

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2004

Martin Proksa

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika



DYNAMICKY OPTIMÁLNE INVESTOVANIE
NA NEÚPLNÝCH TRHOCH

Diplomová práca

Diplomant: Martin Proksa
Vedúci diplomovej práce: Dr. Aleš Černý
Bratislava 2004

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce Dr. Alešovi Černému za jeho odborné vedenie, pripomienky a podnety, ktoré výraznou mierou prispeli ku skvalitneniu obsahu práce.

Čestne prehlasujem, že predkladanú diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Obsah

Úvod	2
1 Finančné deriváty	3
1.1 Zaisťovanie portfólia pomocou derivátov	4
1.1.1 Delta hedging	4
1.1.2 Gamma hedging	5
2 Úžitková funkcia	7
3 Oceňovanie derivátov pomocou binomického modelu	9
3.1 Jednoperiódový binomický model	9
3.2 Multiperiódový binomický model	10
3.3 Definícia všeobecného multiperiódového modelu.	11
4 Diskrétne zaisťovanie na neúplných trhoch	13
4.1 Vývoj ceny opcie na neúplných trhoch	13
4.2 Jednoduché zaisťovanie v diskretnom čase	13
5 Metodika	16
5.1 Popis problému	16
5.2 Odvodenie explicitných vzťahov	17
5.2.1 <i>Theta</i> zaistenie	17
5.2.2 Dynamické <i>theta-beta</i> zaistenie	18
5.2.3 Statické <i>theta-beta</i> zaistenie	19
5.3 Použité numerické metódy	19
5.3.1 Newtonova Metóda	19
5.3.2 Metóda bisekcie	20
5.3.3 Metóda trisekcie	21
6 Výsledky a diskusia	22
6.1 Jednoduché <i>theta</i> zaistenie pri exponenciálnej úžitkovej funkcii	24
6.2 Vplyv koeficientu A na voľbu optimálnej stratégie	26
6.3 Vplyv počtu predaných opcií α na voľbu optimálnej stratégie	29
6.4 Hľadanie optimálneho α	30
6.5 Optimálne α pre nadhodnotené a podhodnotené opcie	31
6.6 Dynamické <i>theta-beta</i> zaistenie.	33
6.7 Statické <i>theta-beta</i> zaistenie	37
7 Záver	38
Literatúra	39

Úvod

Práca sa zaoberá hľadaním dynamicky optimálnej zaistovacej stratégie rizikovo averzného investora na neúplnom trhu za prítomnosti troch druhov aktív - akcie, opcie na akciu a bezrizikového účtu. Úloha sa dá formulovať ako maximalizácia úžitku zo zaistenia, alebo ekvivalentne ako minimalizácia kumulatívnej replikačnej chyby. Vo všeobecnosti sa pri riešení úloh tohto typu dajú použiť princípy dynamického programovania, čo umožňuje odvodiť rekurentný vzťah pre replikačnú chybu a úloha tak nadobúda predpoklady umožňujúce počítačovú implementáciu.

Ako uvádza Černý v [5], v doterajších prácach autori prevažne vychádzali z minimalizácie replikačnej chyby, ktorá bola meraná kvadratickou úžitkovou funkciou a problém sa označoval ako *mean-variance hedging*. Problém bol najprv formulovaný pre spojitý čas - Duffie, Richardson (1991) a hlavne Schweitzer (1992). V diskretnom čase bol za použitia dynamického programovania riešený zjednodušený problém - Schäl (1994) a plne rekurzívny vzťah nezávisle odvodili Černý (2001) a Bertsimas (2001).

V tejto práci je na vyhodnotenie efektivity zaistenia použitá záporná exponenciálna úžitková funkcia, ktorá vďaka svojej konštrukcii umožňuje jednoduché odvedenie rekurentných vzťahov a zachováva invariantnosť vzhľadom na počiatočný stav majetku.

V 1. kapitole sú uvedené základné pojmy z oceňovania opcí a opísané sú *delta* a *gamma* zaistovacie stratégie.

V 2. kapitole je definovaná úžitková funkcia a podrobnejšie sú rozoberané vlastnosti zápornej exponenciálnej úžitkovej funkcie.

V 3. kapitole je najprv opísaný jednoduchý binomický model vývoja ceny akcie; definovaná je rizikovo neutrálna pravdepodobnosť a ukázaný je princíp oceňovania derivátov pomocou binomického stromu. Taktiež je definovaný všeobecný multiperiódový model a základné vlastnosti stochastických procesov.

Kapitola 4 sa venuje neúplným trhom, na ktorých definuje strednoodnotový H_t proces, ktorý slúži na oceňovanie opcí a je načrtnutý princíp ako sa bude realizovať delta zaistenie.

V kapitole 5 je definované prostredie, v ktorom sa následne odvádza explicitný vzťah pre model delta zaistenia a tiež pre model gamma zaistenia.

Kapitola 6 opisuje správanie modelu *theta* zaistenia pri zmene jeho parametrov a porovnáva výsledky statického a dynamického modelu *theta-beta* zaistenia.

1 Finančné deriváty

Finančné deriváty sú nástroje, ktorých hodnota závisí od hodnoty cených papierov alebo iných trhových premenných; všeobecne od hodnoty podkladného aktíva. Medzi finančné deriváty patria napr. futurity, forwardy, swapy, opcie a väčšinou sa používajú na zaistenie portfólia voči nechceným trhovým výkyvom.

Opcia predstavuje dohodu predávajúcej a kupujúcej strany, ktoré sa v čase $t = 0$ dohodnú na podmienkach výplaty v expiračnom čase $t = T$, pričom výplata závisí od aktuálnej hodnoty podkladného aktíva na ktoré sa derivát viaže. Podkladným aktívom môže byť výmenný kurz, úroková miera, akcia, akciový index a pod.

Vo všeobecnosti sa na výplatu opcie dá pozerat' ako na náhodnú veličinu X , pričom ak v čase $t = T$ nastane stav $\omega \in \Omega$, výplata bude $X(\omega)$. Cieľom pri oceňovaní derivátov je stanoviť férovú cenu v čase $t = 0$. V zmysle *Arbitrage Pricing Theory (APT)* platí, že existuje jediná férová cena, ktorá je nezávislá od rizikových preferencií kupujúceho či predávajúceho.

Európska call opcia - je dohoda dvoch zmluvných strán, ktorá vo vopred dohodnutom *expiračnom čase* poskytuje kupujúcemu *právo* (nie povinnosť) kúpiť podkladné aktívum za vopred dohodnutú *expiračnú cenu*. V čase kedy je zmluva uzatvorená si zmluvné strany vymenia *opčnú prémiiu* čo je férová cena, ktorú je kupujúci povinný zaplatiť za možnosť uplatnenia opcie. Výplata v čase $t = T$ má tvar

$$X = (S_T - K)^+ = \max\{0, S_T - K\}.$$

Európska put opcia - je dohoda dvoch zmluvných strán, ktorá poskytuje vo vopred dohodnutom *expiračnom čase* predávajúcemu *právo* (nie povinnosť) predat' podkladné aktívum za vopred dohodnutú *expiračnú cenu*. V čase kedy je zmluva uzatvorená si zmluvné strany vymenia *opčnú prémiiu* čo je férová cena, ktorú je predávajúci povinný zaplatiť za možnosť uplatnenia opcie. Výplata v čase $t = T$ má tvar

$$X = (K - S_T)^+ = \max\{0, K - S_T\}.$$

V expiračnom čase platí, že *short* pozícia *európskej call opcie* je to isté ako *long* pozícia *európskej put opcie*.

Americká Opcia - podobne ako európska opcia i americká môže byť typu *put* alebo *call*, avšak s rozdielom že uplatnenie opcie nie je viazané výlučne na expiračný čas, ale opcia môže byť uplatnená v ľubovoľnom čase počas trvania zmluvného vzťahu.

Na oceňovanie opcií sa v praxi často používa Black-Scholesov model [2], ktorý predpokladá zjednodušenie trhových podmienok (konštantná úroková miera za ktorú je možné požičiavať si resp. ukladať neobmedzené množstvo peňazí, neobmedzný prístup k podkladnému aktívu, spojitý obchodovanie, nulové transakčné náklady).

Za týchto predpokladov platí, že existuje syntetické portfólio zložené z podkladného aktíva a bezrizikového účtu, ktoré dokonale kopíruje vývoj ceny derivátu a trh sa potom nazýva **úplný**. Ak neexistuje také portfólio, ktoré by umožňovalo simulovať vývoj ceny opcie, hovorí sa že trh je **neúplný**.

Ukazuje sa, že Black-Scholesov model je dostatočne robustný a dokáže si dobre poradiť i v podmienkach neúplného trhu [5].

1.1 Zaisťovanie portfólia pomocou derivátov

Investor obchodujúci na trhu môže pristupovať k zaisteniu svojho portfólia podľa rôznych scenárov, vo všeobecnosti sa však snaží nájsť optimálny pomer medzi očakávaným rizikom a očakávaným výnosom.

Zaisťovanie portfólia (*hedging*) môže byť založený na naivnom diverzifikovaní portfólia, či na sofistikovanejších stratégiách delta neutrality, gamma neutrality, či menej využívaných theta a vega neutralite [9].

1.1.1 Delta hedging

Delta opcie je definovaná ako miera zmeny ceny opcie spôsobená malou zmenou ceny akcie (resp. podkladného aktíva)

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Pomocou delta hedgingu sa investor zaisťuje voči malým výkyvom ceny akcie, ktoré spôsobujú zmenu hodnoty portfólia. Zaistenie portfólia sa realizuje vhodnou (opačnou) pozíciou v aktívach ktoré korelujú s portfóliom. Na zaistenie portfólia pozostávajúceho z opcie $V(t)$ treba dlhovať Δ akcií $S(t)$.

Vo všeobecnosti delta neutrálné portfólio $P(t)$ má nasledujúcu štruktúru [10]:

$$P(t) = -V(t) + \alpha(t)S(t) + B(t) \quad (1)$$

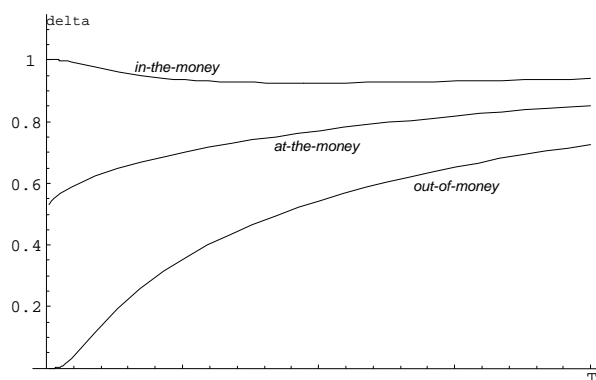
resp. ak $P(0) = 0$

$$V(t) = \alpha(t)S(t) + B(t) \quad (2)$$

kde $B(t)$ je bezrizikový účet, $V(t)$ je cena opcie a $S(t)$ je cena akcie.

