dôsledku rýchleho spolupôsobenia ponuky a dopytu. Ak teda model vykazuje veľa arbitrážnych príležitostí, vieme takmer určite povedať, že takto sa trh správať v budúcnosti nebude. Cieľom diplomovej práce je objasniť arbitráž pri konštruovaní portfólia dlhopisov, vytvoriť spôsob hľadania arbitráže v modeloch budúceho vývoja úrokových mier a vygenerovať scenáre, kde zhodnotíme vplyv rôznych premenných na počet arbitrážnych príležitostí.

Na začiatku sa v kapitole č.2 venujeme základným pojmom z oblasti dlhopisov a časovej štruktúry úr. mier. V kapitole č.3 podrobnejšie objasníme princíp arbitráže a úlohu lineárneho programovania, ktorú používame na hľadanie arbitráže v jedno a viac-periodových modeloch. 4. kapitola sa zaoberá stochastickým vývojom štruktúry úr. mier v čase. Posledná 5. kapitola sa venuje generovaniu scenárii a otázke arbitrážnych príležitostí v týchto scenáriach.

2. Základné pojmy

V tejto kapitole uvedieme niekoľko základných pojmov, ktoré potom budeme v diplomovej práci často používať. Vysvetlíme čo je to dlhopis a ako sa v základe počíta cena dlhopisov. Ďalej sa venujeme pojmom ako diskontné dlhopisy a časová štruktúra úrokových mier. Predpokladáme, že čitateľovi sú pojmy ako súčasná hodnota, tok dnešných a budúcich platieb (cash flow stream) a spojité úročenie jasné.

Dlhopisy

Dlhopisy patria medzi najbežnejšie druhy cenných papierov s fixným príjmom. Emitentom, teda vypisovateľom, dlhopisu môže byť vláda, národná banka, korporácia či správa mesta alebo regiónu. Za vloženie peňazí do dlhopisu sa emitent ako protihodnotu zaväzuje vyplácať predom stanovený súbor platieb, v rovnako predom stanovených časoch. Podľa typov vyplácania môžeme vytvoriť základné delenie dlhopisov na dlhopisy s nulovým kupónom, diskontné dlhopisy a kupónové dlhopisy.

Dlhopisy s nulovým kupónom

Ak vložíme peniaze do tohoto dlhopisu, emitent sa zaväzuje vyplatiť čiastku F, nazývanú nominálna cena, v čase T nazývaným maturita dlhopisu. Pretože takáto operácia je vlastne totožná s vkladom sumy rovnej cene dlhopisu na bezrizikový úrok dĺžky $R(t,T)$, dostávame na základe spojitého úročenia, že pre cenu dlhopisu v čase t, s maturitou T, musí platiť:

(2.1) $$D(t,T) = F.e^{-R(t,T)(T-t)}$$

Inými slovami, cena dlhopisu je súčasná hodnota z nominálnej ceny F. Dlhopisy s nulovým kupónom často emitujú vlády alebo centrálne banky. Sú považované za najbezpečnejšie, čo sa týka rizika nesplnenia záväzku. Je to hlavne z toho jednoduchého dôvodu, že ak by vláda nemala na vyplatenie dlhopisov, je väčšinou v jej legislatívnej moci dať natlačiť nové peniaze na splatenie dlhu alebo použiť iné prostriedky na zabezpečenie splatnosti dlhopisov.

Kupónové dlhopisy

Väčšinou je zvyklosťou vyplácať držiteľovi dlhopisu okrem nominálnej hodnoty v čase splatnosti aj pravidelné platby pred týmto časom. Takýto dlhopis nazývame kupónový. Názov je podmienený historicky, pretože v minulosti boli kupóny vytlačené na dlhopise a bolo ich treba odtrhnúť a vymeniť za peniaze. Dnes sa táto forma splatenia kupónu už nepoužíva. Ak sa na kupónový dlhopis pozrieme z hľadiska toku dnešných a budúcich platieb, predstavuje súbor zložený z počiatočnej zápornej obstarávacej ceny a pravidelných kladných platieb k držiteľovi v tvare $[-D(t,T), C_{t+1}, C_{t+2}, ..., C_T + F]$, kde C je kupón udávaný v percentách z nominálnej ceny. Pre jednoduchosť v zápise budeme ďalej predpokladať, že kupón je fixný v čase. Pri stanovení počiatočnej férovej ceny dlhopisu budeme postupovať tak, ako v predošlom prípade. Cena kupónového dlhopisu sa bude rovnať súčasnej hodnote toku budúcich platieb vzniklých z dlhopisu. Kúpony budú vyplácané v časoch $t_i = t + i.\delta$, δ je zvolený časový krok. Posledný kupón je vyplatený zároveň s nominálnou hodnotou. Ak uvažujeme súbor úrokových mier $R(t,t_1), R(t,t_2), \dots, R(t,T)$ na doby $\langle t,t_1\rangle, \langle t,t_2\rangle, ..., \langle t,T\rangle$, tak pre dnešnú cenu kupónového dlhopisu získame vzťah:

(2.2) $$D(t,T) = C\delta e^{-R(t,t_1)(t_1-t)} + C\delta e^{-R(t,t_2)(t_2-t)} + \cdots + (C\delta + F)e^{-R(t,T)(T-t)}$$

Kupónové dlhopisy emitujú jednak vlády a jednak súkromný sektor. Prístup (2.2) k oceňovaniu ilustruje v základe mechanizmus povahy dlhopisov.

Diskontné dlhopisy

Diskontné dlhopisy sú dlhopisy s nominálnou cenou $F = 1$ a s $C = 0$. Nepredstavujú reálny nástroj na trhu, slúžia však pri matematickom modelovaní. Naviac pomocou diskontných dlhopisov možno zostaviť akýkoľvek kupónový dlhopis. Pri tom istom značení je cena diskont. dlhopisu,

(2.3) $$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

Potom cena ľubovoľného dlhopisu s kupónmi je

(2.4) $$D(t,T) = \sum_{i=t_1}^{T} C\delta.P(t,i) + (C\delta + F).P(t,T)$$

Kupónový dlhopis je teda lineárna kombinácia bezkupónových dlhopisov s príslušnými dobami splatnosti. Ďalší dôležitý pojem týkajúci sa diskontných dlhopisov je ich výnos. Hovorí o tom, koľko nám diskontný dlhopis zarobí, ak ho nepredáme dnes, ale si ho ponecháme do splatnosti. Pri danej cene $P(t,T)$ nás zaujíma, aký výnos nám dlhopis zarobí, čo je jednoducho:

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t} \tag{2.5}$$

Časová štruktúra úrokových mier

Časovú štruktúru úrokových mier tvorí krivka výnosov jednotlivých diskontných dlhopisov s rôznymi maturitami, ak fixujeme čas. Konštruuje sa aj pre diskontné dlhopisy, kde sa zvykne nazývať výnosová krivka bezkupónových dlhopisov alebo zero coupon yield curve. Ak zoberieme súbor diskontných dlhopisov rôznych maturít, pričom diskontné dlhopisy fixujem v čase, zaujíma nás štruktúra jednotlivých výnosov. Pretože výnos disk. dlhopisu je vzťah (2.5), možno jednotlivé výnosy vzájomne porovnávať. Je dôležité pri konštruovaní vychádzať zo sady dlhopisov z rovnakými vlastnosťami odlišujúcimi sa iba dobou do splatnosti. Výnosová krivka sa v praxi konštruuje skôr pre kupónové dlhopisy. Diskontné dlhopisy nepatria väčšinou medzi cenné papiere obchodovateľné na trhu. Výnosová krivka diskontných dlhopisov sa potom odhaduje z krivky kuponových dlhopisov. Zo zvyšujúcou dobou do splatnosti v praxi možno očakávať rast výnosov. Stáva sa však aj opačná situácia, keď je výnosová krivka klesajúca. Tvar výnosovej krivky je formovaný očakávaniami o budúcom vývoji úrokových mier. Ak investori predpokladajú, že úr. miery pôjdu v budúcnosti nahor, znamená to, že ceny dlhopisov pôjdu nadol. Z vyššie uvedeného vzorca pre cenu dlhopisu vyplýva, že výnosy pôjdu nahor, čo odzrkadluje rastúci tvar výnosovej krivky. Na druhú stranu, ak hráči na trhu očakávajú pokles dlhodobých úrokových mier, ceny dlhopisov z neskoršou dobou do splatnosti pôjdu hore a odpovedajúce výnosy budú s maturitou klesať.