Podľa rovnice (2) sa opcia $V(t)$ dá syntetizovať pomocou $\alpha(t)$ akcií $S(t)$ a bezrizikového účtu $B(t)$. Príslušné $\alpha(t)$ sa dá vypočítať derivovaním rovnice (2):

$$\alpha(t) = \frac{\partial V(t)}{\partial S(t)} = \Delta(t), \quad (3)$$



Obrázok 1: Vývoj delta v závislosti od času do expirácie, [9].

pričom tento vzťah vyplýva taktiež z eliminácie stochastického člena v Black-Scholesovej rovnici [2].

Cena podkladného aktíva sa v priebehu času mení a s ním jednak cena opcie a tiež delta opcie, čo spôsobuje že delta neutrálne portfólio ostáva zaistené len počas istého krátkého časového intervalu. Na dosiahnutie stálej delta neutrality by bolo potrebné spojitě prerovnávanie portfólia, ale to kvôli transakčným nákladom v reálnom svete nie je možné. V praxi prebieha rebalancovanie v diskretnom čase (napr. jedenkrát denne), resp. vtedy keď citlivosť portfólia (delta portfólia) dosiahne istú neakceptovateľnú úroveň [9].

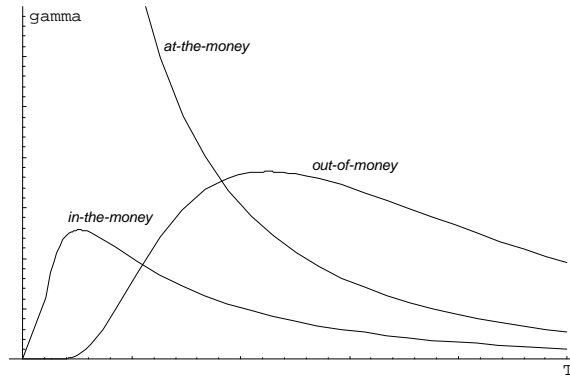
1.1.2 Gamma hedging

Cieľom gamma hedgingu je dosiahnuť odolnosť portfólia voči väčším zmenám ceny podkladného aktíva, resp. voči zmene parametra delta. Gamma portfólia (opcie) je definované ako citlivosť delty portfólia (opcie) vzhľadom na zmenu ceny podkladného aktíva

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2},$$

a tiež sa označuje ako miera krivosti portfólia (*curvature*). Udržiavaním gamma portfólia (opcie) blízko nule sa dosahuje nízka citlivosť delty portfólia vzhľadom na zmenu ceny podkladného aktíva (akcie), a teda i pri menej častom rebalancovaní sa zachováva delta neutralita. Naopak pre veľké hodnoty gamma je delta portfólia veľmi citlivá na zmenu ceny podkladného aktíva, čo spôsobuje vysoké riziko ak sa portfólio okamžite nerebalancuje.

Na dosiahnutie gamma neutrality portfólia nestačí pozícia v podkladnom aktíve, pretože gamma tejto pozície je nula a nemôže eliminovať gamma portfólia. Gamma neutralita teda vyžaduje pozíciu v inom aktíve, napríklad v



Obrázok 2: Vývoj gamma v závislosti od času do expirácie, [9].

inej opcii. Ak gamma nejakého delta neutrálneho portfólia je rovná Γ a iná obchodovaná opcia má gamma rovné Γ' , potom je možné vytvoriť nové portfólio, ktoré je rozšírené o w' pozíciu novej opcie a gamma takéhoto portfólia je potom

$$w'\Gamma' + \Gamma.$$

Gamma neutralitu je možné dosiahnuť zobchodovaním $-\frac{\Gamma}{\Gamma'}$ kusov novej opcie. Táto transakcia pokazí delta neutralitu, ale tá sa následne obnoví zobchodovaním vhodného α -počtu akcií [9].

Vo všeobecnosti gamma neutrálne portfólio $P(t)$ má nasledujúcu štruktúru [10]:

$$P(t) = -V(t) + \alpha(t)S(t) + \beta(t)I(t) + B(t) \quad (4)$$

resp. ak $P(0) = 0$, potom

$$V(t) = \alpha(t)S(t) + \beta(t) + B(t). \quad (5)$$

Príslušné $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ sa dajú vypočítať zo vzťahov

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t)}{\partial S(t)} &= \alpha(t) + \beta(t) \frac{\partial I(t)}{\partial S(t)} \\ \frac{\partial^2 V(t)}{\partial S(t)^2} &= \beta(t) \frac{\partial^2 I(t)}{\partial S(t)^2}. \end{aligned}$$

Ďalšími zaujímavými a investormi sledovanými charakteristikami (*tzv. greeks*) ktoré sa využívajú na zaistovanie portfólia sú [9]:

$$\Theta = -\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \quad \rho = \frac{\partial V}{\partial r},$$

avšak tie nie sú predmetom tejto práce.

2 Úžitková funkcia

Rozumná úžitková funkcia ktorá má opisovať správanie investora podľa jeho rizikových preferencií by mala zohľadňovať:

- investor preferuje *viac (majetku)* pred *menej (majetku)*
- investor je *rizikovo averzný*; je pozornejší na prípadné straty než na možné zisky v rovnakej výške.

Úžitková funkcia je teda rastúca a konkávna.

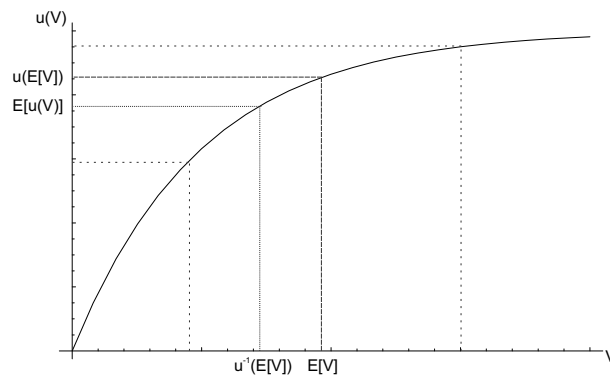
Efektívnosť resp. predpokladaná efektívnosť investovania môže byť reprezentovaná priamo hodnotou očakávaného úžitku, avšak jednoduchšie interpretovateľným meradlom je hodnota majetku, ktorá prislúcha hodnote očakávaného úžitku. Príslušná hodnota majetku sa označuje ako *certainty equivalent*

$$V^{CE} = u^{-1}E[u(V)], \quad (6)$$

a podľa Jensenovej nerovnosti platí

$$u(V^{CE}) = E[u(V)] \leq u(E[V]).$$

Rozdiel $E[V] - V^{CE}$, teda rozdiel medzi priemerným majetkom a majetkom prislúchajúcim priemernej hodnote očakávaného úžitku sa nazýva **risk premium** a vyjadruje pridanú hodnotu k bezrizikovej investícii, ktorú musí dostať rizikovo averzný investor na to, aby preferoval rizikovú investíciu pred bezrizikovou [6].



Obrázok 3: Vyhodnotenie rizikových investícií za použitia exponenciálnej úžitkovej funkcie, [6].

Pre úžitkovú funkciu je definovaná miera averzie k riziku

$$r(V) = -\frac{u''(V)}{u'(V)} = -\frac{d}{dV} \ln u'(V). \quad (7)$$

Funkcia, ktorá vyhodnocuje rozdelenie majetku V vzhľadom k jeho počiatočnému stavu V_0 má tvar

$$\frac{E[u(V)]}{u(V_0)}$$

a ak V_0 je známa bezriziková hodnota, potom

$$E\left[\frac{u(V)}{u(V_0)}\right].$$

Invariantnosť vzhľadom na počiatočný stav V_0 sa dá dosiahnuť použitím funkcie f , pre ktorú platí

$$\frac{u(V)}{u(V_0)} = f(V - V_0), \quad (8)$$

pričom sa ukazuje, že jedinou takou funkciou ktorá je tiež rastúca a konkávna je exponenciálna funkcia tvaru

$$u(V) = -e^{-AV}, \quad A > 0, \quad (9)$$

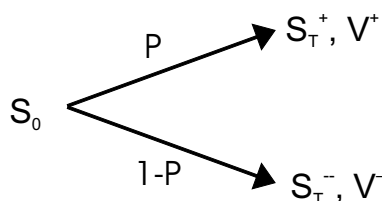
ktorá sa označuje *CARA* (*constant absolute risk aversion*). Miera averzie k riziku $r(V) = A$ nezávisí od hodnoty majetku, a preto sa nazýva *koeficient absolútnej averzie k riziku*. Podľa (8) je teda úžitok $u(V)$ odozvou na absolútnu zmenu majetku a zmena úžitku je konštantná vzhľadom na počiatočný stav V_0 [6].

Iné používané úžitkové funkcie sú napr. *CRRA-constant relative risk aversion*: $U_\gamma = \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ a zovšeobecnená *HARA-hyperbolic absolute risk aversion*: $U_{\gamma, \bar{V}}(V) = \frac{(\bar{V}+V)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ [6].

3 Oceňovanie derivátov pomocou binomického modelu

3.1 Jednoperiódový binomický model

Jednoperiódový model diskretizuje vývoj ceny akcie na časovom intervale dĺžky δt . V čase t_0 predpokladá cenu akcie S_0 a v nasledujúcom časovom okamihu $t = t_0 + \delta t = T$ umožňuje zmenu ceny akcie na hodnotu S_T , pričom pravdepodobnosť rastu na S_T^+ je p a pravdepodobnosť poklesu na S_T^- je $(1 - p)$.



Obrázok 4: Vývoj ceny akcie v jednom období

Hodnota derivátu V je v čase expirácie definovaná výplatnou funkciou, a je teda známa. Ak v čase $t = 0$ je zostavené portfólio

$$\Delta S_0 - V_0 \tag{10}$$

pozostávajúce z jednej *short* opcie V a Δ *long* akcií S , potom v prípade že cena akcie vzrastie, hodnota portfólia je $\Delta S_T^+ - V^+$ a ak cena akcie klesne, potom hodnota portfólia je $\Delta S_T^- - V^-$ [8].

Ak cieľom investora je eliminovať riziko, potom Δ volí tak, aby oba scenáre dávali rovnakú výplatu, preto

$$\Delta S_T^- - V^- = \Delta S_T^+ - V^+,$$

alebo

$$\Delta = \frac{V^+ - V^-}{S_T^+ - S_T^-},$$

čo je diskretný prípad vzťahu (3).

Za predpokladu úplného trhu sa opcia dá syntetizovať pomocou podkladného aktíva a bezrizikového účtu, a preto portfólio (10) sa správa rovnako ako bezrizikový účet. Preto ak r je úrok pre časový interval $(0, T)$, potom pore cenu opcie v čase t_0 platí

$$V_0 = \Delta S_0 - (S_T^+ - V^+)e^{-rT}.$$

Ak S_T^+ je definované ako u -násobok počiatkovej ceny S_0 , teda $S_T^+ = uS_0$ a podobne $S_T^- = dS_0$, potom cena opcie sa dá vypočítať ako diskontovaný vážený priemer výplat v expiračnom čase

$$V_0 = e^{-rT}[qV^+ + (1 - q)V^-], \quad (11)$$

kde

$$q = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \quad (12)$$

Za rozumných trhových predpokladov platí $q \in (0, 1)$, a označuje sa ako **rizikovo neutrálna pravdepodobnosť**, [8].

Z (11) vyplýva, že cena opcie nezávisí od objektívnych pravdepodobností p podľa ktorých sa mení cena akcie, ale závisí od *rizikovo neutrálnych* pravdepodobností q . Ak q je chápané ako modifikovaná pravdepodobnosť rastu ceny akcie a $q - 1$ ako modifikovaná pravdepodobnosť poklesu, potom s využitím (12) pre očakávanú cenu akcie S_T v čase T platí

$$E^q[S_T] = qS_T^+ + (1 - q)S_T^- = S_0e^{rT}. \quad (13)$$

V rizikovo neutrálnom svete teda platí, že cena akcia rastie v priemere rovnako rýchlo ako spojitý úročený bezrizikový účet [8].

3.2 Multiperiódový binomický model

Multiperiódový model je zovšeobecnením jednoperiódového, pričom sleduje vývoj podkladného aktíva cez časy $t = 0, 1, \dots, T$. Za predpokladu, že pre jednotlivé časy t sú zmeny ceny akcie rovnomerné, teda cena podkladného aktíva v každom uzle rastie alebo klesá rovnakým faktorom, počet možných stavov stromu ktorý opisuje vývoj ceny akcie sa dá značne znížiť. V každom čase t sa totiž strom rozrastá len o dve nové hodnoty, konkrétne prípad ustavičného rastu akcie od počiatku a ustavičný pokles. Ostatné stavy akcie sú jednoducho skopírované z minulosti. Takéto stromy sa nazývajú *rekombinantné* a výrazne znižujú výpočtovú náročnosť.

V multiperiódovom modeli, podobne ako v jednoperiódovom, sa cena opcie napočítava pomocou rizikovo neutrálnych pravdepodobností spätným prechodom od času expirácie T do počiatkovej času $t = 0$ cez všetky prípustné stavy ceny akcie, [3].

3.3 Definícia všeobecného multiperiódového modelu.

Všeobecný multiperiódový model je podľa [11], str.72 definovaný nasledovne:

- $T + 1$ obchodovacích časov: $t = 0, 1, \dots, T$.
- konečný výberový priestor Ω ; $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$; $K < \infty$.
- pravdepodobnostná miera P na Ω ; $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) > 0$.
- filtrácia $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t = 0, 1, \dots, T\}$.
- proces bezrizikového účtu $B = B_t$; $t = 0, 1, \dots, T$, kde B je stochastický proces s vlastnosťami $B_0 = 1$ a $\forall(\omega, t) : B_t(\omega) > 0$ definuje úrokovú mieru r_t pre časový interval $(t - 1, t)$, $t = 1, \dots, T$: $r_t = (B_t - B_{t-1})/B_{t-1} \geq 0$.
- proces N rizikových aktív $S_N = \{S_n(t), t = 0, 1, \dots, T\}$, kde S_n je nezáporný stochastický proces pre každé $n = 1, 2, \dots, N$ a $S_n(t)$ je hodnota aktíva n v čase t .

Definícia 3.1 *Filtráciou* na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa nazýva postupnosť σ -algebier $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$, pre ktorú platí $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$.

Definícia 3.2 *Stochastickým procesom* sa nazýva parametrická množina náhodných veličín $\{X(t)\}_{t \in T}$. Predpis $X = X(t, \omega)$ je zobrazením $\{0, 1, \dots, T\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pričom pre všetky fixované t je funkcia $\omega \rightarrow X(t, \omega)$ náhodná veličina a pre fixované $\omega \in \Omega$ je $t \rightarrow X(t, \omega)$ funkcia, ktorá sa nazýva výberová cesta.

Ak model stochastického vývoja ceny aktív je konzistentný s vývojom informácie ktorú má investor k dispozícii (investor v čase t pozná celý historický vývoj ceny aktíva vrátane informácie o stave v čase t), potom takýto proces sa nazýva **adaptovaný vzhľadom na filtráciu \mathcal{F}_t** , [12].

Všetky v práci uvažované procesy sú adaptované.

Pre pravdepodobnostný priestor s filtráciou $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \tau})$ je definovaná **podmienená stredná hodnota** E_t^P , ktorá je v čase t podmienená informáciou \mathcal{F}_t :

$$E_t^P[X] \equiv E^P[X|\mathcal{F}_t], \quad (14)$$

$$\tau = \{0, 1, \dots, T\}.$$

Predpoklad že Ω je konečná umožňuje opísať vývoj informácie pomocou stromu a použitím podmienenej pravdepodobnosti $E_t^P[X]$ je možné každému uzlu na informačnom strome priradiť jednu hodnotu [5].

Ďalšími dôležitými vlastnosťami modelu sú **merateľnosť**, ktorá umožňuje narábať s podmienenými pravdepodobnosťami (15) a **zákon iterovaných očakávaní** (16)

$$E_t^P[X_t Y] = X_t E_t^P[Y] \quad (15)$$

$$E_t^P[E_s^P[X]] = E_t^P[X] \quad \forall s \geq t. \quad (16)$$

4 Diskrétne zaistovanie na neúplných trhoch

4.1 Vývoj ceny opcie na neúplných trhoch

Za predpokladu úplného trhu, vývoj ceny opcie H sa dá dokonale kopírovať pomocou samofinancovaného replikačného portfólia. Na neúplných trhoch to nie je možné, avšak v špeciálnom prípade nezávislých rovnako rozdelených výnosov akcie sa dá pre H_t za pomoci rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miery (tzv. *variance optimal*) odvodiť jednoduchý vzťah. [6].

Ak Q označuje rizikovo neutrálnu mieru a P sú objektívne pozorované pravdepodobnosti, potom prechod od miery P na Q je daný vzťahmi

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dP} &= m_{1|0}m_{2|1}, \dots, m_{T|T-1} \\ m_{t+1|t} &= \frac{q_{t+1|t}}{p_{t+1|t}} = \frac{1 - a(R_{t+1} - \rho)}{b} \\ a &= \frac{E_t^P[R_{t+1} - \rho]}{E_t^P[(R_{t+1} - \rho)^2]} \\ b &= \frac{(E_t^P[R_{t+1} - \rho])^2}{E_t^P[(R_{t+1} - \rho)^2]},\end{aligned}$$

pričom $\rho = 1 + r$ a r je výnos bezrizikového účtu a R_{t+1} je očakávaný výnos akcie v čase $t + 1$.

Výplata opcie H_T spolu s rizikovo neutrálnymi pravdepodobnosťami q potom definujú proces $\{H_t\}_{t=0, \dots, T}$, ktorý sa počíta spätne od času T

$$H_t = E_t^Q \left[\frac{H_{t+1}}{\rho} \right]. \quad (17)$$

V špeciálnom prípade nezávislých rovnako rozdelených výnosov akcie a deterministickej úrokovej miery sú variance-optimal pravdepodobnosti $q_{t+1|t}$ totožné s rizikovo neutrálnymi pravdepodobnosťami v jednoperiódovom CAPM modeli. V tomto prípade je teda H_t cena opcie v CAPM modeli v príslušnom čase t , [6].

4.2 Jednoduché zaistovanie v diskretnom čase

Predpokladá sa neúplný trh s tromi druhmi aktív: akcia, opcia na akciu a bezrizikový účet s deterministickým úrokom. Cieľom je nájsť replikačné portfólio V zložené z akcie a bezrizikového účtu, ktoré by čo najlepšie kopírovalo vývoj ceny opcie H . Za týmto účelom je portfólio prerovnávané v

obchodovacích časoch $t = 1, \dots, T - 1$ tak, aby bola dosiahnutá minimálna replikačná chyba, resp. aby bol dosiahnutý maximálny úžitok zo zaistenia, [6]. Efektivita rebalancovania je meraná úžitkovou funkciou, pričom cieľom je dosiahnuť maximálny úžitok

$$\max_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\dots,T-1}} E_0^P[u(V_T - \alpha H_T^0)],$$

resp. v prípade zápornej exponenciálnej úžitkovej funkcie

$$\max_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\dots,T-1}} E_0^P[-\exp\{-A(V_T - \alpha H_T^0)\}], \quad (18)$$

čo je ekvivalentné s problémom minimalizácie replikačnej chyby

$$\min_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\dots,T-1}} E_0^P[\exp\{-A(V_T - \alpha H_T^0)\}].$$

Predpokladá sa, že v čase 0 bolo predaných α opcií za cenu C_0^0 a w_0 je počiatočný stav kapitálu. Hodnota portfólia V v čase 0 je potom

$$V_0 = w_0 + \alpha C_0^0. \quad (19)$$

Ak výnos na bezrizikovom účte je označený $\rho = 1 + r$ a S_t je cena akcie v čase t , pričom \hat{R}_{t+1} je jej očakávaný výnos v čase $t + 1$, potom nasledujúci vývoj ceny replikačného portfólia je daný vzťahom

$$V_{t+1} = \theta_t S_t \hat{R}_{t+1} + (V_t - \theta_t S_t) \rho = V_t \rho + \theta_t S_t (\hat{R}_{t+1} - \rho) = V_t \rho + \theta_t S_t \hat{X}_{t+1}, \quad (20)$$

kde $\hat{X}_{t+1} = \hat{R}_{t+1} - \rho$ je hodnota o ktorú výnos akcie prevýši výnos bezrizikového účtu. Kumulovane pre čas T platí

$$V_T = \rho^T V_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \rho^{T-t} \theta_t S_t \hat{X}_{t+1}. \quad (21)$$

Ukazuje sa, že problém (18) sa dá chápať ako úloha dynamického programovania, kde remenná θ_t predstavuje riadenie resp. $\hat{\theta}_t$ je optimálne riadenie a V_t resp. \hat{V}_t je príslušná odozva.

Veta 4.1 (Bellmanov princíp optimality), [1].

Ak $\hat{\Theta} = \{\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_j, \dots, \hat{\theta}_{T-1}\}$ a $\hat{\Psi} = \{\hat{V}_0, \dots, \hat{V}_j, \dots, \hat{V}_{T-1}\}$ je optimálne riadenie a jeho odozva pre úlohu $U_0(\hat{V}_0)$, potom pre každé $j \in [0, \dots, T - 1]$ je $\hat{\Theta}_j = \{\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_j\}$ a $\hat{\Psi}_j = \{\hat{V}_0, \dots, \hat{V}_j\}$ optimálne riadenie a optimálna odozva pre úlohu $U_j(\hat{V}_j)$.