Forwardové úrokové miery

Dôležitý nástroj používaný pri formulácii stochastických modelov sú forwardové úrokové miery. Forwardová úr. miera na obdobie $\langle T_1, T_2 \rangle$ je v čase t očakávaná úroková miera použitá na úročenie na spomenuté obdobie, pričom $t < T_1 < T_2$. Určíme ju ako výnos z forwardoveho kontraktu na diskontný dlhopis kúpený v čase T_1 a splatný v čase T_2, pričom kontrakt dohodneme v čase t. Tento kontrakt môžeme replikovať tak, že v čase t kúpime dlhopis, ktorý maturuje v dobe T_2 a predáme k kusov dlhopisu, ktorý maturuje v dobe T_1. Naše portfólio bude mať v čase t hodnotu $P(t,T_2) - kP(t,T_1)$, v čase T_1 budeme musieť zaplatiť sumu k a v čase T_2 zaplatíme 1 korunu. Pretože dnešná hodnota forwardu musí byť nula, inak by sa dalo na kontrakte neobmedzene zarobiť, musíme zvoliť

(2.6)
$$k = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}$$

čo je cena forwardu v čase T_1. Výnos z forwardu (čo je vlastne výnos z dlhopisu $P(T_1,T_2)$)bude,

(2.7)
$$f(t,T_1,T_2) = -\frac{\log P(t,T_2) - \log P(t,T_1)}{T_2 - T_1}$$

Ak položíme $T_2 - T_1 \to 0$, spojitá forwardová miera na nekonečne malé obdobie $\langle T_1, T_2 \rangle$, očakávaná v čase t je ,

(2.8)
$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}$$

Ak považujeme forwardové miery za dané, ceny dlhopisov získame z predošlého vzorca ako

(2.9)
$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$$

Short rate

Je krátkodobá bezriziková úroková miera na obdobie $\langle t, t+dt \rangle$. Vzťah medzi forwardovou a short rate krivkou je daný ako:

(2.10) $$r_t = f(t,t) = -\frac{\partial \ln P(t,t)}{\partial T}$$

Znamená to, že prvý bod na forwardovej krivke je totožný s dnešnou short rate úrokovou mierou. Častokrát bývajú stochastické modely zadané pomocou vývoja short rate.

Peňažný dlhopis

Je dlhopis ktorý kúpim dnes za 1 SK. Jeho hodnota je v čase t rovná:

(2.11) $$B_t = e^{\int_0^t r_u du}$$

V podstate, peňažný dlhopis je identický s bezrizikovým účtom v banke na ktorý vložím 1 SK, pričom úročenie sa deje nepretržite v nekonečne malých okamihoch dt. Použijeme ho v kapitolách 3. a 4. pri odúročení ceny diskontného dlhopisu v neskoršom čase ako dnes.

3. Princíp arbitráže

Arbitráž je možnosť bezrizikového zisku na finančnom trhu. Arbitrážne príležitosti sa vyskytujú, avšak pre celkovú efektivitu finančných trhov majú krátkodobý charakter. V diplomovej práci budeme hľadať arbitrážne príležitosti vo vygenerovaných modeloch vývoja portfólia diskontných dlhopisov. V tejto kapitole objasníme štruktúru množiny arbitrážnych riešení. Budeme uvažovať portfólio diskontných dlhopisov s rôznymi dobami do splatnosti. Predpokladáme pre jednoduchosť možnosť nákupu neceločíselných čiastok, povolujeme krátke pozície (predáme dlhopis, ktorý ešte nevlastníme). Rovnako predpokladáme racionalitu investorov, tzn.: pri rovnakých podmienkach sa investor vždy rozhodne pre ziskovejšiu možnosť. Posledný formálny predpoklad je, že všetci investori majú rovnaké informácie o vývoji cien dlhopisov na trhu.

V princípe môžu nastať tri situácie, ktoré predstavujú dlhodobo neudržateľný stav na trhu. Prvá situácia je neplatnosť zákona jednej ceny, druhá je existencia dominantej stratégie a tretia je existencia arbitrážnych príležitostí. Pre jednoduchosť budeme uvažovať iba dva časové okamihy t_0 a t_1 . V čase t_0 poznáme vektor cien diskontných dlhopisov $P(t_0)=[P_1(t_0),P_2(t_0),\dots,P_N(t_0)]$. Definujeme množinu elementárnych udalostí Ω , predstavujúcu všetky možné zmeny cien vektora dlhopisov. Potom $P(t_1,\omega)$ je vektor cien dlhopisov v čase t_1 v stave $\omega\in\Omega$. Premenná H bude predstavovať vektor stratégii – t.j.: krátke a dlhé pozície v jednotlivých dlhopisoch. Hodnota nášho portfólia v časoch t_0 a t_1 bude:

(3.1) $$V(t_0)=\sum_{i=1}^{N}H_iP_i(t_0)$$

(3.2) $$V(t_1,\omega)=\sum_{i=1}^{N}H_iP_i(t_1,\omega),\ \text{pre } \forall\omega\in\Omega$$

3.1 Zákon jednej ceny

Zákon jednej ceny spočíva v tom, že ak mám dve portfólia V_1,V_2, ktorých cena je v čase t_1 rovnaká, teda $V_1(t_1,\omega)=V_2(t_2,\omega)$, pre $\forall\omega\in\Omega$, tak musí ich cena na začiatku byť taktiež rovnaká. Ak nie, tak dokážeme z nuly zarobiť nekonečne veľa. Napríklad povedzme, že v čase t_0 je $V_1 < V_2$. Potom vo V_2 zvolíme krátku pozíciu, z ktorej financujeme dlhú pozíciu vo V_1 . Z rozdielu týchto portfólii máme zisk. V čase t_1 sa hodnota portfólii rovná, splatíme krátku pozíciu z dlhej a ostane nám hotovosť $V_2 - V_1 > 0$. Toto si môžeme naškálovať koľkokrát chceme. Na reálnom trhu je takáto situácia nemožná (jej výskyt podnieti investorov na vloženie peňažných prostriedkov do menšieho z portfólii, v našom prípade do V_1. V dôsledku zvýšeného dopytu po V_1 sa jeho cena vyrovná na V_2). Ak má model byť funkčný, nemal by vykazovať príležitosti takéhoto druhu (na portfólia V_1, V_2 sa možno tiež pozerať ako na dve aktíva, ktorých hodnoty sú vo všetkých prípadoch v čase t_1 totožné. Potom ale aktíva musia mať dnes rovnakú cenu).

3.2 Dominantné stratégie

Ďalšou nepríjemnou záležitosťou je existencia dominantých stratégii. Ak existuje, tak dominantná stratégia H^* je taká, že pre nejakú inú stratégiu H a k obom stratégiam prislúchajúce portfólia V, V^* také , že: $V^*(t_0) = V(t_0)$ platí: $V^*(t_1, \omega) > V(t_1, \omega)$, pre $\forall \omega \in \Omega$. Inými slovami, existuje taká stratégia, ktorá nám v porovnaní s ďalšou stratégiou spraví v akomkoľvek prípade väčší zisk. Preto sa jej budeme držať, keďže oproti stratégii H vždy zarobí viacej a je bezriziková, keďže to platí pre $\forall \omega \in \Omega$. Toto nemôže v praxi dlhodobo fungovať, pretože všetci účastníci trhu by zvolili takú kombináciu stratégii, aby z nuly mohli zarobiť kladné množstvo. Presnejšie, ak zoberiem stratégiu $\tilde{H} = H^* - H$, tak portfólio k nej prislúchajúce v čase t_0 má hodnotu $\tilde{V}(t_0) = 0$ a v čase t_1 by sme ho predali za $V^*(t_1, \omega) - V(t_1, \omega) > 0$ vo všetkých stavoch. Táto stratégia je naviac tiež dominantná, pretože dominuje stratégiu nulového vektora, kde sa portfólio rovná na začiatku aj na konci nule. Znamená to, že ak existuje dominantná stratégia, potom existuje možnosť ako zarobiť z nuly vždy pozitívne imanie, čo je nezlúčiteľné z dlhodobou realitou. Ďalej si treba uvedomiť, že neexistencia dominantných stratégii implikuje platnosť zákona jednej ceny. Platí nasledujúce tvrdenie:

Tvrdenie č.1: Ak neexistujú dominantné stratégie, tak potom zákon jednej ceny platí.

Dôkaz: Dokážeme nepriamo. Predpokladajme, že zákon jednej ceny neplatí. Zoberieme také dve stratégie H, H^* a portfólia V, V^* aby $V^*(t_1,\omega) = V(t_1,\omega)$ vo všetkých prípadoch a $V^*(t_0) > V(t_0)$. Stratégia H^* zarobí menej ako H . Definujeme novú stratégiu $\tilde{H} = H - H^*$, o ktorej vieme,že pre $\forall \omega \in \Omega$ zarobí kladné množstvo, čo vyplýva z vyššie uvedeného. $\tilde{V}$ nastavíme tak, aby bolo rovné nule v čase t_0 . Preto pre nejaké H_i položíme,

(3.3) $$\tilde{H}_i = -\frac{\tilde{H}_1 P_1(t_0) + \cdots \tilde{H}_{i-1} P_{i-1}(t_0) + \tilde{H}_{i+1} P_{i+1}(t_0) + \cdots + \tilde{H}_N P_N(t_0)}{P_i(t_0)}$$

Dostali sme stratégiu, ktorej portfólio $\tilde{V}$ v čase t_0 sa rovná nule a $\tilde{V}(t_1,\omega) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$. Táto stratégia je podľa predchádzajúcich úvah sama dominantnou. To poukazuje na existenciu dominantných stratégii, čo bolo treba dokázať.