Použitím vety (4.1) a zákona o iterovaných očakávaniach (16) je možné úlohu (18) riešiť pre každý čas t samostatne ako úlohu optimalizácie cez jednotlivé θ_t

$$\begin{aligned} & \min_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\dots,T-1}} E_0^P[\exp\{-A(V_T - \alpha H_T^0)\}] = \\ & \min_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\dots,T-2}} E_0^P[\min_{\theta_{T-1}} E_{T-1}^P[\exp\{-A(V_T - \alpha H_T^0)\}]] = \dots \end{aligned}$$

Konkrétne ak je definované

$$J_T = \exp\{-A(V_T - \alpha H_T^0)\},$$

potom

$$\begin{aligned} & \min_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\dots,T-1}} E_0^P[\exp\{-A(V_T - \alpha H_T^0)\}] = \\ & \min_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\dots,T-2}} E_0^P[\min_{\theta_{T-1}} E_{T-1}^P[J_T]] = \\ & \min_{\{\theta_t\}_{t=0,1,\dots,T-3}} E_0^P[\min_{\theta_{T-2}} E_{T-2}^P[\min_{\theta_{T-1}} E_{T-1}^P[J_T]]] = \dots \end{aligned}$$

a navyše ak pre $t=0,1,\dots,T-1$ je definované

$$J_t = \min_{\theta_t} E_t^P[J_{t+1}], \quad (22)$$

potom je možné získať rekurentný predpis, ktorý vyžaduje nájdenie optimálneho θ_t pre každý čas t samostatne. V reči dynamického programovania predstavuje J_t hodnotovú funkciu a pre daného investora je to minimálna kumulovaná replikačná chyba v čase t v zmysle použitej úžitkovej funkcie, [6].

5 Metodika

5.1 Popis problému

V práci uvažujeme tieto dostupné aktíva:

- akciu S ,
- bezrizikový účet s fixným úrokom r ,
- európske call opcie $H^i, i = 1, 2, \dots, N$ na akciu, ktoré sa navzájom líšia hodnotou strike price K^i .

O akcii S predpokladáme, že jej cena sa dá popísať zovšeobecneným multiperiódovým modelom z kapitoly 3 a pre každý časový interval $(t, t + 1)$ sa môže aktuálna cena S_t zmeniť do jedného z $2n + 1$ stavov

$$S_{t+1}^i = \hat{R}^i S_t, \quad (i = -n, -n + 1, \dots, 0, \dots, n - 1, n),$$

Vývoj ceny akcie teda môžeme opísať konečným rekombinantným stromom. Navyše predpokladáme že výnos akcie \hat{R}^i nastáva pre všetky časy t s konštantnou pravdepodobnosťou P^i .

V čase 0 sme schopní predať α kusov opcií H^i (predanú opciu budeme ďalej označovať H^0) za cenu C_0^0 , ktorá môže byť vo všeobecnosti rôzna od férovej ceny C_0^{0*} (za férovú cenu považujeme cenu vypočítanú pomocou procesu H_t z kapitoly 4.1). Takýmto predajom sa dostávame do *short* pozície, ktorú bude treba v expiračnom čase T vyrovnať kúpou α opcií H^0 za aktuálnu férovú cenu H_T^0 . Pre počiatočný stav portfólia predpokladáme vzťah (19), avšak bez ujmy na všeobecnosti môžeme položiť počiatočný stav kapitálu $w_0 = 0$ (stratégia teda nebude vyžadovať žiadne externé financovanie). Hotovosť získanú predajom opcie v čase $t = 0$ budeme investovať do dostupných aktív tak, aby sme v čase T dosiahli čo najväčší úžitok. Úspešnosť zvolenej stratégie budeme vyhodnocovať pomocou zápornej exponenciálnej úžitkovej funkcie, ktorá bola popísaná v kapitole 2.

Na zaistenie portfólia budeme využívať tieto stratégie:

- *theta zaistenie* - analógia delta hedgingu; časť aktuálneho majetku sa investuje do akcie a zvyšok je uložený na bezrizikový účet
- *dynamické theta-beta zaistenie* - analógia gamma hedgingu; časť majetku je investovaná do akcie, časť do opciea zvyšok je uložený na bezrizikový účet, pričom pozícia v akciách a opciách je dynamicky rebalancovaná.

- *statické theta-beta zaistenie* - obchodovanie so zaistovacou opciou prebieha len na začiatku a následne sa na zaistenie využíva dynamicky rebalancované portfólio zostavené z akcie a bezrizikového účtu.

Nakoľko gamma neutrálne portfólio je podľa kapitoly 1 stabilnejšie, pri *theta-beta* zaistení s využitím zaistovacej opcie by sme mali dostať vyšší úžitok než pri jednoduchšom *theta* zaistení.

V práci budeme skúmať

- vplyv koeficientu averzie k riziku A na konštrukciu optimálnej stratégie, teda na optimálne θ_t
- ak v čase 0 môžeme prediť opciu H^0 za férovú cenu, aký vplyv na optimálnu stratégiu má zmena počtu α predanej opcie
- ak máme v čase 0 na výber z viacerých opcií H_i , ktorú z nich je optimálne prediť
- aký je optimálny počet α predávaných opcií ak v čase $t = 0$ môžeme prediť opciu H^0 za cenu C^0 , ktorá je vo všeobecnosti rôzna od férovej ceny, pričom predpokladáme že následné zaistovanie prebieha optimálne

5.2 Odvodenie explicitných vzťahov

5.2.1 *Theta* zaistenie

Vychádzame zo situácie ktorá je opísaná v kapitole 4.2 a tiež 5.1. Dosađením vzťahu (20) do (22) dostávame

$$\begin{aligned}
J_{T-1} &= \exp\{-A\rho V_{T-1}\} \min_{\theta_{T-1}} E_{T-1}^P[\exp\{-A(\theta_{T-1}S_{T-1}\hat{X}_T - \alpha H_T^0)\}] \\
&= \exp\{-A\rho V_{T-1}\} \min_{\theta_{T-1}} g(T-1, S_{T-1}) \\
J_{T-2} &= \exp\{-A\rho^2 V_{T-2}\} \min_{\theta_{T-2}} E_{T-2}^P[\exp\{-A\rho\theta_{T-2}S_{T-2}\hat{X}_{T-2}\}]g(T-1, S_{T-1}) \\
&= \exp\{-A\rho^2 V_{T-2}\} \min_{\theta_{T-2}} g(T-2, S_{T-2}) \\
&\dots \\
J_{T-\tau} &= \exp\{-A\rho^\tau V_{T-\tau}\} \min_{\theta_{T-\tau}} g(T-\tau, S_{T-\tau})
\end{aligned}$$

resp.

$$J_t = \exp\{-A\rho^{(T-t)}V_t\} \min_{\theta_t} g(t, S_t), \quad (23)$$

kde $g(t, S_t)$ je funkcia, ktorú budeme numericky minimalizovať pre všetky časy t a stavy S_t a má nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} g(T-1, S_{T-1}) &= E_{T-1}^P[\exp\{-A(\theta S_{T-1} \hat{X}_T - \alpha H_T^0)\}] \\ g(t, S_t) &= E_t^P[\exp\{-A\rho^{T-t}\theta_t S_t \hat{X}_{t+1}\}g(t+1, S_{t+1})], \quad (24) \\ &\quad (t = 0, 1, \dots, T-2) \end{aligned}$$

Pre každý čas $t = 0, 1, \dots, T-1$ pôjde o jednorozmernú minimalizáciu replikačnej chyby cez množstvo akcií θ_t .

5.2.2 Dynamické *theta-beta* zaistenie

Predpokladajme že ďalším dostupným aktívom, ktoré môžeme použiť na zaistenie predanej opcie H^0 je opcia H^i . Ak očakávaný výnos tejto opcie počas časového intervalu $(t, t+1)$ ozačíme $\hat{\Upsilon}_T$, potom pre zaistovacie portfólio platí:

$$\begin{aligned} \text{v čase } t: \quad & V_t = \theta_t S_t + \beta_t H_t + (V_t - \theta_t S_t - \beta_t H_t) \\ \text{v čase } t+1: \quad & V_{t+1} = \theta_t S_t \hat{R}_{t+1} + \beta_t H_t \hat{\Upsilon}_{t+1} + \rho(V_t - \theta_t S_t \hat{X}_{t+1} - \beta_t H_t) \end{aligned}$$

Ak označíme $\hat{X}_t = \hat{R}_t - \rho$ a $\hat{Y}_t = \hat{\Upsilon}_t - \rho$, potom portfólio v čase $t+1$ má tvar:

$$V_{t+1} = \theta_t S_t \hat{X}_{t+1} + \beta_t H_t \hat{Y}_{t+1} + \rho V_t$$

a optimalizačný problém v zmysle úlohy (18) bude vyzerat nasledovne:

$$\begin{aligned} & \max_{\{\theta_t, \beta_t\}_{t=0,1,\dots,T-1}} E_0^P[-\exp\{-A(V_T - \alpha H_T^0)\}] \\ J_t &= \exp\{-A\rho^{(T-t)}V_t\} \min_{\{\theta, \beta\}} g(t, S_t), \quad (t = 0, 1, \dots, T-1), \quad (25) \end{aligned}$$

pričom pre funkciu $g(t, S_t)$ platí

$$\begin{aligned} g(T-1, S_{T-1}) &= E_{T-1}^P[\exp\{-A(\theta_{T-1} S_{T-1} \hat{X}_T + \beta_{T-1} H_{T-1} \hat{Y}_{T-1} - \alpha H_T^0)\}] \\ g(t, S_t) &= E_t^P[\exp\{-A\rho^{T-t}(\theta_t S_t \hat{X}_t + \beta_t H_t \hat{Y}_t)\}g(t+1, S_{t+1})], \quad (26) \\ &\quad (t = 0, 1, \dots, T-2) \end{aligned}$$

Pre každý čas $t = 0, 1, \dots, T-1$ pôjde o dvojrozmernú minimalizáciu replikačnej chyby cez množstvo akcií θ_t a množstvo zaistovacích opcií β_t .

5.2.3 Statické *theta-beta* zaistenie

Vychádzame z jednoduchého *theta* zaistenia a model je rozšírený o ďalšiu opciu, s ktorou sa obchoduje len v čase $t = 0$. Následné zaistenie sa realizuje len pomocou akcie a bezrizikového účtu. Optimalizačný problém bude mať podobný tvar ako v prípade *theta* zaistenia z kapitoly 5.2.1 až na funkcie J_t a $g(t, S_t)$ v čase $t = T - 1$:

$$J_{T-1} = \exp\{-A\rho V_{T-1}\} \min_{\theta_{T-1}} E_{T-1}^P[\exp\{-A(\theta_{T-1}S_{T-1}\hat{X}_T - \alpha^0 H_T^0 + \alpha^i H_T^i)\}]$$

$$g(T-1, S_{T-1}) = E_{T-1}^P[\exp\{-A(\theta S_{T-1}\hat{X}_T - \alpha^0 H_T^0 + \alpha^i H_T^i)\}].$$

Navyše časť portfólia investovaná do akcií bude zmenšená o cenu za ktorú v čase $t = 0$ nakúpime opciu H^i

$$V_0 = w_0 + \alpha^0 C_0^0 - \alpha^i C_0^i.$$

V tomto prípade sa najprv nájde optimálny počet α^0 maximalizujúci mieru úžitku v čase $t = 0$ a následne sa pre zvolenú opciu H^i nájde optimálne α^i .

5.3 Použité numerické metódy

Nájdenie optimálnych zaisťovacích stratégií v zmysle (23) resp. (25) vyžaduje minimalizáciu replikačnej chyby ktorá sa realizuje prostredníctvom funkcie $g(t, S_t)$ definovanej v (24) resp. (26). Minimalizácia funkcie $g(t, S_t)$ sa bude vykonávať spätným prechodom od času expirácie do počiatočného času vo všetkých uzloch t, S_t cez $\{\theta_t\}_{t=0}^{T-1}$, resp. $\{\theta_t, \beta_t\}_{t=0}^{T-1}$.

V oboch prípadoch *theta* i *dynamického theta-beta* zaistenia ide o lineárnu kombináciu exponenciálnych funkcií v tvare Ce^{Ax+B} , $C > 0$, a teda funkcia $g(t, S_t)$ je konvexná a bude nadobúdať minimum alebo aspoň infimum na reálnych číslach.

Na nájdenie minima budeme používať *Newtonovu metódu* a *Metódu bisekcie*.

5.3.1 Newtonova Metóda

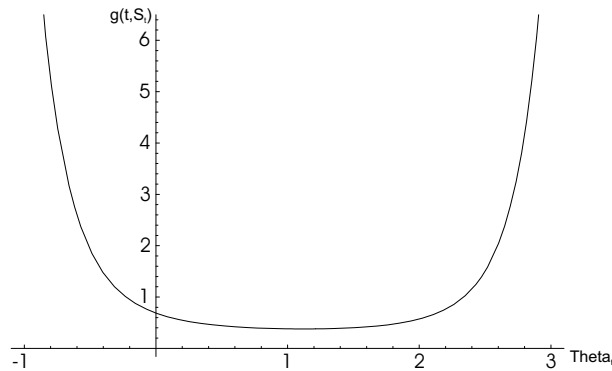
Jednorozmerná optimalizácia

Hľadáme extrém konvexnej funkcie $u(x)$, ktorý sa nachádza v bode x^* . Pre optimálne x^* platí $u'(x^*) = 0$ a pre deriváciu $u'(x)$ v bode x dostatočne blízko optima x^* z Taylorovej vety vyplýva:

$$0 = u'(x^*) = u'(x) + u''(x)(x^* - x) + o(x^2).$$

Pre zvolený počiatočný bod x^0 dostávame iteračnú schému

$$x^{t+1} = x^t - \frac{u'(x^t)}{u''(x^t)},$$



Obrázok 5: Priebeh funkcie $g(t, S_t)$ pre delta hedging keď $t = T - 1, S_t = K$

ktorá sa vykonáva až pokiaľ nie je dosiahnutá požadovaná presnosť $|\frac{u'(x^t)}{u''(x^t)}| < \epsilon$. Newtonov algoritmus má vo všeobecnosti kvadratickú zložitosť.

Vizcrozmerná Newtonova metóda

Ak je funkcia u funkciou vektorového argumentu (pre nás je prípad $theta$ zaistovania), jedna iterácia Newtonovej Metódy pozostáva z dvoch krokov:

- pre daný bod X^i nájdenie "vhodného smeru" $D(X^i)$, ktorý minimalizuje funkčnú hodnotu $u(X^i)$,
- pri danom smere $D(X^i)$, nájdenie vhodného kroku λ , ktorý minimalizuje funkčnú hodnotu $u(X^i + \lambda D(X^i))$.

Všeobecná Newtonova Metóda definuje "vhodný smer" pre daný bod X^i ako gradient $D^i = D(X^i) = \nabla u(X^i)$, teda smer najrýchlejšieho poklesu v danom bode. Následne pre smer $D(X^i)$ hľadá optimálny krok ako λ násobok smeru $D(X^i)$, ktorý minimalizuje funkčnú hodnotu $u(X^i + \lambda D(X^i))$.

V práci je použitá tiež efektívnejšia **metóda konjugovaných gradientov "Fletcher-Reeves"**[7], ktorá "vhodné smery" v jednotlivých iteráciách definuje tak, aby boli navzájom na seba kolmé:

$$D^i = -\nabla u(X^i) + w^{i-1} D^{i-1}$$

kde w^{i-1} je definované ako

$$w^{i-1} = \frac{\nabla u(X^i)^T \nabla u(X^i)}{\nabla u(X^{i-1})^T \nabla u(X^{i-1})}$$

5.3.2 Metóda bisekcie

Metóda bisekcie vychádza z faktu, že v minime x^* je derivácia $u'(x^*)$ rovná nule. Za predpokladu že funkcia $u(x)$ je konvexná a minimum má v

bode x^* , potom $u'(x)$ je rastúca a pre nejaké body x^L, x^R z definičného oboru $D(u)$ také že $x^L < x^* < x^R$ platí $u'(x^L) < u'(x^*) < u'(x^R)$. Pre zvolený bod x^M také že $x^L < x^M < x^R$ môže nastať jeden z prípadov:

$$u'(x^L) < u'(x^M) < 0 = u'(x^*) \quad (27)$$

$$u'(x^R) > u'(x^M) > 0 = u'(x^*). \quad (28)$$

Vďaka monotónnosti $u'(x)$, v prípade (27) musí platiť $x^M < x^*$. Ľavú hranicu x^L je teda možné posunúť do bodu x^M . V prípade (28) platí podobná úvaha s tým, že do bodu x^M sa posúva pravá hranica x^R . Následne sa vhodne volí nový bod $x^M \in (x^L, x^R)$ a procedúra sa opakuje až po dosiahnutie požadovanej presnosti

$$|x^R - x^L| = \epsilon.$$

Nájdeným minimom je bod $\hat{x} = \frac{x^R + x^L}{2}$, pričom dosiahnutá presnosť je $|x^* - \hat{x}| < \epsilon$.

Bod x^M je možné voliť rôzne, avšak vždy v intervale (x^L, x^R) . V práci x^M volíme tak aby platil vzťah $\frac{|x^R - x^M|}{|x^M - x^L|} = \frac{|x^M - x^L|}{|x^R - x^L|}$ ktorý je známy ako zlatý rez.

5.3.3 Metóda trisekcie

Táto metóda sa bude využívať na maximalizáciu úžitku zo zaistenia pri statickom *theta-beta* zaistení. Funkcia úžitku je konkávna (platia podobné argumenty ako pre funkciu replikačnej chyby), a preto bude nadobúdať maximum alebo aspoň supremum na reálnych číslach.

Metóda trisekcie využíva funkčné hodnoty maximalizovanej funkcie $u(x)$. Vo vhodne zvolenom intervale (x^L, x^R) , ktorý obsahuje bod extrému zvolí body x^{ML} a x^{MR} a na základe porovnania funkčných hodnôt vo zvolených bodoch posúva krajný bod x^L , resp. x^R podľa nasledujúcich pravidiel:

- Ak $u(x^L) < u(x^{ML}) < u(x^{MR}) > u(x^R)$, potom maximum leží medzi x^{ML} a x^R a posúva ľavú hranicu x^L do x^{ML} .
- Ak $u(x^R) < u(x^{MR}) < u(x^{ML}) > u(x^L)$, potom maximum leží medzi x^{MR} a x^L a posúva pravú hranicu x^R do x^{MR} .
- Ak by nastala rovnosť $u(x^{MR}) = u(x^{ML})$ posunúť je možné ľubovoľnú hranicu, pretože v takom prípade maximum leží medzi x^{ML} a x^{MR} .

Následne sa z intervalu (x^L, x^R) volia nové body x^{ML} a x^{MR} (resp. len jeden z nich) a procedúra sa opakuje až po dosiahnutie požadovanej presnosti

$$|x^R - x^L| = \epsilon.$$

Nájdeným minimom je bod $\hat{x} = \frac{x^R + x^L}{2}$, pričom dosiahnutá presnosť je $|x^* - \hat{x}| < \epsilon$.

6 Výsledky a diskusia

V experimentoch uvažujeme imaginárnu akciu s nasledovnými lognormálnymi výnosmi $\ln \hat{R}_{t+1} = \{-0.06, -0.04, -0.04, -0.02, 0.00, 0.02, 0.04, 0.06\}$, ďalej bezrizikový výnos 4% *p.a.*, teda $r = (1 + 0.04)^{\frac{1}{52}} - 1 = 7.5 \times 10^{-4}$ za jednotku času (v našom prípade 1 týždeň) a pravdepodobnosti vývoja ceny akcie - tabuľka 1:

cena na konci týždňa t	pravdepodobnosť
$S_t e^{0.06}$	0.0119976
$S_t e^{0.04}$	0.0736982
$S_t e^{0.02}$	0.230528
$S_t e^{0.00}$	0.343304
$S_t e^{-0.02}$	0.243781
$S_t e^{-0.04}$	0.0824332
$S_t e^{-0.06}$	0.0142587

Tabuľka 1: Zmena ceny akcie za jednotku času.

Definujme teraz štandardné zadanie, na ktoré sa budeme neskôr odvolávať.

$$\begin{aligned} T &= 5, \\ \rho &= 1 + r = 1.00075, \\ S_0 &= 100, \\ \ln \hat{R}_{t+1} &= \{-0.06, -0.04, -0.04, -0.02, 0.00, 0.02, 0.04, 0.06\} \\ P &= \{0.0119976, 0.0736982, 0.230528, 0.343304, 0.243781, \\ &\quad 0.0824332, 0.0142587\} \end{aligned} \tag{29}$$

Vývoj takejto akcie je znázornený na obrázku 6.

					134.98
					132.31
					129.69
				127.12	127.12
				124.61	124.61
				122.14	122.14
			119.72	119.72	119.72
			117.35	117.35	117.35
			115.03	115.03	115.03
	112.75	112.75	112.75	112.75	112.75
	110.51	110.51	110.51	110.51	110.51
	108.32	108.32	108.32	108.32	108.32
106.18	106.18	106.18	106.18	106.18	106.18
104.08	104.08	104.08	104.08	104.08	104.08
102.02	102.02	102.02	102.02	102.02	102.02
100	100	100	100	100	100
98.02	98.02	98.02	98.02	98.02	98.02
96.08	96.08	96.08	96.08	96.08	96.08
94.18	94.18	94.18	94.18	94.18	94.18
	92.32	92.32	92.32	92.32	92.32
	90.49	90.49	90.49	90.49	90.49
	88.7	88.7	88.7	88.7	88.7
		86.94	86.94	86.94	86.94
		85.22	85.22	85.22	85.22
		83.53	83.53	83.53	83.53
			81.88	81.88	81.88
			80.25	80.25	80.25
			78.67	78.67	78.67
				77.11	77.11
				75.59	75.59
				74.09	74.09
t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5

Obrázok 6: Vývoj ceny akcie pri $S_0 = 100$ a $T = 5$.