Ukázali sme, že ak neexistujú dominantné stratégie, zákon jednej ceny platí. Na druhú stranu, ak existuje dominantná stratégia, zákon jednej ceny môže ale nemusí platiť. Vo všeobecnosti, nemožno dokázať obrátený tvar tvrdenia č.1.

3.3 Arbitrážne Príležitosti

Poslednou prekážkou je existencia arbitrážných príležitostí. Pri dominantných stratégiach sme uvažovali o takých možnostiach kúpy dlhopisov, ktoré z nuly vždy zarobia zisk vo všetkých prípadoch. Čo ak nastane situácia, kde môžeme ale nemusíme vyhrať, no nikdy nestratíme peniaze. To znamená pravdepodobnosť (nie istota)bezrizikového získania imania bez existencie možnosti prehry na trhu. Začneme s portfóliom rovným nule (niekde zvolím krátku a niekde dlhú pozíciu). Ak v čase t_1 existuje aspoň jedna taká udalosť, že naše portfólio je väčšie ako nula, pričom v ostatných udalostiach je nezáporné, tak sme našli arbitrážnu príležitosť. Inak povedané, v modeli je arbitrážna príležitosť, ak existuje stratégia H, že platí:

$$E[V(t_1)] > 0$$

(3.4) $$V(t_1, \omega) \geq 0 \text{, pre } \forall \omega \in \Omega$$

$$V(t_0) = 0$$

Pričom V myslíme portfólio zadefinované v (3.1) a (3.2). Z ekonomického hľadiska, ak by takáto príležitosť existovala, každý (kedže investori sú racionálni)by kupoval arbitrážnu stratégiu, ovplyvňoval jej ceny, a tak ju postupne efektívne likvidoval. Čo sa týka vzťahu z dominantnými stratégiami, platí tvrdenie,

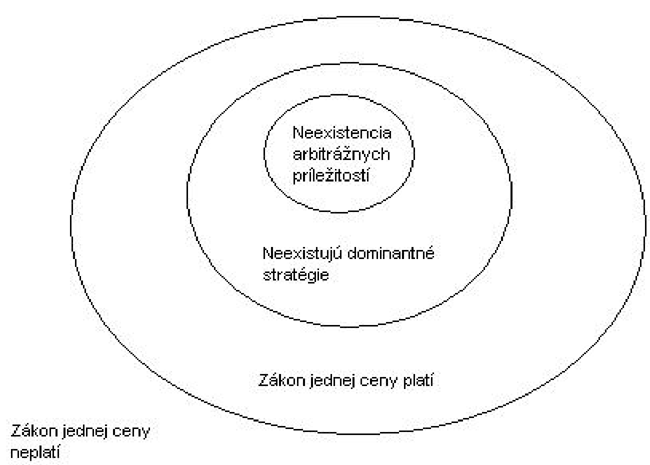
Tvrdenie č.2: Ak existuje dominantná stratégia, tak existuje tiež arbitrážna príležitosť.

Dôkaz je triviálny. Opačné tvrdenie vo všeobecnosti neplatí.

Ak zosumarizujeme kategorizáciu dlhodobo nereálnych príležitostí na trhu, vidíme, že „množina neexistencie arbitrážnych príležitostí“ $\subset$ „množina neexistencie dominantných stratégii“ $\subset$ „ množina platnosti zákona jednej ceny“. Môžu nám nastať štyri prípady:

- Neexistujú arbitrážne príležitosti.
- Existujú arbitrážne príležitosti ale neexistujú dominantné stratégie.
- Dominantné stratégie existujú, ale platí zákon jednej ceny.
- Zákon jednej ceny neplatí.

Pre lepšie pochopenie sa stačí pozrieť na obrázok.



Vďaka jednotlivým inklúziam, na vylúčenie posledných troch stačí testovať prvý prípad. Naviac, iba ten je únosný z ekonomického hľadiska. Preto sa úloha na hľadanie možností nereálneho zisku na trhu obmedzí na hľadanie arbitrážnych príležitostí, a to na tvar (3.4).

3.4 Úloha o optimalizácii portfólia

Za rešpektovanie bezarbitrážnej podmienky hovorí aj úloha o optimalizácii portfólia. Predpokladajme, že existuje funkcia užitočnosti $\mathrm{u}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, taká, že u je striktne rastúca, diferencovateľná a konkávna na celom $\mathbb{R}$. Inak povedané, ak w je cena portfólia, tak $\mathrm{u}(w)$ predstavuje úžitok pre investora zo sumy w. Pretože investor uvažuje o optimalizácii do budúcnosti, nemôže poznať ako sa presne budú ceny dlhopisov vyvýjať, avšak má určité očakávania. Preto vhodne zvolená optimalizačná funkcia nebude funkcia užitočnosti ale očakávania z funkcie užitočnosti. Uvažujúc stále o jedno-periodovom modeli dostávame, že účelová funkcia bude mať tvar,

$$E[u(V(t_1))]=\sum_{\omega\in\Omega}\mathrm{P}(\omega)\,u(V(t_1,\omega)) \tag{3.5}$$

kde $\mathrm{P}(\omega)$ je vhodná pravdepodobnostná miera. Cieľom je maximalizovať očakávania vzhľadom na zvolený východzí stav portfólia v. Optimalizačný problém teda vyzerá takto:

$$\begin{aligned} \max \quad & Eu(V(t_1)) \\ V(t_0) &= v \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pre túto úlohu platí, že ak existuje arbitrážna príležitosť, tak potom nemôže existovať jej optimálne riešenie. Položme, H ako arbitrážnu príležitosť, $\hat{H}$ ako optimálne riešenie. Označme $\Delta P(\omega)=P(t_1,\omega)-P(t_0)$ ako zmenu vo vektore cien dlhopisov pre daný stav ω.

Pre novú stratégiu $\tilde{H}=H+\hat{H}$ platí,

$$v+\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_i\Delta P(\omega)=v+\sum_{i=1}^{N}H_i\Delta P(\omega)+\sum_{i=1}^{N}\hat{H}_i\Delta P(\omega)\geq v+\sum_{i=1}^{N}\hat{H}_i\Delta P(\omega)$$

pre ľubovoľný stav $\forall\omega\in\Omega$, čo je len inak napísaný vzťah, koľko zarobí nová stratégia $\tilde{H}$ oproti optimálnej stratégii $\hat{H}$. Nerovnosť vo vzťahu je daná tým, že H je arbitrážna príležitosť. Z čoho tiež vyplýva, že nerovnosť je aspoň v jednom $\omega\in\Omega$ ostrá. Keďže u je ostro rastúca a pravdepodobnosť je väčšia ako nula pre všetky stavy, znamená to, že účelová funkcia $Eu(V(t_1))$ bude pre $\tilde{H}$ ostro väčšia ako pre $\hat{H}$. Potom ale $\hat{H}$ nemôže byť optimálne riešenie. Vidíme, že na to aby vôbec existovalo optimálne riešenie, treba aby úloha neobsahovala arbitrážnu príležitosť.

3.5 Viac-periodový model

Realistické modely by mali byť viac-periodové, preto potrebujeme model obohatiť o informačnú štruktúru vývoja cien dlhopisov a ďalšie parametre. Základné informácie o viac-periodovom modeli sú tieto:

- Vývoj cien dlhopisov sa bude odohrávať v diskrétnom svete začínajúc v čase $t_0 = 0$ cez diskrétne okamihy $t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \dots, t_k = k\Delta t$, kde Δt je zvolený časový krok.
- Konečná množina stavov Ω, kde $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$
- Pravdepodobnostná miera P na Ω.
- Budeme všeobecne uvažovať o filtrácii $\mathbb{F} = \{F_t \; ; t = t_0, t_1, \dots t_k\}$, čo je do seba vnorený systém σ -algebier $F_{t_0} \subset F_{t_1} \subset \cdots \subset F_{t_k}$ generovaných príslušnými disjunktnými deleniami množiny Ω. V podstate to predstavuje ako sa informácie o vývoji cien dlhopisov postupne odhaľujú investorom. V každom čase t_i je teda definovaný pravdepodobnostný priestor $(\Omega, F_{t_i}, \mathrm{P})$.
- Vektor cien dlhopisov $P(t)$ bude stochastický proces závisly od času a stavu. Aby bola situácia prehľadnejšia, nebudeme písať, v ktorej množine stavov podľa príslušného delenia sa má $P(t)$ nachádzať. Investori tiež vedia, že v čase t sa skutočný stav ω nachádza v niektorej konkrétnej podmnožine delenia Ω. Ceny dlhopisov na tejto podmnožine musia byť konštantné, aby investori vôbec mohli určiť aké sú v čase t ceny. Naviac chceme, aby investori mali prehľad nielen o dnešných cenách, ale aby boli schopní z informačného modelu výčítať aj vývoj cien v minulosti. Na splnenie oboch podmienok (úplne informácie o dnešných a minulých cenách)požadujeme, aby vektor cien dlhopisov bol adaptovaný na filtráciu $\mathbb{F}$, tzn.: pre $\forall t = t_0, t_1, \dots, t_k$ je $P(t)$ merateľné vzhľadom na F_t.
- Vektor stratégii bude definovaný ako stochastický proces $H(t) = (H_1(t), H_2(t), \dots, H_N(t))$ pre čas $t = t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$. Čas t_k predstavuje konečný časový okamih v ktorom investori iba zhodnotia cenu portfólia, ale nevolia znova rozloženie pozícii v dlhopisoch. V čase t_0 sa pozriem na ceny dlhopisov a zvolím podľa toho stratégiu H_0. V čase t_1 sa zase pozriem na ceny

dlhopisov, prerovnám portfólio na stratégiu H_1, atď. V čase t_k už portfólio neprerovnávam, iba zaznamenám jeho finálnu hodnotu. Podobne ako pri cenách dlhopisov, investor má mať možnosť zvoliť stratégiu podľa dostupných dnešných a minulých informácii, avšak nemal by mať možnosť sa „pozerať" do budúcnosti. Z tohoto dôvodu bude vektor stratégii taktiež adaptovaný vzhľadom na filtráciu $\mathbb{F}$.