Uvažujme ďalej európsku call opciu na akciu s expiračnou cenou $K = 95$. Podľa kapitoly 4.1 môžeme vypočítať jej cenu pre časy $t = \{T, T - 1, \dots, 0\}$ a stavy S_t použitím vzťahu (17). Vývoj ceny opcie je znázornený na obrázku 7a.

Pre porovnanie, obrázok 7b ukazuje ceny opcie vypočítané pomocou Black-Scholesovho modelu:

$$H^{BS}(S, K, r, \sigma, \tau) = S\Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2}\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - e^{-r\tau}K\Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2}\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

so zadaním

$$\begin{aligned} S &= 100, & K &= 95, \\ r &= 7.5 \times 10^{-4}, & \tau &= 5 \\ \sigma &= \sqrt{\text{Var}_t^P(\ln \hat{R}_{t+1})} = 2.2486 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

K	Newtonova metóda			metóda bisekcie			Black Scholes	$\theta_0 - \delta_0^{BS}$
	θ_0^*	$u^*(V_0)$	n	θ_0^*	$u^*(V_0)$	n	δ_0^{BS}	
90	0.9542	-1.09297	205	0.9542	-1.09297	1409	0.9859	-0.0317
95	0.8083	-1.17977	170	0.8083	-1.17977	1433	0.8687	-0.0604
100	0.515	-1.3643	164	0.515	-1.3643	1424	0.5399	-0.0249
105	0.2157	-1.21047	186	0.2157	-1.21047	1449	0.1921	0.0236
110	0.0386	-1.04783	221	0.0386	-1.04783	1443	0.0363	0.0023
							<i>priemer</i>	0.02858

Tabuľka 2: Porovnanie výsledkov numerických metód pri exponenciálnom zaistení s Black-Scholesovým δ ; n = počet iterácií.

theta zaistenie						Black-Scholes delta					
t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
				0.9813	-					1.	-
				0.981	-					1.	-
				0.9811	-					1.	-
				0.9806	0.9806	-				1.	1.
				0.9803	0.98	-				1.	1.
				0.9802	0.9801	-				1.	1.
				0.9785	0.9801	0.9806	-			0.9992	0.9999
				0.9715	0.9789	0.9802	-			0.9959	0.9993
				0.9484	0.9696	0.9786	-			0.9834	0.995
				0.8663	0.8936	0.9307	0.9772	-		0.9226	0.9471
				0.7726	0.7975	0.8366	0.9197	-		0.8362	0.8653
				0.6508	0.664	0.6866	0.7363	-		0.7034	0.7228
0.515	0.5111	0.5068	0.5019	0.4964	-	0.5399	0.5357	0.5309	0.5253	0.5179	-
	0.3673	0.345	0.3117	0.2496	-		0.3613	0.3315	0.2859	0.1992	-
	0.2342	0.1992	0.1478	0.0465	-		0.212	0.1713	0.1162	0.0415	-
	0.1251	0.0871	0.0375	-0.0246	-		0.1068	0.0719	0.0342	0.0044	-
				0.0183	-0.0119	-0.0251	-			0.0242	0.0072
				-0.0132	-0.0243	-0.0256	-			0.0064	0.001
				-0.0237	-0.0261	-0.0261	-			0.0013	0.0001
					-0.0266	-0.0267	-			0.	0.
					-0.0272	-0.0272	-			0.	0.
					-0.0277	-0.0277	-			0.	0.
						-0.0283	-				0.
						-0.0289	-				0.
						-0.0295	-				0.
							-				
							-				
							-				
							-				

Obrázok 8: Porovnanie vývoja θ_t a δ_t pre $S = 100$, $K = 100$.

kého hľadiska obidve použité metódy dávali rovnako presné výsledky, rozdiel bol len v počte potrebných iterácií, pričom v tomto jednoduchom prípade bola Newtonova Metóda výrazne efektívnejšia než metóda bisekcie.

Vidíme, že θ_t je pre veľké expiračné ceny K malé a naopak, čo je v súlade s vlastnosťami δ opcie (viď kapitolu 1.1.1). Ako vidieť z obrázku 8, exponenciálna úžitková funkcia mierne podhodnocuje θ_t oproti δ^{BS} . Toto je spôsobené tým, že vypočítané θ_t je optimálne len v zmysle použitej úžitkovej funkcie, ktorá vďaka konkávnosti nadhodnocuje význam strát voči ziskom. Vo všeobecnosti sa však dá povedať, že θ má podobný priebeh ako δ vypočítané pomocou BS modelu.

Ako vidieť z tabuľky 2, najvyšší úžitok zo zaistenia je dosiahnutý pri predaji opcií *in-the-money* a *out-of-the-money*. Pri predaji opcie *at-the-money* je úžitok najnižší, čo je v súlade s intuíciou, podľa ktorej *at-the-money* opcie sú najrizikovejšie, a teda aj ich zaistenie sa bude realizovať najzložitejšie.

Model bol testovaný na invariantnosť vzhľadom na zvolenú mierku. Ako vidieť z tabuľky 3, optimálne θ_t závisí od zvolenej mierky, avšak pre rastúce hodnoty $S_0 = K$, teda pre presnejšiu mierku, sa optimálne θ_0 ustaluje. Taktiež podľa obrázku 9, priebeh θ_t sa viac podobá na priebeh δ_0^{BS} ak je použité presnejšie škálovanie, čo je však zaplatené vyššiou výpočtovou zložitou v prípade Newtonovej metódy. Metóda bisekcie týmto nedostatkom netrpí.

$S_0 = K$	θ_0	$u^*(V_0)$	V_0^{CE}	n^{NM}	n^{MB}
10	0.3102	-0.996749	0.00326	128	1446
50	0.4932	-1.07612	-0.07336	139	1446
100	0.515	-1.3643	-0.310645	164	1424
500	0.5314	-931.982	-6.83731	374	1464

Tabuľka 3: Porovnanie optimálnej θ stratégie pre *at-the-money* opciu vzhľadom na zvolenú mierku. Optimalizácia pomocou Newtonovej metódy a metódy bisekcie.

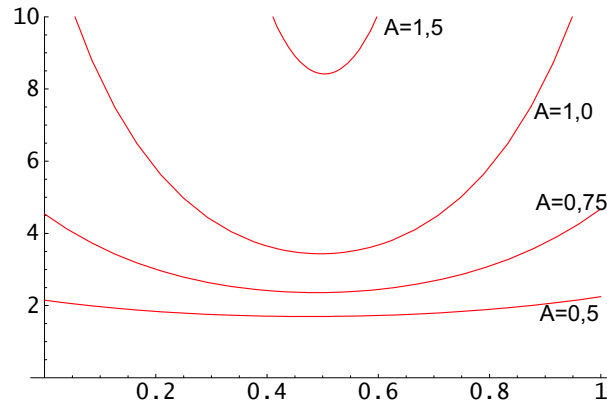
6.2 Vplyv koeficientu A na voľbu optimálnej stratégie

Podľa [6] by koeficient absolútnej averzie k riziku A nemal kvalitatívne meniť charakter optimálnej stratégie θ_t . Presnejšie, pre rôzne A by malo byť θ_t škálované koeficientom $\frac{1}{A}$.

Uvažujme štandardné zadanie (29) a navyše:

$$A = \{0.1, 0.5, 1, 5, 10, 100\} \quad K = 100, \quad \alpha = 1$$

Optimálnu stratégiu θ_t budeme hľadať pomocou Newtonovej metódy (NM) a metódou bisekcie (MB).



Obrázok 10: Priebek replikačnej chyby pre $t = T - 1$, $S = 100$, $K = 100$, $A = 0.5, 0.75, 1, 1.5$.

úžitku zo zaistenia strmší, čo vyjadruje striktnejšiu voľbu optimálnej stratégie v prípade vyššej averzie k riziku, ale tiež vyššiu hodnotu minimálnej dosiahnuteľnej replikačnej chyby.

Navyše hodnota úžitku je vyššia než -1 (ekvivalentne $V^{CE} > 0$) len pre $A = 0.1$, a teda len v tomto prípade poskytuje zaistovacia stratégia zisk oproti situácii kedy by sa celá hotovosť získaná predajom opcie H^0 vložila na bezrizikový účet. Toto zistenie taktiež korešponduje s intuitívnym chápaním averzie k riziku, kedy investícia do rizikových aktív sa realizuje len vtedy ak má investor dostatočne malú averziu k riziku.

K	θ_0^*	$u^*(V_0)$	V_0^{CE}	n^{NM}	n^{MB}
90	0.8156	-2.18693×10^{30}	-1.3972	4911	1466
100	0.5371	-3.44371×10^{71}	-3.2944	3370	1454
110	0.2607	-3.2642×10^{39}	-1.81968	5850	1423

Tabuľka 5: Porovnanie metód výpočtu optimálneho θ_0 , pre rôzne expiračné ceny pri zvolenom koeficiente averzie k riziku $A = 50$.

Z numerického hľadiska zisťujeme (tabuľky 4 a 5), že Newtonova Metóda sa s rastúcim A stáva menej efektívnou oproti metóde bisekcie, a to pre opcie ktoré sú *in-the-money*, *at-the-money* i *out-of-money*.

6.3 Vplyv počtu predaných opcií α na voľbu optimálnej stratégie

Uvažujme štandardné zadanie (29) a navyše:

$$A = 1 \quad K = 100, \quad \alpha = \{-5, -1, -0.5, -0.1, 0.1, 0.5, 1, 5\}$$

Z tabuľky 6 vidieť, že model α dostatočne vzdialené od nuly zachováva invariantnosť vzhľadom na počet predaných opcií. Výsledky pozorovania jednotkového θ_t majú podobný charakter ako pozorovanie zmeny A a presnosti mierky a navyše pre kladné α taktiež v tomto prípade s rastúcim počtom α rastie i θ_0 .

Čo je však dôležitejšie, z tabuľky 6 vidíme, že úžitok sa maximalizuje (ekvivalentne V^{CE} je väčšie než nula) len pre α blízke nule, a preto sú veľmi vysoké či veľmi nízke hodnoty α v podstate nezaujímavé.

α	θ_0^*	$u^*(V_0)$	V_0^{CE}	n^{NM}	n^{MB}	θ_0^*/α
-5	-2.9213	-142.658	-4.96045	1211	1594	0.5843
-1	-0.5685	-1.28551	-0.25115	483	1382	0.5685
-0.5	-0.2946	-1.05999	-0.05826	389	1356	0.5892
-0.1	-0.0772	-0.994783	0.00523	321	1259	0.772
0.1	0.031	-0.99675	0.00326	271	1229	0.31
0.5	0.2466	-1.07607	-0.07331	218	1335	0.4932
1	0.515	-1.3643	-0.31065	164	1424	0.515
5	2.656	-927.872	-6.83289	962	1611	0.5312

Tabuľka 6: Porovnanie optimálnej zaistovacej stratégie v čase 0, pre rôzne α .

Z numerického hľadiska sa ukazuje (tabuľka 6), že zatiaľ čo metóda bisekcie si udržiava približne rovnakú zložitosť bez ohľadu na voľbu α , náročnosť Newtonovej metódy rastie proporcionálne s α vzdalujúcim sa od nuly. Pre α blízke nule, a teda v prípadoch, ktoré sú pre nás zaujímavé, je však NM výrazne efektívnejšia.

6.4 Hľadanie optimálneho α

Vychádzajúc zo štandardného zadania (29) a zistení z predchádzajúcej kapitoly konštatujeme, že optimálne α pravdepodobne nebude rovné 1, ako sme dosiaľ pri analýze modelu uvažovali. Z tabuľky 6 vidno, že vo zvolenom prípade sa maximum realizuje pravdepodobne v intervale $\alpha \in (-0.1, 0.1)$, pretože hodnoty α mimo tohoto intervalu menšie poskytujú menší úžitok.

Úžitok zo zaistenia v čase $t = 0$ je definovaný pomocou

$$u_0(V) = \exp\{-A\rho^T \alpha C_0^0\} g^*(0, S_0). \quad (30)$$

Koeficient α však vystupuje aj vo funkcii replikačnej chyby $g(t, S_t)$ v čase $T - 1$, čo znamená, že pre rôzne α sa proces θ_t správa rôzne a vzťah (30) nie je možné jednoducho minimalizovať v čase $t = 0$.

Ak vezmeme do úvahy, že $u_0(V)$ závisí od $\{\theta_t(\alpha), \alpha\}$, potom vhodným vyhladávacím algoritmom môžeme voliť α pre ktoré známym postupom nájdeme optimálnu stratégiu $\theta_t^*(\alpha)$ poskytujúcu úžitok $u_0^*(V)$ a na základe získanej informácie o dosiahnutom úžitku môžeme upraviť odhad parametra α . Funkciu $u_0(V)$ teda môžeme chápať ako funkciu $u_0(V(\alpha))$ a pomocou vhodnej metódy môžeme nájsť optimálne α maximalizujúce úžitok. Takýmto vhodným algoritmom môže byť napríklad metóda trisekcie.

Optimálne α bolo hľadané s presnosťou $\epsilon = 10^{-3}$. Dosiahnuté výsledky sú uvedené v tabuľke 7.

K	α^*	$u_0(V(\alpha^*))$	$V^{CE}(\alpha^*)$	n
90	-R	-	-	-
95	-0.1664	-0.989941	0.01011	35510
99	-0.0281	-0.992659	0.007368	32751
100	-0.0164	-0.992771	0.007255	32431
101	-0.0138	-0.992801	0.007225	32342
105	-0.003	-0.992848	0.007177	32106
110	0.0026	-0.99285	0.007176	32037

Tabuľka 7: Optimálne α , pre rôzne hodnoty K^i .

Vidíme, že optimálne α je výrazne menšie než 1. Takáto voľba koeficientu α poskytuje maximálny úžitok, pritom vyšší úžitok sa dosahuje pre opcie s nižšou expiračnou cenou a nižší úžitok sa dosahuje pre opcie s vysokou expiračnou cenou. Taktiež hodnota V^{CE} napovedá, že pri vhodne zvolenom α je skutočne efektívnejšie opcie obchodovať než vložiť peniaze na účet, pretože

obchodovanie s opciami je spojené s očakávaním zisku. Tiež je zjavné, že vo väčšine prípadov ($K = 90, \dots, 105$) opciu H^0 v čase $t = 0$ nepredávame ale kupujeme a jedine v prípade $K = 110$ je optimálne skutočne opciu predať. V prípade opcie s expiračnou cenou $K = 90$ sa optimálne α realizovalo pre veľmi malé čísla, čo znamená, že opcia bola podhodnotená a preto bolo optimálne kupovať veľké množstvo tejto opcie, nakoľko táto stratégia poskytovala arbitrážnu príležitosť.

Vo všeobecnosti z tabuľky 7 vidno, že až na opciu s expiračnou cenou $K = 110$ boli všetky opcie podhodnotené, pretože optimálne bolo tieto opcie kupovať. Na druhej strane opciu s expiračnou cenou $K = 110$ bolo optimálne predávať.

Na základe týchto zistení sa ukazuje, že strednohodnotový H_t proces z kapitoly 4.1 neoceňuje opcie správne vzhľadom na použitú úžitkovú funkciu. Platí totiž, že opciu ktorá nie je nadhodnotená ani podhodnotená, nie je výhodné ani kupovať ani predávať, pretože neposkytuje žiadny dodatočný zisk, [4].

6.5 Optimálne α pre nadhodnotenú a podhodnotenú opciu

V tejto kapitole sa nadhodnotená a podhodnotená opcia rozumie nad-/pod-hodnotená vzhľadom na strednohodnotový H_t proces z kapitoly 4.1. Uvažujeme zadanie rovnaké ako v predchádzajúcej kapitole, pričom však budeme sledovať voľbu optimálneho α pre opciu ktorú dokážeme predať za $C_0^0 = H_0^0 + \pi$. Výsledky zobrazuje tabuľka 8.

Z tabuľky 8 sú výsledky predchádzajúcej kapitoly ešte zreteľnejšie, pričom znova ak je opcia nadhodnotená ($\pi = 0.2$), je optimálne ju predávať a ak je podhodnotená ($\pi = -0.2$), je výhodné ju kupovať. Znova čísla R označujú arbitrážnu príležitosť a táto situácia nastáva jednak pri opcii s expiračnou cenou $K = 110$, ktorej cena v prípade $\pi = -0.2$ je v podstate záporná ale tiež pre opcie s expiračnou cenou $K = 90, K = 95$.

V oboch prípadoch ($\pi = \pm 0.2$) zisťujeme, že najnižší úžitok je dosiahnutý pri obchodovaní s opciou ktorá je *at-the-money*, čo je v súlade s intuíciou, že majiteľ *at-the-money* opcie je vystavený najväčšej neistote, a teda zaistiť takúto opciu bude najzložitejšie.

Za predpokladu že platí tvrdenie: "ak investor obchoduje opcie v čase $t = 0$ za férovú cenu, potom je indiferentný ku množstvu opcií ktoré vlastní", potom pri férovej cene bude optimálne $\alpha = 0$. Ak budeme predpokladať, že závislosť medzi optimálnym α a výchylkou π od ceny H_0^0 je lineárna, po-

$\pi = 0.2$

K	H_0^0	α^*	$u_0(V(\alpha^*))$	$V^{CE}(\alpha^*)$
90	10.291	0.9995	-0.894202	0.111823
95	5.6974	0.6106	-0.941622	0.060151
99	2.8062	0.3616	-0.959275	0.041577
100	2.217	0.3158	-0.963050	0.03765
101	1.7794	0.3520	-0.959074	0.041787
105	0.5657	0.5210	-0.940520	0.061322
110	0.0828	0.9995	-0.857275	0.153997

$\pi = -0.2$

K	H_0^0	α^*	$u_0(V(\alpha^*))$	$V^{CE}(\alpha^*)$
90	10.291	-R	-	-
95	5.6974	-R	-	-
99	2.8062	-0.4783	-0.944689	0.0568999
100	2.217	-0.3766	-0.954942	0.0461044
101	1.7794	-0.4293	-0.950631	0.0506298
105	0.5657	-0.7492	-0.926051	0.076826
110	0.0828	-R	-	-

Tabuľka 8: Optimálne α , pre nadhodnotenú a podhodnotenú opciu (v zmysle H_t procesu)

tom môžeme urobiť hrubý odhadnúť pre férovú cenu opcie. Príslušné odhady zú zaznačené v tabuľke 9.

K	H_0^0	\hat{H}_0^0	H_0^{0BS}
90	10.291	-	10.3642
95	5.6974	5.7402	5.6965
99	2.8062	2.8272	2.7531
100	2.217	2.2306	2.1958
101	1.7794	1.7930	1.7172
105	0.5657	0.5668	0.5208
110	0.0828	0.08223	0.0713

Tabuľka 9: Lineárny odhad férovej ceny opcie vychádzajúci z predpokladu že $\alpha^* = 0$.

Z tabuľky 9 vidno, že férová cena v zmysle exponenciálnej úžitkovej funkcie je mierne vyššia než cena vypočítaná z BS modelu.

6.6 Dynamické *theta-beta* zaistenie.

Uvažujme štandardné zadanie (29). Nech na trhu sú k dispozícii opcie s nasledujúcimi expiračnými cenami:

$$\begin{array}{lll} K_1 = 95, & K_2 = 99, & K_3 = 100, \\ K_4 = 101, & K_5 = 105, & K_6 = 110. \end{array}$$

Na zaistenie *short pozície* jednej z dostupných opcií $H^i, i \in 1, 2, \dots, 6$, ktorú označujeme H^0 využívame okrem bezrizikového účtu a akcie taktiež niektorú z ďalších dostupných opcií. Minimalizačný problém je definovaný pomocou vzťahov (25) a (26). Na nájdenie optimálnej dvojice $\{\theta_t, \beta_t\}$ boli použité numerické metódy popísané v kapitole 5.3 a to jednak viacrozmerná NM a tiež metóda konjugovaných gradientov Fletcher-Reeves. Pre nájdenie optimálneho kroku, ktorý pre zvolený smer bolo treba hľadať v každej poditerácii, bola použitá metóda bisekcie a Newtonova metóda.

Pri numerických výpočtoch bola zvolená nasledujúca presnosť:

krok 1: výpočet gradientného smeru - $\epsilon = 10^{-5}$,

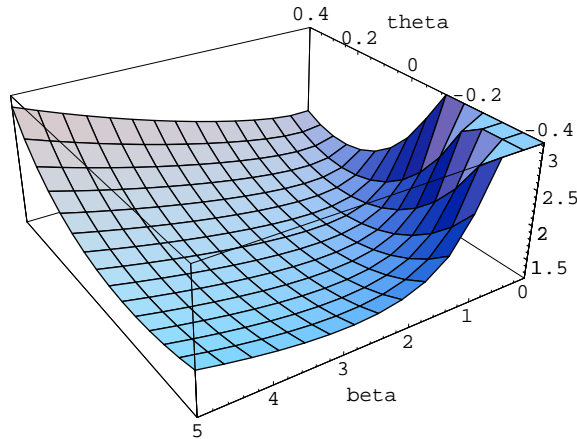
krok 2: výpočet optimálneho kroku - $\epsilon = 10^{-5}$,

Ako vyplýva z tabuľky 8, najnižší úžitok zo zaistenia je dosiahnutý pre opciu *at-the-money*, a preto skúsime na zaistenie tejto opcie využiť sofistikovanejšiu zaistovacia strategiu než *delta hedging*. V čase $t = 0$ predpokladáme predaj optimálneho počtu $\alpha^* = 0.3158$ opcie H^0 s expiračnou cenou $K = 100$ za férovú cenu \hat{H}_0^0 .