- Hodnota portfólia $V(t)$ bude adaptovaný stochastický proces v už spomínaných diskrétnych okamihoch. Pre $V(t)$ platí:

(3.7)
$$V(t) = \sum_{i=1}^{N} H_i(t)P_i(t), \text{ pre } t = t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$$
$$V(t_k) = \sum_{i=1}^{N} H_i(t_{k-1})P_i(t_k)$$

Ďalej budeme požadovať ešte jednu podmienku na stratégie, konkrétne aby portfólio bolo samofinancovateľné. To dosiahneme tak, že hodnota portfólia po prerovnaní sa bude rovnať hodnote portfólia pred prerovnaním vo všetkých časových okamihoch okrem posledného, čo nám dáva:

(3.8)
$$\sum_{i=1}^{N} H_i(t_j)P_i(t_j) = \sum_{i=1}^{N} H_i(t_{j-1})P_i(t_j)$$

pričom $j = 1, \ldots, k-1$. Takto zabezpečíme, aby neexistoval žiaden prísun peňazí do alebo von z portfólia.

Podobne ako v jedno-periodových modeloch, stačí na vylúčenie všetkých nereálnych príležitostí zisku uvažovať iba o vylúčení arbitrážnych príležitostí. Podmienky bezarbitrážnosti vo viac-periodovom modeli sú podobné podmienkam v jedno-periodovom modeli. Jediná vec, ktorá sa tu na rozdiel vyskytuje naviac, je zákaz prísunu alebo odlivu finančných prostriedkov z portfólia, preto požadujeme podmienku, aby portfólio bolo samofinancovateľné. Podmienky bezarbitrážnosti preformulujeme na viac-periodový model takýmto spôsobom:

Ak existuje nenulový vektor stratégii H tak, že platí:

(3.9)
$$E[V(t_k)] > 0$$
$$V(t_k, \omega) \geq 0, \text{ pre } \forall \omega \in \Omega$$
$$V(t_0) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{N} H_i(t_j)P_i(t_j) = \sum_{i=1}^{N} H_i(t_{j-1})P_i(t_j)$$

(pričom podmienka samofinancovania je určená v každom uzle okrem posledných a v časoch $t = t_1, \dots, t_{k-1}$), tak potom je daný vektor stratégii arbitrážna príležitosť.

3.6 Rizikovo neutrálny prístup

Najskôr si zadefinujeme niektoré pojmy, ktoré využijeme pri rizikovo neutrálnom prístupe. Označme $P^*(t) = B_t^{-1} P(t)$ ako diskontovaný vektor cien dlhopisov, pričom B_t je peňažný dlhopis podľa (2.11). Poobne označme $V^*(t) = B_t^{-1} V(t)$ ako diskontovanú hodnotu nášho portfólia. Vektor stratégii $H(t)$ je vektor stratégii, tak ako sme to už v texte uvádzali. Naviac však požadujeme, aby $H(t)$ bolo samofinancovateľné.

Definujme si nový stochastický proces

(3.10) $$G(t_j) = \sum_{j=0}^{k-1} H^T(t_j)[P^*(t_{j+1}) - P^*(t_j)]$$

ktorý môžeme chápať ako postupné náhodne prírastky diskontovanej hodnoty portfólia. Inak povedané, ak v čase t_0 má naše portfólio podľa (3.7) hodnotu $V(t_0)$, tak v čase t_1 bude mať diskontovanú hodnotu $V^*(t_1) = V(t_0) + G(t_0)$. Pretože stratégia H je samofinancovateľná, podobný výsledok musí platiť aj pre ostatné časy, a to:

(3.11) $$V^*(t_{j+1}) = V(t_0) + G(t_j), \text{ pre } j = 0, 1, \dots, k-1$$

Na zhodnotenie či model obsahuje arbitrážne príležitosti sa používa v teórii často rizikovo neutrálny prístup. Vychádza z toho, že v modeli neexistujú arbitrážne príležitosti práve vtedy, keď existuje tzv. martingálová miera, čo je pravdepodobnostná miera Q taká, že:

1. $Q(\omega) > 0$, pre $\forall \omega \in \Omega$
2. Pre vektor diskontovaných cien dlhopisov platí:

(3.12) $$E_Q[P^*(t+s)/F_t] = P^*(t),$$

pre $t, s \geq t_0$ a $t, s = t_0, t_1, \dots, t_k$. Ak platí (3.12), tak $P^*(t)$ sa nazýva martingál vzhľadom k miere Q . Túto podmienku spĺňa napríklad to, keď je vektor diskontovaných cien dlhopisov podmienená stredná hodnota podľa nejakej miery, ktorá je potom automaticky martingálová miera. V teórii diskrétnych finančných modelov platí základné tvrdenie:

Tvrdenie č. 3: V modeli existuje martingálová miera Q práve vtedy, keď nie sú arbitrážne príležitosti.

Uvedieme dôkaz prvej časti vety. Na to potrebujeme ešte jeden pomocný výsledok, ktorého dôkaz spočívá vo vlastnostiach podmienenej strednej hodnoty. Znenie dôkazu pomocného výsledku nebudeme uvádzať, avšak možno ho nájsť v [1].

Lemma č. 1: Ak $P^*(t)$ je martingál, tak potom aj $G(t)$ je martingál.

Dôkaz tvrdenia č. 3: Dôkaz prvej implikácie je nasledovný. Ak existuje podľa predpokladu tvrdenia martingálová miera Q, tak $P^*(t)$ je martingál. Podľa lemmy č.1 z toho vyplýva, že aj $G(t)$ je martingál. Následne zo vzťahu pre samofinancovateľnosť portfólia (3.11) a z (3.12) máme:

$$E_Q[V^*(t+s)/F_t] = E_Q[V(t_0)+G(t+s)/F_t] = V(t_0)+E_Q[G(t+s)/F_t] = V(t_0)+G(t) = V^*(t)$$

pričom $t,s = t_1,t_2,\ldots,t_k$. V predposlednej rovnosti sme použili vedomosť o tom, že $G(t)$ je martingál a $V(t_0)$ je konštanta. Dostali sme, že $V^*(t)$ je tiež martingál. Predpokladajme teraz , že H by bola samofinancujúca stratégia, ktorá je arbitrážna príležitosť. Z toho vyplýva, že

$$E[V^*(t_k)] > 0$$

a rovnako

$$E_Q[V^*(t_k)] > 0$$

Vieme ale, že V^* je martingál vzhľadom na Q. Preto musí zároveň platiť:

(3.13) $$E_Q[V^*(t_k)] = V(t_0) > 0$$

Čo je podľa (3.9) v spore s tým, že H je arbitrážna príležitosť. Tým sme dokázali prvú časť vetu o ekvivalencii martingálových mier a neexistencie arbitrážnych príležitostí. Opačná časť dôkazu je dopodrobna vysvetlená v publikácii od S. Plisku v [1], a preto sa dôkazom nebudeme zaoberať.

3.7 Úloha lineárneho programovania

Hľadať v praxi arbitrážné príležitosti rizikovo neutrálnym prístupom by bolo numericky dosť obtiažné. Keď si ale všimneme štruktúru úlohy (3.4) je jasné, že je lineárna. Preto budeme hľadať arbtirážne príležitosti v praxi pomocou lineárneho programovania. Úlohu na hľadanie arbitráže prevedieme na úlohu lineárneho programovania. Najskôr budeme uvažovať o jedno-periodovom modeli, ako o jedno-periodovom strome n vetvami. Pravdepodobnosť bude rovnomerne rozložená , teda $\mathrm{P}(\omega)=\frac{1}{n}$, pre $\forall\omega\in\Omega$. Budeme maximalizovať účelovú funkciu z pre premennú H, pre ktorú platí:

(3.14) $$z=E[V(t_1)]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}H_iP_i(t_1,\omega_j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}H^TP(t_1,\omega_j)$$

Prvá časť bezarbitrážnej podmienky (3.4) je prepísaná ako:

(3.15) $$\max\quad\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}H^TP(t_1,\omega_j)$$

Zvyšok predstavujú lineárne ohraničenia, konkrétne v tvare:

(3.16) $$\begin{gathered}A(t_1)H\geq 0\\ P^T(t_0)H=0\end{gathered}$$

kde matica $A(t_1)$ obsahuje riadkové vektory cien dlhopisov v jednotlivých vetvách jedno-periodového stromu.

(3.17) $$A(t_1)=\begin{pmatrix}P_1(t_1,\omega_1),P_2(t_1,\omega_1), & \dots & P_N(t_1,\omega_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ P_1(t_1,\omega_n),P_2(t_1,\omega_n), & \cdots & P_N(t_1,\omega_n)\end{pmatrix}$$

Z praktického hľadiska treba ešte pridať jednu podmienku, a to

(3.18) $$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}H^TP(t,\omega_j)\leq C$$

kde C je dostatočne veľké kladné číslo. Čo sa týka štruktúry riešení, vieme, že množina prípustných riešení je neprázdna. Stačí totiž zobrať nulový vektor, ktorý je vždy prípustným riešením. Ďalej si treba uvedomiť, že ak existuje aspoň jedno optimálne riešenie, tak ich existuje nekonečne veľa. Inak povedané množina prípustných riešení je v prípade existencie arbitráže vždy neohraničená. Ak by tak nebolo (existovala by práve jedna arbitrážna príležitosť), tak uvažujme o optimálnom riešení H . Keď máme optimálne riešenie, tak nejaký násobok optimálneho riešenia, $\hat{H} = k.H \ , k > 0$, dosadený do úlohy je prípustné riešenie. Keď porovnáme tieto dve stratégie, tak dostávame, že pre obe prislúchajúce účelové funkcie platí:

$$\frac{k}{n}\sum_{j=1}^{n} H^T P(t_1,\omega_j) > \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} H^T P(t_1,\omega_j) \tag{3.19}$$

takže H nemôže byť optimálne. Množina prípustných riešení buď obsahuje iba nulový vektor alebo je neohraničená. Práve z tohoto dôvodu budeme fixovať hodnotu účelovej funkcie na zvolenej konštante C, aby sa v praxi arbitráž lahšie hľadala. Úloha lineárneho programovania na hľadanie arbitráže v jedno-periodovom modeli bude mať teda tvar

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} H^T P(t_1,\omega_j) \\ & A(t_1)H \geq 0 \\ & P^T(t_0)H = 0 \\ & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} H^T P(t_1,\omega_j) \leq C \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.8 Úloha LP pre viac-periodový model

Pre viac-periodový model je situácia zložitejšia ako pri jedno-periodovom modeli. Vektor stratégii tu predstavuje totiž stochastický proces, preto závisí nielen od času ale aj od uzlu. Počet premenných nám tu priveľmi narástol, a ak by sme arbitráž chceli hľadať cez lineárne programovanie podobným spôsobom ako pri jedno-periodovom modeli, tak by situácia bola dosť neprehľadná. My to budeme riešiť tak, že si viac-periodový model rozdelíme na príslušný počet jedno-periodových modelov. Potom ich začneme postupne riešiť ako v predošlom prípade. Ak narazíme na arbitrážnu príležitosť, vieme si ďalej zostaviť portfólio tak, že na konci viac-periodového modelu budeme mať vždy arbitráž. Presnejšie, ku každému uzlu, ktorý nie je konečný, prislúcha jeden zodpovedajúci jedno-periodový model podľa zvolenej informačnej štruktúry daného viac-periodového modelu. Ak v tomto malom modeli existuje arbitrážna príležitosť, ukážeme, že existuje aj v celom modeli. Predpokladajme, že $\hat{H}(t_i)$ je arbitrážna príležitosť v nejakom jedno-periodovom modeli povedzme v čase t_i. Zostrojíme takú viac-periodovú stratégiu $H(t)$, ktorá bude arbitrážna príležitosť aj vo viac-period. modeli. V čase $t < t_i$ bude $H(t) = 0$. Hodnota portfólia na začiatku bude teda

(3.21) $$V(t_0) = 0$$

V čase t_i položíme za H:

$$H(t_i, \omega) = \hat{H}, \text{ pre } \omega \in \mathrm{A}^*$$

kde A^* predstavuje stavy prislúchajúce k danému arbitrážnemu jedno-periodovému submodelu. Pre ω, ktoré nepatria do jedno-periodového submodelu položíme:

$$H(t_i, \omega) = 0, \text{ pre } \omega \notin \mathrm{A}^*$$

Pre $t > t_i$ a ω zo submodelu stačí preniesť zisk vzniklý arbitrážou do ľubovoľne vybratej zložky z vektora stratégii H_j pre $\forall \omega \in A^*$. Pre ostatné zložky vektora prislúchajúce k subomdelu bude v čase $t > t_i$ platiť:

$$H_i(t, \omega) = 0, \text{ pre } i \neq j, \ \omega \in \mathrm{A}^*$$

Pre čas $t > t_i$ a stavy nepatriace do submodelu zvolíme vektor stratégii H ako:

$$H(t, \omega) = 0, \text{ pre } \omega \notin \mathrm{A}^*$$

Potom z tejto definície vyplýva, že H je samofinancujúca viac-periodová stratégia začínajúca ako nulový vektor. Stratégia nerobí nič, až kým neprídeme do času t_i a do vhodnéhu uzlu v ktorom existuje arbitráž. V tomto uzle je H zvolená tak, aby bola arbitrážna. Preto bude v čase t_{i+1} aspoň v jednom stave $\omega \in A^*$ hodnota portfólia väčšia ako nula. Následne prerovnáme portfólio tak, že zisk z arbitráže vložíme iba do j-teho dlhopisu. Množstvá pre ostatné dlhopisy $H_i,\ i \neq j$ budú nulové. Takto prenesieme kladnú sumu až do koncového času t_k, kde pre hodnotu portfólia bude platiť:

(3.22) $$V(t_k, \omega) \geq 0, \text{ pre } \omega \in A^*$$

Pričom aspoň v jednom prípade bude nerovnosť ostrá. Pre zvyšné stavy bude platiť:

(3.23) $$V(t_k, \omega) = 0, \text{ pre } \omega \notin A^*,$$

Vzťahy (3.21), (3.22) a (3.23) spolu spĺňajú definíciu arbitráže pre viac-periodový model. Naviac, ak neexistuje arbitráž v žiadnom z prislúchajúcich jedno-periodových modelov, tak neexistuje ani vo viac-periodovom modeli. Ak začneme s nulovým portfóliom bez možnosti existencie arbitráže kdekoľvek v modeli, tak na konci v čase t_k nemôže nastať situácia, aby aspoň v jednom prípade hodnota portfólia bola väčšia ako nula, pričom v ostatných bola rovná nule. Preto na riešenie arbitráže vo viac-periodovom modeli stačí postupne riešiť cez lineárne programovanie prislúchajúce jedno-periodové modely. Akonáhle narazíme na arbitrážnu príležitosť, prehlásime model za arbitrážny. Naopak, ak v každom jedno-periodovom modeli arbitráž nebude existovať, považujeme model za bezarbitrážny. Model bude viac-periodový strom začínajúci v čase t_0 a končiaci v čase t_k. Jeho štruktúru definujeme cez čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ predstavujúce počet vetiev smerujúcich z každého uzla do periody $1, 2, \ldots, k$. Pre čas t_0 budeme riešiť pôvodnú úlohu (3.20). Pre čas t_i a $\omega \in A^*$ prislúchajúce k danému uzlu budeme riešiť úlohu:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} H^T(t_i)P(t_{i+1},\omega_j) \\
& A(t_{i+1})H(t_i) \geq 0 \\
& P^T(t_i)H(t_i) = 0 \\
\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} & H^T(t_i)P(t_{i+1},\omega_j) \leq C
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Pričom pre väčšiu prehľadnosť nepíšeme okrem maximalizačnej funkcie závislosť vektora cien dlhopisov $P(t_i)$ a matice $A(t_{i+1})$ od $\omega \in A^*$

4. Stochastické modely

Táto kapitola sa zaoberá stochastickým vývojom úrokových mier v čase. Na realistický pohyb cien dlhopisov je nutno uvažovať s náhodnosťou. Bude predstavený Ho&Lee model popisujúci stochastický vývoj forwardových kriviek v čase. Trh s úrokovými mierami môže byť charakterizovaný troma spôsobmi. Možno ho popísať cenami dlhopisov, možno skonštruovať výnosovú alebo forwardovú krivku. Všetky tri popisy sú navzájom ekvivalentné. Podľa (2.3) a (2.9) možno ľubovoľne prechádzať od výnosov k cenám a následne k forwardovým krivkám. V tejto kapitole použijeme na odvodenie potrebných výsledkov Itôovu Lemmu a Girsanovovu vetu, o ktorých sa možno viac dozvedieť napríklad v [6].