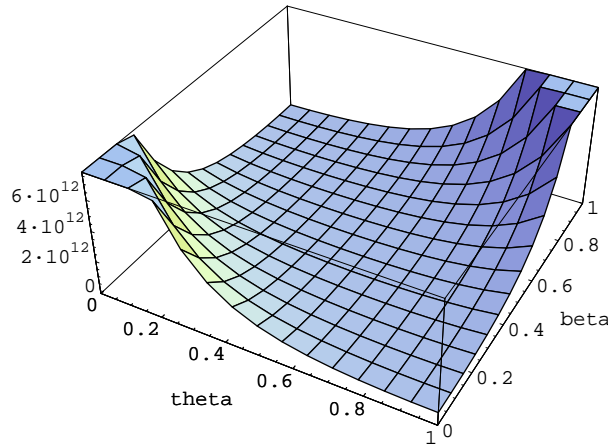
Ako ukazuje obrázok 11, v princípe ide o konvexný problém dvojrozmernej optimalizácie.

Použité numerické metódy boli ošetrené proti prípadným degeneráciám pri ktorých by niektorý z parametrov mal tendenciu ísť do nekonečna tak, že maximálny povolený počet iterácií v kroku 1 bol 500 a v druhom kroku 50 iterácií. Metóda bisekcie špeciálne identifikovala situáciu, kedy optimálny krok mal v mikroiterácii tendenciu sklzánuť do nekonečna a počet takýchto defektov je zaznačený v tabuľke 10 ako číslo *ER*.

Všetky použité metódy sa stretávali s problémami naznačujúcimi arbitrážne príležitosti. Tieto sú dokumentované v tabuľke 10 napríklad číslom *ER* pri metóde bisekcie, ale i pri ostatných metódach sa minimum často realizovalo na hranici prípustného počtu iterácií, a teda nešlo o skutočné minimum.



Obrázok 11: Priebeh replikačnej chyby pre $t = T, S = 100$.



Obrázok 12: Priebeh replikačnej chyby pre $t = T - 1, S = 127.12$. Optimálna dvojica $\{\theta, \beta\}$ leží na priamke smerujúcej do $(-\infty, \infty)$.

Všetky metódy zhodne maximalizovali úžitok pri použití zaistovacej opcie s expiračnou cenou $K = 90$, ale znova, úžitok príliš rýchlo rastúci k nule by mohol signalizovať arbitráž. Konkrétne ako vidno z obrázka 12, pre vysoké ceny akcie sa maximalizácia úžitku realizuje na diagonále $(-1, 1) - (1, -1)$ a optimálna kombinácia $\{\theta_t, \beta_t\}$ uteká do $(-\infty, \infty)$ resp. $(\infty, -\infty)$. Toto zistenie sa dá interpretovať tak, že v spomenutých prípadoch vzniká arbitráž v zmysle použitej úžitkovej funkcie a rozdiel vo výnosoch medzi akciou a zaistovacou opciou H^i poskytuje bezrizikový zisk, pričom optimálne je držať veľmi vysokú pozíciu v zaistovacej opcii ktorá je financovaná krátkou pozíciou v akciách (resp. naopak). Táto degenerácia sa prejavovala hlavne pre opcie s nízkou expiračnou cenou.

V prípade, keď sa nevyskytuje arbitrážna príležitosť, zaistenie pomocou

a) **Newtonova metóda; Newtonova metóda**

K	$\{\theta_0^*, \beta_0^*\}$	$u^*(V_0)$	V_0^{CE}	n	
95	-0.113, 0.1488	-0.652287	0.42727	12514	
99	-0.0411, 0.0411	-0.874128	0.134529	7982	
101	0.0056, 0.2976	-0.988951	0.01111	7339	
105	0.0649, 0.412	-1.00922	-0.00917771	4619	
110	0.1112, 0.8754	-1.01935	-0.0191679	3806	

b) **Fletcher-Reeves; Newtonova metóda**

K	$\{\theta_0^*, \beta_0^*\}$	$u^*(V_0)$	V_0^{CE}	n	
95	1, 0	-R	-R	-	
99	0.7028, -1.9903	-0.196655	1.62631	1019	
101	0.418, -1.2604	-0.548976	0.599701	1005	
105	0.0902, 0.1683	-0.974824	0.025498	1118	
110	0.0968, 1.2402	-1.01785	0.017697	573	

c) **Fletcher-Reeves; metóda bisekcie**

K	$\{\theta_0^*, \beta_0^*\}$	$u^*(V_0)$	V_0^{CE}	n	ER
95	-0.3576, 0.5139	-0.846417	0.166743	3735	22
99	-0.0328, 0.2732	-0.974673	0.025653	3789	14
101	0.0014, 0.3107	-0.992336	0.007694	4144	10
105	0.0703, 0.3405	-0.994572	0.005443	3905	7
110	0.0971, 1.2235	-1.01745	0.017301	3261	3

Tabuľka 10: Optimálna zaistovacia stratégia v čase $t = 0$ pri použití *theta-beta zaistenia*. Prvý názov tabuľky označuje použitú metódu v kroku 1, druhý v kroku 2.

zaistovacej opcie H^i je optimálne (β_t je nenulové) len v prípade, ak opcia H^0 je *at-the-money*. Inak zaistenie pomocou opcie H^i neprináša vyšší úžitok v zmysle použitej úžitkovej funkcie, a preto sa nerealizuje. Priebeh *theta-beta* je teda principiálne v súlade so správaním *gamma* opcie H^0 vypočítaného z Black-Scholesovho modelu (viď obrázok 13).

Porovnaním tabuliek 10 a 8 zisťujeme, že *theta-beta* stratégia, teda *gamma hedging* v zmysle použitej úžitkovej funkcie, nedáva spoľahlivo lepšie výsledky než jednoduché *theta* zaistenie. Neisté výsledky spolu v kombinácii s výskytom arbitrážnych príležitostí poskytujú dôvod na konštatovanie, že dynamické *theta-beta* zaistenie nie je optimálnou zaistovacou stratégiou.

6.7 Statické *theta-beta* zaistenie

Problémom dynamického *theta-beta* zaistenia je okrem jeho nepresvedčivých výsledkov aj jeho finančná náročnosť, pretože vznikajúce transakčné náklady prakticky zabraňujú realizácii takejto stratégie v praxi. V tejto kapitole skúsime nájsť alternatívnu stratégiu ktorá by určila optimálnu pozíciu zaistovacej opcie v čase $t = 0$ a následne by na zaistenie využívala len akciu a bezrizikový účet. Rovnako ako v predchádzajúcej kapitole, aj teraz sa budeme snažiť zaistiť opciu ktorá je *at-the-money*, pretože úžitok zo zaistenia tejto opcie je najnižší.

Uvažujme že opciu s expiračnou cenou $K = 100$ dokážeme predať za cenu $H_0^0 + 0.2$. Tejto cene prislúcha optimálne $\alpha^{0*} = 0.3158$. Cieľom teraz bude nájsť množstvo α^i opcie s expiračnou cenou $K = K^i$, ktoré treba v čase $t = 0$ kúpiť, aby očakávaný úžitok vzrástol. Na nájdenie takejto pozície využijeme rovnaký postup ako sme zvolili pri hľadaní optimálneho α^0 , pričom cenu za ktorú je možné zaistovaciú opciu kúpiť sme volili ako lineárnu aproximáciu férovej ceny v zmysle kapitoly 6.5. Výsledky sú zaznamenané v tabuľke 11.

K^i	α^i	$u^*(V_0)$	V^{CE*}
-	-	-0.963050	0.03765
90	-R	-	-
95	-0.2403	-0.956473	0.0445026
99	-0.3140	-0.939367	0.0625490
101	-0.3061	-0.939067	0.0628681
105	-0.2335	-0.954002	0.954002
110	-0.2112	-0.961334	0.0394337

Tabuľka 11: Statické *theta-beta* zaistenie.

Z tabuľky 11 vidno, že najefektívnejšie zaistenie sa dá dosiahnuť keď na zaistenie použijeme opciu s expiračnou cenou $K^i = 101$. Pri použití ľubovoľnej so skúmaných opcií (s výnimkou opcie s expiračnou cenou $K^i = 90$, pretože vtedy nastala arbitrážna príležitosť a optimálne bolo nakúpiť priveľké množstvo tejto opcie) bol však dosiahnutý vyšší úžitok než pri jednoduchom *theta* zaistení.

7 Záver

V práci sme skúmali problém dynamicky optimálneho zaistovania na neúplných trhoch, pričom efektívnosť zvolenej stratégie sme merali zápornou exponenciálnou úžitkovou funkciou. Na zaistenie sme používali jednak jednoduchú *theta* stratégiu odvodenú od *delta* zaistovacej stratégie a tiež *theta-beta* stratégiu, a to jednak dynamickú a tiež statickú, pričom obe využívajú na zaistenie ďalšiu opciu, a tým sa podobajú na stratégiu *gamma zaistenia*.

Zisťujeme, že model dynamického *theta-beta* zaistenia jednak vyžaduje poznať proces zaistovacej opcie, ktorý je vo všeobecnosti neznámy, navyše však nepodáva presvedčivé výsledky a tiež kvôli vysokým transakčným nákladom je ako zaistovacia stratégia nevhodný.

Na druhej strane statický model *theta-beta* zaistenia je v praxi implementovateľný a dáva aj oproti jednoduchému *theta* zaisteniu lepšie výsledky.

Referencie

- [1] BELLMAN, R. (1957), Dynamic Programming. *Princeton University Press*.
- [2] BLACK FISCHER, SCHELES MYRON (1973), The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.
- [3] COX, J. C., S. ROSS, M. RUBINSTEIN. (1979), Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics* 7, 229–263.
- [4] ČERNÝ, A. (1999), Minimal Martingale Measure, CAPM, and Representative Agent Pricing in Incomplete Markets.
- [5] ČERNÝ, A. (2001), Derivatives without Differentiation: Optimal Hedging on Markov Chains.
- [6] ČERNÝ, A. (2004), Mathematical Techniques in Finance, Tools for Incomplete Markets. *Princeton University Press*, 59-71.
- [7] FLETCHER R., REEVES C.M., (1964), Function minimization by conjugate gradients, *The computer Journal*, Vol. 7, 149-154.
- [8] HULL, J. C. (2003), Options, Futures and Other Derivatives. *Prentice Hall*, 200-214.
- [9] vid' [8], 299-323.
- [10] NINGYAN ZHONG, Computational Finance Project.
http://db.uwaterloo.ca/~nzhong/research/courses/cs770_project/project
- [11] PLISKA, S. R. (1997), Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models. *Blackwell Publishers*, 73-111.
- [12] SHREVE, S. (1997), Stochastic Calculus and Finance. *Technical Report, Carnegie Mellon University*,
<http://www-2.cs.cmu.edu/~chal/shreve.html>