4.1 Ho&Lee model

Prvýkrát bol Ho&Lee model uvedený v roku 1986. Predstavuje jednoduchý typ modelu, kde driftová zložka je funkcia času a maturity a volatilita je konštantná. Napriek jeho jednoduchosti dáva vcelku bohatú škálu časových štruktúr úrokových mier. Je špeciálnym prípadom Heath&Jarrow&Morton rámca. Podrobnejšie údaje o odvodení Ho&Lee z HJM rámca možno nájsť v [2]. Z troch uvedených možností východzej premennej použijeme forwardové krivky $f(t,T)$. Z nich už cenu dlhopisu odvodíme ako

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$$

Základná rovnica Ho&Lee modelu vyjadrená cez prírastky forwardových kriviek je daná ako:

(4.1) $$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma dW_t$$

kde $\alpha(t,T)$ je funkcia času aj maturity. Jej význam bude ukázaný neskôr. Náhodnosť v modeli je zabezpečená 1-rozmerným Wienerovým procesom. V podstate zápis (4.1) predstavuje nekonečne veľa rovníc. Ak integrujeme diferencial $df(t,T)$ podľa času, dostávame

(4.2) $$f(t,T) = f(0,T) + \sigma W_t + \int_0^t \alpha(s,T)ds$$

kde $f(0,T)$ je integračná konštanta, v praxi nám to predstavuje počiatočnú forwardovú krivku. Integrovanie člena dW_t podľa času je triválne, keďže Wienerov proces začína od nuly. Taktiež medzi forwardovými mierami rôznych maturít T,S v danom čase je úplna korelácia, keďže prírastok $f(t,T)-f(t,S)$ je deterministický.

4.2 Odvodenie driftovej funkcie

Odvodenie funkcie $\alpha(t,T)$ bude prebiehať tak, že si zoberieme všeobecne akýkoľvek diskontný dlhopis úrokových mier a budeme sa ho snažiť oceniť. Pretože všetky dlhopisy na trhu by mali byť obchodovateľné, musí Ho&Lee model byť schopný oceniť každý dlhopis. Stačí uvažovať o dvoch ľubovoľných diskontných dlhopisov $P(t,T),P(t,S)$, kde $T>S$. Podľa finančnej teórie je dlhopis férovo ocenitenľný, ak je martingál podľa vhodnej miery. Použijeme peňažný dlhopis popísany v druhej kapitole ako

$$B_t = \exp(\int_0^t r_u du)$$

Následne zo vzťahu pre forwardovu krivku (4.2) a rovnosti medzi forwardovou krivkou a short rate uvedenou v (2.10) platí:

$$r_u = f(u,u) = \sigma W_u + f(0,u) + \int_0^u \alpha(s,u)ds \tag{4.3}$$

Ak dosadíme short rate do vyššie uvedenej formule pre peňažný dlhopis, dostaneme:

$$B_t = \exp(\sigma\int_0^t W_u du + \int_0^t f(0,u)du + \int_0^t\int_0^u \alpha(s,u)ds\, du)$$

čo dáva po zmene integračných hraníc v poslednom integráli:

$$B_t = \exp(\sigma\int_0^t W_u du + \int_0^t f(0,u)du + \int_0^t\int_s^t \alpha(s,u)du\, ds) \tag{4.4}$$

Pričom predpokladáme, že $0 \le s \le u \le t$. Pre cenu diskontného dlhopisu s maturitou T, ďaleko väčšiou ako S, bude podľa (2.9) platiť:

$$P(t,T) = \exp(-\sigma W_t(T-t) - \int_t^T f(0,u)du - \int_t^T\int_0^t \alpha(s,u)ds\, du) \tag{4.5}$$

Podobne ako pri predchádzajúcom prípade, pri zmene hraníc v poslednom integráli dostávame, že :

(4.6) $$P(t,T) = \exp(-\sigma W_t (T-t) - \int_0^T f(0,u)du - \int_0^t \int_t^T \alpha(s,u)du\, ds)$$

Nakoniec, keď cenu zdiskontujeme do času nula pomocou peňažného dlhopisu, máme:

(4.7) $$Z_t = B_t^{-1} P(t,T) = \exp(-\sigma \int_0^t W_u du - \sigma W_t (T-t) - \int_0^T f(0,u)du - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u)du\, ds$$

Potrebujeme teraz nájsť taký Wienerov proces, aby prírastky Z_t boli bez driftovej zložky. Po viacerých úpravách a pri použití Itôovej Lemy získame vzťah pre prírastok diskontovaného dlhopisu:

(4.8) $$dZ_t = Z_t[-\sigma(T-t) \cdot [dW_t + \left(\frac{1}{\sigma(T-t)} \cdot \int_t^T \alpha(t,u)du - \frac{1}{2}\sigma(T-t) \right) dt]$$

Ak si všimnene predchádzajúci výraz, tak drift je:

(4.9) $$\gamma_t^T = \frac{1}{\sigma(T-t)} \cdot \int_t^T \alpha(t,u)du - \frac{1}{2}\sigma(T-t)$$

Na to, aby sme vedeli výraz γ_t^T zo vzorca pre diskontovanú cenu dlhopisu eliminovať, použijeme Girsanovovu vetu.

Girsanovova veta: Ak W_t je Wienerov proces vzhľadom na mieru P a γ_t spĺňa podmienku $E_{\mathrm{P}}[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt)] < \infty$, tak potom existuje taká miera Q, že platí:

(i) Q je ekvivalentné k P

(ii) $\frac{dQ}{dP} = \exp(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt)$

(iii) $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$, je Wienerov proces vzhľadom na Q.

(ii) predstavuje Radon-Nykodýmovú deriváciu a (iii) je ekvivalentné k vzťahu:

(4.10) $$d\tilde{W}_t = dW_t + \gamma_t^T dt$$

Vďaka Girsanovovej vete sa nám vzťah (4.8) zjednoduší na:

$$dZ_t = -\sigma(T-t) Z_t d\tilde{W}_t$$

Táto úvaha však musí platiť pre všetky dlhopisy s maturitou menšiou ako T. Budeme teraz uvažovať o diskontovanej cene dlhopisu, $Y_t = B_t^{-1}P(t,S)$, s maturitou $S < T$. Overíme, aký má Y_t drift. Pre prírastok máme vzťah:

(4.11)
$$dY_t = -\sigma(S-t)Y_t(dW_t + \gamma_t^S dt)$$

Ak prejdeme k rizikovo neutrálnej miere Q, vychádza nám vzťah:

(4.12)
$$dY_t = -\sigma(S-t)Y_t(d\tilde{W}_t + (\gamma_t^S - \gamma_t^T)dt)$$

Ľubovolný diskontný dlhopis bude férovo oceniteľný, ak výraz (4.12) nemá drift. Alebo inak povedané $\gamma_t^T = \gamma_t^S$, pre $\forall S$. Premenná γ_t^T musí byť nezávislá od T, a teda musí platiť, že $\frac{\partial \gamma_t^T}{\partial T} = 0$. Ak sa vrátime k tvaru výrazu (4.9), tak vidíme, že jediné, na čo môžeme klásť podmienku je funkcia $\alpha(t,T)$. Ak majú byť všetky dlhopisy obchodovateľné na trhu, tak potom reštrikcia na drift je v tvare:

(4.13)
$$\alpha(t,T) = \sigma\gamma_t + \sigma^2(T-t)$$

Ho&Lee model nám potom s novým obmedzením na driftovú funkciu $\alpha(t,T)$ dáva pre prírastok forwardovej krivky

(4.14)
$$d_t f(t,T) = (\sigma\,\gamma_t + \sigma^2(T-t))\,dt + \sigma dW_t$$

alebo v zápise pre modifikovaný Wienerov proces podľa rizikovo neutrálnej miery Q sa vzťah (4.14) pretransformuje do tvaru

(4.15)
$$df(t,T) = \sigma d\tilde{W}_t + \sigma^2(T-t)dt$$

Ostáva ešte vyriešiť otázku ako z (4.15) vypočítame ceny dlhopisov. Ak túto rovnicu zintegrujeme podľa času dostávame

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma\tilde{W}_t + \sigma^2(T-t)\,t$$

Podľa vzťahu (2.9) následne pre cenu dlhopisu vychádza

(4.16)
$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(0,u)du - \sigma(T-t)\tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T(T-t)\,t\right)$$

Riešenie je skoro hotové, Ak si uvedomíme ,že podľa (2.9) platí

$$P(0,T) = \exp(-\int_0^T f(0,u)du) = \exp(-\int_0^t f(0,u)du).\exp(-\int_t^T f(0,u)du)$$

z čoho úpravou vychádza

$$\exp(-\int_t^T f(0,u)du) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}$$

Ak získaný výraz dosadíme do (4.16), finálny vzťah pre výpočet ceny dlhopisu bude

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \cdot \exp\left(-\sigma(T-t)\tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T(T-t)\,t \right) \tag{4.17}$$

pričom modifikovaný Wienerov proces vypočítame ako

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_t dt \tag{4.18}$$

4.3 Trhová cena rizika

Premenná γ_t použitá v (4.18) nezávisí od doby do splatnosti dlhopisu, je rovnaká pre všetky cenné papiere na trhu. Môžeme to inak povedať aj tak, že γ_t charakterizuje konkrétny trh s cennými papiermi. Pokiaľ je $\gamma_t = 0$, znamená to, že reálny svet dlhopisov je totožný so svetom, kde sú dlhopisy oceňované rizikovo neutrálne.

4.4 Odhad Wienerovho procesu

Náhodnosť v modeli je zabezpečená modifikovaným Wienerovým procesom podľa (4.18) . Na to aby sme ho vedeli určiť, potrebujeme vedieť počítať Wienerov proces W_t. Pre prírastok Wienerovho procesu dW_t platí, že $dW_t \sim \mathrm{N}(0,dt)$, čo pri vlastnostiach normálneho rozdelenia dáva vzťah:

$$dW_t \sim \phi \sqrt{dt} \quad ,$$

kde ϕ je náhodná veličina majúca jednotkové normálne rozdelenie. Prírastok Wienerovho procesu môžeme vhodne aproximovať ako

$$\Delta W \approx \phi \sqrt{\Delta t} \tag{4.19}$$

kde Δt je zvolený časový krok.

5. Simulácie portfólia dlhopisov

Cieľom tejto kapitoly je ukázať ako vplývajú rôzne parametre prislúchajúce k zvolenému modelu na počet arbitrážnych príležitostí. Tak ako v 3. kapitole, budeme uvažovať o jedno a viac-periodových modeloch vývoja portfólia diskontných dlhopisov, pričom portfólio je zadefinované podľa (3.7). Vývoj portfólia sa bude odohrávať v diskrétnych okamihoch $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \ldots, t_k = k\Delta t$. Za Δt zvolíme vhodný časový krok. Vektor cien dlhopisov $P(t)$, pre $t = t_0, t_1, \ldots t_k$ budeme modelovať cez Ho&Lee model podľa vzťahu (4.17), pričom za počiatočný vektor cien $P(t_0)$ zoberieme ceny diskontných dlhopisov zo splatnosťami na 1,2, až 5 rokov. Celkovo teda máme 5 dlhopisov. Ich ceny boli vypočítané cez (2.3), pričom sme použili bezrizikové úroky na 1,2 až 5 rokov zo dňa 19.3.2004 z www stránky finance.yahoo.com. Následne, na jedno a viac-periodový model použijeme úlohu lineárneho programovania na hľadanie arbitrážnych príležitostí, konkrétne, (3.20) pre jedno-periodový model a (3.24) pre viac-periodový model.

5.1 Jedno-periodový Ho&Lee model

Jedno-periodový model bude mať charakteristiky:

- Počiatočný časový okamih $t_0 = 0$ a koncový časový okamih $t_1 = \Delta t$, pričom Δt budeme rôzne škálovať
- n stavov vektora cien $P(t_1)$. Počet stavov vektora cien dlhopisov predstavuje informačnú štruktúru modelu. Môžeme si to predstaviť aj ako jedno-periodový strom, kde počiatočný uzol je vektor cien disk. dlhopisov $P(t_0)$ a finálne uzly sú dané ako $P(t_1, \omega_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
- Vypočítaný vektor cien dlhopisov v každom uzle podľa vzťahu (4.17).
- Pravdepodobnosť jednej vetvy je určená ako $\mathrm{P}(\omega) = \dfrac{1}{n}$, pre $\forall \omega \in \Omega$.

Zvažovali sme vplyv rôznych parametrov ako počet vetiev, výška trhovej ceny rizika, dĺžka časového kroku a volatilita modelu na výskyt arbitrážnych príležitostí, za predpokladu, že ostatné podmienky sa nemenia. V praxi sme to robili tak, že sme vygenerovali model a určili, či je arbitrážny alebo nie. Toto sme zopakovali 1000-krát pričom sme počítali, koľkokrát sa percentuálne vyskytovala arbitráž vzhľadom na zvolené parametre. Najskôr nás zaujímalo, či sú výsledky stabilné vzhľadom na počet generácii modelu. Počet generácii sme skúšobne menili na 100, 500, až 2000. Variabilita vzniklá vo výsledkoch bola dostatočne malá.

Ako ďalší parameter sme zvažovali vplyv počtu stavov vektora cien $P(t_1, \omega)$ na počet arbitrážnych príležitostí. Pretože jednotlivé finálne stavy sú modelované aj náhodnosťou, čím ich je väčší počet, tým je menšia pravdepodobnosť, že vygenerujeme všetky tak, aby neexistovala možnosť prehry na trhu. Inak povedané, väčší počet stavov ponúka viac reálnych možností na trhu, čo vylučuje arbitráž. Ak by sme teoreticky mali nekonečne veľa stavov, tak arbitráž a priori nemôže existovať. Ostatné parametre, sme zvolili ako: $\gamma_t = 0.2$, $\Delta t = 1$ a volatilitu sme zvolili ako $\sigma = 0.05$.

Počet stavov	%aribtráž	%nearbitráž
2	84.5	15.5
5	70.3	29.7
10	38.7	61.3
15	23.3	76.7
20	11	89
25	6.1	93.9
30	3.1	96.9
40	1.2	98.8
50	0.3	99.7
60	0	100

Z tabuľky vidíme, že arbitráž pri dvoch vetvách je prakticky 85-percentná. Pri zvyšovaní počtu vetiev je badateľný pokles. Už pri 20-vetvách je výskyt arbitrážnych príležitostí 11%. Podobný výsledok dostali vo svojej práci aj Berkelaar, Hoek, Lucas v [4]. Pri 25 stavoch bola v ich článku arbitráž 2.5%, čo však možno vysvetliť väčším rozptylom cien aktív (akcie), ktoré v modeli zvažovali.

Druhý parameter, ktorý nás veľmi zaujíma je trhová cena rizika. Keď sa pozrieme na vzťah (4.17) a (4.18) vidíme, že γ_t je veličina, ktorá ovplyvňuje trend vývoja cien dlhopisov. Zvyšné parametre ostali rovnaké, teda $\Delta t = 1$, $\sigma = 0.05$. Počet finálnych stavov sme zvolili ako 20. Výsledná tabuľka má tvar:

Trhová cena rizika	%arbitráž	%nearbitráž
-3	97.8	2.2
-2	78.1	21.9
-1.5	55.3	44.7
-1	29.7	70.3
-0.5	9	91
0	4.6	95.4
0.5	13.4	86.6
1	36.2	63.8
1.5	67.6	32.4
2	91.1	8.9
3	100	0

Trhová cena rizika pri hodnotách ako 3 a vyššie dávala už arbitráž 100 percent. Pri raste γ_t jediné, čo je rastúce, je trend (volatilita je v Ho&Lee modeli konštantná). Pri výraznom pozitívnom trende bude hodnota portfólia vo väčšine stavov nižšia ako na začiatku. Zo zvyšujúcim sa γ_t klesá pravdepodobnosť výskytu portfólia s väčšiou hodnotou, čo zrejme zvyšuje frekvenciu výskytu arbitrážnych príležitostí.
Parameter γ_t môže byť taktiež záporny. Podobne ako pri výrazne pozitívnom trende, má veľký negatívny trend eliminujúci efekt na volatilitu. Pri negatívnom trende budú ceny dlhopisov a tým padom aj hodnota portfólia vo väčšine stavov väčšia ako na začiatku. Výsledky pre záporné γ_t sa príliš nelíšia od kladných. Absolútny arbitrážny strop dosiahneme pri hodnotách okolo $|\gamma_t| > 3$, zatiaľ čo v rozpätí -0.5 až 0.5 sa arbitrážne príležitosti vyskytujú zriedkavo.

Tretí parameter, ktorého vplyv treba zohľadniť pri hľadaní arbitrážnych príležitostí, je volatilita. Ak položíme $\sigma = 0$, tak sa situácia s úrokovými mierami na trhu nemení, arbitráž teda principiálne nemôže existovať. Na druhú stranu, ak zvyšujeme volatilitu, treba očakávať postupný nárast arbitrážnych príležitostí.

Zvyšným parametrom sme priradili hodnoty $\gamma_t = 0.2$, $\Delta t = 1$, počet finálnych stavov bol 20.

Volatilita	%arbitráž	%nearbitráž
0	0	100
0.01	3	97
0.02	4.3	95.7
0.03	8.1	91.9
0.04	9.9	90.1
0.05	11.3	88.7
0.06	26.5	73.5
0.07	47.6	52.4
0.08	90.6	9.4
0.09	100	0
0.1	100	0

Vidno, že v tomto prípade je malá škálovateľnosť vzhľadom na volatilitu. Už pri hodnotách 0.08 vykazovala väčšina modelov arbitráž.

Posledný parameter, ktorý sme zvažovali je dĺžka časového kroku Δt. Volatilitu sme zvolili na 0.05. Ostatné parametre sú rovnaké ako v predošlom prípade, $\gamma_t = 0.2$, počet stavov je 20.

časový krok	%arbitrage	%no arbitrage
0.5	2.2	97.8
1	26.1	73.9
1.5	53.2	46.8
2	100	0
4	100	0

Vidíme posun od času $\Delta t = 1$, k času $\Delta t = 2$. Vplyv časového kroku na arbitráž možno zrejme vysvetliť tak, že väčšie kroky zväčšujú volatilitu, čím dostávame podobný efekt veľkého počtu arbitrážnych príležitostí ako pri veľkej volatilite.

5.2 Viac-periodový Ho&Lee model

Viac-periodový model bude mať charakteristiky:

- Odohráva sa v časových okamihoch $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2\Delta t, \ldots, t_k = k\Delta t$.

- Jeho štruktúru definujeme cez vektor počtu stavov, čo sú čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ predstavujúce počet vetiev smerujúcich z každého uzla do periody $1, 2, \ldots, k$. Znamená to, že vektor cien $P(t_0)$ môže nadobúdať n_1 možných stavov. Keď zoberieme ľubovoľný z nich - $P(t_1)$, tak ten môže nadobúdať n_2 možných stavov a pod. Prirodzene, do každého uzla vedie práve jedna cesta.
- Vypočítaný vektor cien dlhopisov v každom uzle podľa vzťahu (4.17)
- Pravdepodobnosť je rozložená rovnomerne, teda pravdepodobnosť každej vetvy smerujúcej do periódy k je určená ako $\mathrm{P_j}(\omega) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{j} n_i}$

Pre stabilitu generovania platí podobne ako pri jedno-periodovom modeli, že vzhľadom na počet generácii sú výsledky stabilné. Následne, ako pri jedno-periodovom modeli, sme zvažovali vplyvy rôznych parametrov. Ako prvý sme pozororali vplyv vektora počtu stavov na počet arbitrážnych príležitostí. Najskôr sme uvažovali o 2-periodovom modeli, kde počet vetiev n_1 fixujeme na 2. Zvyšné počty vetiev n_2 smerujúcich z dvoch uzlov do konečnej periódy budú variabilné. Ostatné parametre sme zvolili ako $\gamma_t = 0.2, \sigma = 0.05, \Delta t = 0.5$. Na rozdiel od jedno-periodového modelu je viac-periodový citlivejší na časový krok, preto sme zvolili Δt ako 0.5. Výsledky sú zosumarizované v nasledujúcej tabuľke.

vektor počtu stavov	%arbitráž	%nearbitráž
2, 2	100	0
2, 5	97.4	2.6
2, 10	93.1	6.9
2, 20	86,8	13.2
2, 40	79.3	20.7
2, 100	78.5	21.5

Vidno, že fixovanie prvej zložky vektora stavov n_1 na 2 neprináša veľké zníženie arbitráže. Tento výsledok je očakávateľný, pretože podľa 3. kapitoly na to, aby sme viac-periodový model prehlásili za bezarbitrážny, nesmie arbitráž existovať vo všetkých prislúchajúcich jedno-periodových modeloch. Ak sa pozrieme na výsledok z jedno-periodového modelu, tak pri 2 stavoch bola arbitráž 84.5%. Pri vektore stavov [2, 2] máme 3 zodpovedajúce jedno-periodové modely, vo všetkých 3 je šanca na arbitráž

84.5%, čo dáva vysokú šancu na vznik arbitráže v celom modeli. Je tu badať istý posun k väčšej arbitrážnosti oproti jedno-periodovému modelu, čo je zrejme dané tým, ako sa hľadá arbitráž vo viac-periodových modeloch. Teraz sa pozreme na situáciu opačne a fixujeme koncový počet vetiev n_2 na 20, pričom prvé čislo n_1 budeme meniť.

vektor počtu stavov	%arbitráž	%nearbitráž
50, 20	100	0
20, 20	94.1	5.9
10, 20	56.5	43.5
5, 20	72.4	27.6
2,20	84.7	15.3

Výsledky sú pochopiteľné, pretože v modeli so štruktúrou (50,20) je prislúchajúcich jedno-periodových modeloch, v ktorých sa hľadá arbitráž 51, zatiaľ čo napríklad v modeli so štruktúrou (10,20) je ich 11. Pravdepodobnosť, že pri náhodnom generovaní sa vyskytne z 51 prípadov jednoperiodových modelov aspoň jedna arbitrážna je ďaleko väčšia ako pri 11-tich jedno-periodových modeloch.

Výsledky z 3-periodových modeloch poukazovali na 100-percentnú prítomnosť arbitráže vo všetkých prípadoch

vektor počtu stavov	%arbitráž	%nearbitráž
2, 2, 2	100	0
2, 2, 4	100	0
2, 4, 8	100	0
5, 2, 2	100	0
5, 2, 4	100	0
5, 2 ,8	100	0
10, 10 ,10	100	0
20, 20 ,20	100	0

Ako ďalší parameter sme testovali trhovú cenu rizika. Z predchádzajúcich výsledkov sa nám zdalo vzhľadom na počty arbitrážnych príležitostí rozumné za vektor stavov zvoliť [10, 20], volatilitu ako 0.05, trhovú cenu rizika ako 0.2, časový krok je 0.2.Výsledky týkajúce sa trhovej ceny rizika sú zhrnuté v tabuľke.

trhová cena rizika	%arbitráž	%nearbitráž
1.5	100	0
-1	85.7	14.3
-0.5	58.3	41.7
0	61.1	38.9
0.5	63.4	36.6
1	99.3	0.7
1.5	100	0

Rozsah testovaných hodnôt je o čosi menší ako pri jedno-periodovom modeli. Avšak platí podobný výsledok, že pre $|\gamma_t| > 1.5$ je percento arbitrážnych príležitostí veľmi vysoké.

Pri sledovaní vplyvu volatility na arbitráž, pri zachovaní tých istých parametrov ako v minulom prípade sme dostali nasledujúce výsledky.

Volatilita	%arbitráž	%nearbitráž
0	0	100
0.01	7.5	92.5
0.02	16.1	83.9
0.03	27.5	72.5
0.04	35.2	64.8
0.05	49.1	50.9
0.07	58.3	41.7
0.09	76.9	23.1
0.12	100	0

Ako posledný bol testovaný časový krok. Ostatné parametre sme zvolili ako $\gamma_t = 0.2, \sigma = 0.05$ a vektor počtu stavov [10, 20]. Výsledky sú citlivejšie v porovnaní s jedno-periodovým modelom. Ak zoberieme časový krok dĺžky 1 rok, pričom uvažujeme 2-periodový model , tak dostávame, že v modeli sa vždy nachádzajú arbitrážne príležitosti.

Časový krok	%arbitráž	%nearbitráž
0.1	3.1	96.9
0.3	20.8	79.2
0.5	54.2	45.8
0.7	68.5	31.5
0.9	92.2	7.8
1	100	0

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo vytvoriť spôsob hľadania arbitrážnych príležitostí v modeloch stochastického vývoja portfólia diskontných dlhopisov a následné zhodnotiť vplyv rôznych premenných prislúchajúcich k modelu na počet arbitrážnych príležitostí. Ukázali sme, že na vylúčenie možností nereálneho dlhodobého zisku v modeli stačí vylúčiť arbitrážne príležitosti. Teoreticky sa arbitráž rieší pomocou martingálov a rizikovo neutrálnych mier. Prakticky sme odvodili, že úloha na hľadanie arbitráže vedie k úlohe lineárneho programovania. Táto bola definovaná pre jedno aj viac-periodové modely. Následne sme namodelovali ceny diskontných dlhopisov podľa Ho&Lee modelu. V experimentálnej časti sme ukázali závislosť arbitráže od počtu možných stavov cien dlhopisov, trhovej ceny rizika, volatility a časového kroku. Možno povedať, že výsledok závislosti prvých troch je konzistentný s očakávanou realitou. V budúcnosti možno prácu obohatiť napríklad o použitie stochastických modelov s nekonštantnou volatilitou a preskúmať ako to vplýva na arbitráž v modeli.

Literatúra

[1] S. Pliska, Introduction to Mathematical Finance, Discrete Time Models, Blackwell Publishers, 1997.

[2] M. Baxter, A. Rennie, Financial Calculus, Cambridge University Press, 1999.

[3] T. Cipra, Matematika Cenných Papíru, HZ Praha, 2000.

[4] A. Berkelaar, H. Hoek, A. Lucas, Arbitrage and Sampling Uncertainty in Financial Stochastic Programming Models.

[5] N. Gülpmar, B. Rustem, R. Settergren, Simulation and Optimization Approaches to Scenario Tree Generation, September 2001.

[6] S. Shreve, Stochastic Calculus and Finance, Technical Report, Carnegie Mellon University, 1997.